EL TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES PARA ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN: ANÁLISIS DE LAS DIFICULTADES DE LOS ALUMNOS PARA SU COMPRENSIÓN [i]

Zang Claudia; Fernández von MetzenGretel; León Natalia
Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales. Universidad Nacional de Misiones
claudiamzang@gmail.com
Investigación en Educación Matemática. Nivel universitario

Resumen: Este trabajo nace de la inquietud de un grupo de docentes de Matemáticaante las dificultades observadas para la comprensión, por parte de los estudiantes, del teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales de primer orden. Dicho teorema forma parte del Programa Analítico de la Asignatura Análisis IV de los profesorados de Matemática y de Física de la Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales dependiente de la Universidad Nacional de Misiones (FCEQyN-UNaM), que se centra en el estudio de las ecuaciones diferenciales, de los sistemas de ecuaciones diferenciales y en un estudio introductorio de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.
Este documento tiene el propósito de, por un lado, mostrar sintéticamente la perspectiva con que se aborda el estudio de dicho teorema en diferentes libros de texto sugeridos desde la Cátedra, y por el otro, la propuesta que se realiza, desde el equipo de docentes, para evaluar su aprendizaje ypor último exponer los resultados obtenidos en dicha evaluación.El análisis de las respuestas dadas por los alumnos refleja las dificultades que tienen para reconocer la estructura lógica subyacente a todo teorema, y el manejo inadecuado de los razonamientos lógicos detectado los lleva a establecer conclusiones erróneas.

INTRODUCCIÓN

En los últimos años, el equipo de Cátedra de la Asignatura Análisis IV de los profesorados en Matemática y en Física de la Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales dependiente de la Universidad Nacional de Misiones (FCEQyN-UNaM), ha detectado a partir de observaciones de clase y del análisis de las producciones de los alumnos, una serie de dificultades en lo referente al aprendizaje de las Ecuaciones Diferenciales (ED). La asignatura mencionada centra su atención en el estudio de las ecuaciones diferenciales, de los sistemas de ED y en un estudio introductorio de las ED en derivadas parciales.

Este trabajose deriva de las investigaciones que los docentes han venido realizando en el marco de un proyecto de investigación cuyo principal propósito es caracterizar en qué medida los estudiantes recurren a conocimientos adquiridos en instancias previas de su trayectoria universitaria como un recurso para los primeros aprendizajes en el ámbito delas ED.

Los autores sostienen que la perspectiva adoptada en los libros de texto puede influir en la comprensión de los estudiantes de determinados contenidos. En ellos se reflejan la concepción de la Matemática y de la enseñanza a la que adhiere el autor y, de forma indirecta, las teorías vigentes relativas a la forma en que deben presentarse los diferentes temas. Los libros, según Campanario *et al* (2000), influyensignificativamente en el aprendizaje porque, por un lado, los docentes los consultan habitualmente para orientar y dirigir muchas actividades que conforman sus propuestas áulicas y, por el otro, los alumnos los usan como material de estudio. Es por eso, que se estimó conveniente realizar un análisis preliminar de la presentación que realizan los libros de texto del teorema de existencia y unicidad (TEyU) de soluciones para ecuaciones diferenciales de primer orden.

Por otro lado, en lo referente a la enseñanza en general y de las ED en particular, los investigadores coinciden en que es posible lograr aprendizajes significativos, en términos de Ausubel *et al* (1983), recuperando los conocimientos previos de los alumnos para que éstos funcionen como anclaje de los nuevos que se espera construir. Estas premisas fueron tenidas en cuenta en la formulación de las actividades propuestas a los alumnos. Por otra parte, Artigue (1995a) señala que las dificultadas que se observan en la enseñanza del cálculo en el ámbito universitario han llevado a que, en los últimos años, se desarrollen muchos trabajos de investigación y de innovación. Sin embargo, advierte que no hay una comunicación fluida entre los investigadores debido a la diversidad de marcos teóricos que sustentan tales trabajos de investigación. Esta ausencia de un paradigma dominante, también es reconocida por otros investigadores, que además sostienen queen ciertos momentos esta diversidad puede ser enriquecedora, sin embargo el avance de la disciplina y la potenciación de sus aplicacionesprácticas demandan unificar esfuerzos para constituir un verdaderoprograma de investigación. (Godino*et al.,*2007).

