Universidad Nacional de Misiones. Facultad de Humanidades y Ciencias Sociales. Secretaría de Investigación y Postgrado. Doctorado en Ciencias Humanas y Sociales

Doctorando
Ricardo Fabián Espinoza

La comprensión alcanzada por estudiantes de Profesorado en Matemática, referida a la Divisibilidad, al comenzar la Universidad

Tesis de Doctorado presentada para obtener el título de “Doctor en Ciencias Humanas y Sociales”

“Este documento es resultado del financiamiento otorgado por el Estado Nacional, por lo tanto, queda sujeto al complimiento de la Ley N° 26.899”.

Director
Marcel David Pochulu

Posadas, Misiones, julio 2018

Universidad Nacional de Misiones
Facultad de Humanidades y Ciencias Sociales
Doctorado en Ciencias Humanas y Sociales

La comprensión alcanzada por estudiantes de Profesorado en Matemática, referida a la Divisibilidad, al comenzar la Universidad

Tesis Doctoral

Ricardo Fabián Espinoza

Dirigida por:

Marcel David Pochulu

Posadas, Misiones, Julio de 2018

La comprensión alcanzada por estudiantes de Profesorado en Matemática, referida a la Divisibilidad, al comenzar la Universidad

Memoria de Tesis Doctoral realizada por el Mgter. Ricardo Fabián Espinoza, para optar por el título de Doctor en Ciencias Humanas y Sociales, con la dirección del Dr. Marcel David Pochulu

El científico halla recompensa en el placer de la comprensión y no en las posibilidades de la aplicación que cualquier descubrimiento pueda conllevar.

Albert Einstein

Dedicatoria

A la memoria de mi querida abuela, Francisca, quien veló permanente e incansablemente por mi formación personal y profesional.

Agradecimientos

A mi director de tesis, por sus enormes aportes de conocimiento y entusiasmo en la realización de este trabajo.

A mi familia, por brindarme afecto e incondicional apoyo a lo largo de todo el proceso.

A los especialistas que aportaron valiosos conocimientos en la valoración del instrumento de indagación de esta tesis.

A colegas y alumnos del Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas, Naturales y Agrimensura de la Universidad Nacional del Nordeste, con los que he compartido momentos de estudio y reflexión.

A mis alumnos del Profesorado en Matemática del Instituto Superior de Formación Docente “Dr. Juan Pujol”, con los que he pensado la solución de algunos problemas matemáticos involucrados en esta tesis.

ÍNDICE DE CONTENIDOS

Resumen

La investigación de la que se da cuenta en esta memoria, persigue el objetivo fundamental de valorar la comprensión que han alcanzado, en el Nivel Medio, los estudiantes que inician la carrera de Profesorado en Matemática, en la Facultad de Ciencias Exactas, Naturales y Agrimensura de la Universidad Nacional del Nordeste, sobre objetos matemáticos enmarcados en la Divisibilidad.

El marco teórico adoptado es el modelo epistémico y cognitivo del Enfoque Ontológico y Semiótico del conocimiento y la instrucción matemática.

El planteo metodológico se fundamenta en investigaciones basadas en el diseño, usando herramientas de análisis provenientes del marco teórico.

En este contexto teórico y metodológico se construye un instrumento de indagación, conformado por una muestra de problemas de Divisibilidad, con el propósito de suministrar a los estudiantes recientemente caracterizados. El mismo, se construye a partir del análisis de investigaciones relacionadas con el estudio de la comprensión de objetos de la Divisibilidad y otros objetos matemáticos, como así también, del marco epistémico y didáctico elaborado como referencia.

El análisis de las prácticas de los estudiantes, a propósito de la resolución de la última versión del instrumento, deja al descubierto funciones semióticas actuativas y argumentativas (conceptuales, proposicionales, con contraejemplos y deductivas) y una amplia red de relaciones conceptuales involucradas en dichas funciones semióticas, lo que hace posible valorar la comprensión lograda de la Divisibilidad, de acuerdo con distintos niveles de comprensión.

Introducción

Esta tesis doctoral se enmarca en una línea de investigación de la Didáctica de la Matemática desarrollada por Juan Díaz Godino, en la Universidad de Granada, a partir de los años 90. El grupo de investigación que el autor dirige, denominado Teoría de la Educación Matemática, elaboró el modelo epistémico y cognitivo dado en llamar Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática, el cual se adopta como modelo teórico de la investigación que se presenta en esta memoria.

El objetivo fundamental de esta tesis es valorar la comprensión que han alcanzado, en el Nivel Medio, los estudiantes que inician la carrera de Profesorado en Matemática, en la Facultad de Ciencias Exactas, Naturales y Agrimensura (FaCENA) de la Universidad Nacional del Nordeste (UNNE), sobre objetos matemáticos de la Divisibilidad.

En anteriores investigaciones realizadas, específicamente al elaborar la Tesina de Licenciatura en Didáctica de la Matemática de la FaCENA, una investigación financiada por el Instituto Nacional de Formación Docente del Ministerio de Educación de nuestro país, la Tesis de Maestría en Docencia Universitaria, llevada a cabo en la UNNE, en todos los casos sobre aspectos relacionados con el estudio de prácticas institucionales y personales asociadas a ciertas nociones enmarcadas en la Divisibilidad en el Nivel Medio, han quedado en evidencia las dificultades que tienen los alumnos al momento de establecer relaciones conceptuales, movilizadas por un problema, entre diferentes objetos matemáticos o distintos significados de un mismo objeto. Similares apreciaciones hemos obtenido durante la realización de ciertos trabajos relacionados con la comprensión de objetos matemáticos, particularmente con los involucrados en la Divisibilidad, en el ámbito de investigaciones llevadas a cabo en la Universidad Nacional de Villa María.

Durante el inicio de esta tesis realizamos un minucioso análisis de antecedentes, habiendo abordado investigaciones relacionadas con la valoración de la comprensión de objetos de la Divisibilidad, las que dan cuenta de los inconvenientes que poseen los alumnos de los niveles Primario y

Secundario, como así también, los maestros y profesores en formación y en ejercicio de la profesión, cuando deben establecer relaciones conceptuales entre entidades primarias de la Divisibilidad, a propósito de la resolución de problemas. De estos trabajos hemos tomado algunas sugerencias de problemas y tipos de problemas que por su relevancia deberían estar presentes en las aulas. Con algunas de estas investigaciones inclusive compartimos marco teórico y/o metodológico.

Luego del planteamiento general de la investigación, explicitado en el primer capítulo, el análisis de los antecedentes se expone en el capítulo 2 de esta tesis.

En el tercer capítulo se presenta el marco teórico de encuadre de la investigación, esto es, los aspectos fundamentales del Enfoque Ontosemiótico, relacionados con la investigación.

En el capítulo 4 se expone la metodología general que orienta el desarrollo de la investigación. La misma es de naturaleza cualitativa, basada y fundamentada en el diseño, usando herramientas de análisis provenientes del marco teórico adoptado, tales como los constructos “configuración epistémica”, “función semiótica” e “idoneidad didáctica”.

El primer marco epistémico y didáctico de referencia para el pretendido análisis de prácticas personales de los alumnos ingresantes al Profesorado en Matemática, que se incluye en el quinto capítulo, se modeliza a través de una configuración epistémica, estructurada sobre tipos de tareas de la Divisibilidad en el Nivel Medio.

En base a esta organización matemática se elabora un instrumento de indagación constituido por una muestra de situaciones-problemas de Divisibilidad, para el Nivel Medio, con el propósito de valorar la comprensión alcanzada por los alumnos destinatarios de la exploración. Dicho instrumento tuvo un largo proceso de construcción. Los análisis didácticos de las prácticas de los estudiantes que se realizaron luego de la instrumentación de sus dos primeras versiones, el permanente estudio de su idoneidad didáctica, la valoración de los pares académicos y el constante análisis de la literatura correspondiente, hicieron posible la elaboración de su versión definitiva.

En la versión final, los enunciados de las consignas fueron mejorados a fin de evitar conflictos semióticos, y no se incluyeron problemas que en su resolución involucran el establecimiento de las mismas (o muy similares) relaciones conceptuales. Asimismo, se pudo mejorar el análisis a priori de las prácticas institucionales de referencia.

La tercera y última versión del instrumento se expone en el sexto capítulo, acompañado de un análisis epistémico y didáctico de su contenido, el cual se constituye en el segundo marco epistémico y didáctico de referencia. Para cada una de las situaciones-problemas que lo componen se realiza un análisis ontosemiótico, esto es, se modelizan las prácticas institucionales desarrolladas a través de configuraciones epistémicas, explicitando las principales relaciones entre entidades primarias, en término de funciones semióticas. Como complemento de este análisis, se elabora una matriz de desempeño o comprensión, en la que se incluyen prácticas matemáticas institucionales, de cada una de las situaciones-problemas del instrumento, factibles de ser elaboradas por alumnos que inician el Profesorado, caracterizados según cuatro niveles progresivos de comprensión: novato, aprendiz, experto y distinguido.

Cabe aclarar que tanto el análisis ontosemiótico realizado sobre los problemas del instrumento como las prácticas matemáticas incluidas en la matriz de desempeño y el permanente estudio de la idoneidad didáctica del contenido del instrumento, fueron evolucionando y ampliándose permanentemente durante el proceso investigativo, a partir de las exploraciones áulicas con las distintas versiones del instrumento, las observaciones de los pares expertos y el análisis bibliográfico de textos de Matemática, Educación Matemática y diseños curriculares.

A partir de los elementos referenciales nombrados, se realiza la exploración con la última versión del instrumento, en una de las primeras clases teóricas de la asignatura Álgebra I.

El análisis ontosemiótico de las prácticas de los alumnos ingresantes al Profesorado en Matemática se expone en el capítulo 7. En esa sección se determinan y clasifican las funciones semióticas elaboradas por los estudiantes a propósito de la resolución de las situaciones-problemas del instrumento de indagación. En el primer nivel, se consideran las funciones semióticas actuativas; en el segundo, las argumentativas conceptuales, proposicionales y con contraejemplos; mientras que, en el tercero, se incluyen las argumentativas deductivas.

La clasificación mencionada de las funciones semióticas, la determinación de los objetos de la Divisibilidad involucrados en las mismas y el análisis de la compleja red de relaciones conceptuales establecida entre esos objetos, permite valorar la comprensión lograda por los estudiantes.

CAPÍTULO 1

Planteamiento de la Investigación

1.1. Introducción

En este capítulo se plantea la problemática de la investigación, señalando la posición tomada acerca de asumir la conformación de la Divisibilidad en el conjunto de los Números Naturales.

Asimismo, se indican los objetivos de la misma, relacionados con la valoración de la comprensión alcanzada por estudiantes sobre Divisibilidad, en el Nivel Medio.

Luego se fundamenta la elección del tema, en cuyo marco se explica el significado que se adopta sobre “comprensión”.

Finalmente se exponen los aportes de la tesis a la comunidad académica.

1.2. Delimitación de la problemática de la investigación

En principio cabe señalar que organismos internacionales, abocados a analizar, discutir y acordar aspectos relativos a la enseñanza y aprendizaje de la matemática, sugieren incluir el estudio de la Teoría Elemental de Números en el currículo de la formación inicial de docentes de matemática. Por ejemplo, el (NCTM, 1989) explica que el abordaje de esta temática proporciona una comprensión profunda de las propiedades y las estructuras numéricas, a los maestros. Asimismo, el informe de la Conference Board of the Mathematical Sciences (CBMS, 2001) insiste sobre la misma recomendación, pero referida a la formación de profesores de secundaria.

En nuestro país, en la actualidad, la enseñanza de la Divisibilidad se inicia en la Escuela Primaria, se retoma y complejiza en la Escuela Secundaria y forma parte de la currícula de las primeras materias de los planes de estudio del Profesorado en Matemática del Nivel Superior.

En el Nivel Primario los estudiantes trabajan con divisores, múltiplos, factores, criterios de divisibilidad, factorización, máximo común divisor, mínimo común múltiplo, clasificación de números en primos, compuestos, etc. en el conjunto de los Números Naturales y continúan en el Nivel Secundario, ampliando sus significados, también en el conjunto de los naturales, de acuerdo con lo que disponen los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios (NAP) en ME (2011), definidos para todo el territorio nacional. No obstante, varios libros de textos de reconocidas editoriales plantean el estudio de ciertos objetos de la Divisibilidad en el conjunto de los Números Enteros. Es también en este conjunto donde abordan la Divisibilidad los alumnos universitarios cuyas prácticas son objeto de análisis de esta tesis.

Trabajos como los realizados por Dubinsky (1991); Vergnaud (1994); Zazkis & Gadowsky (2001); Bodí (2006); Bodí, Valls y Llinares (2007); Espinoza (2012) y Vallejos Vargas (2012), muestran que, al terminar la Escuela Secundaria, se pueden observar en los alumnos diferentes niveles de dificultad en la resolución de tareas sencillas vinculadas a la Divisibilidad.

Como aporte a la Didáctica de la Divisibilidad, y en estrecha relación con los trabajos desarrollados por los autores recién indicados, en esta tesis se persigue el propósito de valorar la comprensión de los alumnos ingresantes a la carrera de Profesorado en Matemática referida a la Divisibilidad.

Para cumplir con este objetivo, se analizan las redes de relaciones que estos alumnos establecen entre objetos primarios de la Divisibilidad a partir de la resolución de unas situaciones-problemas del instrumento de recolección de información elaborado al efecto. Las relaciones más significativas a los intereses de la investigación se caracterizan en términos de funciones semióticas.

Cabe aclarar que, si bien es interesante analizar los conflictos semióticos potenciales y reales como forma de explicar dificultades de aprendizaje, y en tal sentido focalizar el estudio en la falta de establecimiento de algunas funciones semióticas o en la elaboración de funciones semióticas incompletas o erróneas, no es este el propósito que persigue la tesis. La elaboración de este tipo de relaciones significa que el alumno no ha comprendido cabalmente un concepto y por lo tanto sus prácticas no son objeto de análisis, dado que en este trabajo se busca valorar aspectos constitutivos de la comprensión.

En referencia a la noción de comprensión, en concordancia con Godino (2003), en este trabajo la entendemos del siguiente modo: Comprender un determinado objeto matemático, significa ser capaz de articular coherentemente seis elementos de significados referidos al mismo: las situaciones problemas en las que participa el objeto, los conceptos, las propiedades, los procedimientos, los argumentos y el lenguaje.

En relación con esta concepción de la comprensión de un objeto matemático, en el Proyecto de mejora para la formación inicial de profesores para el Nivel Secundario (INFOD, 2010, p. 122), se puede apreciar que:

> Comprender un objeto matemático significa (…) producir, organizar y reorganizar la red de relaciones que se deben establecer en la resolución de una situación problemática (intra y extra-matemática) que "obliga" al funcionamiento del objeto, los procedimientos o técnicas que se despliegan para resolverla, las definiciones, propiedades, argumentos que validan las acciones realizadas, todas ellas soportadas y reguladas por el lenguaje (…), propio de la Matemática, y la lengua natural.

Esta posición es en todo coherente con el planteamiento de diversos investigadores en Educación Matemática, como ser, Font (2011), Pochulu y Rodríguez (2017), Rodríguez, Pochulu y Ceccarini (2011), Hiebert y Lefevre (1986), Godino (2000), Godino (2003), entre otros.

A fin de avanzar en la delimitación de la problemática de investigación es necesario tomar posición acerca del conjunto numérico de encuadre, en donde asumimos la conformación de la Divisibilidad.

Tanto los NAP (2011) como los Diseños Curriculares Jurisdiccionales correspondientes a algunas provincias aledañas a la UNNE, como ser Chaco (MECCTC, 2012) y Corrientes (MEC, 2012), plantean el estudio de la Divisibilidad, para el Nivel Medio, en el conjunto de los Números Naturales. Asimismo, varias de las investigaciones que se toman como antecedentes de esta tesis realizan un estudio didáctico de esta temática también en este conjunto.

Entre los objetos centrales de la Divisibilidad en el conjunto de los Números Naturales se encuentra el Mínimo Común Múltiplo, cuya existencia pareciera no estar garantizada en los enteros, considerando que el conjunto de los múltiplos enteros comunes de dos números enteros no tiene mínimo. Otro ejemplo de la no conservación de propiedades en la extensión de la Divisibilidad al conjunto de los Números Enteros lo constituye el orden que se establece entre un número y su divisor. En efecto, si a es divisor de b, siendo ambos números naturales, sucede que a es menor o igual que b, mientras que, en Z, el primero puede también ser mayor que el segundo.

En 1634, Stevin extendió el algoritmo de Euclides al cálculo del Máximo Común Divisor de dos polinomios. Euler, en 1770, trató de ampliar el concepto de Divisor más allá de los números enteros y de los polinomios, encontrándose con el problema de la imposibilidad de la conservación de todas las propiedades en esa extensión, en especial, la de la existencia del Máximo Común Divisor y de la unicidad del Teorema Fundamental de la Aritmética (Kline, 1992; Boyer, 1999).

Estos autores señalan también que hasta el siglo XIX, con los aportes de Gauss, la Divisibilidad se desarrolló en el conjunto de los Números Enteros. En este mismo siglo, autores como Kummer, Dedekind y Kronecker generalizaron la Teoría de la Divisibilidad mediante la creación de la estructura de ideal. El Álgebra Conmutativa Moderna empezó a formalizarse a partir de 1910, década en la que se creó la estructura de anillo debido a Fraenkel.

A partir del siglo XX, la Teoría de Números ocupó un amplio espectro en la Matemática, pudiéndose destacar el estudio de la Divisibilidad en el conjunto de los Números Naturales. Los objetos centrales de la Divisibilidad que cabe mencionar, caracterizados en este dominio, son: Divisor, Factor, Divisible, Criterios de Divisibilidad, Número Primo y Compuesto, Teorema Fundamental de la Aritmética, Máximo Común Divisor y Mínimo Común Múltiplo.

Estos hechos históricos nos permiten asumir la conformación de la Divisibilidad en el conjunto de los Números Naturales, pues es en N donde sus objetos conservan todas sus propiedades. Esta postura concuerda con los diseños curriculares tomados como referencia y varias de las investigaciones que se analizan en los antecedentes de esta tesis.

Sin embargo, creemos que es posible el desarrollo de un fructífero trabajo matemático y la obtención de interesantes conocimientos al plantear el estudio de algunos objetos de la Divisibilidad y sus propiedades en el conjunto de los Números Enteros. Como ejemplo de esta postura, incorporamos en la configuración epistémica del marco matemático referencial (capítulo 5) la problemática del cero en tareas relativas a la Divisibilidad, y la inclusión de algunas situaciones-problemas en el contexto de Z en el instrumento de recolección de información que se explicita en el capítulo 6.

1.3. Objetivos de la investigación

1.3.1. Objetivo general

Valorar la comprensión que han alcanzado, en el Nivel Medio, los estudiantes que inician la carrera de Profesorado en Matemática en la Facultad de Ciencias Exactas, Naturales y Agrimensura de la Universidad Nacional del Nordeste, sobre objetos matemáticos enmarcados en la Divisibilidad.

1.3.2. Objetivos específicos

a. Determinar las funciones semióticas que establecen los estudiantes a partir de la resolución de las situaciones-problemas que conforman el instrumento de indagación elaborado al efecto.
b. Analizar la red de relaciones, establecida entre objetos matemáticos primarios de la Divisibilidad, involucrada en las funciones semióticas.
c. Clasificar las funciones semióticas en virtud de la riqueza, variedad y complejidad de las relaciones conceptuales involucradas en las mismas.

1.4. Justificación de la elección del tema de investigación

Uno de los intereses principales que persiguen las investigaciones que estudian la comprensión alcanzada por estudiantes es el análisis de las redes de relaciones que pueden establecer a propósito de la resolución de problemas. Sin embargo, son pocas las investigaciones abocadas al diseño de instrumentos y la búsqueda de criterios que permitan caracterizar y potenciar dichas redes conceptuales.

Con esta investigación se quiere avanzar en esta dirección mediante el diseño y aplicación de un instrumento que permita valorar la comprensión alcanzada por los estudiantes mencionados en la institución indicada.

La importancia de las actividades que realizan los estudiantes con la Divisibilidad se evidencia en el Nivel Primario, Secundario y en varias cátedras de Matemática que cursan en el Nivel Terciario o Universitario, dado que es un contenido básico para la apropiación de otros como el de Congruencia Entera, Divisibilidad en los Polinomios, Estructuras Algebraicas, etc.

1.5. Aportes de esta tesis a la comunidad académica

La relevancia de esta tesis queda justificada en los aportes de conocimientos teóricos y metodológicos a toda la comunidad de Educación Matemática, específicamente a los profesores de matemática del Nivel Medio, a los profesores del Profesorado en Matemática y a los investigadores en Educación Matemática, puntualmente a partir de las siguientes producciones:

- El instrumento de recolección de información y su validación: el mismo aporta al docente del Nivel Medio una interesante muestra de tipos de problemas de Divisibilidad que los alumnos de dicho nivel deberían poder resolver y que se tendrían que retomar en la formación de profesores, dadas las múltiples dificultades observadas en los ingresantes al profesorado al momento de abordar estas situaciones.

Los objetos matemáticos involucrados en las prácticas resolutivas de los problemas del instrumento constituyen una gama muy variada de contenidos de enseñanza del Nivel Medio, mientras que las relaciones conceptuales establecidas entre los mismos forman una amplia red.

Tanto a docentes como investigadores, la tesis presenta un instrumento que ha pasado por muchas y variadas instancias de evaluación, como ser: el análisis de idoneidades didácticas, las exploraciones áulicas y los análisis didácticos correspondientes, la evaluación de pares expertos. Su proceso de construcción ilustra una metodología de investigación fundamentada en general en las investigaciones basadas en el diseño.

- El análisis ontosemiótico de los problemas del instrumento: Este análisis, fundamentado desde el punto de vista teórico y metodológico en una teoría didáctica conocida y utilizada mundialmente como lo es el Enfoque Ontosemiótico, aporta el conocimiento de los objetos matemáticos involucrados en la resolución de los problemas del instrumento y de sus relaciones, en los sistemas de prácticas institucionales. Es una potente herramienta de referencia para analizar las prácticas matemáticas desarrolladas por los estudiantes. En el caso del docente formador de profesores, que enseña materias como Didáctica de la Matemática y relacionadas, debería estar en condiciones no solamente de realizar estos análisis referenciales para analizar las prácticas de sus propios alumnos, sino también, promover este tipo de tareas a sus alumnos, dirigiendo la mirada en los sistemas de prácticas de los alumnos del Nivel Medio.

Este tipo de análisis deja en evidencia que el conocimiento del docente mejora sustancialmente su comprensión sobre las producciones de los alumnos, sobre las dificultades que poseen, lo cual posibilita el diseño de actividades de enseñanza tendientes a superarlas a partir de lo que los estudiantes son capaces de realizar ya sea de manera correcta o no.

- La matriz de desempeño o comprensión: En la misma se incluyen tipos de prácticas matemáticas institucionales sobre los problemas del instrumento, según cuatro niveles de desempeño o comprensión: novato, aprendiz, experto y distinguido. Se constituye en una interesante herramienta de análisis a priori, útil para analizar las prácticas matemáticas de los estudiantes. Complementa el análisis ontosemiótico de las situaciones-problemas del instrumento y amplía el marco institucional de referencia.

CAPÍTULO 2

Antecedentes de la Investigación

2.1. Introducción

En este capítulo se presentan los aspectos fundamentales de algunas investigaciones relacionadas con esta tesis.

La mayoría de las mismas comparten tópicos sobre la comprensión de objetos básicos y centrales de la Teoría de Números y se han llevado a cabo en contextos escolares de la educación primaria y media (con alumnos o maestros) y en ámbitos de formación de maestros o profesores.

Todas ellas proporcionan información destacada que permite establecer un punto de partida para esta tesis y fueron seleccionadas por la temática similar, el enfoque teórico o metodológico compartido, las problemáticas abordadas y los resultados obtenidos.

