



Significados que los estudiantes de ingeniería otorgan al concepto de diferencial

Meanings that engineering students give to the differential concept

Manuel Alejandro Verón^{1*}, Belen Giacomone² y Margarita del Carmen Benítez¹

¹Universidad Nacional de Misiones, Departamento de Matemática, Avenida Fernando Elias Llamosas 9400, N3304 Posadas, Misiones, Argentina.

²Università della Repubblica di San Marino, Departamento de Ciencia, Contrada Omerelli, 20, 47890 Città di San Marino, San Marino.

*Corresponding author:
alejandроверон@fceqyn.unam.edu.ar

Resumen: En este trabajo se presentan los significados que otorgan estudiantes de ingeniería al concepto de diferencial. Para recabar los datos, se diseñó y aplicó un cuestionario a 67 futuros ingenieros durante el año académico 2021. Las respuestas obtenidas se analizaron utilizando herramientas teóricas-metodológicas del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. En particular, aplicamos el modelo ontosemiótico de los significados del diferencial, modelo que ofrece una visión sistémica pragmática de tal concepto, identificando las prácticas, lenguajes, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos que engloban y caracterizan a un significado. Los resultados muestran que el significado parcial predominante es el diferencial de Leibniz. Se considera importante que el formador de ingenieros conozca la diversidad de significados

parciales del diferencial junto con sus interconexiones y plantee situaciones problemas que movilicen tales significados en los cursos de cálculo.

Palabras claves: diferencial, significados, estudiantes de ingeniería, enseñanza del cálculo.

Abstract: The meanings that engineering students give to the concept of differential are presented. To collect the data, a questionnaire was designed and applied to 67 future engineers in 2021. To analyze the answers obtained, theoretical-methodological tools of the Onto-semiotic Approach (OSA) of mathematical knowledge and instruction were used. In particular, we apply the onto-semiotic model of the meanings of the differential, a model that offers a pragmatic systemic vision of such a concept, identifying the practices, languages, definitions, propositions,

procedures and arguments that encompass and characterize a meaning. The results show that the predominant partial meaning is the Leibniz differential. It is considered important for the engineering educator to know the diversity of partial meanings of the differential along with their interconnections and to identify problem situations that mobilize such meanings in calculus courses.

Keywords: differential, meanings, engineering students, calculus' teaching.

I. INTRODUCCIÓN

El concepto de diferencial de una función es central en la currícula de diversas carreras universitarias. En la formación de ingenieros se considera un concepto fundamental en el estudio del cálculo. Las dificultades asociadas al aprendizaje de este concepto han sido reportadas por varias investigaciones donde indican que se presentan deficiencias en estudiantes y profesores, y también en cursos de diversas carreras de ingeniería, física, matemática y ciencias experimentales (Frank y Thompson, 2021; Gómez, 2019; Hu y Rebello, 2013; López-Gay y Martínez Torregrosa, 2005; Oldenburg, 2016).

En la formación de ingenieros el uso del diferencial se encuentra principalmente en su papel modelizador de relaciones y fenómenos de cambio (Dray y Monogue, 2010; López-Gay et al., 2015). Diversas investigaciones plantean que una de las dificultades para la comprensión del concepto proviene de sus múltiples usos en las ingenierías, física, matemática y en las ciencias experimentales, planteando una diversidad de significados, producto de su evolución histórica (Gómez, 2019; Martínez-Torregrosa et al., 2002). Por otro lado, los diversos contextos de uso y los sentidos que van construyendo los estudiantes en cada situación-problema hace que surjan diferentes conflictos cognitivos (Martínez Uribe et al., 2017; Jones, 2015; Von Korff y Rebello, 2014). Esta situación se agrava en el momento en que se les solicita que expliquen expresiones vinculadas al diferencial; así, la diversidad de nociones interconectadas (definiciones, términos, expresiones) hace que no quede claro qué es el diferencial y para qué se lo utilizan (Ely, 2021).

Un aspecto importante del concepto de diferencial que destaca Gómez (2019) es la representación simbólica y su implicación con los conceptos de derivada, integral y

ecuaciones diferenciales; claros ejemplos son las expresiones $dy = f'(x)dx$,

$$\frac{dy}{dx} = f'(x), f(x, y)dx + g(x, y)dy = 0, \int f(x)dx$$

, en las que se ponen en juego distintos significados de la diferencial, pudiendo ocasionar dificultades educativas (Burgos et al., 2021), Ely, 2017; Jones, 2015).