Artigue *(op. cit.)*realiza una reseña de las investigaciones que se han venido realizando en los últimos años en el marco de la enseñanza del cálculo e indica algunos problemas que tienen los estudiantes para el aprendizaje de dicha área, los vincula a una comprensión incompleta de algunos conceptos, como los de número real, límite, función, etc. Entre ellas, se destacan las ligadas con la identificación de lo que es una función: plantea que se han encontrado dificultades para articular los diferentes registros simbólicos de las expresiones de la noción de función (para la conversión de un registro a otro o para trabajar dentro de un mismo registro, por ejemplo en el registro gráfico cuando se deben manejar simultáneamente dos niveles de información,sobre la función y su derivada). Esto influye, en efecto, en el abordaje de la solución de una ED dado que el proceso requiere hallar una función conocido el comportamiento de su variación.

Moreno Moreno*et al.* (2003), coinciden con Artigue y también advierten que las dificultades se ven potenciadas por el estilo de enseñanza predominante en el ámbito universitario, centrada en el enfoque algebraico y en desmedro de los enfoques cualitativos que resaltan el valor de las ED como poderosas herramientas de modelación del mundo real. Para intentar solucionar estas falencias se recomienda el estudio de las ED integrando los enfoques analítico, numérico y gráfico. Esta postura también la mantiene Habre (2000, citado por Dullius, 2009), quien además sostiene que los avances tecnológicos hicieron que el estudio de los enfoques numérico y cualitativo no tenga impedimentos.

El propósito de este trabajo es mostrar las dificultades halladas a partir del análisis de las producciones de los estudiantes, referentes al TEyU para un problema de valor inicial de primer orden. Dicho problema se extrajo de la bibliografía sugerida desde la cátedra después de haber realizado una revisión bibliográfica cuyo objeto era situar el lugar que el mismo ocupa como objeto de estudio y la importancia que se le otorga.

METODOLOGÍA

Considerando las descripciones de Bardín (1996) y Ander-Egg (2010) sobre las diferentes metodologías de investigación en Ciencias Sociales, la modalidad seguida aquí responde a un enfoque descriptivo: se usaron técnicas de análisis de contenido que posibilitaron la recopilación de datos. Éstas fueron usadas simultáneamente con las que provee la metodología de la Ingeniería Didáctica. Esta última se caracteriza por plantear un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase, diseñadas a partir de un trabajo de concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza. En la Ingeniería Didáctica es fundamental el registro de los estudios de casos y la validación, a diferencia de otros tipos de investigación, es interna y se efectúa mediante la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori. Esto, se ejecuta siguiendo las siguientes fases: 1) análisis preliminar, 2) concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas, 3) experimentación y 4) análisis a posteriori y evaluación (Artigue, 1995b).

En el marco de los análisis preliminares, de la fase de concepción y análisis a priori, se realizó un análisis epistemológico para identificar las características del saber en juego; se inspeccionó una muestra de libros escogidos intencionalmente atendiendo a un único criterio: estar sugerido en la bibliografía sugerida en el programa analítico de la asignatura antes mencionada. El propósito de dicha revisión bibliográfica era ubicar el TEyUcaracterizando la secuencia propuesta en los libros de texto, analizar la profundidad con que se lo aborda y a partir de allí inferir la relevancia que se le confiere. También, se analizaron las dificultades que presentan los estudiantes para su comprensión, detectadas a partir de observaciones áulicas de años anteriores. Se seleccionó un problema que involucra al TEyUen base a objetivos concretos prefijados por los profesores. Para finalizar estas primeras fases de la Ingeniería, se anticiparon los posibles procedimientos de resolución de los estudiantes.

La fase de experimentación consistió en la puesta en escena de la actividad elegida. En la de análisis a posteriori y evaluación, se analizaron las producciones de los alumnos (cohorte 2012) en el contexto del primer examen parcial de la asignatura mencionada. El propósito de la actividad estaba relacionado con fomentar instancias evaluativas que permitan mostrar aprendizajes no memorísticos, dado que la resolución de la situación elegida demanda la comprensión del teorema en cuestión más que su recitado; al mismo tiempo requiere prestar especial atención a la estructura lógica que subyace al teorema, puesto que un manejo inadecuado de los razonamientos lógicos por parte de los alumnos lleva al establecimiento de conclusiones incorrectas.

