REFLEXIONES SOBRE PRÁCTICAS QUE IMPLICAN INTERPRETACIÓN DE MODELOS CON ECUACIONES DIFERENCIALES

Claudia Zang, Natalia León, Gretel Fernández von Metzen, Patricia Vila Torres
Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales. Universidad Nacional de Misiones.
claudiamzang@gmail.com

Resumen

El estudio de las ecuaciones diferenciales (ED) puede encararse desde diferentes enfoques: algebraico, cualitativo y numérico. Desde la investigación educativa se señala que tradicionalmente se las aborda enfatizando el enfoque algebraico. El estudio superficial de los enfoques cualitativos y numéricos repercute en que no se logra mostrar la potencialidad de estas ecuaciones para modelar fenómenos. Este trabajo ofrece algunas reflexiones sobre la reelaboración e interpretación de modelos ya construidos por la comunidad científica que implican el uso de ED. Estas reflexiones se derivan del análisis e implementación de secuencias didácticas, concebidas en el marco de la Ingeniería Didáctica.

Palabras clave: ecuaciones diferenciales, enseñanza, aprendizaje, modelos.

Abstract

The study of differential equations (DE) can be addressed from different approaches: algebraic, qualitative and numerical. Educational research states they are traditionally treated emphasizing the algebraic approach. The superficial study of qualitative and numerical approaches affects the possibility to show the potential of these equations to model phenomena. This paper offers some reflections on the reprocessing and interpretation of models already built by the scientific community that involve the use of DE. These reflections are derived from the analysis and implementation of didactic sequences, designed within the framework of the Didactic Engineering.

Keywords: differential equation, teaching, learning, models

1. Introducción

Las Ecuaciones Diferenciales (ED) constituyen un recurso valioso para el estudio y/o la construcción de modelos matemáticos. Su abordaje se puede realizar desde tres enfoques: algebraico, cualitativo y numérico. Las investigaciones afines indican que en los cursos tradicionales de ED se confiere mayor énfasis al enfoque algebraico, al mismo tiempo señalan las posibles causas de esta hegemonía.

La experiencia en el dictado de ED y la observación de errores recurrentes en el manejo de las mismas por parte de los estudiantes, así como su preferencia por los métodos cuantitativos, motivó a analizar los diferentes aspectos que hacen a la enseñanza del tema en algunas carreras de la Universidad Nacional de Misiones (UNaM). Algunas de las acciones realizadas fueron examinar libros de texto sugeridos para su estudio y los programas analíticos de diferentes cátedras que las involucran. El propósito fue detectar qué espacios se destinan a los tres enfoques y si el trabajo con modelos está explicitado, o debe suponerse implícito, en las tareas usuales. Además, a lo largo de los últimos años, en las clases de la asignatura Análisis IV de los profesorados en Matemática y en Física de la UNaM, se ha incorporado el trabajo con problemas de diversos ámbitos de aplicación a fin de favorecer el uso de modelos, ya sea para situaciones intra y/o extra matemáticas. Este uso es entendido como una práctica que implica la reelaboración e interpretación de modelos ya construidos por la comunidad científica, pero que resultan nuevos para los estudiantes.

En este sentido, se presentó a los alumnos una ED que describe el comportamiento de una población de peces. En líneas generales, se los instó a interpretar el modelo a la luz del fenómeno que representa, a anticipar características generales de la solución (sin resolver previamente la ED), a interpretar qué representan los parámetros del modelo, etc. También hubo otras instancias de trabajo, en las que se les proporcionó una descripción general de algún fenómeno (físico, químico, biológico, etc.) acompañada de una serie de hipótesis que lo explican, luego se solicitó la formulación de una expresión matemática que se ajustara a la información presentada (sin explicitar que la expresión requerida debía ser una ED).

Se presenta el análisis de algunos procedimientos usados por los estudiantes cuando interactuaron con tales problemas de aplicación. Se pretende exponer aspectos sobresalientes derivados del análisis y la reflexión de las propuestas didácticas desarrolladas.