Las dificultades relacionadas con la dimensión epistémica del diferencial se destacan en diversos trabajos, como Kleiner (2012), López-Gay (2001), Pulido (2010), Oldenburg (2016), Valdivé y Garbin (2008) y Autor donde se ha estudiado la evolución histórica y epistemológica del diferencial y sus conexiones con nociones como cantidad infinitamente pequeña, infinitesimal, variación infinitesimal, aproximación lineal, aproximación o estimación lineal del incremento, entre otros.

Siendo el diferencial un concepto central en el estudio del cálculo y la modelización, su tratamiento cobra importancia en carreras de ingeniería. El objetivo de este trabajo es discutir los resultados de un cuestionario aplicado para evaluar los significados parciales del diferencial que los estudiantes de ingeniería movilizan al resolver problemas en un curso de cálculo. Los mismos serán insumos para la toma de decisiones sobre prácticas didácticas futuras.

II. MARCO TEÓRICO Y MÉTODO

A. El Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS)

El Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007; 2020) es un sistema teórico que adopta una visión antropológica y pragmatista de las matemáticas.

Para el análisis de las respuestas de los estudiantes se utilizará la noción de configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos matemáticos para establecer conexiones con el modelo de significados parciales del diferencial desarrollado por Autor.

B. Prácticas matemáticas

Se define como práctica matemática a “toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a distintos contextos y problemas” (Godino, Batanero, 1994, p. 334). Un objeto matemático, desde el punto de vista

institucional se considera como un “emergente del sistema de prácticas sociales asociadas a un campo de problemas” (p. 335), y el significado de un objeto queda formado por el “sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas de las que emerge el objeto en un momento dado” (p. 338).

C. Configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos

Para analizar el significado de los conceptos matemáticos se ha desarrollado la noción de configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos que intervienen en la resolución de situaciones-problemas, las cuales son la razón de ser de la actividad matemática y de los objetos emergentes de la misma. Los objetos matemáticos son clasificados en categorías según su naturaleza y función (Godino et al., 2007, p. 132):

- lenguajes (términos, expresiones, notaciones, gráficos) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, etc.);
- situaciones-problemas (aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios);
- conceptos-definiciones (introducidos mediante definiciones o descripciones);
- proposiciones (enunciados sobre conceptos);
- procedimientos (operaciones, técnicas de cálculo);
- argumentos (enunciados para justificar las proposiciones y procedimiento deductivos o de otro tipo).

Para el concepto de diferencial, o cualquier otro concepto, se pueden encontrar diferentes definiciones ligadas a diferentes contextos de uso y situaciones-problemas, cada una de ellas constituye un significado parcial o sentido del concepto. El significado pragmático global del concepto de diferencial será, por tanto, la trama de configuraciones ontosemióticas que se puede reconstruir en las cuales dicho objeto interviene de manera clave.

D. Modelo ontosemiótico de los significados del diferencial

A partir de un estudio histórico y epistemológico de la evolución del concepto de diferencial (Autor), se ha desarrollado un modelo ontosemiótico de los significados parciales que se caracteriza por la descripción detallada de cuatro significados que describen sistemas de prácticas diferentes, que tienen

puntos de encuentro pero que en su conjunto son distintos (Autor).

A groso modo (Figura 1), el Diferencial de Leibniz se asocia con la consideración del diferencial como una cantidad infinitesimal; el Diferencial de Cauchy, se conecta con el uso de la derivada para definir al diferencial por medio de la ecuación $dy = y' dx$; el Diferencial de Fréchet, se asocia a la consideración del diferencial en situaciones problemas que involucra la estimación lineal, la linealización; y el Diferencial de Robinson se conecta los infinitesimales en el campo del análisis no estándar.