RESULTADOS

Según lo mencionado en líneas precedentes, como parte del análisis preliminar se realizó una revisión de la bibliografía recomendada desde la Cátedra. Como producto de tales acciones se derivan una serie de reflexiones: en general el TEyU para problemas de valor inicial de primer orden es abordado en todos los libros examinados. La secuencia seguida por los autores es similar en la mayoría de ellos: el teorema se presenta luego de haber definido la terminología específica y explicitado la simbología relativa a las ED y antes de los métodos para resolver ED de primer orden (Zill, 1997; Edwards*et al* 2001; Nagle*et al* 2001; Zill*et al* 2002). En un libro, se estudian en primer lugar las ED lineales, se enuncia y demuestra el TEyUpara éstas, luego se presentan métodos analíticos para resolver ED de primer orden y finalmente se presenta el TEyUpara problemas de valor inicial de primer orden y su demostración se deja para otra sección (Boyce*et al,* 2000). Y en el último de los libros analizados, este teorema se presenta luego de finalizado el capítulo 1 que se ocupa del estudio de los métodos analíticos de resolución de ED de primer orden (Kreyszig, 2002). Una reflexión que se deriva de este análisis es que sería más productivo e interesante poder establecer si la ED en cuestión en realidad tiene solución, antes de arremeter con la búsqueda de la misma. Es por ello que llama la atención que este teorema recién sea tratado después de que se hayan presentado los métodos de resolución analíticos.Por otra parte, en todos los libros analizados la demostración no acompaña al enunciado del teorema sino que se deja para otra sección, generalmente está en los apéndices.

El teorema en estudio fue extraído de Zill (*opcit*) y se presenta a continuación:

Resolver: $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$

Sujeta a: $y(x_0) = y_0$ **(2)**

TEOREMA 1.1 **Existencia de una solución única**

Sea R una región rectangular del plano **xy,** definida por $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, **que contiene al** punto (x_0, ya). **Si** $f(x, y)$ y $\partial f/\partial y$ son continuas en F, entonces existe un intervalo I, **centrado** en x_0, y una función única, $y(x)$ definida en I, que satisface el problema de valor **inicial** expresado por las ecuaciones (2).

Fig. 1: Teorema de Existencia y Unicidad trabajado en clase

A partir de lo observado en el transcurso de los últimos años, se infiere que la comprensión de este teorema resulta ser una ardua tarea para los estudiantes. A fin de detectar cuales son los conflictos a los que se enfrentan y obtener indicios del nivel de comprensión del teorema, se elaboró la siguiente actividad:

Demuestre que en el intervalo $[0, \pi]$ ambas funciones $y_1 = 1$ *e* $y_2 = \cos x$ satisfacen el siguiente problema de valor inicial :

$$\frac{dy}{dx} + \sqrt{1 - y^2} = 0$$

$$y(0) = 1$$

¿Por qué esto no contradice el teorema de existencia y unicidad?

Fig. 2: Actividad propuesta a los alumnos

Las cuestiones más sobresalientes que surgen del análisis realizado se discuten a continuación. El número de alumnos que realizó el examen fue de 25, de los cuales 11 lo resuelven en forma correcta y los demás lo resuelven mal pero con resoluciones que denotan diferente nivel de apropiación de los conceptos evaluados. Se puede notar que entre los alumnos que no logran una comprensión adecuada del teorema, hay cuatro que no tienen dificultades para mostrar que las funciones dadas (por sustitución) son solución de la ED, sin embargo no pueden justificar porque no se contradice el teorema. Otros citan correctamente el teorema pero identifican incorrectamente el objeto f(x,y) al que dicho teorema hace referencia, puesto que consideran toda la ecuación diferencial como dicha función.