2. Marco teórico y Antecedentes

Dados los objetivos de la presente investigación, se tomó como referencia teórica a la escuela francesa de Didáctica de la Matemática. Desde esta postura, el objeto de estudio de la Didáctica de la Matemática es la situación didáctica, entendida ésta como aquella que permite la construcción del conocimiento a través de un problema relativo a éste y a una cierta organización del trabajo, de acuerdo a objetivos prefijados. La caracterización del proceso áulico se basa en la tipología de las situaciones didácticas de Brousseau: acción, formulación, validación e institucionalización (Brousseau, 2007)

Por otra parte, en las ciencias y en la ingeniería en general, se desarrollan modelos matemáticos para mejorar la comprensión de diversos fenómenos. A menudo, estos modelos involucran una ED. El estudio de las mismas puede encararse desde el cuadro algebraico de la resolución exacta, el cuadro geométrico de la resolución cualitativa o el cuadro numérico de la resolución aproximada (Artigue, Douady, Moreno y Gómez, 1995).

Los métodos de resolución algebraicos implican encontrar la expresión simbólica de la función incógnita, recurriendo principalmente a la integración y a la determinación de las raíces de polinomios asociados a las ED, cuando éstas son lineales. En tanto que los métodos cualitativos se basan en la interpretación geométrica de la derivada como pendiente de una función. En efecto, una ED de la forma $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ especifica una pendiente en cada punto del plano xy donde f está definida. A partir de conocer esta información se construye un bosquejo de la solución mediante el trazado de pequeños segmentos de recta en diversos puntos del plano con la pendiente especificada por la ED en los puntos correspondientes. Y, los métodos numéricos proporcionan aproximaciones de los valores de la función incógnita a partir de cálculos aritméticos (que efectuados manualmente o con software). Para ello se precisa conocer el proceso de variación de la función, implícito en la ED, y un punto de la solución dado por unas condiciones iniciales.

En lo relativo a la modelización, en general es concebida como una actividad científica, lo que implica considerarla como un proceso que envuelve la observación de un evento o fenómeno, la experimentación, la abstracción y la simplificación. La abstracción lleva a la formulación de modelos matemáticos, éstos responden a una serie de hipótesis que pretenden explicar los vínculos entre diferentes variables que se escogen como constitutivas del fenómeno. La formulación del problema en un lenguaje especializado y las simplificaciones que deben realizarse dada la complejidad de muchas situaciones, hace que sea imposible emprender un estudio pormenorizado de los mismos (Bassanezi, 2002). Finaliza el proceso cuando el modelo ha superado las instancias de validación (el modelo es interpretado y analizado a la luz del fenómeno en estudio a fin de evaluar si explica o predice la información disponible) y se lo institucionaliza.

En las carreras consideradas, la investigación con propósitos científicos no es un fin en sí mismo, lo que hace que la modelización pensada en estos términos sea difícil de implementar. No obstante, puede ser entendida también como un instrumento para dotar de significado a diferentes modelos que conforman el currículum. En este caso, se estaría resignificando o reinterpretando modelos ya construidos; lo cual presupone adherir a la premisa de que hacer matemáticas consiste en modelizar situaciones problemáticas mediante el uso de matemáticas conocidas o nuevas, hacer matemáticas también es enseñar y aprender modelos que permitan resolver problemas (Chevallard, Bosh y Gascón, 1997).

A continuación, se reseñan algunos trabajos que posibilitaron un acercamiento a la problemática de la enseñanza y aprendizaje de las ED. Se destacan los trabajos de Artigue, quien plantea que los alumnos tienen dificultades para la comprensión de los conceptos del cálculo en general y las relaciona a una serie de obstáculos, que agrupa en tres categorías: aquellas vinculadas con la complejidad de los objetos básicos del cálculo, las vinculadas a la conceptualización y formalización de la noción de límite y finalmente, las correspondientes a las rupturas necesarias con relación a los modos de pensamiento puramente algebraicos (Artigue, Douady, Moreno y Gómez, 1995). Esta investigadora revela, en coincidencia con otros investigadores (Moreno Moreno y Azcárate Giménez, 2003; Habre 2000), que la enseñanza tradicional de las ED privilegia el enfoque algebraico. Como posibles causas de esta hegemonía se señalan las creencias que tienen los profesores acerca de los estudiantes (receptores pasivos con un pobre nivel de competencias matemáticas que limita el tipo de actividades que pueden efectuar), la concepción formalista de las matemáticas (sobreestimación del tratamiento simbólico y subestimación de métodos numéricos y gráficos), el temor de los docentes a la pérdida de contenidos específicos de las matemáticas puras a favor de contenidos de matemática aplicada (se confiere un status infra-matemático a esta última) (Moreno Moreno y Azcárate Giménez, 2000).