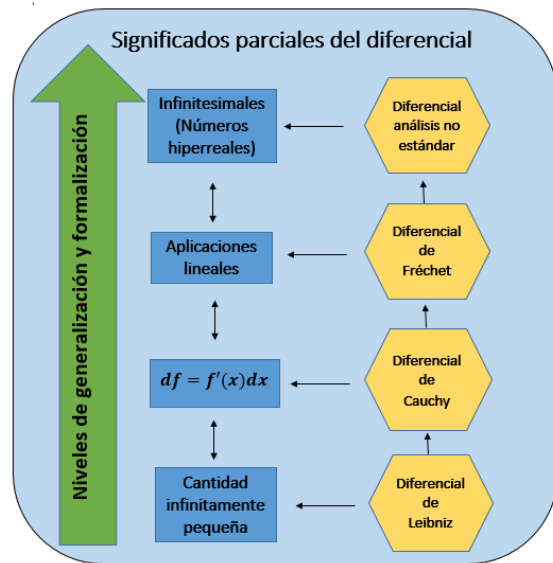


Figura 1. Modelo ontosemiótico de los significados parciales del diferencial.

Fuente: Autor (año, p. XX)

E. Método

Esta investigación es cualitativa ya que busca analizar las interpretaciones y los potenciales conflictos cognitivos que pueden surgir en el estudio del diferencial por parte de los estudiantes.

F. Contexto y participantes

Los participantes fueron 67 estudiantes del curso Análisis I, correspondiente a primer año de las carreras de Ingeniería Química, Ingeniería en Alimentos y Licenciatura en Análisis Químico y Bromatológicos, de la Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales de la Universidad Nacional de Misiones, Argentina.

Durante una clase del año 2021, se abordaron dos situaciones problemas que involucran al diferencial relacionándolo con la derivada y las integrales. Las mismas están contextualizadas en el cálculo de la masa (Salinas et al., 2012) y la velocidad (López-Gay, 2001).

Se trabajó de manera remota, sincrónica, mediante video conferencia por Google meet, debido a las medidas de distanciamiento, asumidas por la universidad, desde inicios de la pandemia por covid-19. Se utilizaron varios recursos como una presentación, pizarra digital, el diálogo y preguntas para propiciar la interacción entre estudiantes y con el docente. Los problemas se discutieron y resolvieron durante el encuentro.

Al concluir la clase de 105 min, se presentó el cuestionario, con el principal fin de recuperar las interpretaciones de los estudiantes en relación al tema tratado y, en base a eso, tomar decisiones didácticas.

G. Instrumento de recogida de datos

Los datos se recogieron mediante un formulario de Google con seis preguntas para identificar al estudiante y siete preguntas en relación al diferencial.

Las preguntas que buscan indagar sobre las interpretaciones que realizan los estudiantes en relación al diferencial y los potenciales conflictos cognitivos que pueden emerger de las mismas. Para fines del artículo, se muestran los resultados de las primeras cinco preguntas (P).

P1 ¿Qué significa el diferencial de $f(df)$?

P2 En el problema del cálculo de la Masa, ¿qué significa el diferencial de masa dM ?

P3 En el problema del cálculo de la Masa, ¿qué significa el diferencial radio dr ?

P4 En el problema del cálculo de la Masa, ¿qué significa el diferencial área dA ?

P5 ¿Cómo se calcula el diferencial?

III. RESULTADOS

A continuación, se presentan respuestas prototípicas de los estudiantes de ingeniería (E) sobre cada pregunta del cuestionario; además, se analizan los conocimientos matemáticos que caracterizan a los significados parciales personales, es decir, los movilizados por los participantes, utilizando las nociones teóricas mencionadas (Tablas 1-4).

En relación a la pregunta 1, ¿Qué significa el diferencial de $f(df)$?, se obtuvieron como respuestas:

E5: El df se define como el producto de la derivada de la función por el diferencial de la variable independiente, por lo general "x".

$$df = f'(x) dx$$

E6: Es el diferencial de una función, representa el cambio de linealización de una función

E7: el diferencial de f es el incremento de la función

E13: variaciones muy pequeñas en y

E17: La diferencial en un punto representa el incremento de la ordenada de la tangente.

E22: Razón de cambio en la función

E24: Es la derivada de f con respecto a x

E38: Una diferencia en la función

E30: El diferencial de f es cuando la variable y sufre un cambio infinitesimal.

E47: es el producto entre la derivada y el incremento de f

E52: el valor de estimación

E53: Es el producto de la derivada en ese punto por la diferencia o incremento de la variable x .

E54: el diferencial es una diferencia ínfima entre dos valores que conocemos

E56: Es un incremento (o una diferencia) muy pequeña, en este caso de f , en un intervalo

E58: significa el incremento de la ordenada de la tangente con respecto a un incremento de la variable.

Tabla 1. Configuración de significados parciales personales asociados a P1. Fuente: elaboración propia.