Un alumno realiza un análisis que se limita a considerar la continuidad de la derivada de la función f(x,y) con respecto a y, en base a ello concluye que como tal derivada no es continua y se anula para y=0 (esta última cuestión señalada es totalmente ajena al TEyU), no se puede asegurar que exista una solución única al Problema de Valor Inicial (figura 3). A su vez, se puede señalar una confusión en la notación, puesto que el estudiante escribe la derivada parcial de y' con respecto a y en lugar de la derivada de f con respecto a y. Posiblemente dicha confusión tenga su origen en el hecho de que al escribir la ED en la forma $y' = f(x, y)$, y derivar ambos miembros con respecto a y se obtiene la igualdad $\frac{\partial}{\partial y} y' = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$. En caso de elegir trabajar con el primer miembro de dicha expresión, se pierde de vista la relación de dependencia que hay entre las variables x e y.

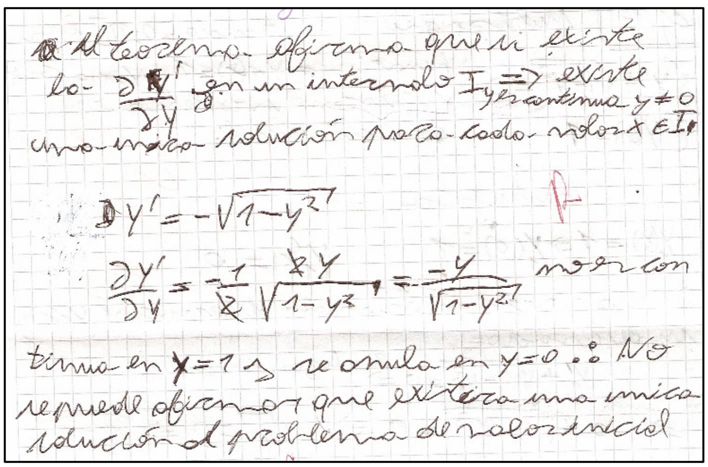
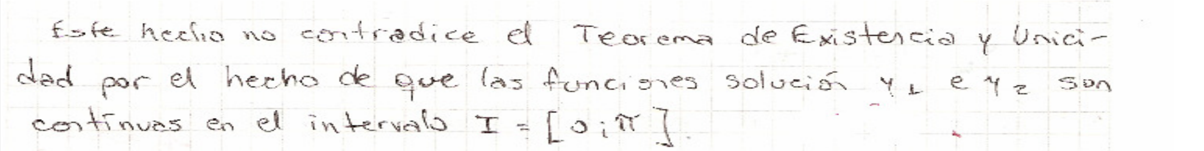


Fig. 3: El alumno no tiene claras las hipótesis del TEyU

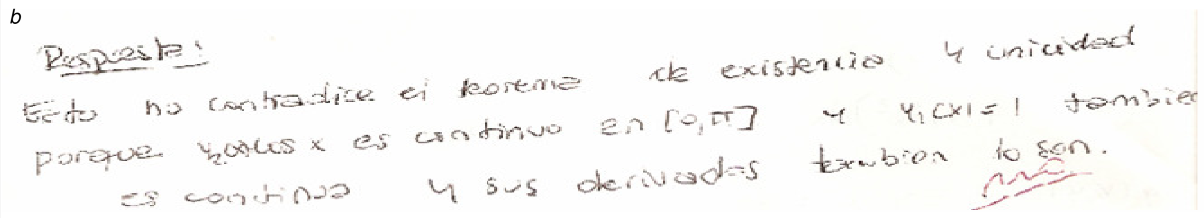
Otros alumnos analizan la continuidad de las soluciones y en base a estos análisis obtienen conclusiones sobre la existencia y unicidad de éstas, es decir, en base a la continuidad de las soluciones concluyen que éstas existen; siguiendo este razonamiento habría que hallar la solución de una ED y analizar su continuidad, pero si la solución se puede hallar es porque existe, en ese caso no tendría sentido formular un teorema. Procedimientos de esta índole se muestran en la figura 4. Es de destacar que la idea de recurrir al teorema es justamente probar que la ED tiene solución antes de emprender la tarea de resolverla. El problema principal que se infiere de estos razonamientos es que los alumnos no pueden identificar la estructura lógica que subyace al teorema, consecuentemente no pueden sacar conclusiones acertadas sobre la relación que debe existir entre la hipótesis y la tesis del mismo.