2.2. Investigaciones relacionadas con la comprensión de objetos de la Teoría elemental de números

Las investigaciones que se caracterizan sucintamente en este apartado se organizan en cuatro grupos:

a) Las que están centradas en el estudio didáctico-matemático de redes de relaciones entre objetos matemáticos básicos de la Teoría de Números.
b) Las que se han llevado a cabo con maestros o profesores durante la formación inicial (en los profesorados).
c) Las que se han realizado en las escuelas, con estudiantes o docentes (maestros o profesores) en ejercicio de la profesión.
d) Las que ponen énfasis en la importancia de las distintas formas de representación de los números en la comprensión de los contenidos de la Divisibilidad.

2.2.1. Las investigaciones que están centradas en el estudio didáctico-matemático de redes de relaciones entre objetos matemáticos básicos de la Divisibilidad

Etchegaray (1998), en el marco del Programa Epistemológico o Didáctica Fundamental, más concretamente desde la perspectiva de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, realiza un interesante análisis epistemológico y didáctico de ciertas nociones elementales de la Teoría de Números.

El objetivo que persigue es avanzar en la elucidación de los elementos de significado de ciertos objetos matemáticos, inherentes a la Teoría de Números, como "Divisibilidad en el conjunto de los números enteros".

El trabajo pretende aportar a la discusión de uno de los modelos del enfoque teórico de encuadre general denominado "análisis ecológico de los saberes matemáticos". Este modelo está basado en la metáfora ecológica propuesta por Chevallard (1989) para el análisis didáctico, la que es retomada y extendida por Godino (1993) con el fin de convertirse en un recurso de gran utilidad para comprender la génesis, el desarrollo y las funciones de los saberes matemáticos en las distintas instituciones. Estudia la evolución de dichos saberes considerándolos como "objetos" que interaccionan y desempeñan un rol en el interior de las instituciones donde se reconoce su existencia cultural, ya sean instituciones de producción o de enseñanza.

La autora explica que la aplicación del modelo señalado recientemente permite notar un problema didáctico muy frecuente: la falta de compatibilización entre significados institucionales de los "objetos de enseñanza" con los denominados "significados personales" ligados al "objeto enseñado", por lo que fundamentalmente toma como herramienta metodológica de su trabajo la comparación entre marcos institucionales y personales. Concretamente, analiza ciertas organizaciones matemático-didácticas concernientes a la Aritmética, determinando tanto significados institucionales como significados personales, con el fin de conocer relaciones entre ellos y así poder construir criterios para actuar sobre la construcción de los mismos.

Del marco institucional de referencia, quien merece ser destacado por su relación con esta tesis, se puede decir que parte de una muestra de problemas de Divisibilidad para la Educación Media, tratando de reconstruir, a lo largo de la organización matemática desarrollada, unas clases de problemas de Divisibilidad, y describir “el proceso de estudio” llevado a cabo para lograrlo. A continuación de cada clase de problemas explicita el entorno tecnológico que describe y justifica las técnicas de resolución o sea el conjunto de definiciones, propiedades y teoremas que implícitamente se ponen en juego en la resolución de los mismos, construyendo una organización matemática de sustancial referencia para analizar significados personales y avanzar en los conocimientos didácticos necesarios para organizar procesos de estudio didácticamente pertinentes para los alumnos.

Este marco referencial, consistente con el planteo teórico asumido, muestra a las claras que toda organización matemática debe llevar implícita una actividad matemática, la cual consta de tres aspectos claves: es una actividad de resolución de problemas socialmente compartida, que se expresa en un lenguaje simbólico y se concibe como un sistema conceptual lógicamente organizado.

Finalmente, es importante destacar que, basada en el análisis histórico-epistemológico realizado sobre las nociones básicas de la Divisibilidad, Etchegaray señala que su evolución es muy compleja; su desarrollo se caracteriza por avanzar desde técnicas pre algebraicas a una organización algebraica. Por esta razón, y argumentando que en nuestras instituciones escolares los elementos constitutivos de la Teoría de Números aparecen fragmentados y ligados a prácticas inadecuadas, explica que se hace necesario realizar alguna reconstrucción de esta obra matemática.

Espinoza (2012), en su trabajo de tesis de maestría, realiza un estudio didáctico-matemático de la red de relaciones que los alumnos del Nivel Medio establecen para resolver un problema de Divisibilidad, denominado “El hotel de los líos”, cuyo enunciado es el siguiente:

Se trata de un hotel que tiene infinitas puertas numeradas: 1, 2, 3,…

Cuando empieza la historia todas ellas estaban abiertas.

El hotel tiene un conserje, el cual como se aburría durante las noches, se dedicó a abrir y a cerrar puertas; si las encontraba abiertas las cerraba, si estaban cerradas las abría. Todas las noches partía de su oficina (que tiene en la puerta el número cero).

- En la primera noche, pasó por todas las puertas; abrió las puertas que estaban cerradas y cerró las que estaban abiertas.

- En la segunda noche, hizo lo mismo, pero de dos en dos; abrió las puertas que estaban cerradas y cerró las que estaban abiertas (por ejemplo, abrió la 2, la 4, la 6, etc.).

- En la tercera noche fue de tres en tres, abriendo las que estaban cerradas y cerrando las que estaban abiertas.

- En la siguiente noche, comenzando también desde el principio cambió nuevamente el estado de las puertas de cuatro en cuatro, de manera que abrió las que estaban cerradas y cerró las que estaban abiertas.

- Después hizo lo mismo yendo de cinco en cinco, seis en seis y así pasaron infinitas noches.

Consigna general: *tienen que lograr saber en qué estado quedó cada puerta después de infinitas noches. Para cualquier número, tienen que saber si la puerta que tiene ese número, quedó abierta o cerrada.*

Por su relación con esta tesis, se trata de dar cuenta de las características del marco didáctico-matemático institucional de referencia elaborado por el autor en el marco del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. El mismo consta de configuraciones epistémicas sobre objetos matemáticos involucrados en el problema mencionado y los que emergen de su resolución. Persigue el propósito de analizar prácticas de Divisibilidad de alumnos en cuanto al establecimiento de relaciones conceptuales se refiere, en distintas circunstancias temporales y contextuales, a partir de la referencia del marco institucional y de una secuencia didáctica elaborada al efecto. La pregunta guía para la elaboración de las configuraciones epistémicas del marco institucional es la siguiente: ¿qué diversidad de conocimientos se ponen en juego en la realización de la tarea de resolución del problema del Hotel de los líos y cómo se relacionan?

Concluye que la trama de relaciones matemáticas estructuradas sobre el problema, que pudo vislumbrar en las mencionadas configuraciones, es verdaderamente compleja y claramente emergente de contextos de uso diferentes; uno responde al contexto en el que está inscripto el problema (situacional) y, el otro, es un contexto netamente aritmético. El autor indica que no alcanza con el contexto situacional para promover un sistema de prácticas que dé significado al concepto del objeto matemático emergente de la situación, el de “cuadrado perfecto” y que, por ende, se hace necesario poner en relación ambos contextos para establecer que “las puertas que quedan cerradas están identificadas con números que tienen una cantidad impar de divisores naturales” y que “los mismos tienen raíz cuadrada entera”, dos de los significados de los cuadrados perfectos que es necesario relacionar. Precisamente, el hecho de saber que las puertas que quedan cerradas están identificadas con un número que tiene una cantidad impar de divisores naturales (relación en el plano del contexto), no soluciona el problema, dado que no siempre se puede determinar la cantidad de divisores de un número cualquiera, motivo por el cual se hace necesario construir una nueva relación, en el plano aritmético: el hecho de poseer una cantidad impar de divisores naturales se corresponde con el de tener raíz cuadrada entera.

El análisis de las configuraciones epistémicas de referencia permitió al autor determinar ciertos conflictos semióticos potenciales y reales, relacionados con:

a) La utilización de registros semióticos poco adecuados para representar la situación-problema y la consecuente complicación al momento de usarlos como herramientas de reflexión y formulación de conjeturas.

b) El empleo de procedimientos poco económicos para solucionar la situación, como la búsqueda de divisores por tanteo y la consecuente falta de orden y exhaustividad en la realización de dicha tarea.

c) La elaboración de conjeturas que pudieran surgir de generalizaciones abusivas como, por ejemplo, pensar que "todas las puertas que terminan en 0 quedan abiertas", que "las puertas identificadas con números pares siempre quedan abiertas".

d) La atribución de propiedades a un objeto que no las tiene, por ejemplo, conjeturar que los números primos tienen una cantidad par de divisores (y representan a puertas abiertas), mientras que los números compuestos tienen una cantidad impar de divisores (e identifican a puertas cerradas).

2.2.2. Las investigaciones que se han llevado a cabo con maestros o profesores durante la formación inicial

Zazkis (2001) explora la red de relaciones que establecen 19 estudiantes de magisterio entre los términos de múltiplo, divisor y factor, en el ámbito de un curso de formación, en el que se abordaron temas como: el algoritmo de la división, divisores, factores, múltiplos, reglas de divisibilidad, números primos, números compuestos, factorización en números primos, mínimo común múltiplo y máximo común divisor.

El estudio se realiza retomando las ideas de Hiebert & Lefevre (1986) acerca de que el conocimiento conceptual es una red conectada de conocimientos, la cual sugiere no sólo la conexión sino también la complejidad del conocimiento.

El conjunto de preguntas de la entrevista, que se analiza en este artículo, se muestra en el siguiente recuadro:

Conjunto de Preguntas 1*: Observa los siguientes términos: número entero, números naturales, suma, producto, divisor, factor, número primo, número compuesto, múltiplo. ¿Te suenan familiares? ¿Qué significa cada una de esas palabras? ¿Puedes ejemplificarlas?*

Conjunto de Preguntas 2*: ¿Cuáles son los factores primos de 117? ¿Puedes listarlos todos? ¿Cuáles son los factores de 117=32x13? ¿Puedes listarlos todos? ¿Cuáles son los divisores de 117=32x13? ¿Puedes listarlos todos? ¿De qué número 117 es un múltiplo? ¿117 es múltiplo de 26? ¿Puedes dar un ejemplo de un múltiplo de 117? ¿Tienes alguna observación?¿Puedes pensar en un factor que no sea divisor?¿Puedes pensar en un divisor que no sea factor? ¿Puedes explicarlo?¿Puedes pensar en un número que sea tanto múltiplo como divisor de 117? ¿Algún otro?*

Los resultados sugieren que las relaciones, que matemáticamente parecen claras y sencillas, representan una red compleja para los estudiantes.

Las aproximaciones que tienen los alumnos, al resolver problemas, demuestran que no utilizan totalmente las vinculaciones matemáticas de estos conceptos, dado que la mayoría de las veces son débiles o incompletas.

Bodí (2006) elabora una tesis doctoral, en la Universidad de Alicante, sobre el análisis de la comprensión de la Divisibilidad en el conjunto de los Números Naturales. El objetivo de la investigación es analizar la comprensión de los alumnos de Educación Secundaria (12-17 años) de la Divisibilidad en N, desde la perspectiva del modelo teórico APOS (Acción-Proceso-Objeto-Esquema) y caracterizar los niveles de desarrollo del esquema de divisibilidad: Intra, Ínter y Trans.

En cuanto al diseño metodológico, el autor muestra cómo proyectó, aplicó y analizó los instrumentos de recolección de datos, partiendo del estudio piloto que estaba conformado por cuestionarios y entrevistas. Para seleccionar las tareas del cuestionario definitivo realizó un estudio psicométrico del cuestionario piloto, en el que se analizó el índice de dificultad, la homogeneidad, el índice de discriminación, el coeficiente de fiabilidad, la validez y la generalizabilidad. También se llevó a cabo un análisis factorial. Tras el análisis psicométrico se elaboró el cuestionario definitivo en el que participaron 371 alumnos de los cursos 1º y 4º de Escuela Secundaria Obligatoria y 1º de Bachillerato. Además, analizó 63 entrevistas individuales.

A partir de los datos obtenidos en el cuestionario definitivo realizó un estudio psicométrico por niveles y otro global, lo que le permitió determinar y comparar la dificultad, la fiabilidad, la generalizabilidad del cuestionario y realizar el análisis factorial del mismo. Dicho análisis le permitió identificar que la mayor influencia en la determinación de los principales factores es la acepción "Q es divisible por P" y el modo de representación factorial. Posteriormente, efectuó un análisis cualitativo de las respuestas de los cuestionarios y de las entrevistas para establecer las formas de conocer los elementos de la divisibilidad en N, caracterizar los niveles de desarrollo y la tematización del esquema de divisibilidad. En estrecha relación con el marco teórico adoptado, el procedimiento de análisis conjunto de los cuestionarios y entrevistas se realizó a través de tres fases; una primera fase donde se caracterizaron las unidades de análisis y se generaron las primeras inferencias, a partir de las cuales, en una segunda fase, se determinaron las características de las formas de conocer los elementos matemáticos del esquema de divisibilidad y el desarrollo del esquema. Finalmente, en la tercera fase, se asignó el nivel de desarrollo del esquema de divisibilidad (Intra–Ínter-Trans) a cada uno de los alumnos.

De los resultados se desprende que entre los alumnos predomina el Nivel Intra del desarrollo del esquema de divisibilidad en todos los cursos. Los alumnos que pertenecen a este nivel tienen dificultades en establecer relaciones entre los elementos del esquema de divisibilidad. En el nivel Ínter se empieza a establecer relaciones entre los elementos, aunque no siempre se es competente para indicar que un número es divisible por sus factores compuestos. En el nivel Trans se pueden establecer la mayoría de las relaciones de divisibilidad, vinculándola a la representación factorial de los números naturales.

La tematización del esquema de divisibilidad fue identificada a partir del manejo de las diferentes propiedades de la divisibilidad, con diferentes representaciones de los números. El uso de las relaciones bicondicionales, de la coordinación y de la relación contrarrecíproca entre los elementos de divisibilidad permite realizar inferencias correctas en términos de divisores y no divisores, de múltiplos y no múltiplos, admitiendo la idea de la unicidad de la descomposición en factores primos y que cualquier divisor o múltiplo del número debe poder formarse a partir de la representación factorial del mismo.

Existe paralelismo entre la reificación y la comprensión de los conceptos matemáticos cuando el individuo establece relaciones lógicas entre ellos, independientemente del modo de representación adoptado. En este sentido, la descomposición factorial entendida al mismo tiempo como procedimiento y concepto ha resultado fundamental para el desarrollo del esquema de divisibilidad, facilitando el desarrollo gradual del mismo.

Retomado de la tesis doctoral de López (2015), se destaca la tesis doctoral desarrollada por Feldman, en 2012, en la Universidad de Boston, en la cual describe el proceso llevado a cabo por un grupo de maestros en formación en la comprensión de tópicos de Teoría de Números (factores, divisibilidad, máximo común divisor y mínimo común múltiplo).

En el marco de la teoría APOS, el estudio se llevó a cabo durante tres semanas de instrucción con 59 maestros en formación, en un curso de matemáticas en la mencionada universidad. Se realizaron también entrevistas clínicas a seis participantes.

Al analizar los resultados, la investigadora señala que, al contrario de investigaciones previas, este estudio proporciona evidencia de que los maestros en formación pueden desarrollar una comprensión profunda y relacional de objetos de la Teoría de Números. Sugiere que, en investigaciones futuras sobre comprensión de tópicos de Teoría de Números, se preste atención al trabajo que los maestros desarrollan durante los períodos de instrucción en las aulas. Asimismo, señala que las tareas matemáticas que requieren de la descomposición factorial prima de un número, como herramienta fundamental de la Teoría de Números, deben ser investigadas por los efectos que producen en la comprensión de los maestros en formación.

2.2.3. Las investigaciones que se han realizado en las escuelas, con estudiantes, maestros o profesores en ejercicio de la profesión

Bodí, Valls y Llinares (2007), analizan la comprensión de estudiantes de secundaria sobre la Divisibilidad en el conjunto de los Números Naturales y la relación de dicha comprensión con los modos de representación decimal y factorial. Precisamente, el objetivo de la investigación está relacionado con la profundización de la comprensión de los alumnos de Educación Secundaria de la Divisibilidad y la influencia que en esta comprensión ejercen los modos de representación (decimal y factorial) de los números naturales.

Fueron 371 estudiantes de centros públicos de Enseñanza Secundaria los que participaron en esta investigación; 120 estudiantes de 1º de ESO, 137 de 4º de ESO y 114 de 1º de Bachillerato.

Los investigadores elaboraron un cuestionario que incluía tareas que demandaban a los estudiantes movilizar sus ideas sobre las diferentes acepciones léxicas, así como los significados dados a sus equivalencias (P es divisor de Q⇔Q es múltiplo de P⇔P es un factor de Q⇔Q es divisible por P). El mismo se suministró en una clase habitual, con una duración de 50 minutos, sin que los estudiantes hubieran recibido información previa sobre el contenido de las tareas.

Las repuestas al cuestionario se codificaron de forma dicotómica, 0 ó 1, según la respuesta fuese correcta o incorrecta. Calcularon el índice de dificultad, la homogeneidad, el coeficiente de fiabilidad (Alpha de Cronbach), el análisis factorial y la generalizabilidad de la prueba, ajustándose a las características correlacionales básicas, utilizando el programa SPSS 11.5, obteniendo resultados de alta consistencia en todos los casos.

Posteriormente realizaron un análisis estadístico implicativo de las respuestas de los estudiantes mediante el software CHIC (*Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive*). El mismo pone de manifiesto, entre otros aspectos, que en la comprensión de la divisibilidad resulta fundamental el uso que los estudiantes hacen de los modos de representación (decimal o factorial) de los números naturales y la asunción de la unicidad de la descomposición de un número natural en producto de factores primos. Los resultados muestran la necesidad de los estudiantes de tener la representación decimal de los números naturales para discutir la divisibilidad.

Como contribución a la enseñanza, explican la necesidad de superar las prácticas habituales de carácter procedimental, promoviendo el desarrollo de prácticas que permitan el perfeccionamiento cognitivo de los estudiantes y que favorezcan la comprensión de la divisibilidad a través de la comprensión de la unicidad de la descomposición factorial de los números naturales en producto de factores primos.

Recientemente se ha mencionado como antecedente el trabajo de tesis de maestría de Espinoza (2012), destacando la trama de relaciones (entre objetos matemáticos distintos y también entre diferentes significados de un mismo objeto) que el autor detecta a partir de la elaboración de unas configuraciones epistémicas de referencia. Las mismas fueron tomadas como marco para la elaboración de una secuencia didáctica, con el objeto de explorar en las aulas, del Nivel Medio, la trama de relaciones conceptuales que los alumnos establecen, a propósito de la resolución del problema del Hotel de los líos.

Durante dicha exploración, en diferentes momentos y contextos, el autor logra desentrañar una nueva trama de relaciones, distintas a las anticipadas en el marco referencial. Así, a través de la elaboración de configuraciones cognitivas y la comparación con las configuraciones epistémicas referenciales, logra determinar las siguientes relaciones:

- Una puerta cambia de estado en las noches cuyos números son los divisores del número de puerta.
- La puerta n cambia de estado por última vez en la noche n.
- Una puerta queda cerrada si su número de identificación tiene una cantidad impar de divisores.
- Una puerta queda cerrada si su número de identificación tiene un divisor que “forma pareja” consigo mismo en la lista de sus “parejas de divisores”.
- Una puerta queda cerrada si su número de identificación tiene raíz cuadrada entera.

En el trabajo se aprecia que el establecimiento de la vinculación entre los significados de los cuadrados perfectos, el de “tener una cantidad impar de divisores” y el de “disponer de raíz cuadrada entera”, fue realmente dificultosa para los alumnos.

El autor exhorta que no es una tarea sencilla elaborar las relaciones conceptuales necesarias para resolver el problema desde el sólo conocimiento conceptual de las nociones detectadas como necesarias, motivo por el cual sostiene que es imprescindible una instrumentación didáctica pertinente que promueva la construcción de redes de relaciones, a propósito de la resolución del problema mencionado.

Vallejos Vargas (2012) presenta un estudio sobre las justificaciones y procesos afines como el planteamiento de conjeturas, la construcción de contraejemplos, la generalización, etc. en: a) el Diseño Curricular Nacional de la Educación Básica Regular (EBR) de Perú; b) algunos de los textos más difundidos para el primer grado de secundaria de la EBR en Perú; c) las justificaciones dadas por estudiantes de primer grado de secundaria a enunciados que han sido diseñados para las clases. La autora examina la relevancia que los alumnos dan a las justificaciones, particularmente en el tema Divisibilidad.

De los resultados de la investigación, se desean destacar aquellos que guardan relación con las justificaciones que producen los estudiantes sobre afirmaciones enmarcadas en la Divisibilidad: (a) La investigadora explica que los conocimientos previos de los estudiantes sobre Divisibilidad resultaron ser más de una vez obstáculos para el desarrollo de las sesiones de clases, puesto que dificultaron la construcción de justificaciones por parte de los estudiantes. Por ejemplo, los alumnos usaban directamente los resultados que ya conocían “de memoria” sin interesarse por entender el fundamento de dichas verdades matemáticas. Ilustra esta afirmación a partir del caso de las respuestas de los estudiantes a una de las justificaciones individuales que debían presentar para justificar que la suma de dos números pares es siempre un número par. La mayoría de los alumnos respondió diciendo que el enunciado es verdadero argumentando que “par+par = par”, lo que no justifica cabalmente el valor de verdad de la afirmación presentada; (b) a los estudiantes se les hizo difícil obtener la forma general de “un múltiplo de” (o “un número divisible por”). Para encontrar los múltiplos de un número m iban sumando “m” una, dos, tres,…, veces, a partir del cero; (c) los alumnos no manejaban bien la relación entre divisor y múltiplo; en las sesiones de clases se observó que entendían que los divisores de un número son también múltiplos de ese número; (d) algunos alumnos no podían reconocer si un número expresado a través de su descomposición prima era múltiplo (o divisible) de un número expresado en base diez, sin tener que llevar al primero en su expresión decimal y dividirlo por el segundo.

2.2.4. Las que ponen énfasis en la importancia de las distintas formas de representación de los números en la comprensión de los contenidos de la Divisibilidad

Zazkisy & Gadowsky (2001) señalan diferentes caracteres de las representaciones de los números naturales en tareas involucradas en la Teoría de Números.

En la investigación trabajaron con maestros y con alumnos de la Escuela Media, a los que les pidieron resolver un cuestionario en el que, para realizar tareas básicas enmarcadas en la Teoría de Números, presentaban los números según su descomposición factorial prima (Ej. $M=3^3\times5^2\times7$), en representaciones fundamentadas en el algoritmo de la división ($K=6\times147+1$) y en representaciones basadas en la propiedad distributiva ($A=15\times5623+60$).

En las tres representaciones, los participantes prefirieron determinar el valor del número M, K y A en su representación posicional de base diez y hacer una operación aritmética para decidir si es divisible por un número expresado en base diez o si se puede representar como múltiplo de un número también escrito en su expresión decimal, etc.

Entre las conclusiones, las autoras explican que en la escuela se da mayor énfasis a los cálculos en detrimento del análisis de la estructura y de las características de las representaciones de los números. Instan a que en las clases se planteen situaciones de enseñanza, relacionadas con la Teoría de Números, empleando representaciones que excedan a las capacidades de cálculo de las calculadoras. Expresan que la elección de actividades con estas características puede ayudar a los alumnos en la comprensión de las propiedades de los números naturales, en especial de la estructura multiplicativa.

Brown (2002) analiza las dificultades que tienen los futuros maestros en la tarea de encontrar múltiplos comunes entre números expresados en factores primos.