Práctica Matemática	Objetos y procesos matemáticos	Significado parcial asociado
E7, E13, E38, E30, E54, E56	<p>Lenguajes: natural "pequeño", "diferencia ínfima" y simbólico: "f, y"</p> <p>Conceptos: incremento, variación, función, diferencia, cambio infinitesimal, variable, valores.</p> <p>Proposiciones: "la variable y sufre un cambio infinitesimal"</p> <p>Procedimientos: "diferencia ínfima entre dos valores"</p> <p>Procesos: conceptualización del diferencial como una diferencia entre valores, como un cambio infinitesimal.</p>	Diferencial de Leibniz
E5, E47, E53, E58	<p>Lenguajes: natural, funcional y simbólico:</p> $df = f'(x) dx$ <p>Conceptos: producto, razón, función, variable independiente, derivada, diferencia, incremento.</p> <p>Proposiciones-procedimiento: cálculo del diferencial por la ecuación $df = f'(x) dx$.</p> <p>Procesos: conceptualización del diferencial como un producto entre la derivada de la función y el diferencial de la variable independiente.</p>	Diferencial de Cauchy
E6, E17,	Lenguajes: natural, geométrico y funcional.	Diferencia

E52	<p><i>Conceptos:</i> cambio, función, linealización, incremento, punto, ordenada, tangente, estimación, valor.</p> <p><i>Procesos:</i> conceptualización del diferencial como una estimación y/o como una representación del cambio de la linealización.</p>	1 de Fréchet
-----	--	--------------

Como se puede observar en la Tabla 1, es posible describir los objetos y procesos matemáticos implicados en las respuestas de los estudiantes (E) con el objetivo de asociar, a sus prácticas matemáticas, significados parciales del diferencial.

Los resultados muestran que los objetos matemáticos identificados se pueden asociar con el diferencial de Leibniz, principalmente cuando se menciona la diferencia de valores o el cambio infinitesimal. Por otro lado, algunas respuestas hacen referencia a la ecuación que relaciona el diferencial con la derivada, es decir, $df = f'(x)dx$ lo cual se asocia al diferencial de Cauchy. Por último, en menor proporción, algunas prácticas emplean los conceptos de estimación y linealización que se asocia a el significado parcial del diferencial de Fréchet.

Además, se puede advertir en las respuestas de los estudiantes potenciales conflictos de aprendizajes en relación con los significados de la derivada (Pino-Fan et al., 2011, Sánchez-Matamoros et al., 2008) como se evidencia en E22 y E24, donde se plantea que el diferencial representa la razón de cambio de la función o la derivada de la función. Este hecho tiene una cierta importancia didáctica ya que permite advertir las dificultades que plantean los autores al abordar las conexiones entre los significados de la derivada y la diferencial.

En relación a la pregunta dos: En el problema del cálculo de la Masa, ¿qué significa el diferencial de masa dM ?

E3: dM permite calcular la masa de una porción infinitesimal de la lámina circular.

E5: Es una cantidad de masa que cada vez se va haciendo más pequeña. Es el producto de la densidad que depende del radio por un pequeño diferencial de área

E14: El dM significa la variación de masa respecto a pequeñas variaciones del radio (diferencial de radio)

E22: Diferencia entre masa mayor y menor

E30: El diferencial de masa es el incremento que sufre la variable masa cuando se van tomando radios cada vez más pequeños.

E37: Una pequeña parte del valor de la masa

E46: Para poder cuantificar el cambio que se produce en la masa, se expresa mediante la diferencia de $M(r+dr) - M(r)$, denominado diferencial M .

E54: como el radio avanza una cantidad infinitesimal también avanza la masa

E56: Es una pequeña diferencia o incremento en el valor de la masa

E64: representa la razón de cambio de la masa de la lámina circular respecto al radio.

A continuación, se presenta en la Tabla 2 los objetos y procesos matemáticos que se pueden identificar en las respuestas de los E a la pregunta dos del cuestionario y las asociaciones con los significados parciales del diferencial.

Tabla 2. Configuración de significados parciales personales asociados a P2. Fuente: elaboración propia.