a



Este hecho no contradice el Teorema de Existencia y Unicidad por el hecho de que las funciones solución y_1 e y_2 son continuas en el intervalo $I = [0; \pi]$.

b

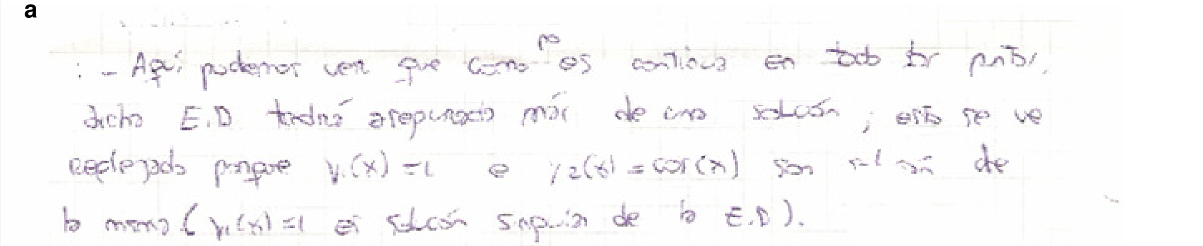


Respuesta:
Esto no contradice el teorema de existencia y unicidad porque $y_2(x)=\cos x$ es continuo en $[0,\pi]$ y $y_1(x)=1$ también es continua y sus derivadas también lo son.

Fig. 4 a) y b): Ejemplos de razonamientos incorrectos: los alumnos usan la conclusión del teorema para justificar su respuesta.

Otros dos alumnos concluyen que como la derivada de f(x,y) con respecto a y no es continua queda asegurada la existencia de más de una solución, además, uno de ellos no toman en cuenta la otra condición del teorema que tiene que ver con la continuidad de f(x,y) (Fig. 5 a). En la figura 5 b), se transcribe un fragmento del examen de uno de estos alumnos (que por razones de legibilidad no pudo ser digitalizado). En él se observa que identifica y aplica correctamente las condiciones que según el teorema en estudio, debe cumplir un problema de valor inicial a fin de tener solución única y, como no se verifica la continuidad de la derivada, concluye que debe haber más de una solución. Al mismo tiempo debemos indicar que el alumno se equivoca en la manera en que se denota un punto, el afirma que la derivada no es continua en y(0)=1, y debería haber indicado que no lo es en el punto (0,1).

a



– Aquí podemos ver que como f_y no es continua en todo los puntos, dicha E.D tendrá asegurado más de una solución; esto se ve reflejado porque $y_1(x)=1$ e $y_2(x)=\cos(x)$ son soluciones de la misma ($y_1(x)=1$ es solución singular de la E.D).

b

$f(x,y) = -\sqrt{1-y^2}$ es continua en $[0,\pi]$. Sin embargo $\frac{\partial f}{\partial \mathrm{y}} = \frac{2y}{2\sqrt{1-y^2}}$ no es continua en $\mathrm{y}(0)=1$,

por lo tanto no verifica la hipótesis del teorema de existencia y unicidad, y por ello no verificará la tesis (no tendrá solución única)

Fig.5:a) y b) Ejemplo de razonamientos incorrectos: los alumnos no toman en cuenta que el teorema establece condiciones que son suficientes pero que no son necesarias.

En realidad, el teorema asegura que la ED tendrá solución en caso de que la función f(x,y) sea continua y sólo permite asegurar la unicidad de la solución si $\partial f / \partial y$ es continua, si ésta no es continua no se puede saber si va a haber una o más de una solución.

REFLEXIONES FINALES

En base al análisis de las producciones de los estudiantes se pudo observar que, en líneas generales, la mayoría tiene problemas con la implicación lógica que subyace al problema: no visualiza que al no cumplirse las hipótesis del teorema, nada puede decirse sobre la tesis del mismo, es decir, como no se cumple la hipótesis, la tesis puede cumplirse o no, y ahí justamente está el motivo de porque no se contradice el teorema. A partir de esto, se cree que los alumnos no tienen suficientemente claro la estructura de implicación lógica que siguen los teoremas.