Aspectos metodológicos

Se utilizó la Ingeniería Didáctica (ID) conjuntamente con el estudio de caso. Éste es entendido como un método para estudiar un individuo o una institución en un contexto o situación única y de una manera lo más intensa y detallada posible (Salkind, 1998). La ID se basa en la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza. Se ejecuta en cuatro fases: 1) análisis preliminar, 2) concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas, 3) experimentación y 4) análisis a posteriori y evaluación. Se la valida a partir de la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori. (Artigue, Douady, Moreno y Gómez, 1995). En el marco de las dos primeras fases se realizó: el análisis epistemológico para caracterizar los conocimientos en juego, el estudio de las eventuales dificultades que podrían presentarse a los estudiantes, la selección de problemas que involucraran a las ED como modelos matemáticos de fenómenos de diversa índole, previéndose posibles procedimientos de resolución. La fase de experimentación consistió en la puesta en escena de las actividades elegidas, en el transcurso de una clase de tres horas de duración de la Asignatura Análisis IV de tercer año de los profesorados antes mencionados, durante el ciclo lectivo 2013. La cuarta fase se concretó en base al análisis de registros escritos y de grabaciones audiovisuales realizados por las investigadoras.

3. Análisis y discusión de la propuesta

En la cohorte 2013, se introdujo el estudio de las ED Autónomas a través de un problema aplicado a la descripción del crecimiento de una población de peces. Para ello se presentó a los estudiantes un texto breve elaborado en base a la bibliografía sugerida[1] en el programa de la asignatura, se los instó a realizar una lectura del mismo y a interpretar la información proporcionada. Luego se entregó consignas de trabajo vinculadas al tema. Ambos se muestran en las figuras 1 y 2, respectivamente.
En esta oportunidad no se solicitó a los estudiantes que elaboren un modelo que se ajustara a cierta información brindada, dado que la finalidad de la tarea era la interpretación del mismo y la reflexión sobre el significado de los diferentes parámetros y variables intervinientes, así como la extracción de información asociada sin resolver la ED.
Se estima que este trabajo previo de interpretación de modelos (fig. 1 y 2) fue lo que posibilitó tener conocimientos que sirvieran de andamiaje para la resolución del modelo de depredador-presa que fue presentado con posterioridad (fig. 3).
El análisis de este modelo y de los resultados que se obtuvieron con alumnos que cursaron la asignatura un año antes fueron objeto de estudio de un trabajo anterior (Zang, Fernández von Metzen y León, 2015). Hay que destacar que la misma actividad generó mejores

[1] El material de lectura se elaboró en base a la propuesta que se hace en Borelli, R. y Coleman, C. (2002). *"Ecuaciones Diferenciales: Una perspectiva de modelación".* México: Oxford University Press

estrategias de resolución para el grupo de alumnos observado en 2013. Para respaldar estas afirmaciones se puede citar, por ejemplo, que en la cohorte 2012, en la consigna 2 de la secuencia mostrada en la fig. 3, los estudiantes tuvieron dificultad en concretar la interacción entre las especies, en cambio en la cohorte 2013 este factor de interacción se simbolizó de forma natural como el producto de las dos poblaciones.

Crecimiento de una población de peces

Suponga que se observa una población de peces en un lago y que la misma puede describirse considerando las tasas de nacimiento, muerte y captura. Si se mide la población de peces $y(t)$ en el instante t, la tasa de cambio neta de la población de peces, expresada en toneladas de pescado por año, es $\frac{dy(t)}{dt} = y'$.

Entonces: $y' = \text{tasa de nacimiento} - \text{tasa de muerte} - \text{tasa de captura}$

Donde se ha supuesto que las tasas de peces inmigrantes y emigrantes de los ríos que se comunican con el lago se anulan entre sí.

De la observación minuciosa de numerosas especies durante muchos años se sabe que la cantidad de peces que nacen y mueren es proporcional al tamaño de la población:

$\text{tasa de nacimiento en el instante } t = by(t)$

$\text{tasa de mortalidad en el instante } t = (m + cy(t))y(t)$

Donde m, b y c son constantes de proporcionalidad no negativas. Observe que al coeficiente de mortalidad natural m se le ha sumado el término $cy(t)$ que explica la sobrepoblación, puesto que a medida que la población crece en un hábitat estable, la tasa de mortalidad suele crecer mucho más rápido de lo que puede explicarse con un solo coeficiente constante m. El término de "sobrepoblación" $cy(t)$ es necesario para modelar este factor de mortalidad acelerado.