Práctica Matemática	Objetos y procesos matemáticos	Significado parcial asociado
E3, E5, E22, E37, E46, E54, E56	<p><i>Lenguajes:</i> natural "porción infinitesimal", "más pequeño" y simbólico "dM", "dr", "$M(r)$".</p> <p><i>Conceptos:</i> cantidad, infinitesimal, porción, densidad, masa, radio, diferencial área, lámina circular, diferencia, valores, cambio, incremento.</p> <p><i>Procedimientos:</i> "Diferencia entre masa mayor y menor", "$M(r+dr) - M(r)$"</p> <p><i>Procesos:</i> conceptualización de dM como una porción infinitesimal de masa y se establece que se calcula por medio de la diferencia $M(r+dr) - M(r)$</p>	Diferencia 1 de Leibniz
E14, E30, E64	<p><i>Lenguajes:</i> natural, funcional y simbólico</p> <p><i>Conceptos:</i> variación, razón, diferencial radio, variable, incremento, cambio función,</p> <p><i>Procesos:</i> Se establece que el dM varía respecto a el dr.</p>	Diferencia 1 de Cauchy

En la Tabla 2 se evidencia que en las respuestas de los estudiantes predominan los objetos y procesos que se relacionan con el significado parcial del diferencial de Leibniz, principalmente al considerar que la dM es una "porción infinitesimal de masa". Además, se destaca el procedimiento de cálculo donde se plantea la diferencia entre valores. En menor medida, se evidencian objetos matemáticos que se relacionan con la razón de cambio o razón de variaciones; cuyas prácticas se pueden vincular con el significado parcial del diferencial de Cauchy. En

las respuestas a esta pregunta, no se ha identificado de manera significativa alguna práctica que se relacione con el diferencial de Fréchet.

El análisis muestra que en las respuestas de los estudiantes E14, E30 y E64 hay una cierta tendencia a confundir el diferencial de masa (dM) con la derivada de la masa respecto al radio (dM/dr).

En relación a la pregunta tres, en el problema del cálculo de la Masa, ¿qué significa el diferencial radio dr ?

E3: dr es cuando avanzamos una pequeña cantidad infinitesimal de dr para que el valor de la masa cambie.

E5: Es un incremento en el radio del círculo

E14: El radio la variable independiente, de la función, su diferencial corresponde a pequeñas variaciones de r .

E17: El ancho de los anillos

E23: el aumento del radio

E24: Es el cambio de radio

E30: La diferencial radio es el incremento que sufre el radio cuando se toma otro radio muy próximo al primero, es decir cuando se avanza una pequeña cantidad. Cuando se toma un anillo con radio mayor al primero, pero la diferencia entre ambos radios es muy ínfima.

E33: dr es el valor infinitesimal que agregamos, o avanzamos, a r

E38: La diferencia que hay entre radios

E48: dr comprende la cantidad infinitesimal de r que se toma para realizar el diferencial.

E54: el diferencial radio significa la cantidad infinitesimal que avanzo el radio en la sección con área dA

E66: También significa una diferencia infinitesimal en el radio con respecto a los anillos que se van realizando en la lámina, para el cálculo de la masa.

En las respuestas de los E a esta pregunta se pueden observar los siguientes objetos y procesos matemáticos:

- *Lenguajes*: natural “pequeño”, “diferencia infinitesimal” y simbólico “ dr ”, “ dA ”
- *Conceptos*: cantidad, infinitesimal, valores, masa, incremento, radio, círculo, variable independiente, función, variación, anillos, ancho, aumento, cambio, diferencia, ínfimo y área.

- *Procedimientos*: cálculo de dr por diferencia de valores de r .
- *Procesos*: se conceptualiza al diferencial como una diferencia infinitesimal, una cantidad infinitesimal que se obtiene realizando la diferencia entre valores de r muy próximos entre sí.

En función del análisis realizado, se establece que casi la totalidad de las respuestas obtenidas de los E se caracterizan por los conocimientos matemáticos identificados, con lo cual es posible asociarlo a el significado parcial del diferencial de Leibniz, ya que se conceptualiza al diferencial radio (dr) como una cantidad o diferencia infinitesimal.

Con respecto a la pregunta cuatro, En el problema del cálculo de la Masa, ¿qué significa la diferencial área dA ?

E5: Es el producto de la derivada del área dependiente del radio por un pequeño diferencial dr

E8: Es el incremento del área

E14: Significa pequeñas variaciones del área, particularmente en el ejercicio de masa, el dA lo vimos como la diferencia entre coronas circulares, en donde si lo “estiramos” nos queda un rectángulo cuya área sería el perímetro de un círculo por el diferencial de radio (que corresponde a la variación infinitesimal del radio)

E25: La diferencial área se refiere a la sumatoria infinitesimal de áreas, cuando tomamos cada vez más valores de radio como referencia.

