

ECUACIONES MATEMÁTICAS DE HERTZ APLICADAS A LA VALIDACIÓN DEL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

Carlos María Rodríguez ^{1,2}, Mario Roberto Rosenberger ², Carlos Enrique Schvezov ²

¹ Laboratorio de Simulación Numérica y Ensayos Mecánicos. FI. UNaM. Oberá, Misiones.

² Instituto de Materiales de Misiones (IMAM), UNaM, CONICET, FCEQyN, Posadas, Misiones.

crodriguez@fceqyn.unam.edu.ar, rrmario@fceqyn.unam.edu.ar

Palabras Claves: Método de elementos finitos, Contacto mecánico, Ecuaciones de Hertz.

La mecánica estudia el contacto entre cuerpos elásticos, viscoelásticos o plásticos. Además, este contacto puede ser dinámico o estático. En ingeniería mecánica es de vital importancia analizar el contacto de las partes de máquinas para el diseño de sistemas mecánicos seguros y eficientes. Por eso, la mecánica del contacto tiene una gran cantidad de aplicaciones en la ingeniería como ser: sistemas de engranajes, ruedas de tren sobre un riel, rodamientos, sistema de frenos, articulaciones, juntas, entre otras.

En este trabajo se calculan los esfuerzos resultantes en la región de contacto de dos materiales elásticos, a través del método de elementos finitos. Estos resultados se comparan con las ecuaciones analíticas del modelo propuesto por Hertz, que hace las siguientes suposiciones (1,2):

- Los materiales en contacto son homogéneos y no se excede el límite elástico.
- La tensión de contacto es causada por la carga que es normal al plano tangente de contacto, lo que efectivamente significa que no hay fuerzas tangenciales que actúen entre los sólidos.
- El área de contacto es muy pequeña en comparación con las dimensiones de los sólidos en contacto.
- Los sólidos en contacto están en reposo y en equilibrio.
- El efecto de la rugosidad de la superficie es insignificante.

Las ecuaciones matemáticas que rigen el fenómeno de contacto elástico son las siguientes:

$$R^* = \frac{r_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2}$$

R^* - Radio equivalente (mm).

r_i - radio de la pieza (mm).

$$E^* = \frac{2 \cdot E_1 \cdot E_2}{E_2 \cdot (1 - \nu_1) + E_1 \cdot (1 - \nu_2)}$$

E^* - Módulo de elasticidad equivalente (MPa).

E_i - Módulo de elasticidad de la parte i (MPa).

ν_1 - Coeficiente de Poisson de la parte i .

$$a = \sqrt{\frac{8 \cdot F \cdot R^*}{\pi \cdot B \cdot E^*}}$$

a - Semiancho de contacto (mm).

F – Fuerza normal aplicada (N).
 B – Longitud del cilindro (mm).

$$p_{m\acute{a}x} = \sqrt{\frac{F_n \cdot E^*}{2 \cdot \pi \cdot B \cdot R^*}}$$

$p_{m\acute{a}x}$ – Presi3n de contacto m\acute{a}xima (MPa).

$$p = p_{m\acute{a}x} \cdot \sqrt{1 - \xi^2}$$

p – Presi3n de contacto en funci3n de ξ (MPa).

ξ – Coordenada normalizada (adimensional).

Se analizan dos sistemas de contacto no conformes: cilindro contra cilindro y cilindro contra plano, como los que se observa en la **Figura 1**. Para definir estos sistemas se realizan modelos en dos dimensiones utilizando el m\acute{e}todo de elementos finitos. **Error! No se encuentra el origen de la referencia..**