Presenta una sucesión de números escritos según su descomposición factorial prima y solicita a los alumnos encontrar otros términos de la secuencia: $2^2 \times 3^4$, $2^3 \times 3^4$, $2^2 \times 3^5$, $2^4 \times 3^5$, $2^4 \times 3^4$, $2^3 \times 3^5$, … Explícitamente pidió a los estudiantes que buscaran los seis términos siguientes, que expresaran, en producto de factores primos, el término que ocupa la posición 200 y que describieran, mediante la representación en factores primos, el método de obtención del n-ésimo término. Los resultados de esta investigación muestran algo similar a lo ocurrido en el trabajo de Zazkis y Gadowsky (2001), *en el sentido que* la mayoría de los estudiantes buscan primero la representación decimal de los números para dar la respuesta.

Zazkis & Liljedahl (2004) analizan el papel de la representación en la comprensión de los números primos por parte de los estudiantes para maestros de escuela elemental.

El objetivo de esta investigación es establecer la influencia que ejerce la representación factorial de un número en las respuestas de los estudiantes. Para el logro del mismo, los autores plantearon tres cuestiones, de las cuales se desea resaltar las dos últimas.

2) Sea F=151×157. ¿Es F un número primo? Indique sí o no y explique su decisión.

3) Sea m(2k + 1), con m y k números enteros. ¿Este número es primo? ¿Puede ser siempre un número primo?

De los 116 estudiantes que participaron en la investigación, 74 contestaron correctamente la pregunta 2, indicando que F es un número compuesto. El resto respondió de manera incorrecta, pasando por la representación decimal de F y usando criterios de divisibilidad.

Las respuestas a la última pregunta estuvieron condicionadas por la notación algebraica utilizada para representar al número y la imposibilidad de emplear algoritmos convencionales para determinar si un número es primo o no. Los alumnos que disponían de la definición de número primo, centrada en el hecho de que sólo son divisibles por sí mismos y la unidad, tuvieron dificultad en concebir que pueden ser representados como producto (factorización trivial). Recién cuando pudieron reconocer la descomposición trivial, pudieron utilizarla como guía para generar ejemplos que les permitió dar la respuesta esperada.

Entre los principales resultados, los autores señalan que: (a) los estudiantes pueden conocer la definición de número primo y sin embargo no ser capaces de utilizarla adecuadamente en una situación problema; (b) que una forma de construir una comprensión adecuada del concepto de número primo está relacionada con la descomposición factorial de los números; (c) que es necesario involucrar a los estudiantes en la consideración de grandes números que van más allá de la capacidad de cálculo de una calculadora.

2.3. Investigaciones relacionadas con la comprensión de un objeto matemático

En este apartado se caracteriza sucintamente las investigaciones realizadas por Distéfano (2017) y Pino-Fan, Godino y Font (2013). Si bien la temática de las mismas no es la Divisibilidad, tienen grandes coincidencias con esta tesis los marcos teóricos y metodológicos adoptados. En ambos trabajos se construye, administra y valida un instrumento de indagación.

La tesis doctoral de Distéfano, tiene por título “Procesos de significación para algunos símbolos matemáticos en estudiantes universitarios”.

El objetivo principal tiene que ver con la descripción y caracterización del proceso de construcción de significados de símbolos algebraicos en estudiantes universitarios. Centra la atención en algunos símbolos que no son utilizados fuera del ámbito matemático (el de pertenencia, inclusión, cuantificación, conjunción y disyunción), pero que son de uso frecuente en las asignaturas de la matemática superior y que no suelen ser objeto de enseñanza.

La línea teórica seguida es el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática, de Godino, Batanero y Font, y la Teoría de Registros Semióticos, de Duval. Los constructos teóricos adoptados fueron empleados tanto para el diseño de herramientas metodológicas como para el análisis de los datos relevados a partir de ellas.

Distéfano diseñó, construyó y administró un instrumento destinado a indagar en las prácticas operativas y discursivas que realizan los estudiantes en lo que respecta a la lectura o formulación de expresiones simbólicas. La tercera, y última versión del mismo, la administró a 90 estudiantes de primer año de las carreras de Ingeniería, Bioquímica, Profesorado en Matemática y Licenciatura en Biología, en la Universidad Nacional de Mar del Plata (Argentina).

A partir de los análisis realizados sobre los datos relevados por el instrumento, pudo caracterizar el proceso de construcción de significado de cada uno de los símbolos en estudio, además de describir la actividad cognitiva de conversión, analizada como parte de las prácticas matemáticas ligadas a un símbolo, en términos de funciones semióticas. Como parte de la caracterización del proceso de significación, presenta la construcción y descripción de una trama general de funciones semióticas que participa en distintas tareas, especifica una secuenciación de las funciones semióticas que intervienen en el proceso y propone niveles en la evolución de la construcción de significado de los símbolos estudiados.

Pino-Fan, Godino y Font (2013) diseñan y aplican un instrumento para explorar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático del futuro profesor de bachillerato sobre la derivada.

El marco teórico que adoptan en la investigación es el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática.
Para la elaboración del Instrumento, siguieron las siguientes etapas: fases de diseño (¿qué es la derivada?, ¿cuáles son sus significados?), estudio de la literatura en didáctica del cálculo diferencial, elaboración de un banco de tareas sobre derivadas, criterios para la selección de tareas, análisis a priori de las tareas y aplicación piloto y evaluación de expertos.
Los resultados los dan a conocer en dos artículos. En el primero de ellos presentan el proceso seguido para el diseño del instrumento. En el segundo, exponen los resultados obtenidos de la aplicación de dicho instrumento a una muestra de futuros profesores de bachillerato en el contexto de una universidad mexicana.

Los resultados del análisis de las respuestas de los estudiantes evidencian tanto una desconexión entre los distintos significados parciales de la derivada como la necesidad de potenciar el conocimiento del contenido especializado. Indican que el aprendizaje puede hacerse mediante actividades que favorezcan el uso e identificación de objetos matemáticos, sus significados y los procesos involucrados en la solución de tareas matemáticas.

2.4. Aportes de los antecedentes a esta tesis

Varias de las investigaciones caracterizadas, que nos permite tener un acercamiento al estado del arte de la temática de interés para esta tesis, dan cuenta específicamente de la comprensión de objetos de la Divisibilidad por parte de alumnos de escuelas primaria y media, como así también, maestros y profesores en formación y en ejercicio de la profesión. Otras, como por ejemplo las tesis de Etchegaray (1998) y Espinoza (2012), nos muestran las relaciones conceptuales complejas que se estructuran alrededor de objetos básicos de la Teoría de Números, en el Nivel Medio.

Sobre las investigaciones que abordan la comprensión de objetos de la Divisibilidad, se puede apreciar que un buen número de las mismas lo han hecho en el conjunto de los números naturales, utilizando el marco teórico APOS, dejando en evidencia muchas dificultades de los alumnos y maestros en formación y en ejercicio de la profesión. Por nombrar algunas de ellas: la dificultad en poder establecer relaciones pertinentes entre los objetos múltiplo, divisor, divisible y factor; el problema de no disponer de herramientas para encontrar divisores; no poder reconocer si un número es divisor, múltiplo, primo, etc. cuando el mismo está expresado según la descomposición factorial prima, el algoritmo de la división o la propiedad distributiva; las dificultades con generalizaciones (por ejemplo para obtener la expresión general de los múltiplos de un número); no asumir la unicidad de la descomposición factorial prima o la descomposición trivial de un número primo; los inconvenientes en la realización de tareas de Divisibilidad cuando los números están representados factorialmente con números grandes en los exponentes, etc.

Estas investigaciones suelen usar cuestionarios que involucran tareas de Divisibilidad, como modo de evaluar su comprensión.

Las mismas se constituyen también en referencia importante en lo que respecta al marco teórico y metodológico que han empleado.

En cuanto al marco teórico, destacamos el modelo epistémico–cognitivo del Enfoque Ontosemiótico, usado como referencia didáctica en los trabajos de Espinoza (2012), Pino-Fan, Godino y Font (2013) y Distéfano (2017). Dicho marco se constituyó en referencia fecunda para dejar al descubierto la red de relaciones conceptuales que se establecen entre objetos matemáticos primarios a propósito de la resolución de situaciones–problemas, tanto en sistemas de prácticas institucionales como personales, además de permitir reflexionar sobre la naturaleza de los objetos matemáticos y su emergencia a partir de las prácticas matemáticas.

En cuanto a la cuestión metodológica, nos parece interesante adherir al planteo metodológico, comúnmente usado en investigaciones enmarcadas en el Enfoque Ontosemiótico, consistente en la comparación entre prácticas institucionales y personales, con el propósito de avanzar –en esta tesis- en la elucidación de las relaciones conceptuales que establecen los alumnos del Nivel Medio, desde el sistema de prácticas que realizan a partir de un instrumento de indagación elaborado al efecto. Precisamente, la comparación entre dichas relaciones, determinadas tanto en el plano institucional como personal, definidas en término de funciones semióticas, nos permite valorar la comprensión alcanzada por los ingresantes a la carrera de Profesorado en Matemática referida a la Divisibilidad.

Además, las investigaciones desarrolladas por Zazkis & Gadowsky (2001), Zazkis & Liljedahl (2004), Bodí (2006), Bodí, Valls y Llinares (2007), Pino-Fan, Godino y Font (2013) y Distéfano (2017), nos hacen notar claramente las características y bondades metodológicas de las investigaciones basadas en el diseño de un instrumento de indagación, su análisis a priori, su puesta en práctica, su análisis a posteriori, su validación, el análisis didáctico de prácticas matemáticas que permite realizar y la obtención de la información deseada.

Finalmente creemos que es oportuno destacar las herramientas metodológicas empleadas por Bodí (2006, 2007), Distéfano (2007) y Pino-Fan, Godino y Font (2013) en sus investigaciones. En el primer caso, haciendo referencia a las formas de validación del instrumento utilizado para evaluar la comprensión de la Divisibilidad; validación que fue realizada por medio del cálculo del índice de dificultad, la homogeneidad, el coeficiente de fiabilidad (Alpha de Cronbach), el análisis factorial y la generalizabilidad de la prueba. Bodí, Valls y Llinares también realizaron un análisis estadístico implicativo sobre las respuestas de los estudiantes, encontrando interesantes relaciones conceptuales. En el segundo y tercer caso, resaltando, por su similitud con esta tesis, el diseño, la construcción y administración de un instrumento destinado a explorar y caracterizar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada de futuros profesores de bachillerato, en el caso del trabajo de Pino-Fan, Godino y Font. En el caso de Distéfano, para indagar en las prácticas operativas y discursivas que realizan los estudiantes para la lectura o la formulación de expresiones simbólicas. A partir del análisis de la puesta en aula del instrumento, la autora pudo realizar una interesante caracterización del proceso de construcción de significado de cada uno de los símbolos en estudio, además de lograr una exhaustiva descripción de la actividad cognitiva de conversión, analizada como parte de las prácticas matemáticas ligadas a un símbolo, en términos de funciones semióticas.

CAPÍTULO 3

Marco Teórico de la Investigación

3.1. Introducción

Se expone aquí una caracterización del Enfoque Ontológico y Semiótico del conocimiento y la instrucción matemática, haciendo hincapié en el análisis de los constructos: objetos matemáticos primarios, prácticas y sistemas de prácticas, configuración epistémica, configuración cognitiva, función semiótica e idoneidad didáctica.

Esta línea teórica y metodológica, iniciada y desarrollada por Juan Godino y colaboradores, en la Universidad de Granada, permite avanzar en las respuestas a los interrogantes que nos hemos planteado en la investigación.

3.2. Sobre el modelo epistémico-cognitivo del enfoque ontológico y semiótico

Siguiendo a Fernández, Cajaraville y Godino (2007) se puede manifestar que los postulados o supuestos básicos del Enfoque Ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática se relacionan principalmente con la Antropología, la Ontología y la Semiótica, pero también se articulan de manera coherente supuestos socioculturales y psicológicos. La Matemática se concibe como una actividad humana, intencionalmente orientada a la solución de cierta clase de problemas, realizada en el seno de instituciones o comunidades de prácticas. Dicha actividad está mediatizada y apoyada por los recursos lingüísticos y tecnológicos disponibles.

De las prácticas o sistemas de prácticas realizadas para resolver problemas emergen dos categorías primarias de entidades u objetos: *institucionales* (sociales, relativamente objetivas, del profesor como representante institucional) y *personales* (individuales o mentales, del alumno), por lo que se asume que la matemática es, además de una actividad, un complejo de objetos culturales (institucionales), axiomática y deductivamente organizados.

La particular insistencia sobre los objetos justifica la denominación de esta línea teórica como *ontológica,* ya que la atención se dirige a la esencia de los objetos en sí, sin someterla a crítica, pero aceptándolos como emergentes de la práctica. La atención en los aspectos semióticos, comprendida en el sentido más amplio posible, justifica la denominación de la teoría como *semiótica* (D'Amore y Godino, 2007).

3.2.1. Sistemas de prácticas y significado de un objeto matemático

Este enfoque confiere fundamental importancia a las nociones de *significados institucionales y personales* y concibe el significado de un objeto matemático en términos del *sistema de prácticas* ligadas a un campo de problemas; es decir, concibe que el significado de un objeto matemático es el sistema de prácticas operativas y discursivas que una persona, institución o comunidad de prácticas realiza para resolver una cierta clase de problemas en las que dicho objeto interviene (Godino, Font, Wilhelmi y Arreche, 2009). En otras palabras, en este enfoque se operativiza la noción brousseauniana de "sentido", diferenciando la dimensión personal de la institucional.

Se considera *práctica matemática* a toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas (D'Amore y Godino, 2007).

Las prácticas matemáticas pueden ser idiosincrásicas de una persona o compartidas en el ámbito de una institución, la que está constituida por ciertas personas involucradas en un mismo tipo de problemas. El compromiso mutuo con una misma problemática conlleva la realización de unas prácticas sociales que suelen tener características particulares, estando generalmente condicionadas por los instrumentos disponibles en esa comunidad, sus reglas y modos de funcionamiento.

Constituidas por las prácticas significativas para resolver un campo de problemas y compartidas en el seno de una institución, la noción de *sistema de prácticas* (operativas y discursivas), asume una concepción pragmática-antropológica de las matemáticas, tanto desde el punto de vista institucional como personal y la actividad de resolución de problemas se adopta como elemento central en la construcción del conocimiento matemático.

Las nociones de práctica y sistemas de prácticas son útiles para analizar y comparar las características que adoptan los conocimientos matemáticos en distintos marcos institucionales, contextos de uso o juegos de lenguaje.

3.2.2. Objetos matemáticos primarios intervinientes y emergentes de sistemas de prácticas

Blumer (1969) afirma que un objeto es cualquier entidad o cosa a la cual nos referimos, o de la cual hablamos, sea real, imaginaria o de cualquier otro tipo. Godino (2003) define a un objeto matemático como todo aquello que es indicado, señalado o nombrado cuando se construye, comunica o aprende matemática.

Para un análisis más fino de la actividad matemática, el Enfoque Ontosemiótico incluye seis tipos de objetos matemáticos primarios, intervinientes o emergentes de sistemas de prácticas (D'Amore y Godino, 2007):

- Situaciones-problemas: problemas más o menos abiertos, aplicaciones intramatemáticas o extra-matemáticas, ejercicios.
- Lenguaje: términos, expresiones, notaciones, gráficos.
- Procedimientos: operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo.
- Proposiciones: atributos de los objetos mencionados, que suelen darse como enunciados o proposiciones.
- Conceptos: definiciones o descripciones.
- Argumentaciones: que se usan para validar y explicar las proposiciones (sean deductivas o de otro tipo).

Estos objetos se estructuran en entidades más complejas, como sistemas conceptuales o teorías.

3.2.3. Relaciones entre objetos: función semiótica

Los objetos matemáticos primarios están relacionados entre sí por medio de una *función semiótica,* caracterizada como una correspondencia (ya sea relación de dependencia o función) entre un antecedente (expresión, significante o representante) y un consecuente (contenido, significado, representado) que establece un sujeto, persona o institución de acuerdo con cierto criterio (D'Amore y Godino, 2007). Dicha correspondencia (representacional o instrumental) se establece entre dos objetos (ostensivos o no-ostensivos) cuando uno de ellos se pone en lugar del otro o bien uno es usado por otro.

Godino (2003) sostiene que tanto el objeto inicial como final en una función semiótica pueden estar constituidos por uno o varios de los objetos primarios. Estos objetos o entidades pueden desempeñar el papel de expresión o de contenido en las funciones semióticas, resultando, por tanto, diferentes tipos de tales funciones, algunas de las cuales pueden interpretarse claramente como procesos cognitivos específicos, tales como generalización, simbolización, etc. Atendiendo al plano del contenido estos tipos se reducen a los siguientes:

- Significado lingüístico: diremos que una correspondencia semiótica es de tipo conceptual cuando el objeto final, o contenido de la misma, es un término, expresión, gráfico u otro elemento lingüístico.
- Significado situacional: cuando el objeto final es una situación-problema.
- Significado conceptual: cuando su contenido es un concepto-definición.
- Significado proposicional: cuando el contenido es una propiedad o atributo de un objeto.
- Significado actuativo: cuando su contenido es una acción u operación, tal como un algoritmo o procedimiento.
- Significado argumentativo: cuando el contenido de la función semiótica es una argumentación.

Con la noción de función semiótica se evidencia el carácter netamente relacional de la actividad matemática y de los procesos que difunden el conocimiento matemático.

Esta noción permite formular -en términos semióticos y de un modo general y flexible- el conocimiento matemático, como así también explicar -en términos de conflictos semióticos- las dificultades y los errores de los estudiantes.

3.2.4. Configuraciones de objetos matemáticos

Los objetos matemáticos primarios están relacionados entre sí formando *configuraciones*, definidas como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos al resolver un problema o una clase de problemas (Godino, Font, Contreras y Wilhelmi, 2005).

Estas configuraciones (*Figura 1*) pueden ser *epistémicas* (redes de objetos institucionales) o *cognitivas* (redes de objetos personales).

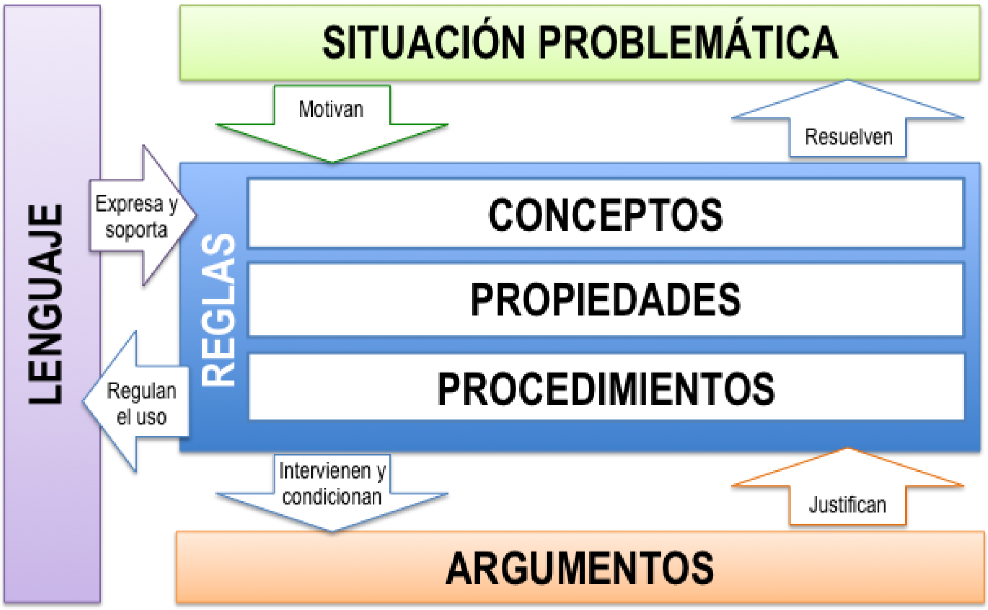


*Figura 1: Configuración epistémica, componentes y relaciones (*Font, V. y Godino, J. D., 2006).

La finalidad de estas configuraciones es analizar las prácticas matemáticas describiendo su complejidad ontosemiótica y detectar y explicar *conflictos semióticos*, que se pueden producir cuando se llevan a cabo estas prácticas en un determinado proceso de estudio. Se entiende como conflicto semiótico a cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos en interacción comunicativa y que resultan ser fuente y razón de problemas en el aprendizaje (Godino, Font, Contreras y Wilhelmi, 2005).

El Enfoque Ontosemiótico propone las configuraciones como herramientas teóricas y metodológicas para describir los conocimientos matemáticos y sus relaciones en su doble versión: personal e institucional.

Godino, Font, Contreras y Wilhelmi (2005), señalan que la noción de configuración epistémica permite hacer un análisis microscópico de los objetos matemáticos involucrados en una práctica o sistema de prácticas, caracterizar su complejidad ontosemiótica y aportar explicaciones de los aprendizajes en términos de dicha complejidad. Asimismo, explican que la noción de configuración cognitiva, con su desglose en entidades situacionales, lingüísticas, actuativas, conceptuales, proposicionales y argumentativas, permiten un análisis muy pormenorizado del aprendizaje matemático de los estudiantes.

En la realización y evaluación de una práctica matemática a propósito de la resolución de un problema, se hace uso de lenguajes (verbales y simbólicos), los que son la parte ostensiva de una serie de conceptos, proposiciones y procedimientos que intervienen en la elaboración de argumentos para decidir si las acciones simples que componen la práctica, y ella en tanto que acción compuesta, son satisfactorias. En consecuencia, cuando un agente realiza y evalúa una práctica matemática activa un conglomerado de entidades primarias, formado por situaciones–problemas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, articuladas en la configuración (Font y Godino, 2006).

3.2.5. La comprensión matemática

Godino (2003) sostiene que en una situación ideal y en una institución dada un sujeto *comprende* el significado de un objeto o se *apropia del significado de un concepto*, si es capaz de reconocer los problemas, definiciones, procedimientos, argumentaciones, propiedades y representaciones características, relacionarlo con los restantes objetos matemáticos en toda la variedad de situaciones planteadas por la institución correspondiente.

Desde este punto de vista, el hecho de *comprender* un objeto (ostensivo o no, concreto o abstracto) por parte de un sujeto (persona o institución) se interpreta en términos de las funciones semióticas que tal sujeto puede establecer. Font (2002, p. 156), expresa que:

> El hecho de considerar que las funciones semióticas tienen un papel muy importante en el proceso relacional entre entidades (o grupos de ellas), activadas en prácticas que se realizan dentro de un determinado juego de lenguaje, permite también entender la comprensión en términos de funciones semióticas. En efecto, se puede interpretar la comprensión de un objeto O por parte de un sujeto X (sea individuo o institución) en términos de funciones semióticas que X puede establecer, en unas circunstancias fijadas, en las que se pone en juego O como funtivo (expresión o contenido).

Cada función semiótica implica un acto de semiosis por parte de un agente interpretante y forma un conocimiento, razón por la cual las funciones semióticas poseen un gran potencial como herramientas metodológicas al momento de estudiar significados, particularmente los significados personales construidos por los estudiantes.

Para el Enfoque Ontosemiótico, la comprensión alcanzada por un sujeto en un momento dado difícilmente llegue a ser total, aunque tampoco nula, sino que abarca aspectos parciales de los diversos componentes y niveles de abstracción posibles. El reconocimiento de la complejidad sistémica del significado del objeto implica, además, saber que su apropiación por el sujeto deviene de un proceso dinámico, progresivo y no lineal, como consecuencia de los distintos dominios de experiencia y contextos institucionales en que participa.

De esta forma, la comprensión de un concepto por un sujeto, en un momento y circunstancias dadas, implicará la apropiación de los distintos elementos que componen los significados institucionales correspondientes.

3.2.6. El análisis ontológico y semiótico como técnica para determinar significados

El análisis ontológico-semiótico como técnica para determinar significados consiste básicamente en realizar un análisis sistemático de los objetos y funciones semióticas que se ponen en juego en una práctica matemática.