E30a: La diferencial área es el producto entre la derivada y el diferencial radio.

E30b: Es el área que se encuentra entre el anillo r y $r+dr$.

E31: La diferencial del área es dos pi por radio por diferencial de radio y lo obtenemos a partir de la expresión $dA = A(r+dr) - A(r)$

E37: Una pequeña porción del área total

E46: Representa la razón de cambio del área con respecto al radio.

E56: Es una pequeña diferencia o incremento en el área

E58: el cambio del área

Tabla 3. Configuración de significados parciales personales asociados a P4. Fuente: elaboración propia.

Práctica Matemática	Objetos y procesos matemáticos	Significado parcial asociado
E8, E14, E25, E30b, E31, E56, E58	<p><i>Lenguajes:</i> natural “pequeñas variaciones del área”, “sumatoria infinitesimal de área” y simbólico “dr”, “dA”, “$r + dr$”</p> <p><i>Conceptos:</i> incremento, área, variación, diferencia, corona circular, infinitesimal, diferencial radio, sumatoria, valores, porción, cambio.</p> <p><i>Procedimiento:</i> $dA = A(r + dr) - A(r)$</p> <p><i>Procesos:</i> conceptualización del diferencial área como una cantidad o variación infinitesimal del área, estableciendo para su cálculo la diferencia de valores de áreas muy próximos</p>	Diferencial de Leibniz
E5, E30b	<p><i>Lenguajes:</i> natural y simbólico “dr”,</p> <p><i>Conceptos:</i> producto, derivada, área, radio, anillos.</p> <p><i>Procedimientos:</i> se calcula haciendo el producto entre la derivada de la función área y el diferencial radio.</p> <p><i>Procesos:</i> Se establece la forma de cálculo del dA como</p> <p>$dA = A'(r)dr$</p>	Diferencial de Cauchy

En las respuestas reflejadas en la Tabla 3, los objetos matemáticos que intervienen se vinculan, en mayor medida, con el significado parcial del diferencial de Leibniz. Esto se debe a que predomina como proceso matemático la conceptualización del diferencial área como una cantidad o variación infinitesimal del área. Sin embargo, se destaca dos respuestas representativas que permiten conectar las respuestas de los E con el significado parcial del diferencial de Cauchy, porque se plantea que para el cálculo del dA se necesita la derivada de la función área.

En la respuesta del estudiante E46 se puede observar que se relaciona de manera incorrecta dA con la razón de cambio del área con respecto al radio (dA/dr). Este hecho es didácticamente significativo ya que se encuentra presente en algunas respuestas donde se establecen relaciones entre los significados del diferencial y la derivada que no son del todo ciertas y que generan dificultades para la comprensión y uso de estos conceptos en la resolución de problemas en diversos contextos, como lo plantean los autores (Badillo et al., 2005; Martínez-Torregrosa et al., 2002).

Con respecto a la pregunta 5, ¿Cómo se calcula el diferencial?

E3: Diferencial de f es igual al producto entre la derivada de f y el diferencial de x .
 $df(x) = f'(x) \cdot dx$

E5: Multiplicando la derivada de la función por un pequeño diferencial (puede ser de x , de tiempo, de radio, etc ...)

E6: La diferencial de una función es igual al producto de su derivada por la diferencial de la variable independiente

E15: Acortando los intervalos, tomando cantidades más chicas de diferencia.

E29: Acercándome lo que más se pueda al valor más pequeño en cuestión

E36: $df = f'(x) \cdot h$

E52: $f'(x_0) \cdot dx$

En la siguiente tabla se caracterizan las respuestas de los E de ingeniería según los objetos matemáticos que intervienen y se conectan con los significados parciales del diferencial de una función.

Tabla 4. Configuración de significados parciales personales asociados a P5. Fuente: elaboración propia.

