ESTUDIO DE ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS Y SU VÍNCULO CON CAMPOS VECTORIALES CONSERVATIVOS: REFLEXIONES SOBRE EL DESARROLLO DE UNA PROPUESTA DIDÁCTICA

Natalia León, Patricia Vila Torres, Claudia Zang, Gretel Fernández von Metzen
Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales. Universidad Nacional de Misiones.
nleon@campus.unam.edu.ar

Resumen

El método usual de resolución de ecuaciones diferenciales exactas (EDE) consiste en la construcción de la función potencial asociada a campos vectoriales conservativos (CVC). En los Profesorados en Matemática y en Física[1], este procedimiento es objeto de estudio en Análisis III. Sin embargo en Análisis IV, ante la presentación de las EDE en relación al diferencial de una función desconocida $F(x,y)$, se observó que si bien los estudiantes vincularon esa situación a CVC, no lograron establecer las conexiones necesarias entre el marco vectorial y el escalar, que conducen al procedimiento de resolución. A fin de superar las dificultades detectadas, considerando al enfoque ontosemiótico como marco teórico, se diseñó e implementó una propuesta didáctica de la que se da cuenta en este trabajo.

Palabras clave: Ecuaciones Exactas, Campos Conservativos, EOS.

Abstract

The usual method of solving exact differential equations (EDE) consists of the construction of the potential function associated with conservative vector fields (CVC). In Mathematics and Physics teaching training Colleges, this procedure is being studied in Analysis III. However in Analysis IV, before the presentation of the EDE in relation to the differential of an unknown function $F(x, y)$, it was observed that although students linked the situation to CVC, failed to establish the necessary connections between the vector framework and the scaling, leading to resolution procedure. In order to overcome the difficulties encountered, considering the ontosemiotic approach as a theoretical framework, an educational proposal was designed and implemented which is shown in this work.

Keywords: Exact Equations, Conservative Fields, EOS.

1. Introducción

En investigaciones anteriores se logró un acercamiento a la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de las Ecuaciones Diferenciales (ED). El interés estuvo puesto en determinar

[1] Carreras de la Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales de la Universidad Nacional de Misiones.

en qué medida los conocimientos previos de los alumnos funcionan como andamiaje para el estudio de ED para luego, con esta información, generar nuevas estrategias de enseñanza que permitan un abordaje en que, además de las técnicas de resolución, tenga sentido el modelo matemático que representa la ecuación. Es decir, se pretendió incorporar al tratamiento de las ED, la interpretación del fenómeno modelizado (contexto extramatemático) o bien la extracción de información de la ED acerca de la función incógnita (contexto intramatemático). Así, en clases de Análisis IV, se atendió al proceso de resolución de EDE, dado que consiste en un procedimiento conocido por los estudiantes en relación a los CVC. A partir de la observación de prácticas áulicas, que intentaban relacionar el método de resolución de las EDE con la construcción de la función potencial de un CVC, se detectaron dificultades en conciliar el marco escalar utilizado para las ED y el marco vectorial en que aplicaban el procedimiento conocido.
Se describen las acciones llevadas adelante en la búsqueda, diseño e implementación de una propuesta didáctica que permite identificar y presentar aquellos conceptos, significados y/o procesos que favorecen la conexión entre CVC y EDE a propósito del abordaje de estas últimas. Las acciones estuvieron orientadas por el Enfoque Ontosemiótico (EOS) propuesto por Godino y sus colaboradores (Godino, 2003).

2. Lineamientos Teóricos

La comprensión del significado de un objeto matemático tiene lugar cuando el sujeto es capaz de reconocer problemas, procedimientos, argumentaciones, propiedades y representaciones características de éste, como también su relación con los demás objetos matemáticos que forman parte del campo de problemas asociado (Godino, 2003).
Las herramientas teóricas que provee el EOS se desarrollaron en diferentes etapas. Pochulu (2012) las presenta reunidas en tres grupos: Teoría de Significados Sistémicos, Teoría de Funciones Semióticas y Teoría de Configuraciones Didácticas. En este documento, por razones de espacio, se considerarán principalmente los aportes realizados desde la Teoría de Significados Sistémicos. En el futuro se espera ampliar el análisis considerando los aportes realizados desde las otras dos etapas. Al respecto, señala:

> “La teoría de los Significados Sistémicos se elaboró a partir de presupuestos antropológicos y pragmatistas para el conocimiento matemático, donde el significado de un objeto (conceptual) es entendido a través de un sistema de prácticas (matemáticas) que un sujeto (persona o institución) pone en juego y no sólo por su definición o concepto asociado al mismo” (Pochulu, 2012, p. 66).