Godino (2003) llama análisis ontológico-semiótico (o simplemente, análisis semiótico) de un texto matemático, a su descomposición en unidades, la identificación de las entidades puestas en juego y las funciones semióticas que se establecen entre los mismos por parte de los distintos sujetos. El análisis ontológico-semiótico se constituye, en consecuencia, en la indagación sistemática de los significados (contenidos de las funciones semióticas) puestos en juego a partir de la trascripción del proceso, y de cada una de las partes en que se puede descomponer dicho texto, para un interpretante potencial (análisis a priori). Cuando el texto corresponde al protocolo de respuestas de los sujetos en interacciones efectivas, el análisis permitirá caracterizar los significados personales atribuidos de hecho por los emisores de las expresiones (análisis a posteriori).

En ambos casos se pueden confrontar con los significados institucionales de referencia, lo que permite formular hipótesis sobre conflictos semióticos potenciales y contrastarlos con los efectivamente ocurridos. Godino (2003) expresa que el análisis semiótico ayuda a formular hipótesis sobre puntos críticos de la interacción, entre los diversos agentes, en los cuales pueden existir lagunas o vacíos de significación, o disparidad de interpretaciones que requieran procesos de negociación de significados y cambios en el proceso de estudio.

3.2.7. Idoneidades didácticas de un proceso de instrucción

Godino, Batanero y Font (2006), plantean que los conceptos teóricos precedentes se complementan con la noción de *idoneidad didáctica* de un proceso de instrucción.

Estos autores definen a la *idoneidad didáctica* como la articulación coherente y sistémica de los siguientes componentes:

- *Idoneidad epistémica*: se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia.

- *Idoneidad cognitiva*: expresa el grado en que los significados pretendidos/ implementados estén en la zona de desarrollo potencial (…) de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/implementados.

- *Idoneidad interaccional*: un proceso de enseñanza-aprendizaje tendrá mayor idoneidad desde el punto de vista interaccional si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales (que se puedan detectar a priori) y, por otra parte, resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción,

- *Idoneidad mediacional*: contempla el grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.

- *Idoneidad emocional*: analiza el grado de implicación (interés, motivación, …) del alumnado en el proceso de estudio. La idoneidad emocional está relacionada tanto con factores que dependen de la institución como con factores que dependen básicamente del alumno y de su historia escolar previa.

- *Idoneidad ecológica*: contempla el grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla.

Godino, Wilhelmi y Bencomo (2005) indican que la idoneidad de una dimensión no garantiza la idoneidad global del proceso de enseñanza-aprendizaje. Estas idoneidades deben ser integradas teniendo en cuenta las interacciones entre las mismas, lo cual requiere referirse a la idoneidad didáctica como criterio sistémico de adecuación y pertinencia respecto del proyecto educativo global. Esta idoneidad se debe interpretar, no obstante, como relativa a unas circunstancias temporales y contextuales cambiantes, lo que amerita una actitud de reflexión e investigación por parte del profesor y demás agentes que comparten la responsabilidad del proyecto educativo.

3.3. Aportes fundamentales del marco teórico

La consideración de “objeto matemático” como aquello que es capaz de pensar, hacer o decir una persona o una institución cuando se enfrenta a un tipo de problemas matemáticos, que además le otorga sentido a dicho objeto, es fundamental para este trabajo dado que fundamenta el desarrollo de sistemas de prácticas tanto institucionales como personales alrededor de los problemas del instrumento. Estos sistemas de prácticas varían dependiendo de las instituciones por lo que a los objetos matemáticos se les confiere relatividad institucional, definiéndoselos como emergentes de prácticas socialmente compartidas en una institución.

La herramienta teórica y metodológica “configuración epistémica” es sumamente útil para analizar y comprender la red de relaciones necesarias de establecer para dar solución a los distintos problemas del instrumento, en el ámbito de un sistema de prácticas institucional. El análisis ontosemiótico de las situaciones del instrumento a través de las configuraciones epistémicas supera la reducción del conocimiento matemático a conceptos, procedimientos y teoría, permitiendo distinguir el papel que juegan las propiedades y argumentaciones y explicitando el rol mediador y constructor del lenguaje, permitiendo, además, la determinación de un interesante entramado de relaciones conceptuales establecidas entre objetos matemáticos primarios, tanto en las prácticas institucionales como personales.

El constructo “configuración cognitiva permite realizar un pormenorizado análisis de las prácticas de los estudiantes, poniendo en evidencia los objetos matemáticos involucrados en las mismas y las relaciones que se establecen entre ellos al momento de resolver problemas.

El carácter relacional de los objetos matemáticos intervinientes y emergentes de sistemas de prácticas institucional y personal se analiza y comprende a través del constructo “función semiótica”. De hecho, por cada problema del instrumento, en el ámbito del análisis institucional, se detectan las funciones semióticas fundamentales -en tanto relaciones conceptuales que permiten resolver los distintos problemas- y se emplea como referencia para el análisis de los sistemas de prácticas de los estudiantes.

Por último, se hace necesario destacar la relevancia que aporta la herramienta de las “idoneidades didácticas”, que se utiliza como una de las fuentes de valoración y validación del instrumento de recolección de información.

Todos estos análisis fueron conformados, ampliados y mejorados permanentemente durante todo el transcurso de la investigación, lo cual permitió la realización de ajustes sucesivos del instrumento de indagación, no solamente en su estructura de problemas sino también en lo que respecta a las condiciones generales de su implementación.

CAPÍTULO 4

Metodología de la investigación

4.1. Introducción

En este capítulo se presentan los aspectos metodológicos que guiaron la investigación.

Se comienza explicando el encuadre metodológico general, la población y la muestra objeto de estudio.

Luego se explicitan las fases de la investigación, en estrecha vinculación con las etapas de desarrollo de investigaciones cualitativas, basadas en diseños, que caracterizan Kelly, Lesch & Baeck (2008) y Cobb & Gravemeijer (2008). Para diseñar y transitar estas etapas, se usan herramientas teóricas y metodológicas provenientes del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática.

Posteriormente se explica la génesis y el desarrollo del instrumento de indagación, haciendo hincapié en su proceso de mejoramiento hasta llegar a la tercera versión o versión final.

Además, se caracteriza la matriz de desempeño o comprensión como soporte referencial para analizar las pretendidas prácticas de los alumnos ingresantes al profesorado.

Finalmente se indica y caracteriza las formas de validación del instrumento de indagación.

4.2. Aspectos metodológicos

4.2.1. Encuadre metodológico general

La investigación, cuya memoria se expone en esta tesis, está basada en el diseño (Kelly, Lesch & Baeck, 2008), fundamentada en el empleo de herramientas del Enfoque Ontológico y Semiótico del conocimiento y la instrucción matemática (Godino, 2000, 2003, 2011, 2013; Godino, Batanero y Font, 2006), en particular, usando las nociones de *configuración epistémica* (para modelizar los sistemas de prácticas institucionales de referencia), *configuración cognitiva* (para modelizar los sistemas de prácticas personales de los estudiantes), *función semiótica* (para establecer relaciones conceptuales en sistemas de prácticas institucionales y personales) e *idoneidades didácticas* (como una fuente de validación del contenido del instrumento).

Bell (2004) explica que este tipo de investigaciones cualitativas se centran en el diseño y exploración de todo tipo de innovaciones educativas, a nivel didáctico y organizativo, considerando también posibles artefactos como núcleos de esas innovaciones y contribuyendo consecuentemente a una mejor comprensión de la naturaleza y condiciones del aprendizaje.

Esta investigación incluye el diseño de un instrumento de indagación, su implementación con alumnos ingresantes al Profesorado en Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas, Naturales y Agrimensura de la Universidad Nacional del Nordeste y la evaluación de resultados. Desde el análisis de las prácticas de los estudiantes, a propósito de la resolución de las situaciones-problemas del instrumento, se pretende determinar la red de relaciones conceptuales, definidas en términos de funciones semióticas, que sobre situaciones-problemas de Divisibilidad elaboran los alumnos del Profesorado, la cual nos permite valorar la comprensión que alcanzaron en el Nivel Medio sobre la Divisibilidad. Quizás, una valoración más completa requeriría elaborar varios instrumentos que cubrieran los diferentes aspectos del tema, lo cual no forma parte de los objetivos de esta tesis.

El instrumento puede significar un aporte tanto para los profesores del Nivel Medio, en el sentido de la revisión de sus prácticas en torno a los tipos de problemas que contemplan para la enseñanza de la Divisibilidad, como para los formadores de profesores que deseen explorar y potenciar la faceta del conocimiento epistémico sobre esta temática.

Atendiendo el planteamiento de Gros (2007), sobre los principales objetivos de las investigaciones basadas en diseños, se puede afirmar que esta investigación se diferencia de la experimentación de corte clásico–positivista, dado que:

a) Se hace en contextos reales, no en laboratorios.

b) Se inicia con un plan general y con materiales no necesariamente definidos completamente al inicio. Estos van adecuándose en función de la dinámica y el contexto.
c) No está orientado a demostrar hipótesis sino al desarrollo de un perfil que caracterice el diseño en la práctica.

Según Cobb & Gravemeijer (2008), en las investigaciones basadas en el diseño se consideran tres etapas: (1) planificación del experimento, (2) experimentación y (3) análisis retrospectivo de los datos generados en el experimento. En esta tesis, estas etapas quedan en evidencia más adelante, cuando se plantean las fases de desarrollo de la investigación. Así, a la primera etapa señalada por Cobb & Gravemeijer, corresponden las fases 1, 2, 3 y 4 del desarrollo de la investigación; a la segunda etapa, la fase 5, mientras que, a la última, corresponden las fases 3, 4 y 5 de esta investigación.

4.2.2. Población objeto de estudio

La población está constituida por los alumnos ingresantes a la carrera de Profesorado en Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas, Naturales y Agrimensura (FaCENA) de la Universidad Nacional del Nordeste (UNNE).

4.2.3. Muestra

La muestra está formada por los alumnos que cursan la asignatura Álgebra I que acceden a participar de la experiencia. Se invitó a los estudiantes a participar de la investigación, ofreciéndoles análisis y devolución de sus producciones.

Estos alumnos viven en su mayoría de la ciudad capital de la provincia de Corrientes. Muchos provienen del interior de la provincia de Corrientes y de otras provincias aledañas como Chaco y Formosa. Tienen mayoritariamente entre 17 y 18 años y algunos un poco más, dado que provienen de otras carreras universitarias cursadas previamente.

4.3. Fases de la investigación

La investigación se organiza en las fases que se describen a continuación:

Primera fase: Elaboración de un marco institucional de referencia, modelizado a partir de configuraciones epistémicas referidas a la Divisibilidad en el Nivel

Medio. La primera de ellas se construye a partir de tipos de problemas a los que responde este objeto matemático en dicho nivel (la versión final se expone en el capítulo 5). Las otras, que modelizan las prácticas institucionales de cada situación-problema (cuya versión final se explicita en el capítulo 6), en general, se elaboran sobre problemas particulares de los tipos de problemas constitutivos de la primera configuración, si bien contienen también algunos tipos de problemas.

En las configuraciones epistémicas se determinan los objetos primarios de la Divisibilidad en el mencionado nivel y las relaciones que se establecen entre ellos a propósito de la resolución de un tipo de problema o un problema particular.

La primera versión, diseñada al inicio de la investigación, fue mejorándose permanentemente mediante los conocimientos adquiridos en las distintas instancias de exploraciones áulicas.

Segunda fase: Elaboración de un primer instrumento destinado a recuperar información sobre la comprensión alcanzada por los estudiantes que ingresan al Profesorado en Matemática sobre la Divisibilidad.

Para dicha elaboración se toma como referencia la configuración epistémica realizada sobre tipos de problemas.

Junto al instrumento se construye una rúbrica o matriz de desempeño o comprensión. La misma contiene prácticas matemáticas institucionales determinadas a priori para cada situación-problema del instrumento, según cuatro niveles de desempeño: novato, aprendiz, experto y distinguido.

Posteriormente se realiza una prueba piloto con estudiantes de primer año del Profesorado en Matemática del Instituto Superior de Formación Docente (ISFD) “Dr. Juan Pujol” de la ciudad de Corrientes, a fin de reelaborar las consignas que podrían estar produciendo conflictos semióticos o dificultades de comprensión de términos o palabras, ajustar tiempo de resolución y las prácticas matemáticas que forman parte de la matriz de desempeño.

Tercera fase: Elaboración de un segundo instrumento de recolección de datos.

De esta versión se realiza una validación del contenido del instrumento usando: (a) la noción de idoneidad didáctica, constructo teórico y metodológico del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento e instrucción matemática, (b) juicio experto de pares académicos (docentes e investigadores idóneos en el área de Matemática y Educación Matemática).

También se realiza una exploración con algunos alumnos ingresantes a la carrera de Profesorado en Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura. Los mismos fueron invitados a participar de la experiencia.

Cuarta fase: Elaboración de la tercera y última versión del instrumento.

Esta versión se construye a partir del análisis didáctico de los sistemas de prácticas llevadas a cabo por estudiantes al enfrentarse con la resolución de las situaciones-problemas de la versión anterior del instrumento y, fundamentalmente, recuperando las observaciones de los pares académicos expertos.

Para efectuar el análisis didáctico de las situaciones-problemas del instrumento se emplean configuraciones epistémicas. Las principales relaciones que quedan al descubierto en dichas configuraciones se definen en términos de funciones semióticas.

Además, se mejora sustancialmente las prácticas matemáticas institucionales de la matriz de desempeño, merced al análisis de las producciones de los alumnos que trabajaron con la segunda versión del instrumento y de algunas observaciones de los pares expertos.

La versión definitiva del análisis ontosemiótico realizado a cada una de las situaciones de la versión final del instrumento de indagación, se explicita en el sexto capítulo.

Quinta fase: Administración del instrumento a alumnos del Profesorado en Matemática.

La exploración se realiza a principios del año 2018, en una de las primeras clases teóricas de la asignatura Álgebra I, durante dos horas de trabajo.

Sexta fase: Análisis de la comprensión alcanzada por los estudiantes sobre la Divisibilidad en el Nivel Medio.

Se analizan las configuraciones cognitivas de los estudiantes, detectando las funciones semióticas que establecen en la resolución de las situaciones-problemas del instrumento.

Se determinan redes de relaciones conceptuales involucradas en esas funciones semióticas.

Teniendo en cuenta la variedad y complejidad de los objetos matemáticos involucrados en las funciones semióticas y de la red de relaciones establecidas entre los mismos, se realiza una clasificación de dichas funciones semióticas.

Se valora la comprensión en términos de la mencionada clasificación de funciones semióticas y de las redes de relaciones conceptuales desplegadas en las mismas.

4.4. Sobre el instrumento de recolección de datos

4.4.1. Primera versión del instrumento de indagación

A inicios del año 2016 se comenzó a diseñar un instrumento que contaba con 13 situaciones-problemas de Divisibilidad, luego de una profunda revisión de antecedentes, diseños curriculares y textos escolares llevada a cabo durante el año 2015, tareas que hicieron posible la cristalización de un primer marco epistémico y didáctico de referencia que se expone en el capítulo 5.

El instrumento, en su primera versión, se exhibe en la sección de los anexos.

En cuanto a las situaciones-problemas, de acuerdo con los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios (NAP, 2011) definidos para todo el territorio nacional y los diseños curriculares en vigencia de algunas provincias aledañas a la Universidad Nacional del Nordeste, como Chaco y Corrientes, esto es, Currículum para la Educación Secundaria (MEC, 2012) y Diseño Curricular Jurisdiccional (MECCTC, 2012), respectivamente, se buscó que propongan verdaderos desafíos cognitivos, que inviten a la reflexión, a la elaboración de conjeturas y de relaciones conceptuales para defenderlas o refutarlas. Se propició el estudio de condiciones bajo las cuales una afirmación se cumple, la explicación y fundamentación de las decisiones, la realización de tareas de

Divisibilidad cuando los números están expresados en distintas representaciones, la exploración y enunciación de propiedades ligadas a la Divisibilidad.

Se resolvió cada una de las situaciones-problemas anticipando los sistemas de prácticas que podrían desarrollar los estudiantes y se especificaron ciertas relaciones conceptuales involucradas en esas resoluciones.

Posteriormente se puso a prueba con un reducido número de estudiantes a fin de realizar los ajustes correspondientes (mejorar el análisis a priori de las situaciones-problemas, mejorar la redacción de las consignas, estimar tiempos de resolución, entre otros). Esta experimentación, dada en llamar “prueba piloto”, se llevó a cabo con alumnos de primer año de la carrera de Profesorado en Matemática del ISFD “Dr. Juan Pujol” de la ciudad de Corrientes, que aún no habían trabajado con temas de Divisibilidad en dicho Profesorado.

4.4.2. El mejoramiento de la primera versión del instrumento a partir del análisis de las prácticas de los estudiantes:

a) Se mejoró la redacción de las consignas, desde el análisis de las dificultades de interpretación que tenían los alumnos.

En relación con las consignas, en el diseño del nuevo instrumento (versión 2) se buscó sembrar la duda sobre las cuestiones planteadas y propiciar el estudio de condiciones bajo las cuales una afirmación se cumple.

Por citar ejemplos, en el primer instrumento, el problema que solicitaba encontrar números distintos que tuvieran los mismos divisores se transformó. En la segunda versión se lo presenta como un problema que solicita determinar si existen números enteros con los mismos divisores y, de ser así, la exhibición de los mismos y la fundamentación de la respuesta (problema 6). Asimismo, en el problema 2 de la segunda versión del instrumento, se solicita explícitamente el estudio de condiciones para que el divisor de una división sea divisor del dividendo, no siendo así en la versión original.

b) En el análisis a priori del nuevo instrumento, se narran más detalladamente los procesos cognitivos posibles de desarrollar para resolver las distintas situaciones-problemas que contiene. Como nota distintiva de la exhaustividad perseguida en este aspecto, se explicitan en cada resolución los elementos de significados primarios, tales como: problemas, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos, indicando, además, las posibles dificultades en el uso del lenguaje en los casos que amerita.

c) Se excluyeron, de la versión original del instrumento, aquellos problemas cuyas resoluciones movilizaban las mismas relaciones conceptuales, o muy similares, que están presentes en otros problemas. Por ejemplo:

- La situación en la que se pedía explícitamente el hallazgo de divisores de números grandes (problema 11), pues esta tarea ya estaba contemplada en la solicitud de la determinación del máximo común divisor (problema 13).

- La situación en la que se solicitaba realizar tareas de determinación de si un número es divisor, múltiplo, factor, etc. de otro número, cuando uno de ellos está expresado en su factorización prima (problema 6), pues esta actividad estaba presente en el problema 7.

d) Se quitó el problema 10, teniendo en cuenta que, si bien plantea el establecimiento de relaciones conceptuales entre dos objetos matemáticos estrechamente vinculados, como la División y Fracción, en los diseños curriculares y libros de textos, el estudio de esta relación no aparece solicitado. Pareciera, entonces, que esta relación no se constituye en objeto de enseñanza en el Nivel Medio de nuestro país.

4.4.3. Segunda versión del instrumento de indagación

La segunda versión del instrumento se obtiene a partir del análisis a posteriori de las prácticas de los estudiantes del Profesorado que resolvieron el contenido del primer instrumento. Las precisiones de las mejoras se indicaron recientemente. Esta versión también se incluye en la sección de los anexos.

4.4.4. El mejoramiento de la segunda versión del instrumento a partir de las observaciones de los pares expertos:

a) En función de las sugerencias de la **Dra. María Laura Distéfano** se realizan los siguientes cambios en la segunda versión del instrumento:

- *Reformulación del problema 1:* Se quita la pregunta acerca de si 3 es divisor de -654, dado que se plantea y espera el surgimiento de relaciones conceptuales entre los divisores positivos y negativos de un número entero y su opuesto en el problema 6 del Instrumento.

El enunciado de este problema en la versión 1 del Instrumento es:

a) ¿3 es divisor de 30?, ¿y de 473?, ¿y de -654?

b) ¿3 es factor de 30?

c) ¿441 es múltiplo de 7?

En el problema 6 se solicita averiguar sobre la existencia de dos números enteros que tengan los mismos divisores.

- *Reformulación el problema 2*: Se lleva a cabo a fin de mejorar la interpretación de la consigna.
El enunciado presente en la versión 2 del Instrumento es: En una división entre números enteros, ¿bajo qué condición el divisor de la división es divisor del dividendo? Justifica tu respuesta.

El nuevo enunciado (versión 3 del Instrumento) es: En una división entre los números "a" y "b", ¿bajo qué condición "b" es divisor de "a"? Justifica tu respuesta.

- *Reformulación del problema 6:* Se realiza la modificación indicada seguidamente teniendo en cuenta que en la formulación de la segunda pregunta está implícito que la respuesta a la primera pregunta es afirmativa.

El enunciado de este problema en la versión 2 del Instrumento es: ¿Es posible que dos números enteros distintos tengan los mismos divisores?, ¿en qué condiciones? Justifica tu respuesta.

El nuevo enunciado (versión 3) es: ¿Es posible que dos números enteros distintos tengan los mismos divisores? Si la respuesta es afirmativa, indique bajo qué condiciones ocurre; si la respuesta es negativa, explique las razones.

- *Las relaciones conceptuales determinadas a partir de las configuraciones epistémicas elaboradas para cada problema del Instrumento 2, en el Instrumento 3, son definidas en términos de funciones semióticas.*
En el informe de evaluación, la Dra. Distéfano sostiene que el hecho de definir las relaciones conceptuales en términos de funciones semióticas, puede

permitir detectar si algunas funciones semióticas se replican en distintos problemas, lo cual podría permitir encontrar posibles regularidades que enriquezcan el análisis de las resoluciones efectuadas por los estudiantes.

b) A partir las observaciones de la **Dra. Alicia Mabel Rodríguez:**

- Se realizan los siguientes cambios en las consignas de las situaciones-problemas de la segunda versión del instrumento. Los mismos se ven reflejados en la tercera y última versión del instrumento.

Problema 2:

Enunciado en la segunda versión: En una división entre números enteros “a” y “b”, ¿bajo qué condición “b” es divisor de “a”?

Reformulación: Si se divide al número “a” por el número “b”, ¿existe alguna condición para que “b” sea divisor de “a”? Justifica tu respuesta.
Con la reformulación se trata de dejar claro que se considera “a dividido b” y no asegurar la existencia de la condición solicitada.

Problema 4:

Enunciado en la segunda versión: 15a45 es un número de 5 cifras, ¿existe algún valor de “a” para que este número sea divisible por 3? Explica cómo lo hiciste y justifica tu respuesta.

Reformulación: 15a45 es un número de 5 cifras, ¿existe algún valor de “a” para que este número sea divisible por 3? En caso de que tu respuesta fuera afirmativa, indica todos los posibles valores de a. Explica cómo lo hiciste y justifica tu respuesta.

Con el cambio de enunciado se trata de que los alumnos encuentren todos los valores de “a”, promoviendo exhaustividad y generalización.

Problema 5:

Enunciado en la segunda versión: Si a y b son números naturales y a es divisor de b, siempre a es menor o igual que b, ¿sucede lo mismo si los números fueran enteros? Justifica tu respuesta.

Reformulación: Se sabe que, si a y b son números naturales y a es divisor de b, siempre a es menor o igual que b. ¿Sucede lo mismo si los números fueran enteros? Identifica todas las posibilidades para este caso y justifica tu respuesta.

Con la nueva versión de la consigna se pretende lograr exhaustividad en la búsqueda de posibilidades.

Problema 6:

Enunciado en la segunda versión: ¿Es posible que dos números enteros distintos tengan los mismos divisores? ¿En qué condiciones? Justifica tu respuesta.

Reformulación: ¿Es posible que dos números enteros distintos tengan los mismos divisores? Si tu respuesta es afirmativa, indica en qué condiciones eso ocurre. Justifica tu respuesta.

En la nueva consigna no se induce que la respuesta a la pregunta planteada es afirmativa.

***Problema 8**:*

Enunciado en la segunda versión: Si fuera posible, escribe un número que tenga: a) Exactamente cuatro divisores naturales.

b) Más de 15 divisores enteros.

Explica la estrategia que usaste para encontrarlos y fundamenta tu respuesta.