Práctica Matemática	Objetos y procesos matemáticos	Significado parcial asociado
E15, E29	<p><i>Lenguajes:</i> natural “más pequeño”, “más chico”</p> <p><i>Conceptos:</i> cantidad, intervalo, diferencia, valores.</p> <p><i>Procedimientos:</i> diferencia de valores</p> <p><i>Procesos:</i> se establece que el diferencial se calcula tomando cantidades cada vez más pequeñas a partir de la diferencia de valores.</p>	Diferencial de Leibniz
E3, E5, E36, E52	<p><i>Lenguajes:</i> natural, funcional y simbólico “dx”, “df”, “dy”, “$f'(x_0)$”, “$f'(x)$”</p> <p><i>Conceptos:</i> producto, derivada, derivada en un punto, diferencial, variables independientes</p> <p><i>Procedimientos:</i></p> <p>$df(x) = f'(x) \cdot dx$</p> <p><i>Procesos:</i> se establece que el cálculo del diferencial se realiza por medio de la ecuación</p> <p>$df(x) = f'(x) \cdot dx$</p>	Diferencial de Cauchy

En la Tabla 4 se puede observar que, al preguntar a los E sobre el cálculo del diferencial, la mayoría plantea que se realiza haciendo el producto entre la derivada de la función y la diferencial de la variable independiente, es decir, $df(x) = f'(x) \cdot dx$. Cabe aclarar, que el objeto matemático que resalta en estas prácticas es la derivada y que a partir de la derivada se puede de obtener el diferencial $df(x) = f'(x) \cdot dx$. De esta manera, se puede concluir que la mayoría de las respuestas se conectan con el significado parcial de la diferencial de Cauchy.

Por otro lado, en menor medida, en algunas respuestas de los participantes intervienen objetos y procesos matemáticos vinculados a la consideración del diferencial como una cantidad infinitesimal y que se calcula tomando diferencias cada vez más pequeñas entre valores. Estas prácticas se vinculan con el significado parcial del diferencial de Leibniz.

IV. REFLEXIONES FINALES

Con el análisis de las respuestas se busca determinar cuáles son los conocimientos parciales que movilizan los estudiantes de ingeniería sobre el concepto de diferencial. Cabe aclarar que este trabajo es de carácter exploratorio y se pretende discutir la puesta en marcha de un cuestionario inicial aplicado en un momento particular para evaluar, en una primera instancia, los conocimientos matemáticos que movilizan los estudiantes de ingeniería en un curso de cálculo. Se espera que el cuestionario constituya una primera instancia de evaluación que permita al docente tomar decisiones sobre las prácticas didácticas futuras.

En el análisis de las respuestas de los estudiantes se han identificado los principales objetos matemáticos y procesos que intervienen en las prácticas personales, lo que permitió establecer conexiones con los significados parciales del diferencial (Autor). En estas conexiones se caracterizaron las interpretaciones que realizan los estudiantes sobre los diferenciales, y en ellas predomina la consideración de las cantidades infinitesimales con el procedimiento de diferencia de valores que se asocia al diferencial de Leibniz. Por otro lado, en menor medida, se plantea que el cálculo del diferencial depende de la derivada de la función y que se obtiene haciendo el producto entre la derivada de la función y el diferencial de la variable independiente, asociando estas prácticas con el significado del diferencial de Cauchy.

Por último, con muy poca presencia representativa en las 67 respuestas, el significado del diferencial de Fréchet se asocia a las prácticas que se caracterizan por utilizar conceptos como estimación, aproximación lineal, linealización, entre otras.

Como reflexión final, los resultados motivan a pensar que el formador de ingenieros debe ser capaz de crear oportunidades para que los estudiantes movilicen los distintos significados parciales del concepto de diferencial y sus interconexiones. Además, se plantea la necesidad de que el profesor sea competente en

seleccionar y diseñar tareas apropiadas y que haga referencia a una muestra representativa de los significados parciales del diferencial que deben abordar los cursos de cálculo en las carreras de ingeniería.