El EOS reconceptualiza algunos constructos básicos como las nociones de objeto matemático, significado y comprensión, además de las interrelaciones entre éstas. Toma como noción primitiva la de situación-problema y da definiciones para conceptos teóricos como práctica, objeto, significado. Para éstos se diferencian dos dimensiones interdependientes: personales e institucionales. Por otra parte, asigna un rol central al lenguaje, a los procesos de comunicación e interpretación y a la multiplicidad de objetos intervinientes en la clase de Matemática. Se entiende por práctica a toda actuación o expresión (lingüística o no) que un sujeto realiza cuando resuelve problemas matemáticos, comunica a otros la solución que ha obtenido, la valida y la generaliza a otros contextos y problemas. Un objeto matemático es entendido como el emergente de determinado tipo de prácticas operativas y discursivas que una persona o institución realiza para resolver una cierta clase de problemas en las que dicho objeto interviene (Godino y Batanero, 1994). El significado de un objeto matemático no se puede reducir a su mera definición matemática, sino que es consecuencia de las prácticas que se realizan con él. Los significados pueden ser diferenciados en significados institucionales y personales.

Cuando un profesor planifica un proceso de instrucción para un grupo de estudiantes empieza por delimitar lo que dicho objeto es para las instituciones matemáticas y didácticas. Recurrirá a los textos matemáticos, a las orientaciones curriculares y, en general, a lo que los "expertos" consideran que son las prácticas operativas y discursivas vinculadas al objeto en que se focaliza la instrucción. Usará además sus conocimientos personales que previamente ha adquirido. Con todo ello, construirá un sistema de prácticas que el EOS designa como *significado institucional de referencia* del objeto. A partir de éste, selecciona, ordena y delimita la parte específica que propondrá a los estudiantes, considerando los conocimientos previos de éstos, el tiempo y los medios instruccionales disponibles. Este sistema de prácticas planificadas conforma el *significado institucional pretendido*.

Al desarrollar la clase se realizan nuevos ajustes, pueden existir diferencias entre lo que se pretendía y lo que efectivamente ocurrió en el aula. Este conjunto de prácticas que tuvieron lugar en la clase de Matemática constituye el *significado institucional implementado*. Por último, las respuestas a una colección de tareas o cuestiones que se consideran en pruebas de evaluación conforman una muestra del *significado institucional evaluado*.

Por otra parte, si se tiene en cuenta a los alumnos, se puede considerar la totalidad de prácticas personales que son capaces de manifestar potencialmente sobre un objeto matemático, lo que ofrecería una muestra del *significado personal global* que cada uno de ellos tiene. Al encarar el estudio de un determinado objeto matemático, los alumnos exteriorizarán, a través de un conjunto de prácticas efectivamente expresadas en las evaluaciones y actividades de clase (sean éstas correctas o incorrectas), el significado que le confieren al mismo. Esto se identifica como el *significado personal declarado*. Por último, si se analiza el cambio operado en los significados personales que tuvieron lugar al inicio del proceso con el que finalmente alcanzaron, se estarían reconociendo un conjunto de prácticas manifestadas que guardan relación con la pauta institucional establecida, lo que constituye el *significado personal logrado* (Godino, 2003).

De los sistemas de prácticas matemáticas emergen nuevos objetos que provienen de las mismas. Teniendo en cuenta la faceta institucional y personal que poseen los significados, también se puede hablar de "objetos institucionales", cuando los sistemas de prácticas son compartidos en una institución, o de "objetos personales" si corresponden a un sujeto.

Por otra parte, a fin de que resulten funcionales para el análisis de datos en una investigación, los objetos matemáticos se descomponen en entidades primarias: situaciones problema, lenguaje, conceptos-definición, proposiciones, procedimientos y argumentos.