Así, surge también la necesidad de efectuar un análisis de las prácticas docentes y de la bibliografía que se maneja en el ámbito académico a fin de detectar si éstas realmente permiten la construcción de modelos, la utilización de conocimientos previos, la superación de obstáculos y la integración entre los diferentes contenidos matemáticos abordados a lo largo de su trayecto por la Universidad.

Este estudio se considera relevante para los objetivos del proyecto de investigación en el marco del cual fue ejecutado, que como ya se mencionó tiene por propósito caracterizar en qué medida los alumnos recurren a conocimientos adquiridos anteriormente en su trayecto por la Universidad para el aprendizaje de las ED. Claramente aquí se puede notar como tienen dificultades para trasladar a otros contextos los aprendizajes que han adquirido en el ámbito de la Lógica. Esto se puede vincular a las premisas del aprendizaje significativo, que supone que el aprender es un proceso que implica construcciones y reelaboraciones de los esquemas de conocimientos.

Si bien son múltiples los factores que influyen en el aprendizaje de diferentes conceptos, se piensa que los libros de texto pueden obstaculizar o favorecer instancias de aprendizaje. De la revisión bibliográfica realizada surge la inquietud de que en la mayoría de los textos no se enfatiza lo suficiente que el teorema establece condiciones que son suficientes pero no necesarias para la existencia de solución. En este sentido, sólo el texto de Dennis Zill (op cit) lo remarca a través de diversos ejemplos aclarando que si no se cumplen las hipótesis del teorema en cuestión, puede pasar cualquier cosa con la ED: puede tener solución o no tener; en el caso de que tenga solución, ésta puede ser única o no.

El desafío pendiente para los docentes es generar situaciones de aprendizaje que busquen en cierta forma revertir estos resultados y que posibiliten un estudio integrando los enfoques analítico, numérico y cualitativo acorde a las recomendaciones hechas por los investigadores.

Referencias Bibliográficas

Ander-Egg, E. (2010) Métodos y Técnicas de investigación social, Vol. III: Cómo organizar el trabajo de investigación. Lumen. España.

Artigue, M (1995a). La enseñanza de los principios del cálculo. En Artigue M., Douady R., Moreno L., Gómez P. Ingeniería Didáctica para la Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. Iberoamérica. México.

Artigue, M (1995b). Ingeniería Didáctica. En Artigue M., Douady R., Moreno L.,Gómez P., Ingeniería Didáctica para la Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. Iberoamérica. México.

Ausubel, D., Novak, J. & Hanesian, H. (1983). Psicología Educacional, un punto de vista cognitivo. 2da. Ed. Trillas. México.

Bardin, L. (1996) El análisis de contenido. Akal. Madrid.

Boyce, W &Diprima, R. (2000) Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4° ed. Limusa. México.

Campanario, J.M. & Otero, J. (2000). La comprensión de los libros de texto, en Perales, F.J. y Cañal, P. (eds.). Didáctica de las Ciencias Experimentales. Marfil. España: Alcoy. pp. 323-338

Dullius, M. (2009). Enseñanza y aprendizaje en ecuaciones diferenciales con abordaje gráfico, numérico y analítico. Tesis doctoral. Burgos

Edwards, H. & Penney, D., (2001) Ecuaciones diferenciales. Prentice Hall. México.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39*, 127-135.

Kreyszig, E. (2003) “Matemáticas avanzadas para Ingeniería”. Vol I . 3° ed. Limusa. México.

Nagle, K.; Saff E. & Snider, A. (2001) Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. Addison Wesley. México.

MorenoMoreno, M. & Azcárate Giménez, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales en Revista Enseñanza de las Ciencias, 21 (2). 265-280.

Zill, D. (1997). Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado. Thomson, México.

Zill, D. & Cullen, M. (2002). Ecuaciones Diferenciales con problemas de valores en la frontera. Thomson. México

---

[i] Una versión preliminar de este trabajo fue presentado con el título: “Dificultades de los alumnos para la comprensión del teorema de Existencia y Unicidad” en las Jornadas Científico Tecnológicas que organizó la Secretaría de Ciencia y Técnica de la Universidad Nacional de Misiones del 15 al 17 de mayo de 2013 por los mismos autores.