Reformulación: Si fuera posible, escribe un número que tenga:

a) Exactamente cuatro divisores naturales.

b) Más de 15 divisores enteros.

Si te resultó posible, explica la estrategia que usaste para encontrarlos y si no, explica por qué no es posible. En cualquier caso, fundamenta tu respuesta.

Con la reformulación de la consigna se busca mantener la incertidumbre en todo el enunciado, no solamente al principio.

Problema 9:

Enunciado en la segunda versión: En una estación de colectivos, un bus para con una frecuencia de 18 minutos y el otro lo hace cada 15 minutos, ¿dentro de cuántos minutos, como mínimo, se encontrarán en esa estación, después de haber coincidido en esa estación los dos colectivos? Fundamenta tu respuesta.

Reformulación: En una estación de colectivos, un bus para con una frecuencia de 18 minutos y el otro lo hace cada 15 minutos, ¿habrá un encuentro posterior después de una coincidencia? Si la respuesta fuera afirmativa, ¿dentro de cuántos minutos, como mínimo, se encontrarán en esa estación, después de haber coincidido en esa estación los dos colectivos? Fundamenta tu respuesta.

Con la nueva consigna se busca sembrar la duda desde el principio, es decir, si habrá o no un nuevo encuentro de buses.

- En las aportaciones de la Dra. Rodríguez también hay elementos para mejorar las prácticas matemáticas institucionales expuestas en la matriz de desempeño. Específicamente, respecto del problema 4, explica: Considero que el alumno podría estar en un nivel avanzado de comprensión y resolver un problema con “recursos poco sofisticados”. Si esto ocurriera, vista su resolución en la matriz, el investigador podría tender a valorar la comprensión de ese sujeto como del nivel más bajo. En este caso, hacer diez casos es simple, efectivo y más rápido que un planteo de otro tipo. Con esto digo que: si acaso resolviera así, no sería suficiente indicador de estar en un nivel bajo porque en este caso “no necesitó otro recurso”.

c) Con base en las aportaciones de la **Dra. Cristina Mercedes Camós**, se llevaron a cabo las siguientes modificaciones en las consignas de las situaciones-problemas de la segunda versión del instrumento:

- ***Elementos para el mejoramiento del análisis a priori del problema 4 (matriz de comprensión):***

El problema expresa que: *15a45 es un número de 5 cifras, ¿existe algún valor de “a” para que este número sea divisible por 3? En caso de que tu respuesta fuera afirmativa, indica todos los posibles valores de a. Explica cómo lo hiciste y justifica tu respuesta.*

La Dra. Camós indica que: en el Problema 4 los alumnos también pueden argumentar sin recurrir a un k’ (en lugar de k-5), trabajando con la expresión: a=3x(k-5) dando valores a k desde 0 hasta 9 y considerando que “a” es un número no negativo de una cifra.

Esta sugerencia ayuda a mejorar el análisis a priori (nivel experto) de la matriz de comprensión.

- ***Mejoramiento del enunciado del problema 4:***

Dicho problema indica que: *Los múltiplos de un número, comprendidos entre 370 y 460 son: 380, 399, 418, 437 y 456. ¿De qué número se trata?, ¿es único? Explica cómo lo/s encontraste y fundamenta tu respuesta.*

En la nueva versión del mismo se explicita que los indicados son “todos” los múltiplos, comprendidos entre dos cotas.

Con esta segunda versión del instrumento también se realizaron exploraciones áulicas con estudiantes de la carrera de Profesorado en Matemática, en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura de la UNNE.

El análisis ontosemiótico de los sistemas de prácticas de los alumnos permitió mejorar esta versión y también la matriz de desempeño, una de las herramientas del marco institucional que se emplea como referencia para el análisis de los sistemas de prácticas de los estudiantes.

4.4.5. Tercera versión del instrumento de indagación

Es la versión final y se la incluye en el capítulo 6 de esta tesis. Se la elabora a partir de las exploraciones áulicas con el segundo instrumento y, fundamentalmente, desde las observaciones de los pares expertos. Las precisiones de las mejoras se indicaron recientemente. Esta versión cuenta con 10 situaciones-problemas.

Además, se presentan las resoluciones de cada una de ellas, destacándose los objetos matemáticos primarios involucrados. Se emplean configuraciones epistémicas como modelo de organización de las prácticas resolutorias.

Para destacar las relaciones conceptuales más importantes, establecidas entre entidades primarias, se utilizan funciones semióticas.

4.5. Matriz de desempeño

Las rúbricas se definen como *descriptores cualitativos que establecen la naturaleza de un desempeño* (Simon & Forgette-Giroux, 2001). En consecuencia, son instrumentos de medición en los cuales se establecen criterios y estándares por niveles, mediante la disposición de escalas, que permiten determinar la calidad de la ejecución de los estudiantes en unas tareas específicas (Vera Vélez, 2008).

Arends (2004) sostiene que a través de las rúbricas se logra una descripción detallada del tipo de desempeño esperado por parte de los estudiantes. Como herramienta metodológica, en esta tesis se construye una rúbrica de cinco columnas. En la primera de ellas se incluyen las diez situaciones-problemas de la versión final del instrumento, mientras que, en las restantes se presentan prácticas institucionales resolutorias de cada situación según cuatro niveles progresivos de desempeño: novato, aprendiz, experto y distinguido. Para distinguir estos niveles, se tienen en cuanta los siguientes aspectos:

a. La pertinencia, economía o adecuación de los objetos de la Divisibilidad empleados en la resolución, especialmente de los procedimientos.
b. La utilización de conocimientos óptimos como definiciones, proposiciones y propiedades en la resolución de los problemas.
c. La incorporación de argumentos para validar las distintas producciones, prestando atención en el tipo de argumento empleado.

La rúbrica se utiliza como complemento del análisis ontosemiótico del instrumento de indagación. Su relevancia se fundamenta en el hecho de constituirse en un importante marco de referencia para la realización del análisis didáctico de los sistemas de prácticas desarrollados por los alumnos, a propósito de la resolución de las situaciones-problemas del instrumento de indagación.

Esta herramienta metodológica ha sufrido varias modificaciones en el transcurso de la investigación, fundamentalmente después de cada análisis de las prácticas de los estudiantes, los que siempre aportaron sustanciales elementos para mejorarla. La última versión, que se emplea para elaborar el análisis didáctico final, se expone en el capítulo 6.

4.6. Validación de contenido del Instrumento

La validación del contenido del instrumento de recolección de datos de interés para esta tesis se realiza usando herramientas del Enfoque Ontosemiótico y evaluación de pares expertos.

Los contenidos sobre los que se realiza la validación, usando herramientas del Enfoque Ontosemiótico, son de índole didáctico-matemáticos, emocional y organizacional (considerando la "puesta en aula" del instrumento).

Para realizar este tipo de validación, retomamos y adaptamos a los intereses de esta tesis, los seis tipos de idoneidades didácticas que propone Godino (2011) para analizar un proceso instruccional, esto es, *idoneidad epistémica*, *ecológica*, *cognitiva*, *afectiva*, *interaccional* y *mediacional*.

El estudio de cada una de estas idoneidades se lleva a cabo teniendo en cuenta los indicadores de análisis que indica Godino (2013). El autor propone, para cada una de las idoneidades parciales, sendos componentes y a su vez, para cada componente, algunos indicadores y observables, con lo cual logra hacer operativa la noción de Idoneidad Didáctica. Explica, además, que los indicadores pueden ser formulados, reformulados o adaptados en tanto puedan ser cuantificables o medibles.

En relación con la validación de pares expertos, se acudió a profesionales que cuentan con amplia trayectoria en docencia de grado y postgrado e investigación en Matemática y/o Educación Matemática, quienes se nombran seguidamente, destacándose los aspectos más sobresalientes de sus trayectorias académicas. El protocolo de la solicitud de valoración del instrumento de indagación se incluye en la sesión de Anexos.

4.6.1. Pares expertos que validaron el instrumento de indagación

Se describe a continuación la formación académica y ámbito de investigación y docencia de los pares de expertos que participaron del proceso de validación del instrumento de indagación.

Alicia Mabel Rodríguez

Es Doctora en Matemática de la Universidad Nacional de Buenos Aires. Actualmente es directora de la Especialización en Didáctica de las Ciencias con orientación Matemática, Física o Química, de la Universidad Nacional General Sarmiento. Se desempeña, además, como profesora de Enseñanza de la Matemática I y Enseñanza de la Matemática II del Profesorado Universitario de la UNGS y es secretaria de investigación en dicha institución.

Ha sido docente en múltiples cursos de posgrado, capacitaciones, y materias de grado en diversas instituciones nacionales. Ha dictado capacitaciones sobre Educación Matemática a nivel superior en el país y en el exterior.

Trabaja actualmente en investigación en Educación Matemática y durante años también lo ha hecho en Matemática, en Convexidad Generalizada. Dirige becarios y tesistas en ambas áreas.

Sus principales áreas de interés son: Resolución de problemas, Habilidades matemáticas, Lenguaje matemático, Validación matemática, Formación de profesores, Uso de TIC en la formación de profesores, Conocimiento didáctico y matemático de profesores.

Cuenta con múltiples presentaciones en congresos y artículos de investigación en Educación Matemática, en los temas mencionados, y en Convexidad Generalizada, en revistas con referato nacionales e internacionales.

Cristina Mercedes Camós

Es Doctora en Ciencias Formales con mención en Didáctica de la Matemática, en la Universidad Nacional de Catamarca.

Es Profesora Universitaria en Matemática (Universidad CAECE), Diplomada en Metodología de la Investigación Científica y Elementos de Epistemología (Universidad Abierta Interamericana) y Magíster en Psicología Educacional (Universidad de Buenos Aires).

Se desempeña como directora general del Profesorado y la Licenciatura en Matemática, en la Universidad Abierta Interamericana. En esta universidad, es miembro de la comisión de investigación de la Facultad de Tecnología Informática.

Trabaja como Profesora Titular y Adjunta en instituciones como CAECE, Universidad de Quilmes, Universidad Abierta Interamericana, en cátedras de Matemática y de Educación Matemática.

Posee libros escritos y artículos publicados en revistas internacionales en el ámbito de la Educación Matemática. En esta área, participó como expositora en numerosos eventos científicos.

Gustavo Carneli

Es Doctor en Educación Superior de la Universidad de Palermo.

Es Profesor en Matemática, egresado del Instituto Superior Dr. Joaquín V. González, y Licenciado en Enseñanza de las Ciencias con orientación en Didáctica de la Matemática de la Universidad Nacional General San Martín. Desarrolla actividades de docencia en “Residencia II” para el Profesorado de Matemática y en “Matemática” en el ciclo de aprestamiento universitario.

Se dedica al campo de la investigación en Didáctica de la Matemática, ocupándose de temas como: interacciones en el aula y aprendizaje matemático, aprendizaje de la validación en Matemática.

Ha presentado publicaciones en revistas internacionales y participó como expositor en numerosos eventos científicos.

María Laura Distéfano

Es Doctora en Enseñanza de las Ciencias con mención en Matemática, en la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.

Es Magíster en Enseñanza de la Matemática en el Nivel Superior, en la Universidad Nacional de Tucumán y Profesora en Matemática, egresada de la Universidad Nacional de Mar del Plata.

Se desempeña como docente e investigadora en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata.

Ha presentado varios trabajos de investigación en revistas nacionales e internacionales y participó de numerosos congresos de Educación Matemática como expositora.

CAPÍTULO 5

Marco epistémico y didáctico de referencia

5.1. Introducción

En este capítulo se expone una organización matemática sobre objetos enmarcados en la Divisibilidad. La misma se elabora usando la herramienta "configuración epistémica", herramienta teórica y metodológica del Enfoque Ontosemiótico.

No se trata de un listado de contenidos desvinculados, como habitualmente puede observarse en textos escolares, sino de un conjunto de objetos matemáticos primarios y sus relaciones, objetos y relaciones que permiten abordar unos tipos de tareas de la Divisibilidad en el Nivel Medio. Justamente los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios (NAP) en ME (2011) proponen, entre sus objetivos, la elaboración de conjeturas acerca de las relaciones conceptuales, numéricas y algebraicas, ligadas a la Divisibilidad. En cuanto a las relaciones algebraicas, propone modelizar relaciones entre objetos básicos de la Divisibilidad por medio de expresiones simbólicas.

La producción matemática aquí expuesta comienza abordando la problemática de la División y a partir de un cambio de pregunta se trabajan las nociones de Divisibilidad, estableciéndose una importante vinculación entre dos temáticas centrales de la Teoría de Números.

Las relaciones fundamentales que se establecen entre los objetos primarios se resumen y clarifican al final del capítulo por medio de una tabla.

5.2. Selección de contenidos

Realizando una revisión de los NAP, en ME (2011), los diseños curriculares jurisdiccionales (MEC, 2012), (MECCTC, 2012) y las investigaciones que forman parte de los antecedentes de esta tesis, se identifican los siguientes contenidos como los más destacados para la enseñanza de la Divisibilidad en el Nivel Medio:

- División

- Múltiplos y divisores de un número. Relación con los objetos “factor”, “divisible” y “divide”
- Factorización y factorización prima
- Propiedades de los múltiplos y divisores
- Criterios de divisibilidad
- Números primos y compuestos
- Mínimo común múltiplo
- Máximo común divisor

5.3. Configuración Epistémica

Para la elaboración de los tipos de tareas que forman parte de esta configuración epistémica se han tenido en cuenta las mismas fuentes y referencias usadas para la selección de contenidos, indicadas anteriormente, además de algunos libros de textos como: Aritmética (Becker; Pietrocola y Sánchez, 2001), Notas de Álgebra I (Gentile, 1984) y Aritmética elemental en la formación matemática (Gentile, 1991).

Dicha configuración está constituida por las entidades matemáticas primarias que plantea el Enfoque Ontosemiótico y sus relaciones: tipos de tareas, definiciones/conceptos; proposiciones, procedimientos, argumentos y lenguaje.

Cabe mencionar que los NAP, en ME (2011) basan sus propuestas metodológicas en la resolución de problemas, la formulación de preguntas, el diseño de tareas, asumiendo que los objetos matemáticos que se obtienen son consecuencia necesaria de la aplicación de relaciones conceptuales.

Tipos de tareas (TT):

TT1: Dado el cardinal de una colección que se pretende subdividir en subcolecciones equipotentes, determinar el número de subcolecciones de la partición, el cardinal de cada subcolección y el resto.

TT2: Determinar si un número “a” es divisor o factor de otro “b”, cuando “b” está expresado en forma decimal, como producto de factores primos, en base al algoritmo de la división o en base a la propiedad distributiva.

TT3: Determinar si un número “a” es múltiplo (o divisible) de otro número “b”, cuando “a” está expresado en forma decimal, como producto de factores primos, en base al algoritmo de la división o en base a la propiedad distributiva.

TT4: Determinar si 0 es divisor y múltiplo de todos los números.

TT5: Determinar si 1 es divisor y múltiplo de todos los números.

TT6: Hallar múltiplos de un número.

TT7: Hallar un número conociendo una lista finita, exhaustiva y ordenada de sus múltiplos.

TT8: Hallar todos los divisores de un número.

TT9: Decidir si un número es primo o compuesto.

TT10: Hallar un número con una determinada cantidad de divisores.

TT11: Caracterizar las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{b}{a}$, cuando a es divisor de b, siendo a y b números no simultáneamente nulos.

TT12: Determinar en qué condiciones, en una división, el divisor de la división es divisor del dividendo.

TT13: Encontrar el mínimo común múltiplo de dos o más números.

TT14: Encontrar el máximo común divisor de dos o más números.

Definiciones, conceptos (D/C):

D/C1: Dados dos números a y b, con b≠0, existen y son únicos dos números q y r, llamados cociente y resto de la división entre a y b respectivamente, que satisfacen las siguientes condiciones: (i) a = bxq+r, (ii) 0≤r<b.

D/C2: Un número a es divisor de un número b si existe un número c tal que b = axc. En este caso, c es también divisor de b.

Cuando a es divisor de b se suele decir que “a divide a b”, lo cual se denota así: a|b.

Si a≠0, “a divisor de b” indica una relación entre los números a y b y no una operación. En ese caso, resulta que b = axc por lo que la definición de Divisor es equivalente a las siguientes definiciones D3 y D4:

D/C3: Si a≠0, a es divisor de b si, y sólo si, la división b:a tiene resto 0.

D/C4: Si a≠0, a es divisor de b si, y sólo si, el número racional $\frac{b}{a}$ es entero.

D/C5: Un número b es múltiplo de un número a si existe un número c tal que b = axc. Aquí, b es además múltiplo de c. Es decir, un número b es múltiplo de otro número a si éste es su divisor.

De esta definición se desprende que el producto de dos números es múltiplo de ambos.

D/C6: Un número a es factor de un número b si existe un número c tal que b = axc. En este caso, c es también factor de b. O sea, a es factor de b si es divisor del mismo.

D/C7: Un número b es divisible por un número a si existe un número c tal que b = axc. En este caso, b es también divisible por c. Es decir, b es divisible por a si es múltiplo de a.

D/C8: Un número es primo, si sólo es divisible por él mismo y por 1.

D/C9: Todo número c, mayor que 1, se factoriza unívocamente de la forma c = $p_1^{c_1} x p_2^{c_2} x......x p_r^{c_r}$, donde los p_i son números primos y los c_i son naturales.

D/C10: d es divisor o factor de c si y sólo si, d es de la forma d = $p_1^{d_1} x p_2^{d_2} x......x p_r^{d_r}$, con $0 \leq d_i \leq c_i$, siendo c = $p_1^{c_1} x p_2^{c_2} x......x p_r^{c_r}$. Además, c es múltiplo (o divisible) de d.

D/C11: La fórmula $\tau = (c_1+1)x......x(c_r+1)$ permite obtener la cantidad de divisores de c, siendo c = $p_1^{c_1} x p_2^{c_2} x......x p_r^{c_r}$.

D/C12: Un número es compuesto, si tiene más de dos divisores naturales. Es decir, el número p es compuesto cuando es divisible por 1, p y por otros números.

D/C13: El mínimo común múltiplo entre dos números es el menor de sus múltiplos comunes.

El sentido de esta definición radica en el hecho de que a y b admiten múltiplos comunes, por ejemplo axb y todos ellos están acotados inferiormente por a y por b.

D/C14: El mínimo común múltiplo de dos números es el producto de los factores primos de ambos números elevados al mayor exponente.

D/C15: El máximo común divisor entre dos números es el mayor de sus divisores comunes.

Esta definición tiene sentido porque un número tiene una cantidad finita de divisores.

D/C16: El máximo común divisor entre dos números es el producto de los factores primos comunes de ambos números elevados al menor exponente.

D/C17: El máximo común divisor de a y b es el mismo que el de b y r, siendo r el resto de la división entre a y b (Algoritmo de Euclides).

Proposiciones, Propiedades (P):

P1: 0 no es divisor de ningún número, más que de él mismo.

P2: 0 es divisible por todos los números.

P3: 0 es múltiplo de todos los números.

P4: 1 es el único divisor de sí mismo.

P5: todo número c>1 es producto de números primos.

P6: Si a es divisor de b, entonces, a≤b.

P7: El divisor de un divisor del número a, es también divisor de a.

P8: Si un número es divisor de otros dos, entonces es divisor de su suma.

P9: El producto de un múltiplo de un número a por un múltiplo de otro número b es un múltiplo del producto de ambos.

P10: Criterios de Divisibilidad, válidos en el sistema decimal de numeración:

Divisibilidad por 2: Todo número cuya cifra de sus unidades es par, es divisible por 2.

Divisibilidad por 3: Un número es divisible por 3 si la suma de sus cifras es múltiplo de 3.

Divisibilidad por 5: Un número es divisible por 5 si la cifra de sus unidades es 0 o 5.

Divisibilidad por 7: Un número es divisible por 7 si la diferencia entre dicho número sin las unidades y el doble de las unidades es 0 o múltiplo de 7.

Divisibilidad por 11: Un número es divisible por 11 si la diferencia entre la suma de sus dígitos pares y la suma de sus dígitos impares es cero o múltiplo de 11.

Los Criterios de Divisibilidad son proposiciones matemáticas que establecen una condición necesaria y suficiente para que un número a sea divisor de otro b o para que b sea divisible por a. Se trata usualmente de una condición sobre las cifras de b, que se puede examinar fácilmente. Esto es lo que otorga eficacia a los criterios.

Procedimientos (Prc):

Prc1: Conocido el cardinal de una colección, para determinar el número de subcolecciones equipotentes en el que se puede subdividir, el cardinal de las subcolecciones o el resto, se puede realizar una división.
Prc2: Para determinar si un número b es divisor o factor de otro número a, se debe buscar un número c de tal manera que a = bxc. Si existe se dice que “b es divisor o factor de a” o “a divisible por b” o “a múltiplo de b”.

Prc3: También se puede dividir “a” por “b” (b≠0) y si el cociente es natural y el resto es cero entonces se dice que “b es divisor de a”.

La división no permite validar que 0 es divisor de 0, mientras que la multiplicación, sí.

Prc4: Asimismo, se puede decidir si un número es divisor de otro aplicando algún criterio de divisibilidad.

Para decidir si “b es divisor de a”, siendo “a” un número grande, el hecho de encontrar un número c de tal manera que a = bxc resulta un procedimiento poco económico. En este sentido, la división o el uso de algún criterio de divisibilidad son procedimientos más pertinentes.

Prc5: En el caso de que a y b fueran dos números expresados en su descomposición factorial prima, para determinar que a es divisor de b, se debe notar que todos los factores de la descomposición prima de a son factores de la descomposición prima de b.

Prc6: Si se quiere determinar que el número a es divisor del número b, cuando este último está expresado en base a la propiedad distributiva y el primero en su versión decimal, basta observar que a es factor común de los sumandos de b o que puede escribirse como factor común de esos sumandos.

Cuando a está expresado en base al algoritmo de la división, es decir, a = bxc+r, con r≠0, r<b en N, r≤IbI en Z, ni b ni c son divisores de a.

Prc7: Para caracterizar las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{b}{a}$, cuando a es divisor de b, siendo a y b no simultáneamente nulos, se puede recurrir a la técnica de simplificar fracciones.

Esta técnica no resuelve totalmente la cuestión planteada, aunque puede ayudar a establecer conjeturas sobre la caracterización pretendida.

Prc8: Para determinar si un número es múltiplo de otro o divisible por otro, hay que determinar si el segundo es divisor o factor del primero.

Prc9: Para hallar un múltiplo de un número se puede multiplicar este número por cualquier número.

Prc10: Para listar una colección finita y ordenada de múltiplos de un número se puede multiplicar este número por una sucesión de números consecutivos.

Prc11: Para hallar un número conociendo una lista finita, completa y ordenada de sus múltiplos, se debe restar dos múltiplos consecutivos de esa lista, el mayor menos el menor.

Para hallar los divisores de un número se puede recurrir a:

Prc12: Realizar divisiones entre el número considerado y los números menores o iguales que él.

Prc13: Obtener descomposiciones multiplicativas del número. Los factores de dichas descomposiciones son sus divisores.

Prc14: Encontrar sistemáticamente todos los divisores menores o iguales que la raíz cuadrada del número considerado, pudiendo hallar los restantes por medio de la división entre dicho número y cada uno de los divisores hallados al principio.

Prc15: Descomponer en factores primos al número en cuestión y determinar todas las combinaciones de los productos de tales factores primos entre sí, incluyendo el 1 y el mismo número.

Este procedimiento resulta eficaz para hallar divisores de números grandes. Un buen recurso de control de resultados lo constituye la fórmula que da la cantidad de divisores de un número, sobre todo si las combinaciones que tuvieran que realizarse fueran muchas.