Los sistemas de prácticas y las configuraciones[2] se proponen como herramientas teóricas para describir los conocimientos matemáticos (personales e institucionales) y para explicar

[2] La Teoría de Configuraciones Didácticas, junto a la Teoría de las Funciones Semióticas, corresponden a las otras dos etapas señaladas por Pochulu (2012) y que no se abordan en este trabajo.

conflictos semióticos. Se entiende como conflicto semiótico a cualquier disparidad entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos en interacción, que pueden ser fuentes de problemas en el aprendizaje. Éstos pueden ser reconocidos según la siguiente tipología: representacionales (confusiones terminológicas), conceptuales (falta de discriminación entre conceptos), de atribución de propiedades (generalización excesiva y atribución de propiedades a objetos que no las tienen), procedimentales (el procedimiento falla o es inadecuado en cierta situación) y argumentativos (cuando faltan argumentos, no se interpreta un argumento o no se reconoce un error en una argumentación) (Batanero, Diaz y Mayén, 1999).

3. Análisis, discusión e implementación de la propuesta

Se narran las acciones que permitieron delimitar el significado institucional de referencia, conformado por la descripción del sistema de prácticas, realizado durante el abordaje "experto" de la situación diseñada para que emerjan las relaciones entre CVC y EDE. Las autoras de este documento, han estudiado las relaciones entre EDE con otros conceptos como CVC, integrales de línea, funciones definidas en forma implícita[3] y curvas de nivel, afín de contar con un bosquejo del campo de problemas asociado. Esto se hizo a partir de la lectura de varios libros de texto y la resolución de los ejercicios y problemas presentes en ellos. En general, se observó que los ejercicios propuestos en los libros se reducen a la aplicación de técnicas fácilmente mecanizables y que no requieren la vinculación entre ambos tópicos. Esto permitió la identificación de los problemas que vinculan las teorías de CVC y de EDE. Se detectó como un eventual obstáculo conciliar la conexión entre el marco vectorial y el escalar: construir las relaciones necesarias para utilizar en el campo escalar aquellos procedimientos aprendidos en el vectorial, resultaría poco evidente para el alumno, sin una situación adecuada que medie en ese proceso.

1) Las curvas de nivel de una función $z = z(x, y)$ están caracterizadas por la ecuación diferencial $y\,dx + x\,dy = 0$, mientras que las correspondientes a una función $u = u(x, y)$, desconocida, resultan curvas ortogonales a las anteriores. Representar gráficamente en el plano *xy* la situación descripta anteriormente, considerando el punto A=(2,1) como punto de corte de un par de curvas ortogonales. Reconocer las funciones *z* y *u* asociadas.
2) Comprueba de dos maneras diferentes que las curvas representadas en el ítem (1) son ortogonales. ¿Se podría determinar cuál de las funciones, z o u, aumentará más si se desplaza desde el punto A a otra curva de nivel según la dirección ortogonal a la correspondiente curva de nivel en A?
3) Encontrar la expresión de la familia de curvas de nivel de *z* cuando están definidas por la siguiente ED: $-y\,dx + (y^2 - x)\,dy = 0$.
4) Las funciones escalares trabajadas, ¿están asociadas a campos vectoriales conservativos? ¿qué implicancia tendría si fuera así?

Fig. 1. Propuesta presentada a los estudiantes

En la delimitación del significado institucional pretendido se han realizado los recortes, considerados necesarios, para lograr la emergencia del procedimiento de construcción de la función potencial en el contexto escalar de resolución de una EDE, procedimiento conocido por los estudiantes pero en el contexto vectorial. Se han reformulado consignas presentes en la bibliografía analizada, derivándose la propuesta de trabajo expuesta en la figura 1.

[3] Es importante retomar los aspectos vinculados con el teorema de función implícita para funciones de varias variables dado que el método analítico para resolver EDE provee una familia de soluciones en las que *y* se define como una función implícita de *x* (solamente en algunos casos se puede obtener una expresión explícita para *y*).