Si H es la tasa de captura. Entonces $y' = by(t) - (m + cy(t))y(t) - H$ ó bien:

$y' = (b - m)y - cy^2 - H$ ó $y' = ay - cy^2 - H$

Fig. 1. Texto introductorio para estudiar el modelo de crecimiento de una población de peces en un lago

Consigna N° 1: Considere el siguiente problema de valor inicial que describe el comportamiento de una población de peces:

$$y' = y - \frac{1}{12}y^2 \qquad y(0) = y_0$$

(a) A partir de la ED, esbozar un gráfico que represente soluciones al problema para diferentes poblaciones iniciales. (b) ¿Qué significa en el contexto del problema que $y(t) = 0$ ó bien que $y(t) = 12$? ¿Qué relación tienen estos valores de y con las soluciones de la ecuación diferencial? (c) Resuelva el problema en forma analítica y determine que sucede con la población de peces a medida que pasa el tiempo. ¿Cómo podría relacionarlo con lo que se encontró anteriormente?

Consigna N° 2: Si por el momento se omite el término de captura, el modelo puede ser representado por el siguiente problema de valor inicial:

$y' = ay - cy^2 \qquad y(0) = y_0 \qquad a,\ c$ y y_0 constantes positivas.

(a) ¿Para qué valores de y_0 la población de peces aumenta? ¿Para qué valores de y_0 la población de peces disminuye? ¿Para qué valores de y_0 la población de peces se mantiene constante en el tiempo? (b) Esboce un gráfico que represente la población de peces a medida que pasa el tiempo para diferentes poblaciones iniciales.

Fig. 2. Consignas para trabajar el modelo de crecimiento de una población de peces en un lago

Volviendo al análisis de las interacciones de los alumnos con el material mostrado en la fig. 1, se observó que, han tenido dificultades para leer e interpretar la información dada: aun cuando dicho texto explicite que y´ representa la tasa de cambio de la población de peces, algunos grupos la han considerado como la cantidad de peces que hay en el lago. Al respecto afirman:

A1: - "y´ es la cantidad de pescado, en toneladas, que hay en el lago en un año".

A2:"la tasa de nacimientos es lo que más se produce en un año"

A1: "bueno, puede ser… porque esto obviamente no va a ser negativo" (señala y´). Esta dificultad implica una confusión entre la función y su derivada. Además, se interpretó el factor de sobrepoblación como un factor que disminuye la tasa de mortalidad, cuando en realidad la aumenta. En general, consideraron a *m* como la tasa de mortalidad e ignoraron que ésta está representada por $m+cy(t)$. En la puesta en común colectiva y en la interacción con el experto, los alumnos fueron elaborando interpretaciones cada vez más óptimas.

Consigna N 1: En la dinámica de la vida ninguna especie está sola. Suponga que dos especies de animales distintas interactúan en el mismo ambiente o ecosistema; además la primera come plantas y la segunda se alimenta de la primera. En otras palabras una especie es depredadora y la otra es la presa. Por ejemplo, $x(t)$ e $y(t)$ denotan los tamaños de las poblaciones de conejos y zorros, respectivamente. Proponga un modelo matemático que describa el comportamiento de cada una de las especies en ausencia de interacción con la otra especie, sabiendo que la velocidad de crecimiento de una población es proporcional a su tamaño.
Consigna N 2: Suponga ahora que las dos especies interactúan, y que los zorros se comen a los conejos y que la razón a la que los conejos son devorados es proporcional a la taza de encuentros entre ambas especies y que, además la tasa de nacimientos de los zorros va en proporción al número de conejos comidos por zorro, que es proporcional a la razón a la que los conejos y zorros interactúan. Proponga un modelo matemático que describa el comportamiento de cada una de las especies sabiendo que, si $x(t)$ o $y(t)$ aumentan el número de interacciones aumenta y que si alguna de ellas es cero, el número de interacciones también es cero.
Consigna N 3: En los siguientes modelos de población depredador-presa, x representa la presa e y representa los depredadores.

i) $$\frac{dx}{dt} = 5x - 3xy \qquad \frac{dy}{dt} = -2y + \frac{1}{2}xy$$

ii) $$\frac{dx}{dt} = x - 8xy \qquad \frac{dy}{dt} = -2y + 6xy$$

(a) ¿En qué sistema se reproduce más rápidamente la presa cuando no hay depredadores e igual número de presas? (b) ¿En qué sistema tienen los depredadores más éxito de cazar presas? En otras palabras, si el número de depredadores y presas son iguales para los dos sistemas, ¿en qué sistema los depredadores tienen un mayor efecto sobre la razón de cambio de las presas? (c) ¿Qué sistema requiere más presas para que los depredadores logren una tasa de crecimiento dada (suponiendo números idénticos de depredadores en ambos casos?)