Prc16: Para encontrar la cantidad de divisores de un número, del cual se conoce su descomposición factorial, se debe realizar el producto de todos los exponentes de los números primos de la respectiva factorización, aumentados en una unidad. Es decir, dado $c = p_1^{c_1} x p_2^{c_2} x......x p_r^{c_r}$, la cantidad de sus divisores naturales se obtiene a través de la fórmula $\tau = (c_1+1)x......x(c_r+1)$.
Prc17: Para encontrar un número con una cantidad dada de divisores, por ejemplo, si se desea conocer un número que tenga 10 divisores, a partir de la fórmula que determina la cantidad de divisores, se puede proceder así: como 10 = 2x5, es posible armar la expresión de cálculo de la siguiente manera: $3^{(2-1)} x 2^{(5-1)} = 48$. De hecho, este número no es el único que tiene 10 divisores; para hallar otros con esa misma cantidad de divisores bastará con cambiar los números primos de las bases de las potencias de la expresión anterior.

Prc18: De manera más económica, un número con 10 divisores naturales puede obtenerse a partir, por ejemplo, de la potencia: $2^9 = 512$, donde 2 es un número primo y 9 = 10-1, siendo 10 la cantidad de divisores naturales que se pretende que tenga. Efectivamente, de acuerdo con la fórmula de la cantidad de divisores, este número tiene $\tau = (9+1) = 10$ divisores.

Prc19: También existe otro método más rudimentario para realizar la tarea señalada anteriormente: el que involucra multiplicar números primos. Por ejemplo, si se desea obtener un número con 4 divisores, basta multiplicar dos números primos distintos p_1 y p_2 (el número será $p_1 x p_2$ y sus divisores serán 1, p_1, p_2 y $p_1 x p_2$); si se quiere obtener un número con 8 divisores, basta multiplicar tres números primos distintos.

Este procedimiento no es económico cuando se quiere hallar un número que tiene muchos divisores, dado que no es sencillo averiguar cuántos números primos habrá que multiplicarse.

Prc20: Para determinar si un número es primo o compuesto, se deben hallar y contar sus divisores.
Prc21: Para hallar el mínimo común múltiplo entre dos números se lista una cantidad adecuada de múltiplos de ambos números (de manera ordenada y exhaustiva) y de los comunes, se toma el menor.

Prc22: También se pueden buscar sólo los múltiplos de uno de los números y comprobar quiénes de ellos son también múltiplos del otro y de los comunes, tomar el menor.

Si los números fueran grandes o se tuviera que buscar el mínimo común múltiplo de varios números, este procedimiento podría resultar poco económico. En estos casos:

Prc23: Si se conociera la descomposición factorial prima de los números en cuestión, el mínimo común múltiplo se puede hallar multiplicando los factores comunes (con el mayor exponente) y no comunes de dicha descomposición.

Prc24: Para hallar el máximo común divisor entre dos números se lista los divisores de ambos números y de los comunes, se toma el mayor.

Prc25: También se pueden buscar sólo los divisores de uno de los números y comprobar quiénes de ellos son también divisores del otro y de los comunes, tomar el mayor.

En el caso de que los números fueran grandes y tuvieran muchos divisores o hubiera que hallar el máximo común divisor de varios números, este procedimiento podría resultar poco pertinente. En estos casos:

Prc26: Si se conociera la descomposición factorial prima del número en cuestión, el máximo común divisor se puede hallar multiplicando los factores comunes, con el menor exponente.

Prc27: También se puede hallar el máximo común divisor de dos números a y b, hallando el mcd entre b y r, siendo r el resto de la división entre a y b. Este algoritmo (de Euclides) facilita la tarea cuando los números son grandes.

Por ejemplo, para calcular el mcd(2366,273), se puede proceder así:

La división entre 2366 y 273 tiene cociente 8 y resto 182 por lo que mcd(2366, 273) = mcd(273,182). Repitiendo el algoritmo, realizando divisiones sucesivas, se tiene que mcd(273,182) = mcd(182,91) = mcd(91,0) = 91. Luego, mcd(2366,273) = 91.

Argumentos (A):

- *Demostración del algoritmo de la división*

El algoritmo expresa que: dados dos números a y b, con $b\neq 0$, existen y son únicos dos números q y r, llamados cociente y resto de la división entre a y b respectivamente, que satisfacen las siguientes condiciones:

a) $a = bxq+r$

b) $0\leq r<b$

A1: Para demostrar la existencia trataremos de aproximar "a" por un múltiplo de "b". La diferencia entre a y dicho múltiplo será el resto de la división, que será 0 en el caso en que a sea múltiplo de b.

Siendo b un número natural, la secuencia de sus múltiplos es estrictamente creciente, luego, se puede elegir los múltiplos de tal manera que: $qxb\leq a<(q+1)xb$.

Dado que dos múltiplos consecutivos de b difieren en b, la diferencia b–qxa es menor que b. Así, quedan determinados dos números q y r que verifican las condiciones requeridas.

Para caracterizar la unicidad, suponemos en principio que existen otros números p y s, que satisfacen las dos condiciones de la proposición. En tal caso $a = pxb+s$ y $0\leq s<b$.

Si suponemos además que $p>q$ (procedimiento similar para $p<q$), restando ambas igualdades de la primera condición se obtiene $0 = (p-q)xb+(s-r)$, es decir $(p-q)xb = r-s$, lo que afirma que r-s es positivo y múltiplo de b. Pero, por otro lado, vale también que $r-s\leq r<b$, lo que representa una contradicción, que viene de suponer que existen otros números p y s, cociente y resto respectivamente, que cumplen con las condiciones respectivas.

Luego, sucede que $p = q$ y $r = s$; es decir, el cociente y el resto de la división entre a y b son únicos.

- *Fundamentación de la decisión acerca de cuándo un número es divisor de otro número*

A2: Si ambos números están expresados en base 10, la decisión se toma en función de la definición de divisor.

A3: En el caso de que a y b fueran dos números expresados en su descomposición factorial prima, para determinar que a es divisor de b, se debe notar que todos los factores de la descomposición prima de a, son factores de la descomposición prima de b. En símbolos: a es divisor de b si y sólo si, a es de la forma $a = p_1^{a_1} x......x p_r^{a_r}$, con $0 \leq a_i \leq b_i$, siendo $b = p_1^{b_1} x......x p_r^{b_r}$.

Teniendo en cuenta la propiedad del producto de potencias de igual base, b se puede escribir de la siguiente manera: $b = p_1^{a_1} x p_1^{(b_1-a_1)} ......x\ p_r^{a_r} x p_r^{(b_r-a_r)} = p_1^{a_1} x......x p_r^{a_r} x\ (p_1^{(b_1-a_1)} x......\ x p_r^{(b_r-a_r)}) = axc$, por lo que a es divisor de b, de acuerdo con la definición de divisor.

A4: Si se quiere determinar que el número “a” es divisor del número “b”, cuando “b” está expresado en base a la propiedad distributiva y “a” en su versión decimal, basta observar que “a” es factor común de los sumandos de “b” (o puede escribirse como factor común de los mismos).

O sea, si b = axc+axd = ax(c+d), a es divisor de b, teniendo en cuenta la definición de divisor, pues c+d un número natural.

A5: Cuando “a” está expresado en base al algoritmo de la división de resto no nulo, es decir, a = bxc+r, 0<r<b, ni b ni c son divisores de a.

Es inmediato ver que tanto b como c no son divisores de a, pues como r≠0, no cumplen con la definición de divisor.

- *Fundamentación de las técnicas de hallazgo de divisores, sobre todo de números grandes*

A6: Si d es uno de los divisores de b, b/d también lo es y en tal caso, b = dxb/d.

En el segundo miembro de esta igualdad, el primero o el segundo de los factores debe ser menor o igual que $\sqrt{b}$, dado que si ambos fueran mayores que b sucedería que b = dxb/d es mayor que $\sqrt{b}$ x $\sqrt{b}$ = b, lo que representa un absurdo, pues ningún número puede ser mayor que sí mismo.

Entonces, para obtener los divisores de un número b basta obtener los divisores d_i, menores o iguales que la raíz cuadrada de b, ya que los otros se obtienen mediante el cociente entre b y cada uno de los d_i.

Ahora bien, si un número es suficientemente grande, su raíz cuadrada también lo es, por lo que este procedimiento tampoco resulta del todo pertinente en dicho caso.

A7: Otra forma más efectiva de hallar los divisores de un número, conociendo su factorización prima, se basa en la siguiente argumentación: Sea c un número cuya factorización es: c = $p_1^{c_1}xp_2^{c_2}x......xp_r^{c_r}$. Si d es un divisor de c, todo primo q que es divisor de d, es también divisor de c; es más, si q^t es divisor de d entonces q^t es divisor de c. Luego, por el Teorema Fundamental de la Aritmética, los únicos números primos que pueden aparecer en la factorización de d son los p_i y con un exponente menor o igual que el exponente con el que aparecen en c. Es decir, d debe ser de la forma $p_1^{d_1}xp_2^{d_2}x......xp_r^{d_r}$, donde $0 \leq d_i \leq c_i$, para cualquier i. Recíprocamente, todo número de esta forma es un divisor de c, dado que se puede escribir: c = dx($p_1^{c_1-d_1}xp_2^{c_2-d_2}x......xp_r^{c_r-d_r}$).

En definitiva, d es divisor de c si y sólo si, es de la forma: d = $p_1^{d_1}xp_2^{d_2}x......xp_r^{d_r}$, con $0 \leq d_i \leq c_i$, siendo c = $p_1^{c_1}x\ p_2^{c_2}x......xp_r^{c_r}$.

Entonces, conocida su factorización, se tiene ahora un procedimiento que permite hallar todos los divisores de un número. Por ejemplo, los divisores de 72 (3^2x2^3), son: **1** (3^0x2^0), **2** (3^0x2^1), **4** (3^0x2^2), **8** (3^0x2^3), **3** (3^1x2^0), **6** (3^1x2^1), etc.

A8: Con esta caracterización de los divisores de c, a partir de un sencillo problema combinatorio se puede contar cuántos hay. Así, un divisor d queda determinado eligiendo ordenadamente los exponentes d_i, que deben variar en el rango $0 \leq d_i \leq c_i$. Por ejemplo, la cantidad de divisores de 120 = 2^3x3x5 resulta de 4x2x2 combinaciones posibles, cantidad que surge del producto de cada uno de los exponentes de los números primos de su factorización aumentados en una unidad.

Por lo tanto, hay c_i+1 formas de elegir cada uno de ellos. Luego, la cantidad de elecciones conjuntas será el producto de estos números, o sea:

$\tau=(c_1+1)x......x(c_r+1)$.

De hecho, el número τ da la cantidad total de divisores de c, por cuanto no existe otro divisor “a” de “c” que no haya sido contado en las combinaciones. Así, si existiese a, podría suceder que fuera primo o compuesto. En el primer caso, por el Teorema Fundamental de la Aritmética, formaría parte de la descomposición prima de c y por lo tanto estaría ya contado entre los divisores, y en el segundo caso, si fuera compuesto, podría descomponerse en producto de primos, cuestión que ha sido considerada en el caso anterior.

- *Fundamentación de la tarea de hallar un número con una cantidad dada de divisores*

Otra cuestión interesante que se logra a partir de trabajar sobre la fórmula que permite calcular la cantidad de divisores de un número es la determinación de un número con una cantidad dada de divisores.

A9: Por ejemplo, si se desea conocer un número n con 10 divisores naturales, y considerando que 10 = 2x5, puede deducirse que n es de la forma $p^{(2-1)}xq^{(5-1)}$, con p y q primos distintos. Por ejemplo 1552 y 1377 son números con ese tipo de factorización, que tienen 10 divisores.

En general, un número "a" con "n" cantidad de divisores, siendo n = n_1x … xn_m, será de la forma a = $p_1^{(n_1-1)}$x……. x$p_m^{(n_m-1)}$, con p_1,…, p_m primos distintos y n_1…n_m factores de una descomposición factorial de n.

A10: De manera más económica, un número con "n" cantidad de divisores, se puede obtener a partir de una sola potencia de base prima y exponente n-1, pues en tal caso, a partir de la fórmula de la cantidad de divisores, dicho número tendrá τ = n-1+1 = n cantidad de divisores naturales.

- *Justificación del procedimiento de hallar un número, conociendo una lista finita y ordenada de sus múltiplos*

A11: Una lista finita (acotada inferior y superiormente por dos múltiplos), exhaustiva y ordenada, de múltiplos de un número "a" es: a, 2a, 3a,…,na.

Restando dos múltiplos consecutivos cualesquiera de esta lista, el mayor menos el menor, se obtiene el número a, es decir: na-(n-1)a = na-na+a = a.

Luego, dos múltiplos consecutivos de a, difieren en a.

- *Demostración del Teorema fundamental de la aritmética*

Teorema: *todo número c>1 es producto de números primos.*

A12: En principio tendremos que probar que c es divisible por algún primo. Para ello, consideramos el menor divisor natural de c distinto de 1 y lo designamos como p. Si p no es primo, tiene algún divisor d distinto de 1 y de p, lo que representa una contradicción, pues en tal caso, por transitividad, d divide a c y es menor que p. Por ello, p debe ser primo.

Iniciamos ahora un proceso iterativo, que conduce al resultado deseado.

Puesto que $p_1 = p$ divide a c, se tiene una relación de tipo $c = p_1 x c_1$, con $c>c_1$. Si $c_1 = 1$, nada se debe probar, pero si $c_1>1$, existe un número primo p_2 que lo divide, obteniéndose una relación del tipo $c_1 = p_2 x c_2$, y entonces la igualdad $c = p_1 x p_2 x c_2$, donde $c>c_1>c_2$. Luego, si $c_2= 1$, c resulta ser un producto de dos números primos y nada más hay que probar, pero si $c_2>1$, el proceso de factorización continúa.

Vamos obteniendo así una sucesión p_1, p_2, ..., p_k,... de números primos y una sucesión estrictamente decreciente c_1, c_2,...,c_k,... de números naturales, que verifican, para todo k, la relación $c = p_1 x p_2 .... p_k x c_k$. Dado que una sucesión de números naturales no puede decrecer infinitamente, debe existir un índice n tal que $c_n = 1$ y así, $c = p_1 x p_2 x....x p_n$, resulta ser producto de primos.

De hecho, los primos p_i, no tienen por qué ser todos distintos. De todos modos, se pueden agrupar los factores repetidos y entonces expresar c como producto de potencias de números primos, ahora sí, todos distintos.

Además, si p es un número primo y exactamente m de los factores de la descomposición $c = p_1 x p_2 x....x p_n$ son iguales a p, entonces c puede expresarse según la forma $c = p^m x d$, donde p no divide a d, dado que p no divide a ninguno de los factores de d.

En la expresión $c = p_1 x p_2 x....x p_n$, se ve que todos los primos p_i dividen a c. Recíprocamente, si un primo q divide a c, entonces divide a algunos de los factores del producto, por ejemplo, a p_j. Puesto que ambos son primos, se concluye que $q = p_j$. Entonces, los números primos que aparecen en cualquier factorización de c son exactamente los que lo dividen y por lo tanto están unívocamente determinados por c.

Para asegurar que hay una única forma de descomponer c, hace falta todavía probar que, si un primo p aparece s veces en una cierta factorización de c y t veces en otra, deberá suceder que s sea igual a t. En las condiciones de la hipótesis, por un lado habrá una expresión del tipo $c = p^s x a$, donde a no es divisible por p, y por otro lado una de la forma $c = p^t x b$, donde b no es divisible por p. Luego, si se divide por p^t la igualdad p^sxa = p^txb, se obtiene b = p^{s-t}xa. Pero entonces b resulta ser múltiplo de p, lo que constituye una contradicción, por lo que s y t deben ser iguales y por lo tanto hay una única manera de factorizar c.

Se puede caracterizar, inclusive, al exponente con que aparece cada primo: p^s es la mayor potencia de p que divide a c.

Todos estos hechos constituyen el teorema de la factorización única, cuyo enunciado es el siguiente:

Teorema: todo número c>1 se factoriza unívocamente en la forma c = $p_1^{c_1}$x$p_2^{c_2}$x...x $p_r^{c_r}$, siendo p_1, p_2,...,p_r los divisores primos de c y c_1,c_2,...,c_r, números naturales.

- *Demostración de algunas propiedades de la relación de divisor*

a) Si a es divisor de b, a≤b

A13: Si a es divisor de b, b = axc. Luego, como todo número natural a ≤ axc = b, se tiene que a≤b.

b) El divisor de un divisor del número a, es también divisor de a

A14: Si a_1 es divisor de a_2, entonces, por definición de divisor, a_2 = a_1xc_1. Como a_2 es divisor de a, a = a_2xc_2 = (a_1xc_1)xc_2 = a_1x(c_1xc_2) = $a_1$xc, por lo que a_1 es divisor de a.

c) Si un número es divisor de otros dos, entonces es divisor de su suma

A15: Si a es divisor de b y de c, empleando la definición de divisor, b = axp y c = axq, por lo que, sumando ambas igualdades, se tiene que: b+c = axp+axq = ax(p+q). Como p+q es un número natural, en función de la definición de divisor, se tiene que a es divisor de b+c.

d) El producto de un múltiplo de un número a por un múltiplo de otro número b es un múltiplo del producto de ambos.

A16: Sean kxa y k'xb dos múltiplos de a y b. El producto entre ambos múltiplos es kxaxk'xb, el que en función de la propiedad asociativa puede escribirse (kxk')xaxb = k''xaxb, expresión que caracteriza a un múltiplo de axb.

- *Demostración de algunos criterios de divisibilidad*

Criterio de divisibilidad por 2: un número natural m es divisible por 2 si y sólo si a_0 es 0, 2, 4, 6 u 8.

A17: Se considera la expresión decimal de m, esto es, $m = a_o+a_1.10+a_2.10^2+a_3.10^3+...+a_n.10^n$.

Asociando a partir del segundo sumando y extrayendo luego factor común 2, se obtiene la expresión $m = a_o+2.[5.a_1+50.a_2+500.a_3+...]$.

Se puede ver que la expresión encerrada entre corchete es un número múltiplo de 2, por lo que a_o debe ser 0, 2, 4, 6 u 8, pues la suma de dos múltiplos de 2 es un múltiplo de 2.

Criterio de divisibilidad por 3: un número m es divisible por 3 sí y sólo sí la suma de las cifras de su desarrollo decimal ($a_o+a_1+a_2.+...+a_n$) es múltiplo de 3.

A18: Sea $m = a_o+a_1.10+a_2.10^2+a_3.10^3+...+a_n.10^n$.

Disociando a 10, 100, 1000, etc. como la suma entre 1 y un múltiplo de 3 (y de 9), se puede escribir: $a_o+a_1.(1+9)+a_2.(1+99)+a_3.(1+999)+...+a_n.(1+9....9)$.

Aplicando propiedad distributiva: $a_o+a_1+9.a_1+a_2+99.a_2+\ldots+a_n+9...9.a_n$ y luego conmutando y asociando convenientemente, se tiene: $(a_o+a_1+a_2 +a_3+...+a_n)+(a_1.9+ a_2.99+...+ a_n.9...9)$.

Para que m sea divisible por 3 es necesario que $a_o+a_1+a_2+a_3+...+a_n$ (la suma de las cifras de m) lo sea.

Este criterio vale también para 9.

Criterio de divisibilidad por 5: un número natural m es múltiplo de 5, si y sólo si a_0 es 0 o 5.

A19: $m = a_o+a_1.10+a_2.10^2+...+a_n.10^n = a_o+a_1.10+a_2.10.10+...+a_n.10.10.....10 = a_o+a_1.5.2+a_2.5.2.10+...+a_n.5.2.10.....10 = a_o+5.(a_1.2+a_2.2.10+...+a_n.2.10.....10)$.

El segundo sumando de la suma anterior es múltiplo de 5, con lo que a_0 debe ser 0 o 5.

- *Justificación de la caracterización de las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{b}{a}$ cuando a es divisor de b, siendo a y b números no simultáneamente nulos*

A20: Se excluye el caso de que a y b fueran iguales a 0, entonces, como se sabe que a es divisor de b, a debe ser distinto de cero. Por ello, queda considerar los casos: b = 0 y b ≠ 0.

Si a es divisor de b, cuando b = 0, $\frac{a}{b}$ no existe, mientras $\frac{b}{a} = \frac{0xa}{a} = 0$.

Si a es divisor de b, con b≠0, b = axc, por lo cual $\frac{a}{b} = \frac{a}{axc} = \frac{1}{c}$ y $\frac{b}{a} = \frac{axc}{a} = c$. En estas condiciones, cuando a = b, se tiene que $\frac{a}{b} = \frac{b}{a} = 1$.

- *Explicación de las condiciones en las que, en una división, el divisor de la división es divisor del dividendo*

A21: Si la división a:b es exacta, esto es, de cociente natural y resto 0, se tiene que el dividendo "a" es múltiplo (o divisible por) del divisor "b", lo cual quiere decir que a = kxb y, por lo tanto, b es divisor de a.

Si la división no es exacta, esto es, si a = kxb+r, r≠0, sucede que el divisor b no es divisor del dividendo a.

- *Demostración del Algoritmo de Euclides para el cálculo del mcd*

A22: El algoritmo expresa que: el máximo común divisor de a y b es el mismo que el de b y r, siendo r el resto de la división entre a y b (Algoritmo de Euclides).

Si llamamos c al mcd(a,b), como a = bxq+r y c es divisor de a y b, es también divisor de r. Si existiera otro número mayor que c que fuera divisor de r, también sería divisor de a, por lo que c no sería el mcd(a,b), lo cual contradice la hipótesis.

Lenguaje: El lenguaje empleado es coloquial y simbólico.

En cuanto a la notación usada para nombrar algunos objetos de la Divisibilidad puede observarse que:

- "a divide a b", se nota a|b.
- "a dividido por b", se escribe a/b o $\frac{a}{b}$ y se lee "a sobre b" o "a dividido b" o "a dividido entre b".
- "a tal que b" se escribe a|b, escritura muy similar a a/b (a sobre b) e igual a a|b (a divide a b).

- “a múltiplo de b”, se escribe $a = \dot{b}$
- “a divisible por b” no tiene una denotación simbólica.
- “a es divisor de b” o “a es factor de b” tampoco tienen una denotación simbólica.

Las expresiones simbólicas parecidas y los nombres similares atribuidos a los objetos de la Divisibilidad, derivadas de la división (del latín *divisio*), como División, Divisible, Divisor, Dividendo, Divide, no favorecen la distinción o relación entre ellos.

5.4. Organización de la red de relaciones involucrada en la configuración epistémica

En la siguiente tabla se indican los problemas de la configuración epistémica elaborada, los procedimientos que permiten resolverlos y los argumentos correspondientes.

La misma se constituye en un recurso de visualización de las principales relaciones establecidas entre los objetos matemáticos primarios constitutivos de dicha configuración.

Situaciones-problemas	***Procedimientos/técnicas de resolución***	***Validación (Definiciones, propiedades, proposiciones demostradas,…)***
TT1	Prc1	D/C1 A1
TT2	Prc2, Prc3, Prc 4, Prc5, Prc6	D/C2, D/C3, D/C4, D/C6, D/C10 P6, P7, P8, P10 A2, A3, A4, A5, A12, A13, A14, A15, A17, A18, A19
TT3	Prc8	D/C5, D/C7 A2, A3, A4, A5, A12, A16, A17, A18, A19
TT4	Prc2, Prc4, Prc8	D/C2, D/C5 P1, P2, P3
TT5	Prc2, Prc3, Prc4, Prc8	D/C2, D/C3, D/C4, D/C5, D/C7
TT6	Prc9, Prc10	D/C5, D/C7 A16
TT7	Prc11	D/C5 A11
TT8	Prc2, Prc3, Prc4, Prc5, Prc6, Prc12, Prc13, Prc14, Prc15, Prc16	D/C2, D/C3, D/C4, D/C6, D/C11 P1, P4, P6, P7, P10 A2, A6, A8, A8, A13, A14, A17, A18, A19
TT9	Prc20	D/C8, D/C 9, D/C12 P5
TT10	Prc17, Prc18, Prc19	D/C9

		P5 A9, A10
TT11	Prc7	D/C4 A20
TT12	Prc2, Prc3, Prc4, Prc8	D/C2, D/C3, D/C4, D/C5 P10 A1, A17, A18, A19, A21
TT13	Prc21, Prc22, Prc23	D/C13, D/C14
TT14	Prc24, Prc25, Prc26, Prc27	D/C15, D/C16, D/C17 A22

5.5. Aportes del marco institucional

Este marco epistémico y didáctico contempla una red de relaciones entre objetos matemáticos primarios de la Divisibilidad, como ser, situaciones-tareas, definiciones/conceptos, procedimientos, propiedades, argumentos y lenguaje. La red se ilustra aún más en la tabla que se expone al final del capítulo, ya que, para cada tarea diseñada se indican los procedimientos que permiten resolverlas y las principales herramientas argumentativas que validan esas maneras de resolver.