En lo que resta del trabajo, la discusión se circunscribirá a las dos primeras consignas. Como parte del análisis preliminar, con el fin de demarcar el significado institucional pretendido, se analizaron los posibles procedimientos de resolución de los alumnos. Este análisis también sirvió para tener un bosquejo de los significados personales globales de los estudiantes, dado que incluye todas las prácticas que potencialmente pueden realizar éstos. En este sentido, para la consigna Nº1 se esperaba que los alumnos trabajen con ED en forma explícita, y la reescriban como $y' = -y/x$, separen variables (método estudiado en clases previas) para obtener una solución explícita $y = C/x$. Luego, inducidos por la consigna, expresen la solución como $x\,y = C$ y la reconozcan como el conjunto de curvas de nivel de la función $z(x, y) = x\,y$. Se anticipó que, probablemente, esta correspondencia no fuera inmediata, dado que los objetos involucrados están en diferentes entornos: los métodos de resolución de ED y el análisis de funciones de dos variables a través de sus curvas de nivel. Para obtener las curvas de nivel de la función *u*, se esperaba que reformulen la expresión explícita de la ED anterior en función de la relación entre direcciones ortogonales, es decir, que trabajaran con la ED $y' = x/y$, para obtener la solución $\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C$. También se pensó posible que surja otro procedimiento para la determinación de las curvas ortogonales, que tiene en cuenta que el gradiente de $z = x\,y$ es perpendicular a las curvas de nivel $x\,y = C$, así un vector perpendicular a éste resultaría tangente a $x\,y = C$ y, si se cumplen las condiciones del problema, sería ortogonal a alguna curva de nivel de la superficie *u*. Bajo esta línea se tiene que $\nabla z = (y, x) \Rightarrow \nabla u = (-x, y)$ *o* $\nabla u = (x, -y)$. Estableciendo las siguientes relaciones $u_x = x,\ u_y = -y$, se puede hallar la función $u(x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2}$ con el método usual para encontrar funciones potenciales, y a partir de ésta las curvas de nivel correspondientes.
Luego, podrían considerar el punto A=(2,1) como intersección de un par de curvas ortogonales, sustituyendo *x* = 2 e *y* =1 en las soluciones obtenidas, lo cual conduce a la curva de nivel $xy = 2$ para la superficie *z* y a la curva $\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}$ para la superficie *u*.

En la segunda consigna, se pide que demuestren la ortogonalidad de dos maneras diferentes para inducir a los estudiantes a que relacionen las formas explícitas de las dos ED, evalúen las derivadas en (2,1) y comprueben que se verifica la relación de perpendicularidad. Esta forma debería considerarse equivalente a la relación que mantienen las rectas tangentes a cada curva en A. Como la idea es que logren relacionar el problema de buscar la solución de una ED con el método de determinación de la función potencial de un CVC, se intenta sacarlos del contexto escalar. La otra opción sería recurrir a la mirada vectorial, extraer los vectores tangentes a cada curva y comprobar que el producto escalar es cero. También podrían tomar como referencia los gradientes de *z* y *u* en el punto A. Esta última los acerca más a reconocer el gradiente de la función involucrada en la ED, dada en forma diferencial.
El análisis que sigue presenta un esbozo de lo que corresponde al significado institucional implementado. También permite un acercamiento al significado personal logrado.

En este documento, por razones de espacio, no se analiza el significado institucional evaluado.

Para la primera consigna, todos los grupos (cinco en total), siguen un procedimiento similar: escriben la ED en su forma $y' = f(x,y)$, usan separación de variables y luego escriben la solución en forma explícita (presentándose algunas dificultades en esto). Reemplazan las coordenadas del punto dado en la consigna para hallar la solución particular que verifica esa condición (sólo uno solo de los grupos halla una familia de soluciones sin hallar la solución particular). Plantean entonces que la solución hallada $xy = c$ son las curvas de nivel de $z(x,y)$ y concluyen que la expresión de ésta es $z(x,y) = xy$. Proceden a hallar $u(x,y)$, utilizando lo dicho en el enunciado de la consigna, esto es, que las curvas de nivel de $u(x,y)$ son ortogonales a las de $z(x,y)$, y escriben: $y' = -y/x$ es la "*pendiente de la función* $z(x,y)$", entonces $y' = x/y$ es la "*pendiente de* $u(x,y)$ ", recurriendo a la relación de ortogonalidad en términos de pendientes vista en materias anteriores. Resuelven esta ED y siguen un proceso similar al usado antes con *z*.

Cabe aclarar que se observa cierto grado de confusión en relación a esto, puesto que $z(x,y)$ es una función cuya representación gráfica es una superficie en R^3 y por tanto, no tiene sentido hablar de pendiente de una superficie, ya que según la dirección en que se avance sobre la misma habrá diferentes pendientes. Sin embargo, el cociente $y' = -y/x$ sí representa la pendiente de las curvas de nivel de dicha función, cuya representación gráfica son curvas en R^2, esto es en el dominio de la función.