REFERENCIAS

- Badillo, E., Font, V., & Azcárate, C. (2005). Conflictos semióticos relacionados con el uso de la notación incremental y diferencial en libros de física y de matemática del bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias*, (Extra), 1-6.
- Burgos, M., Bueno, S., Pérez, O., & Godino, J. (2021). Onto-semiotic complexity of the Definite Integral. *Journal of Research in Mathematics Education*, 10(1), 4-40. <https://dx.doi.org/10.17583/redimat.2021.6778>
- Dray, T., & Manogue, C. A. (2010). Putting Differentials Back into Calculus. *The College Mathematics Journal*, 41(2), 90-100. <https://doi.org/10.4169/074683410X480195>
- Ely, R. (2017). Definite integral registers using infinitesimals. *The Journal of Mathematical Behavior*, 48, 152-167. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.10.002>
- Ely, R. (2021). Teaching calculus with infinitesimals and differentials. *ZDM Mathematics Education*, 53, 591-604. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01194-2>
- Frank, K., & Thompson, P.W. (2021). School students' preparation for calculus in the United States. *ZDM*, 53, 549-562. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01231-8>
- Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.
- Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, 39, 127-135. <https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1>
- Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2020). El enfoque ontosemiótico: implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la didáctica. *Revista Chilena de Educación Matemática*, 12(2), 3-15. <https://doi.org/10.46219/rechiem.v12i2.25>
- Gómez, A. (2019). A look to differential. *Journal of Physics: Conference Series. V International Conference Days of Applied Mathematics*,

- 1414, 1-7. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1414/1/012001>
- Hu, D., & Rebello, N. S. (2013). Understanding student use of differentials in physics integration problems. *Physical Review Special Topics - Physics Education Research*, 9(2), 1-14. <https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.9.020108>
- Jones, S. (2015). Areas, anti-derivatives, and adding up pieces: definite integrals in pure mathematics and applied science contexts. *Journal of Mathematical Behavior*, 38, 9-28. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.01.001>
- Kleiner, I. (2012). History of the infinitely small and the infinitely large in calculus, with remarks for the teacher. En Kleiner, I (Ed), *Excursions in the History of Mathematics* (pp. 67-101). Birkhäuser Boston. https://doi.org/10.1007/978-0-8176-8268-2_4
- López-Gay, R. L. V. (2001). *La introducción y utilización del concepto de diferencial en la enseñanza de la física. Análisis de la situación actual y propuesta para su mejora* [Tesis doctoral no publicada]. Universidad Autónoma de Madrid.
- López-Gay, R., & Martínez Torregrosa, J. (2005). Identificación de obstáculos para un uso con comprensión del cálculo diferencial en física. *Enseñanza de las ciencias*, (extra), 1-5.
- López-Gay, R., Sáez, J. M., & Torregrosa, J. M. (2015). Obstacles to mathematization in physics: The case of the differential. *Science & Education*, 24(5-6), 591-613. <https://doi.org/10.1007/s11191-015-9757-7>
- Martínez-Torregrosa, J., López-Gay, R., Gras-Martí, A., & Torregrosa-Gironés, G. (2002). La diferencial no es un incremento infinitesimal. Evolución del concepto de diferencial y su clarificación en la enseñanza de la física. *Enseñanza de las Ciencias*, 20(2), 271-283.
- Martínez Uribe, A., Pluinage, F., & Montaña Zetina, L. M. (2017). El concepto de la derivada en el contexto de la enseñanza de la física, recursos para el uso de diferenciales y las tecnologías de información y comunicación. *El Cálculo y su Enseñanza, Enseñanza de las Ciencias y la Matemática*, 8, 1-17. <https://recacym.org/index.php/recacym/article/view/1>
- Oldenburg, R. (2016) Differentiale als Prognosen. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 37, 55-82. <https://doi.org/10.1007/s13138-016-0096-2>
- Pino-Fan, L., Godino, J. D., & Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa*, 13(1), 141-178
- Pulido, R. (2010). La enseñanza de los diferenciales en las escuelas de ingeniería desde un enfoque socioepistemológico. *Relime*, 13(4-I), 85-97.
- Sánchez-Matamoros, G., García, M., & Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Relime*, 11(2), 267-296.
- Salinas, P., Alanis, J. A., Pulido, R., Santos, F., Escobedo, J. C., & Garza, J. L. (2012). *Cálculo aplicado: Competencias matemáticas a través de contextos Tomo 2*. Cengage Learning Editores SA de CV.
- Valdivé, C., & Garbin, S. (2008). Estudio de los esquemas conceptuales epistemológicos asociados a la evolución histórica de la noción de infinitesimal. *Relime*, 11(3), 413-450. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=335/33511305>
- Von Korff, J., & Rebello, N. S. (2014). Distinguishing between change and amount infinitesimals in first-semester calculus-based physics. *American Journal of Physics*, 82(7), 695-705. <https://doi.org/10.1119/1.4875175>
- Autor. (2020). [Tesis de Maestría, Universidad de Granada].
- Autor. (2021). *Revemop*.