La producción matemática comienza abordando la problemática de la división, considerando la resolución del tipo de tarea: dado el cardinal de una colección que se pretende subdividir en subcolecciones equipotentes, determinar el número de subcolecciones de la partición o el cardinal de cada subcolección, es decir: ¿cuántas partes se pueden armar? o ¿cuántos elementos tiene cada parte? Sin embargo, también puede suceder que la subdivisión del conjunto en partes iguales no constituya una partición ya que algunos elementos no pueden constituir una nueva clase. Posteriormente se trabaja con la Divisibilidad, a partir de un cambio de pregunta: ¿cuáles son aquellos números "a" que al dividirlos por "b" producen resto cero? De esta manera se establece una importante vinculación entre dos temáticas centrales de la Teoría de Números y una transición ordenada entre el estudio de los conceptos de División y de Divisores y Múltiplos.

En cuanto a las situaciones, las mismas involucran un interesante conjunto de tipos de tareas que resuelve la Divisibilidad en el Nivel Medio. Fueron elaboradas a partir del análisis de investigaciones relacionadas con la comprensión de la Divisibilidad, diseños curriculares y libros de textos de editoriales reconocidas y de uso frecuente en el nivel. A partir de lo que sugieren tales investigaciones, se consideran, por ejemplo, aquellas situaciones que involucran tareas de Divisibilidad con números que no solamente están expresados en su versión decimal, sino en su descomposición factorial prima, en base al algoritmo de la división o a la propiedad distributiva. Con ello se trata de aportar ideas para que los profesores propongan este tipo de tareas y así, los alumnos, no necesiten pasar por la expresión decimal de un número para determinar si es divisor, factor, múltiplo de otro o divisible por otro.

De los procedimientos de resolución, se analizan su economía y adecuación a las distintas situaciones, tarea fundamental del profesor para hacer avanzar a los alumnos en la construcción de técnicas económicas y pertinentes para la realización de diferentes tareas.

En relación con los argumentos, se procura que sean suficientemente explicativos. Así, por ejemplo, se pone énfasis en incluir conectores coloquiales en las cadenas deductivas que se presentan de manera simbólica, mejorando de esta forma el uso del lenguaje.

Asimismo, en relación con el lenguaje, se analizan los nombres y las notaciones de los objetos básicos de la Divisibilidad, sugiriendo que la enseñanza de estos temas se dirija más bien a lo conceptual, dado que ni los nombres ni las escrituras favorecen la distinción o relación entre los distintos objetos.

CAPÍTULO 6

Análisis didáctico del contenido del instrumento de indagación

6.1. Introducción

En este capítulo se exponen las situaciones-problemas de la tercera y última versión del instrumento de recolección de información y un análisis ontosemiótico de cada una de ellas.

Dichas situaciones son en general problemas particulares de algún tipo de problemas o tareas de Divisibilidad considerados en el capítulo anterior. Fueron adaptadas de investigaciones como las desarrolladas por Zazkis & Campbell (1996), Zazkis (2000 y 2001), Zazkis & Gadowsky (2001), Brown (2002), Zazkis & Liljedah (2004), Bodí (2006), Bodí, Valls y Llinares (2007), López (2015). Todas estas investigaciones se inscriben en el ámbito de la Didáctica de la Matemática y en general abordan temáticas relacionadas con la comprensión de la Divisibilidad.

Como asumimos la conformación de la Divisibilidad en N, la mayoría de las situaciones-problemas del instrumento están contextualizadas en este conjunto. Sin embargo, creemos que es posible realizar un fructífero trabajo matemático planteando algunas situaciones de la Divisibilidad en el conjunto Z. Ejemplo de esto lo constituyen las situaciones que se plantean en el dominio de los enteros: indagar a cerca del orden que se establece entre dos números enteros cuando uno de ellos es divisor del otro, conociendo lo que sucede en los naturales (problema 5); analizar la unicidad en la determinación de un número conociendo una lista finita, exhaustiva y ordenada de sus múltiplos (problema 3); analizar la existencia de dos números enteros que tengan los mismos divisores (problema 6) y determinar un número entero que disponga de cierta cantidad de divisores enteros (problema 8).

Para la realización de estas tareas se necesita poner en funcionamiento definiciones y propiedades de los divisores y múltiplos, objetos que están bien definidos en Z. Por otra parte, las mismas involucran cuestiones relacionadas con el establecimiento de relaciones importantes entre un número y sus divisores, el planteo de la conservación de una propiedad en otro dominio, el análisis de existencia y unicidad de solución, normas fundamentales del quehacer matemático. Estas normas, de acuerdo con lo planteado en las orientaciones metodológicas de los diseños curriculares, deberían formar parte de las prácticas habituales de los alumnos del Nivel Medio, por lo cual, más allá de la posibilidad de que hayan estudiado solamente la Divisibilidad en N, en este nivel, entendemos que podrían estar en condiciones de abordar estas tareas con buenas posibilidades de éxito al comenzar los estudios universitarios.

El análisis ontosemiótico de las prácticas institucionales se realiza por medio de configuraciones epistémicas y funciones semióticas.

Para elaborar este análisis se toma como marco de referencia la organización matemática del capítulo anterior.

Como parte del análisis didáctico, se resuelven las situaciones-problemas del instrumento narrando los procesos cognitivos que a priori se piensa que elaborarían aquellos alumnos cuyas prácticas matemáticas podrían caracterizarse como adecuadas o pertinentes de acuerdo al nivel educativo para el que está destinado.

Por cada práctica de resolución institucional del instrumento se explicitan los elementos de significados primarios como situaciones-problemas, conceptos, proposiciones, propiedades, argumentos y lenguaje y se determinan unas relaciones entre estos objetos matemáticos, usando configuraciones epistémicas, herramienta teórica y metodológica del Enfoque Ontosemiótico. Estas relaciones se definen en términos de funciones semióticas. Más precisamente, por cada práctica se define una sucesión de funciones semióticas, considerando que generalmente el establecimiento de una de ellas, implica la determinación de las anteriores. El hecho de definir una sucesión de funciones semióticas, de manera desglosada y pormenorizada, permite involucrar un solo objeto matemático como expresión o contenido de cada una de ellas, lo cual no implica la falta de consideración de relaciones entre objetos como las componentes inicial o final en una función semiótica. Así, por ejemplo, en una función semiótica que se establece entre un procedimiento y un concepto, puede considerarse a su expresión como la relación entre las condiciones del problema y el procedimiento que lo resuelve y, como contenido, el concepto que fundamenta dicha manera de resolver.

Para profundizar el análisis ontosemiótico caracterizado recientemente se elaboran: un análisis de la idoneidad didáctica a manera de marco de referencia para la puesta en aula del instrumento y unas resoluciones expertas de las situaciones-problemas del instrumento que se exponen en una tabla denominada matriz de desempeño o comprensión.

Con el estudio de la idoneidad didáctica de la puesta en aula del instrumento de recolección de información se persigue el propósito de evaluar la articulación coherente y eficaz de las dimensiones epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional en los sistemas de prácticas matemáticas desarrollados desarrolladas a priori por el experto.

Empleando la matriz de comprensión se determinan a priori unas prácticas matemáticas que podrían desarrollar los alumnos en torno a la resolución de las situaciones-problemas del instrumento de indagación, centrando la atención en sus conocimientos caracterizados según 4 niveles progresivos de desempeño: novato, aprendiz, experto y distinguido. Estas prácticas fueron perfilándose y desarrollándose en función de las exploraciones áulicas con el instrumento en sus distintas versiones y a partir de las sugerencias de los pares evaluadores. Además, se nutren de las orientaciones metodológicas de los NAP, en ME (2011) nacionales y el Currículum para la Educación Secundaria en MECCTC (2012) y Diseño Curricular Jurisdiccional en MEC (2012) jurisdiccionales, específicamente en los aspectos relacionados con la promoción de situaciones y prácticas matemáticas que involucran intuición, exploración, formulación y validación de conjeturas, búsqueda de ejemplos y contraejemplos, elaboración de argumentos, conclusiones y generalizaciones. Por ejemplo, los NAP, en ME (2011) promueven la resolución de problemas, la elaboración de conjeturas y la producción de argumentos que permitan validar propiedades ligadas a la Divisibilidad en N, mientras que los diseños jurisdiccionales consultados promueven prácticas matemáticas provistas de procesos de conjeturas y validaciones acerca de relaciones ligadas a la Divisibilidad.

Todas las elaboraciones mencionadas y caracterizadas recientemente se toman como referencia para la realización de los análisis didácticos de las prácticas matemáticas de los alumnos ingresantes al Profesorado.

6.2. Análisis a priori del instrumento de indagación

6.2.1. Estudio de relaciones conceptuales entre los objetos matemáticos primarios presentes en cada situación-problema

Para cada una de las situaciones-problemas del instrumento de indagación, se indica el tipo de tarea o problema al que corresponde, se elabora al menos una resolución y se analizan las relaciones inmediatas, detectadas a priori, entre objetos matemáticos primarios, necesarias de establecer para elaborar dichas resoluciones. El análisis de tales relaciones, en tanto funciones semióticas, se lleva a cabo empleando como herramienta las configuraciones epistémicas.

Consigna inicial: Resuelve los siguientes problemas, indicando siempre los procedimientos que utilizas. No borres ningún escrito que hagas. En todo caso, indica que no es correcto lo que has hecho y vuelve a realizarlo a continuación. Trata de escribir lo más claro y preciso posible.

Problema 1:

a) ¿3 es divisor de 30?, ¿y de 473?

b) ¿3 es factor de 30?

c) ¿441 es múltiplo de 7?

Fundamenta tu repuesta.

El problema está dado en un contexto intramatemático y conlleva la tarea de determinar si un número, dado en su expresión decimal, es divisor, factor o múltiplo de otro número escrito también en base 10.

Resolución:

a) Podemos decir que 3 es divisor de 30, pues existe el número 10, que multiplicado por 3, da como resultado 30, de acuerdo con la definición de divisor:

Un número “a” es divisor de un número “b”, si existe un número “c” tal que a = bxc (concepto).

Para determinar si 3 es divisor de 473, usar como herramienta la definición anterior es poco pertinente, pues no es muy sencillo obtener un número que multiplicado por 3 dé 473 (procedimiento). En este caso, podemos recurrir al procedimiento de la división, respaldado en la siguiente definición:

Un número a, distinto de cero, es divisor de un número b, si la división b:a es exacta (concepto).

Este concepto permite disponer de una herramienta, en este caso más pertinente que la multiplicación, para determinar si un número es divisor de otro: la división. Luego, como 473:3 no es una división exacta (procedimiento), 3 no es divisor de 473.

Para responder esta pregunta, también se puede recurrir al criterio de divisibilidad por 3 (concepto y procedimiento). Así, sumando las cifras del número 473, se obtiene 14 que no es múltiplo de 3, por lo que 3 no es divisor de 473.

b) Con respecto al segundo apartado, podríamos afirmar que 3 es factor de 30, si 3 fuera divisor de 30. Así, un número “a” es factor de un número “b”, sí y sólo si, es divisor del mismo (concepto).

Como, de acuerdo con la definición de divisor, 3 es divisor de 30, pues 3x10 = 30 (procedimiento), concluimos que 3 es factor de 30.

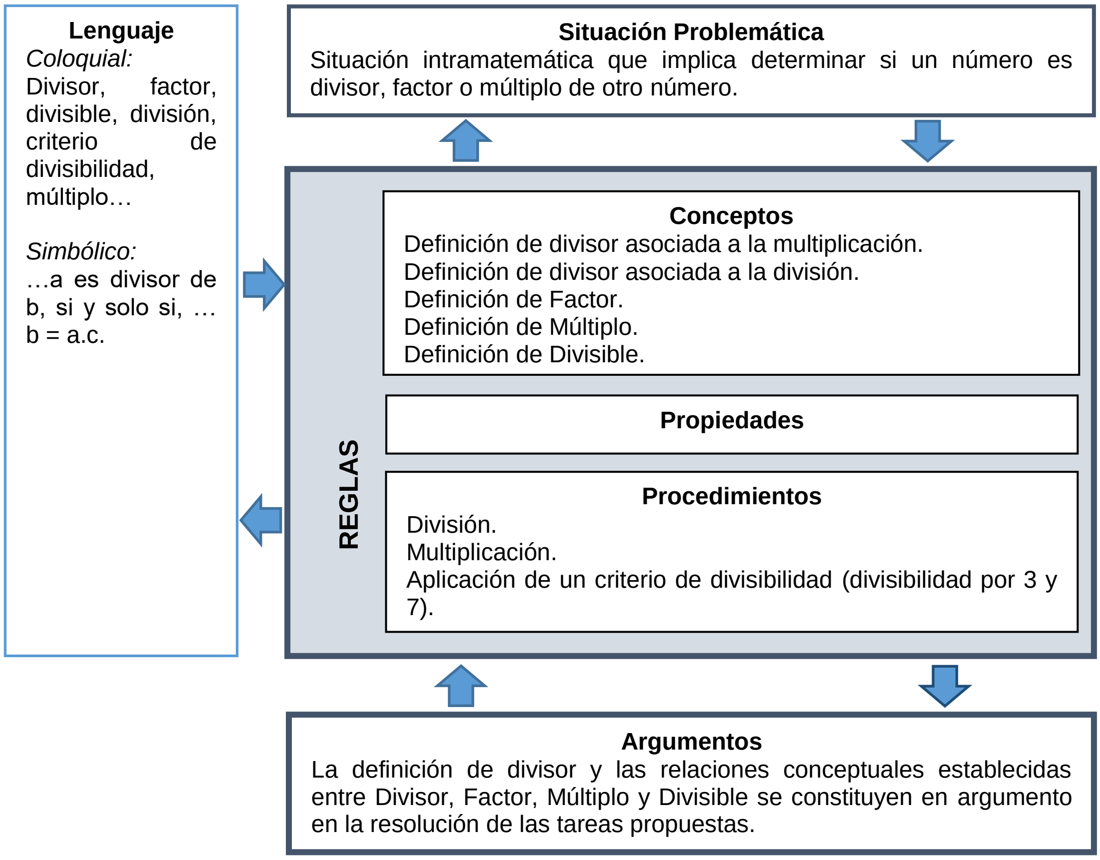
c) Podríamos afirmar que 441 es múltiplo de 7, si 7 fuera divisor de 441. Así, un número “b” es múltiplo de un número “a”, sí y sólo si, a es divisor de b (concepto).

Como 7 es divisor de 441, pues 441:7 da cociente 63 y resto 0 (procedimiento), o sea, se trata de una división exacta, podemos afirmar que 441 es múltiplo de 7.

Además, teniendo en cuenta que un número "b" es múltiplo de un número "a", si y solo si, b es divisible por a (concepto), acudiendo al criterio de divisibilidad por 7, podemos afirmar que 441 es divisible por 7, pues 44-2.1 = 42 (concepto y procedimiento), es un número divisible por 7 y, por lo tanto, múltiplo de 7. Finalmente, como 441 es divisible por 7, se tiene que 441 es múltiplo de 7.

Análisis del problema

La configuración epistémica del problema resulta ser la siguiente:



La red de relaciones que aparece en la configuración epistémica

Si bien podemos establecer un número significativo de funciones semióticas (FS) entre los objetos primarios presentes en la configuración epistémica de este problema, sólo nos quedaremos, a fines de esta investigación, con las que destacamos seguidamente.

La misma consideración vale para la determinación de las funciones semióticas movilizadas por el resto de los problemas.

FS1,1: Entre el problema y el concepto de divisor que involucra la multiplicación.

FS1,2: Entre el concepto de divisor que involucra la multiplicación y el procedimiento de la multiplicación para decidir si un número es divisor de otro.

FS1,3: Entre el problema y el concepto de divisor que involucra la división.

FS1,4: Entre el concepto de divisor que involucra la división y el procedimiento de la división para decidir si un número es divisor de otro.

FS1,5: Entre los conceptos de Factor y Divisor.

FS1,6: Entre los conceptos de Múltiplo y Divisor.

FS1,7: Entre los conceptos de Múltiplo y Divisible.

FS1,8: Entre el problema y el argumento dado por la definición de Divisor.

FS1,9: Entre el problema y los argumentos dados al usar las definiciones de Factor, Múltiplo y Divisible (en relación con la definición de Divisor).

Problema 2: Si se divide al número “a” por el número “b”, ¿existe alguna condición para que “b” sea divisor de “a”? Justifica tu respuesta.

La tarea, explícita en la consigna de este problema inserto en un contexto intramatemático, solicita determinar la condición bajo la cual, en una división, el divisor de la misma es divisor del dividendo.

Es necesario destacar que en Matemática se llama Divisor a un número y también a una relación entre números. En el primer caso, cuando se hace referencia a uno de los cuatro elementos de la división y, en el segundo, cuando se nombra a la relación de divisor (si hablamos de un número como divisor de otro).

Resolución: Consideremos, como ejemplo, las dos siguientes divisiones (procedimiento):

14:2 (cociente 7 y resto 0), 19:3 (cociente 6 y resto 1).

En la primera, el divisor de la división (el 2) es divisor del dividendo (14), dado que existe un número (el 7) que multiplicado por 2 da como resultado 14 (concepto). En la segunda división, podríamos decir que 3 “es divisor” de la división, pero “no es divisor” del dividendo, pues no existe un número natural que multiplicado por 3 dé 19, ya que 3x6 = 18 (menor que 19) y 3x7 = 21 (mayor que 19) (argumento).

El contraejemplo de la segunda de las divisiones, permite validar la afirmación: en una división entre números no siempre el divisor de la división es divisor del dividendo y entonces, según el requerimiento de la consigna, habrá que buscar la condición bajo la cual esta propiedad se cumple.

En la división a:b, con b≠0, teniendo en cuenta el algoritmo de la división (concepto y procedimiento), se puede afirmar que existen dos únicos números q y r de manera tal que: a = bxq+r.

Cuando r = 0, se tiene que a = bxq, por lo tanto, en función de la definición de divisor (concepto), podemos afirmar que “b” (divisor de la división) es divisor del dividendo “a”. Es decir, en una división entre dos números el divisor de la división es divisor del dividendo, cuando el resto de la división es cero o sea que se trata de una división exacta (propiedad).

Análisis del problema

La configuración epistémica del problema resulta ser la siguiente:

Lenguaje
Coloquial:
Divisor, división, algoritmo de la división, dividendo, resto,…

Simbólico:
En la división a:b,…, a = bxq+r. Si r = 0,…

Situación Problemática
Situación intramatemática que implica determinar la condición bajo la cual, en una división, el divisor de la misma es divisor del dividendo.

REGLAS

Conceptos
Definición de divisor que involucra la multiplicación.
Algoritmo de la división.

Propiedades
El divisor de una división es divisor del dividendo cuando el resto de la división es 0.

Procedimientos
División.
Escribir una división de la forma a = bxq+r.

Argumentos
En la división a:b, existen dos únicos números, q y r, tal que: a = bxq+r. Si r = 0, entonces a = bxq, por lo que b (divisor de la división) es divisor de a (dividendo).

La red de relaciones que aparece en la configuración epistémica

FS2,1: Entre el problema y el lenguaje (el nombre Divisor atribuido a dos objetos matemáticos diferentes).

FS2,2: Entre el problema y el procedimiento de la división.

FS2,3: Entre el procedimiento de la división y la propiedad que manifiesta que "el divisor de una división es divisor del dividendo cuando el resto de la división es 0".

FS2,4: Entre la propiedad que expresa que "el divisor de una división es divisor del dividendo cuando el resto de la división es cero" y el argumento "en la división a:b, existen dos únicos números, q y r, tal que: a = bxq+r. Si r = 0, entonces a = bxq, por lo que b (divisor de la división) es divisor de a (dividendo), teniendo en cuenta la definición de divisor.

Problema 3: Todos los múltiplos de un número, comprendidos entre 370 y 460 son: 380, 399, 418, 437 y 456. ¿De qué número se trata?, ¿es único?

Explica cómo lo/s encontraste y fundamenta tu respuesta.

El problema está dado en un contexto intramatemático, pues involucra la tarea de hallar un número, o más de uno, conociendo todos sus múltiplos comprendidos entre dos números naturales.

La consigna asegura la existencia de un número en las condiciones dadas y plantea analizar la unicidad.

Resolución: La consigna presenta una lista, ordenada de menor a mayor, de todos los múltiplos de un número, comprendidos entre dos números naturales.

Sabemos que un número b es múltiplo de un número a, sí y sólo si, a es divisor de b (concepto), o sea: $b = k.a$.

Por ello, el 380 que según la consigna es un múltiplo de un número desconocido "a", resulta de multiplicar "a" por un número, es decir: $380 = k.a$

El próximo múltiplo de la lista es el 399, quien se obtiene de multiplicar "a" por el número k+1, o sea, el siguiente de k:

$399 = (k+1).a = k.a + a$ (concepto y procedimiento)

Queda así formado un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{cases} 380 = k.a \\ 399 = k.a + a \end{cases}$$

Si lo resolvemos por el método de reducción (procedimiento y argumento), esto es, restando de la segunda ecuación, la primera, obtenemos que a = 19, el número buscado.

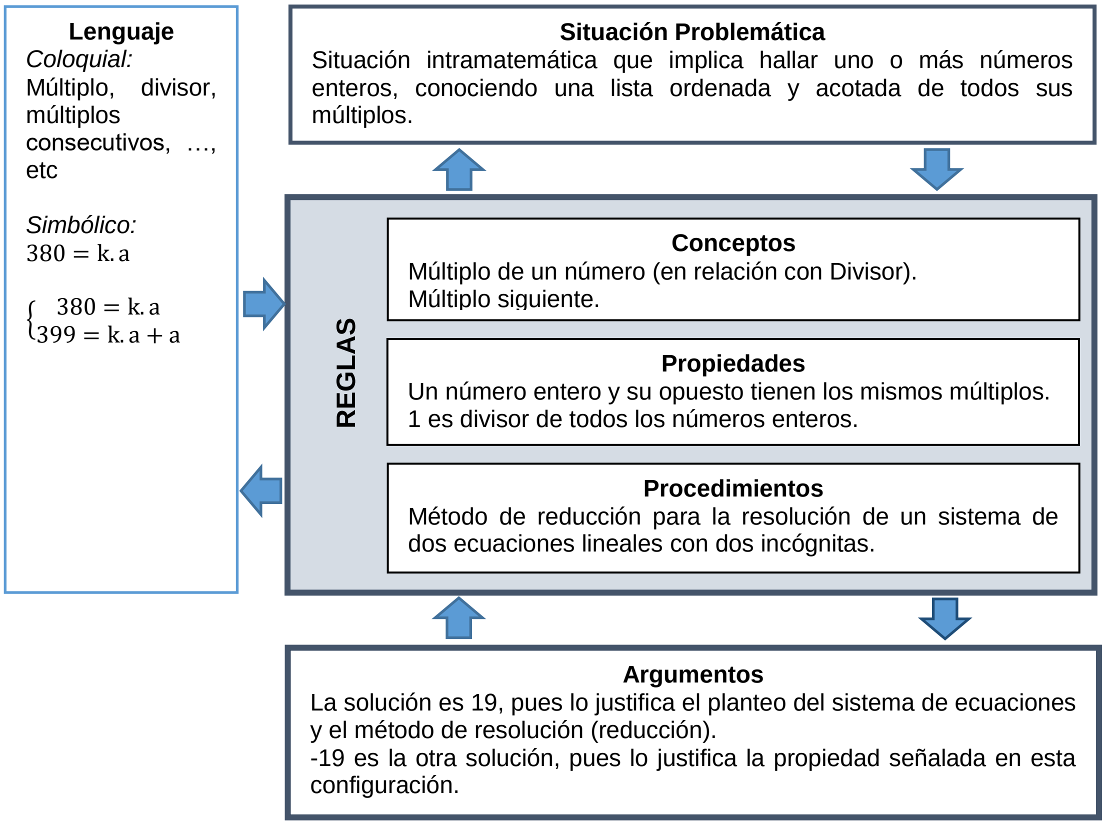
Si planteamos un sistema similar al anterior, tomando dos múltiplos consecutivos cualesquiera de la lista de múltiplos dada en la consigna y lo resolvemos de la manera indicada, obtendremos la misma solución.