En las producciones analizadas se evidencia que si bien los alumnos usan conceptos-definiciones, proposiciones, procedimientos, argumentos (objetos primarios), se observa cierto grado de confusión en lo que respecta al lenguaje. Es muy posible que las dificultades de los estudiantes para exteriorizar sus significados personales a través de la terminología y simbología vinculadas a la temática, es lo que origina el conflicto semiótico de atribuir propiedades a un concepto, hecho manifestado en las respuestas anteriores.

Aquellos alumnos que encuentran solamente la solución general de la ED, que caracteriza las familias de curvas de nivel de la superficie *z* (luego las de *u*), aún cuando encuentran dos familias de curvas ortogonales, no están individualizando cuáles son las curvas que conforman el par de curvas ortogonales en el punto dado. Cabe aclarar que las funciones que conforman una misma familia de curvas son paralelas entre sí, esto implica que si tomamos una cualquiera de ellas será perpendicular a todas las curvas que conforman las soluciones de la otra ED (lo que cambia es el punto en donde se da la ortogonalidad). Los trabajos analizados no reflejan que los alumnos tengan claro que la ortogonalidad entre curvas está relacionada con las nociones de ortogonalidad de rectas y vectores y entre vectores. No se tiene certeza de que esta actividad haya contribuido a poner en evidencia esa relación, o afianzarla en caso de que ya estuviera incorporada. Habría que combinar este instrumento de recogida de información con algún otro.

También pudo detectarse que en dos de los grupos, si bien usan en forma correcta el método de separación de variables, cuando quieren obtener la solución en su forma explícita, cometen errores en la manipulación de los logaritmos. Estas dificultades, siguiendo con la tipificación de Batanero, Díaz y Mayén (1999), pueden ser englobadas como conflictos procedimentales. En la fig. 2 se expone una de tales resoluciones:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{-y}=\frac{dx}{x} \Rightarrow -\ln y=\ln x+k \Rightarrow -y=x+k$$

Fig.2 Conflictos procedimentales

Con respecto a la consigna Nº 2, en líneas generales, hallaron el gradiente de z y el de *u* y verificaron la ortogonalidad de los dos vectores. En cuatro de los grupos se responde al segundo interrogante, determinando qué función tiene un crecimiento mayor a partir de la comparación de los módulos de los gradientes. Cabe realizar una aclaración, cuando se realizó el análisis a priori de las actividades, no se tuvo en cuenta que, para la función $u(x,y)$ se podrían obtener diferentes expresiones de acuerdo a cómo se considere a la constante de integración, y por ende, diferentes vectores gradiente, que resultan paralelos. Independientemente de ello, las familias de curvas obtenidas resuelven la ED, sólo que los vectores gradientes no son idénticos. Los grupos que obtuvieron diferentes expresiones para las curvas de nivel de $u(x,y)$ proporcionaron diferentes respuestas al interrogante que involucra el cálculo del módulo del gradiente, todas correctas. Resta, como equipo de investigación, analizar en qué medida esta diversidad de respuestas resulta provechosa y en caso de ser necesario, realizar las eventuales modificaciones que permiten direccionar el trabajo de los alumnos hacia lo esperado en el momento del diseño de la actividad.

4. Reflexiones

La experiencia realizada dejó resultados positivos tanto a los docentes como a los estudiantes, dado que no sólo funcionó como una forma de motivación extrínseca, sino que les permitió compartir con sus pares apreciaciones, formular conjeturas, escuchar y validar otras explicitadas por sus compañeros, recurrir a diferentes estrategias de abordaje del problema y resignificar aquellos objetos matemáticos conocidos. En cierta forma, se cumplieron los objetivos propuestos en función al análisis a priori. Se ha detectado que los estudiantes tienen disponibles los conceptos involucrados, pero el vínculo entre ellos no resulta inmediato, es tarea de los docentes generar las situaciones que los promuevan.

5. Referencias

Batanero, C.; Diaz, C. y Mayén, S. (1999). *Conflictos semióticos de estudiantes con el concepto de mediana.* Statistics Education Research Journal, 8(2), 74-93

Godino, J.; Batanero, C. (1994). Significado personal e institucional de los objetos matemáticos. Recherches en Didactique des Mathématiques, 14(3), 325-355

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las Funciones Semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Universidad de Granada.

Pochulu, M. (2012). Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática. En M. Pochulu y M. Rodríguez (Eds), *Educación Matemática: Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos* (pp. 63-89), Argentina: Editorial universitaria Villa María.