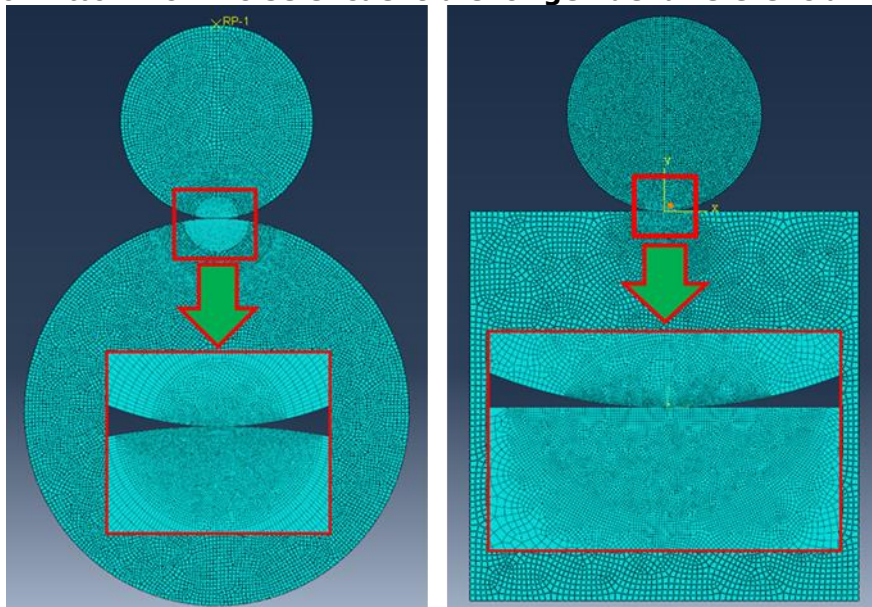


Figura 1 – Modelos de contacto, cilindro contra cilindro y cilindro contra plano. Se puede observar el detalle de la malla en las regiones de contacto.

Los materiales que se utilizaron en los modelos de contacto son los que se indican en la Tabla 1.

Tabla 1 – Propiedades de los Materiales.

Par\ametro	Acero AISI 1045	Aluminio AA6082
M3dulo de elasticidad "E" (MPa)	206000	70000
Coefficiente de Poisson "v"	0,29	0,33
Coefficiente de fricci3n	0,1	

Para cada modelo se realiz3 el an\alisis con mallas diferentes, un modelo con elementos lineales y otro con elementos cuadr\aticos, los resultados del c\alculo de la presi3n de contacto se grafican en la Figura 2.

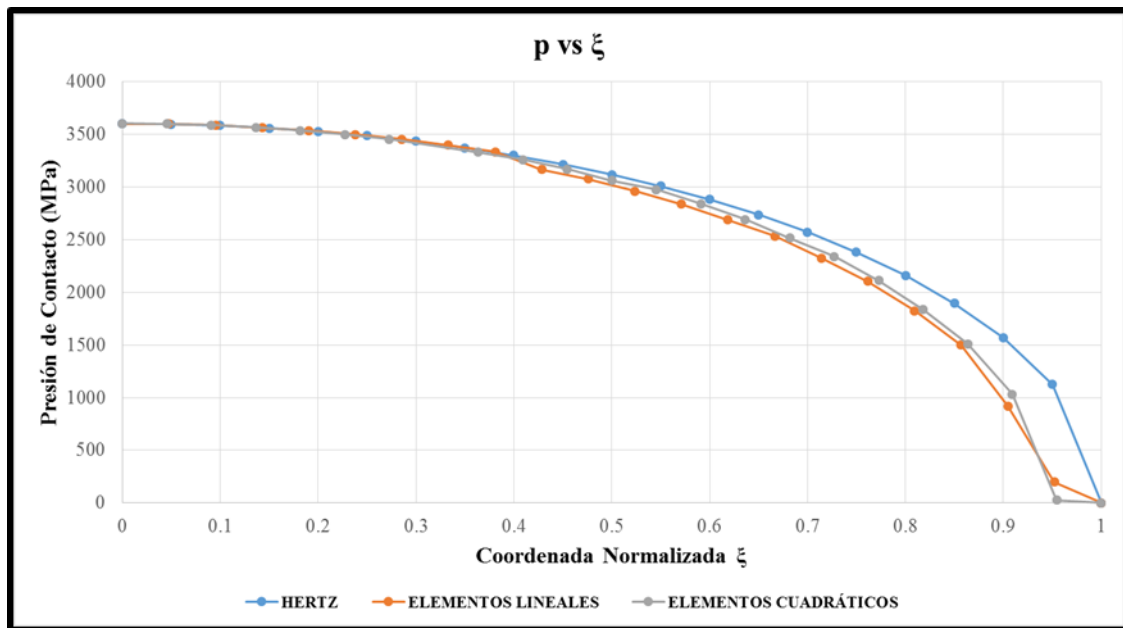


Figura 2 – Distribución de presiones de contacto en función de la coordenada normalizada.

Se puede concluir que utilizando el MEF se validaron las ecuaciones de contacto de Hertz de manera consistente para dos modelos básicos, cilindro contra cilindro y cilindro contra plano. Los errores relativos en las medidas de las presiones de contacto máximas no superan el 1%, mientras que el error relativo máximo en la medida del semiancho de contacto es menor al 2%.

Bibliografía:

- 1- G. W. Stachowiak, A. W. Batchelor; "Engineering Tribology"; Segunda Edición, ISBN 10: 0750673044/ISBN 13: 9780750673044; Capitulo 7, 281-304.
- 2- K. L. Johnson; "Contact Mechanics"; Segunda edición; ISBN 10: 0521347963 / ISBN 13: 9780521347969; 2008; Capitulo 4.