Fig. 3: Secuencia propuesta a los alumnos para el estudio del sistema depredador-presa

Posteriormente, se les presentó las dos consignas mostradas en la figura 2. En cuanto a estas, específicamente la consigna 1 a), un grupo de alumnos opinó que debe tratarse de una función cuadrática puesto que el segundo miembro de la ED es una función de segundo grado. Continuaron la discusión, hasta que visualizaron que en tal caso no estarían graficando la función *y* sino *y'*. Se equivocaron después en el proceso de integración y la solución hallada, además de no ser correcta, les resultó difícil de graficar.
Ante las dificultades observadas, la docente intervino preguntando si hay alguna solución que les resulte inmediata. Interrogó específicamente sobre qué sucede si se tiene una población inicial de cero. Los alumnos respondieron que eso implicaría la ausencia de peces y una población nula en todo tiempo, en consecuencia la tasa de cambio sería nula y se correspondería con una solución para el modelo.
Otro grupo de estudiantes analizó qué nuevo valor de la población haría que el segundo miembro de la ED sea cero, y así encontraron que $y_0 = 12$ lo anula. En este grupo aparece en forma implícita la noción de solución de equilibrio sólo que aún no toman conciencia de que ese es el concepto que está detrás. Continúan discutiendo y llegan a esbozar la gráfica de otras soluciones, estableciendo si estas son crecientes o decrecientes, en base a analizar el signo de la derivada de acuerdo a la condición inicial elegida. En cierta forma llegan a

construir una primera introducción al análisis de los planos de fase. Cabe aclarar que este procedimiento surgió en el interior de uno de los grupos y luego fue socializado.
Posteriormente, se discutieron estas estrategias de resolución en el pizarrón y llegándose a una interpretación consensuada. Se les presentó luego la misma secuencia de depredador-presa que fue trabajada con los alumnos de la cohorte 2012. En esta oportunidad, como ya se mencionó antes, tuvieron menores dificultades para traducir a una expresión matemática la información dada en lenguaje coloquial; los procedimientos de resolución fueron similares a los que emplearon sus pares que cursaron la materia un año antes.

4. Reflexiones finales

A partir del análisis efectuado, se puede resaltar que es poco probable que los diferentes aspectos que hacen a la interpretación de modelos surjan espontáneamente en los alumnos, es esencial destinar tiempo de las clases para el estudio y análisis de modelos. Se asume que este tipo de prácticas generan espacios de elaboración de conocimientos matemáticos nuevos, constituyen instancias de resignificación de aquellos abordados anteriormente, y al mismo tiempo funcionan como una forma de motivación extrínseca.
La experiencia realizada dejó resultados positivos, dado que permitió al estudiante compartir con sus pares apreciaciones, formular conjeturas, escuchar y validar otras explicitadas por sus compañeros, recurrir a diferentes estrategias de abordaje del problema de acuerdo a las relaciones percibidas de la interpretación del mismo.

5. Referencias

Artigue M., Douady R., Moreno L. y Gómez P. (Ed.), *Ingeniería Didáctica para la Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas* . México: Grupo Editorial Iberoamérica.
Bassanezi, R. (2002). "Ensino-aprendizagem com modelagem matemática". São Paulo: Editorial Contexto.
Brousseau, G. (2007). Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas. Buenos Aires: Editorial Libros del Zorzal.
Chevalard, Y., Bosch, M., Gascón, J. (1997). Enseñar matemática. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje. Barcelona: Editorial Orsori.
Habre, S. (2000). Exploring students'strategies to solve ordinary differential equations in a reformed setting. *Journal of Mathematical Behavior*, 18 (4), 455-472.
Moreno Moreno, M. y Azcárate Giménez, C. (2003). "Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales" *Enseñanza de las Ciencias*, 21 (2), 265-280
Salkind, N. (1998). "*Métodos de Investigación*". México: Editorial Prentice Hall.
Zang, C; Fernández von Metzen, G. y León, N. (2015). "Reflexiones sobre la implementación de problemas de modelado para la construcción y resignificación de objetos matemáticos vinculados a las ecuaciones diferenciales". *UNION. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 42, 150-165