Este número no es la única solución del problema, también lo es el -19, quien tiene los mismos múltiplos, ya que un número entero y su opuesto, tienen los mismos múltiplos (propiedad).

También el 1 es solución del problema, teniendo en cuenta que éste número es divisor de todos los números enteros (propiedad), razón por la cual, los números dados en la consigna son sus múltiplos. Como un número entero y su opuesto tienen los mismos múltiplos (propiedad), -1 también es un elemento del conjunto solución de la situación.

Análisis del problema

La configuración epistémica del problema resulta ser la siguiente:



La red de relaciones que aparece en la configuración epistémica

FS3,1: Entre el problema y el concepto de múltiplo.

FS3,2: Entre los conceptos de múltiplo y de múltiplo siguiente. Esta relación permite modelizar algebraicamente la situación–problema a través de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

FS3,3: Entre los conceptos de múltiplo y divisor.

FS3,4: Entre el problema y el procedimiento de resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, que permite hallar la solución natural.

FS3,5: Entre el problema y el procedimiento de resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que no solamente lo resuelve sino también justifica su resolución y que, por lo tanto, se constituye en un argumento.

FS3,6: Entre el problema y la propiedad que manifiesta que un número entero y su opuesto tienen los mismos múltiplos enteros, que no solamente permite hallar la solución negativa, conociendo algebraicamente la solución natural, sino que también justifica dicha solución y que en ese sentido se constituye en argumento.

FS3,7: Entre el problema y la propiedad que indica que 1 es divisor de todos los números enteros, la que permite identificar (y validar) al 1 como solución del problema y que por lo tanto se constituye en un argumento.

Problema 4: 15a45 es un número de 5 cifras, ¿existe algún valor de “a” para que este número sea divisible por 3? En caso de que tu respuesta fuera afirmativa, indica todos los posibles valores de a. Explica cómo lo hiciste y justifica tu respuesta.

El problema se inscribe en un contexto intramatemático y conlleva la tarea de determinar la existencia de un dígito desconocido “a” de un número de cinco cifras, expresado en base 10, para que el mismo sea divisible por otro número de una cifra, el 3.

Para resolverlo no basta con la sola aplicación del criterio de divisibilidad por 3, esto es, sumar las cifras del número dado y observar si el resultado es o no múltiplo de 3, ya que en las cifras del mismo se encuentra un literal. A partir de la aplicación de dicho criterio, queda involucrada una importante propiedad de la divisibilidad.

Resolución: Para que el número 15a45 sea divisible por 3, la suma de sus cifras debe ser divisible por 3, teniendo en cuenta el criterio de divisibilidad por 3 (concepto y procedimiento).

Si sumamos las cifras del número dado (procedimiento), 1+5+a+4+5, y aplicamos la propiedad asociativa de la suma de números naturales (procedimiento), obtenemos:

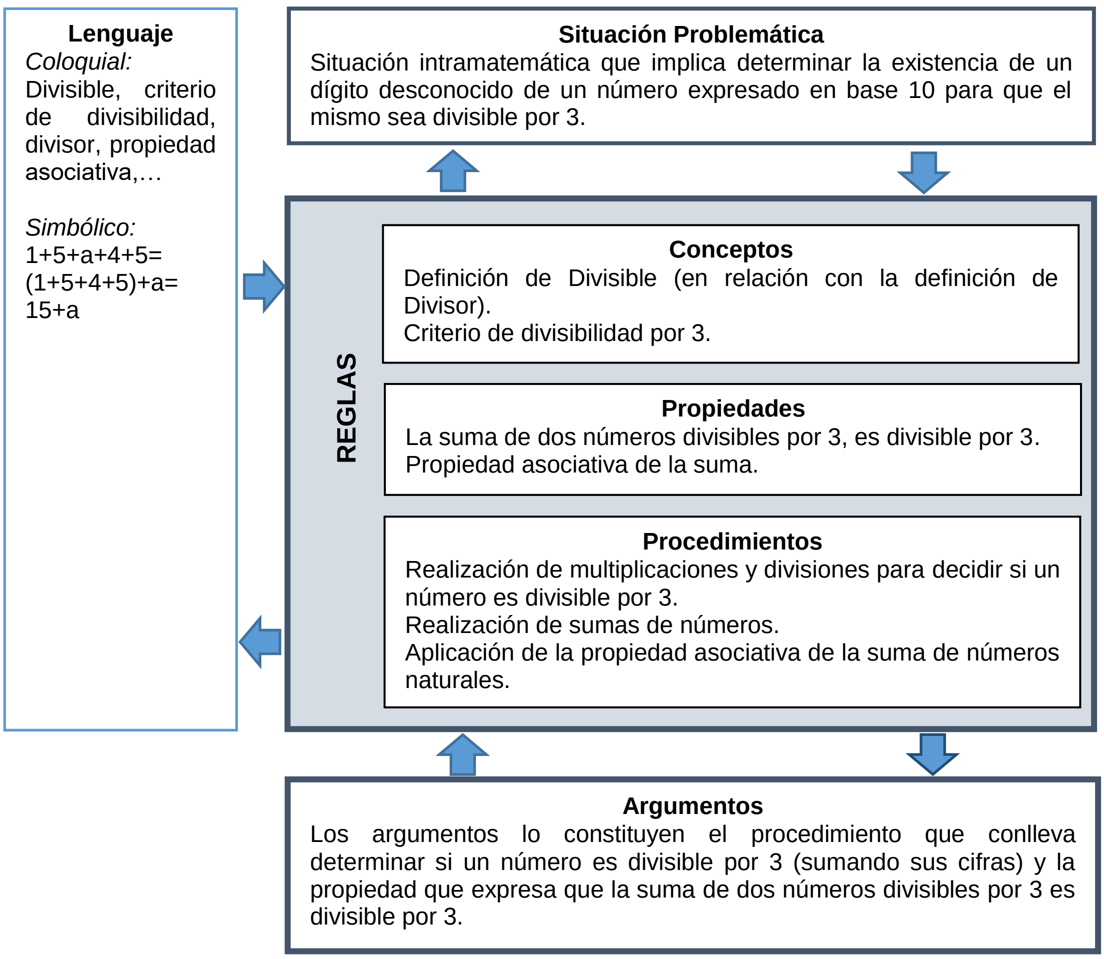
(1+5+4+5)+a = 15+a, o sea, un número desconocido por cuanto no conocemos “a”. Por este motivo, no podemos responder la pregunta solamente aplicando tal criterio de divisibilidad.

Ahora bien, habiendo realizado la suma de las cifras del número en cuestión y expresando dicha suma como suma de dos sumandos, siendo uno de ellos divisible por 3 (el 15), para que el número de interés resulte ser divisible por 3, el otro sumando (a) debe ser divisible por 3 (concepto), teniendo en cuenta que la suma de dos números divisibles por 3, es divisible por 3 (propiedad).

Por ello, como “a” es un dígito, pues 15a45 según la consigna es un número de 5 cifras, sus posibles valores son: 0, 3, 6 y 9 que son números divisibles por 3, dado que 3 es divisor de cada uno de ellos (concepto).

Análisis del problema

La configuración epistémica del problema resulta ser la siguiente:



La red de relaciones que aparece en la configuración epistémica

FS4,1: Entre el problema y el concepto de Divisible (asociado al concepto de Divisor).

FS4,2: Entre el problema y el concepto del criterio de divisibilidad por 3.

FS4,3: Entre el problema y el procedimiento que conlleva la aplicación del criterio de divisibilidad por 3 (sumar las cifras de un número).

FS4,4: Entre el procedimiento de sumar las cifras de un número viendo si se obtiene o no un número múltiplo de 3 y el concepto del criterio de divisibilidad por 3.

FS4,5: Entre el procedimiento que conlleva la aplicación del criterio de divisibilidad por 3 y la propiedad que expresa que la suma de dos números divisibles por 3 es divisible por 3.

FS4,6: Entre el problema y el argumento dado por la propiedad del criterio de divisibilidad por 3.

FS4,7: Entre el problema y el argumento dado por la propiedad que indica que la suma de dos números divisibles por 3 es divisible por 3.

Problema 5: Se sabe que, si a y b son números naturales y a es divisor de b, siempre a es menor o igual que b. ¿Sucede lo mismo si los números fueran enteros? Identifica todas las posibilidades para este caso y justifica tu respuesta.

El problema se inscribe en un contexto intramatemático e involucra la tarea de determinar si el orden que se establece entre dos números enteros, cuando uno de ellos es divisor del otro, es el mismo que el que se da entre dos números naturales.

Resolución: La búsqueda de ejemplos y contraejemplos, comparando números enteros entre sí (salvo el caso en que los mismos sean números naturales, por el dato de la consigna) (procedimiento), ayuda a avanzar en la resolución de la situación.

En los casos en los que los números enteros fueran iguales, uno de ellos es divisor del otro y viceversa (argumento), teniendo en cuenta la definición de divisor: Un número entero a es divisor de un número entero b si existe un número entero c tal que b = axc (concepto). Incluso, en el caso del "0", se tiene que 0 es divisor de 0 (propiedad), pues según la definición de divisor (concepto), existe un número entero c, tal que 0 = 0xc. O sea, en este caso, el orden que se establece entre dos números enteros, cuando uno de ellos es divisor del otro, es el mismo que la que se da entre dos números naturales.

Siendo exhaustivos en la búsqueda de casos particulares, habrá que considerar ahora los casos en los cuales los números enteros son: (a) ambos negativos y (b) uno negativo y el otro positivo.

Si a y b fueran negativos: Siendo a divisor de b, existe un número entero c, tal que b = axc (concepto). Como "b" y "axc" son iguales, sus opuestos también son iguales, esto es: -b = -(axc), expresión equivalente a: -b = -axc, la cual indica que el opuesto de b es mayor o igual que el opuesto de a, ya que "-a", "-b" y "c" son números enteros positivos, y por ello, se puede deducir finalmente que b≤a, o lo que es lo mismo, a≥b (argumento). En este caso, el orden que estamos analizando no es el mismo en el conjunto de los números enteros que en el de los naturales.

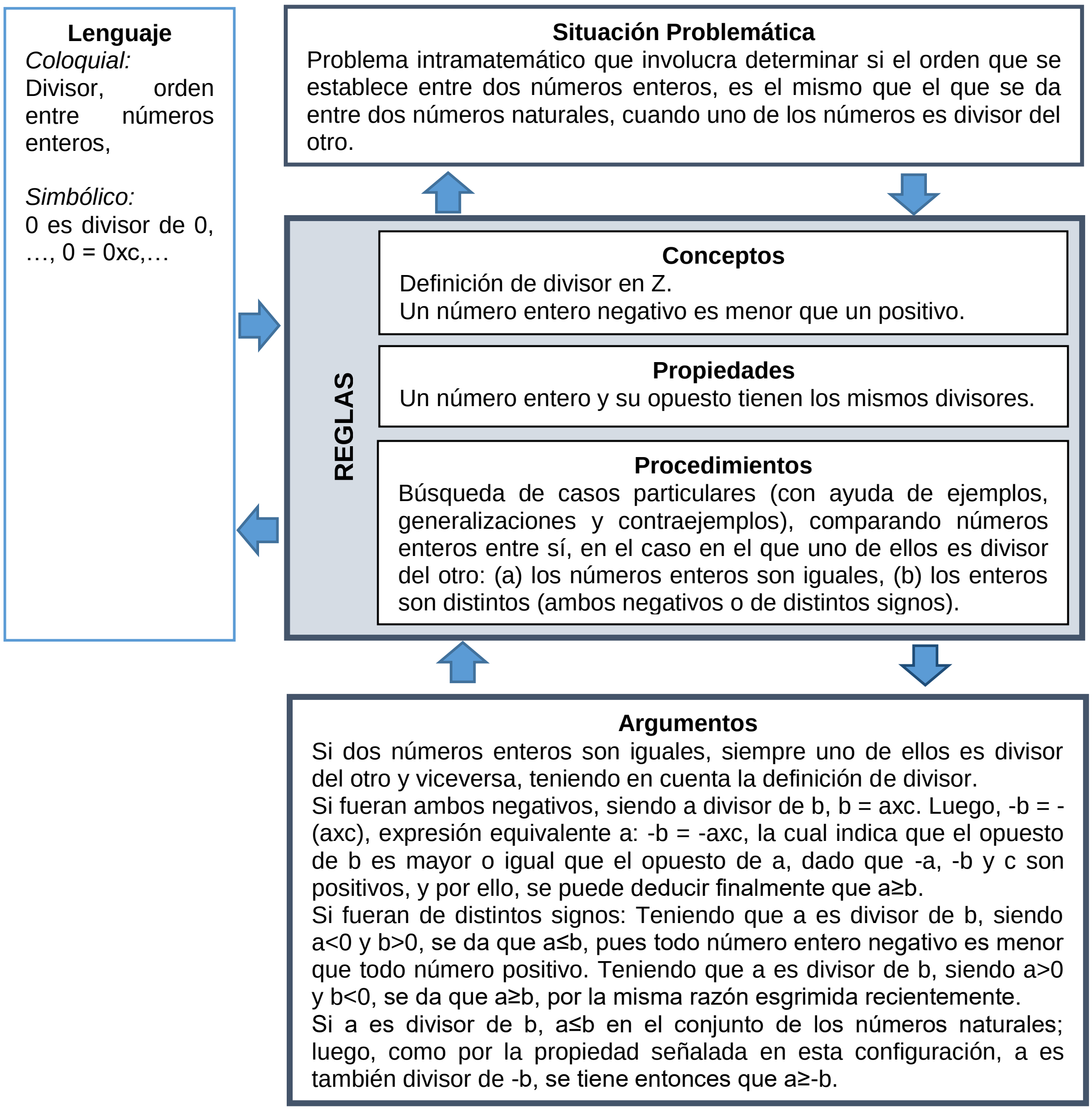
Si a y b fueran de distintos signos: en primer lugar, teniendo que a es divisor de b, considerando a<0 y b>0, por ejemplo "-3 divisor de 9", se tiene que a<b, pues todo número negativo es menor que todo número positivo (concepto y argumento). Decir que a<b implica afirmar que a≤b. Luego, en este caso, el orden establecido es el mismo en Z y en N.

En segundo lugar, teniendo que a es divisor de b, considerando que a>0 y b<0, por ejemplo "2 divisor de -8", no se cumple que a≤b, pues ningún número negativo es mayor que un número positivo (concepto y argumento). Este contraejemplo permite determinar que, en este caso, el orden que estamos estudiando no es el mismo en Z y en N.

Desde otro punto de vista, haciendo funcionar la propiedad: "Un número entero y su opuesto tienen los mismos divisores" (propiedad), se puede determinar que, en el conjunto de los números enteros, si a es divisor de b, a puede ser mayor, menor o igual que b. En efecto, si a es divisor de b, a≤b en el conjunto de los números naturales; luego, como por la propiedad señalada, a es también divisor de -b, se tiene entonces que a≥-b, es decir, en el conjunto de los números enteros existen infinitos casos en los que un divisor de un número es mayor o igual que el número (argumento).

Análisis del problema

La configuración epistémica del problema resulta ser la siguiente:



La red de relaciones que aparece en la configuración epistémica

FS5,1: Entre el problema y la propiedad que indica que un número entero y su opuesto tienen los mismos divisores.

FS5,2: Entre el problema y el procedimiento que consiste en la búsqueda de casos particulares (a divisor de b, (i) $a=b$ (ii) $a\neq b$ (ambos negativos o de distintos signos).

FS5,3: Entre el concepto de divisor y el procedimiento de búsqueda de casos particulares.

FS5,4: Entre el procedimiento de búsqueda de casos particulares y el argumento: Si dos números enteros son iguales, siempre uno de ellos es divisor del otro y viceversa.

FS5,5: Entre el procedimiento de búsqueda de casos particulares y el argumento: Si a y b son números enteros negativos, siendo a divisor de b, $b = axc$. Luego, $-b = -(axc)$, expresión equivalente a: $-b = -axc$, la cual nos indica que el opuesto de b es mayor o igual que el opuesto de a, dado que -a, -b y c son positivos, y por ello, se puede deducir finalmente que $a\geq b$.

FS5,6: Entre el procedimiento de búsqueda de casos particulares y el argumento: Si a y b fueran números enteros de distintos signos: Teniendo que a es divisor de b, siendo $a<0$ y $b>0$, se da que $a\leq b$, pues todo número entero negativo es menor que todo número positivo. Asimismo, asumiendo que a es divisor de b, siendo $a>0$ y $b<0$, se da que $a\geq b$, por la misma razón esgrimida recientemente.

FS5,7: Entre el problema y el argumento: Si a es divisor de b, $a\leq b$ en el conjunto de los números naturales; luego, como por la tercera propiedad señalada en la configuración, a es también divisor de -b, se tiene entonces que $a\geq -b$.

Problema 6: ¿Es posible que dos números enteros distintos tengan los mismos divisores? Si tu respuesta es afirmativa, indica en qué condiciones eso ocurre. Justifica tu respuesta.

Esta situación es un tipo de problema inscripto en un contexto intramatemático que involucra la tarea de decidir si existen dos números enteros distintos que tengan los mismos divisores y las condiciones bajo las que esto sucede.

Resolución: Para resolver la situación, realizaremos un exhaustivo análisis de casos particulares (procedimiento):

Consideremos el caso en que “a” y “b” son números enteros distintos, ambos positivos o ambos negativos. Si ambos fueran positivos y “a” fuese menor que “b”, “b”, quien es divisor de sí mismo (propiedad), no es divisor de “a”, pues los divisores de un número entero, son menores o iguales que el valor absoluto de dicho número (propiedad). Si ambos fueran negativos y “a” fuese menor que “b”, “a” no es divisor de “b”, porque el valor absoluto de “a” es mayor que el valor absoluto de “b” y, en función de la propiedad anterior, ningún divisor puede ser mayor que el valor absoluto del número correspondiente.

Luego, como difieren en al menos un divisor, a y b no tienen los mismos divisores.

Entonces, si existieran dos números enteros, distintos, con los mismos divisores, deberían tener signos diferentes, presentándose dos casos para analizar: si fueran opuestos o no.

En el primer caso, dos números enteros opuestos tienen los mismos divisores enteros (propiedad). Si a es divisor de b, por la definición de divisor, existe un entero c tal que: $b = axc$, $c \epsilon Z$ (concepto), y por la regla de los signos del producto de números enteros, $-b = -axc = ax(-c)$, $-c \epsilon Z$ (concepto y procedimiento), por lo que “a” es también divisor de “-b” (argumento).

En el segundo caso, si los números no son opuestos, tampoco tienen los mismos divisores, pues al menos se diferencian en el mayor divisor positivo del número de mayor valor absoluto. Dicho divisor es mayor que todos los divisores del número de menor valor absoluto y, por lo tanto, distinto de todos ellos (argumento).

En resumen: el único caso en el que dos números enteros distintos tienen los mismos divisores enteros, es cuando son opuestos.

Análisis del problema

La configuración epistémica del problema resulta ser la siguiente:

Lenguaje

Coloquial:
Divisor, valor absoluto, números enteros opuestos, divisores comunes, máximo divisor,…

Simbólico:
a es divisor de b,…, b = axc,…, -b = (-a)xc = ax(-c), -cϵZ

Situación Problemática

Tipo de problema intramatemático que implica determinar si existen dos números enteros distintos que tengan los mismos divisores y las condiciones bajo las cuales esto sucede.

REGLAS

Conceptos

Definición de divisor (estructura multiplicativa).
Regla de los signos del producto de números enteros.

Propiedades

Todo número entero es divisor de sí mismo.
Los números enteros opuestos tienen los mismos divisores.
Los divisores de un número entero, en valor absoluto, son menores o iguales que el valor absoluto de dicho número entero.

Procedimientos

Análisis de casos particulares (fundamentadas mediante propiedades o generalizaciones deductivas).
Aplicación de la regla de los signos del producto de números enteros.

Argumentos

- El argumento de que dos números enteros distintos, ambos positivos o ambos negativos, no tienen los mismos divisores se basa en la tercera propiedad expuesta en esta configuración epistémica.
- Si a es divisor de b, por la definición de divisor, b = axc, cϵZ, y por la regla de los signos del producto de números enteros, -b = (-a)xc = ax(-c), -cϵZ, por lo que a es también divisor de -b. Esto es, si dos números enteros son opuestos, tienen los mismos divisores.
- Si los números no fueran opuestos, no tienen los mismos divisores, pues al menos se diferencian en el mayor divisor (positivo) del número de mayor valor absoluto, divisor que es también mayor que todos los divisores del número de menor valor absoluto y, por lo tanto, distinto de todos ellos.

La red de relaciones que aparece en la configuración epistémica

FS6,1: Entre el problema y el procedimiento de análisis de casos particulares.

FS 6,2: Entre el problema y el concepto de divisor en Z.

FS6,3: Entre el problema y la propiedad que indica que todo número es divisor de sí mismo.

FS6,4: Entre la propiedad que indica que todo número es divisor de sí mismo y el argumento que explica que dos números enteros distintos no tienen los mismos divisores.

FS6,6: Entre el problema y la propiedad que indica que el valor absoluto de cualquier divisor de un número entero es menor o igual que el valor absoluto de dicho número.

FS6,7: Entre la propiedad que indica que el valor absoluto de cualquier divisor de un número entero es menor o igual que el valor absoluto de dicho número y el argumento que explica que dos números enteros distintos y de distinto valor absoluto no tienen los mismos divisores.

FS6,8: Entre la propiedad que indica que dos números enteros opuestos tienen los mismos divisores y el argumento deductivo que la avala, explicitado en la configuración epistémica anterior.

FS6,9: Entre el procedimiento de análisis de casos particulares y el argumento que explica que, si los números enteros no son opuestos, no tienen los mismos divisores, pues al menos se diferencian en el mayor divisor (positivo) del número de mayor valor absoluto.

Problema 7: Teniendo en cuenta que: 187 = 11x17, ¿son correctas las siguientes afirmaciones?:

a) 17 es divisor de 11x17.

b) 11x17+1870 es múltiplo de 187.

c) 11x17+16 es múltiplo de 187.

En cada caso, fundamenta tu respuesta.

Este caso nos pone en presencia de un problema intramatemático.

En el primer ítem, la tarea consiste en decidir si un número expresado en base 10, es divisor de otro número expresado en su descomposición factorial prima.

En el segundo apartado, la tarea consiste en determinar si un número, expresado en base a la propiedad distributiva, es múltiplo de otro número expresado en base 10.

En el tercer caso, la tarea consiste en determinar si un número, expresado en base al algoritmo de la división, es múltiplo de otro número escrito en su versión decimal.

Como puede observarse, en esta situación-problema se solicita determinar si un número es divisor o múltiplo de otro número, al igual que el problema 1, aunque la diferencia entre ambos es que en el primer problema los números están expresados en base diez, en cambio en este problema los números están dados en base al algoritmo de la división, la propiedad distributiva y en función de su descomposición factorial prima. El interés se centra en conocer si los alumnos necesitan pasar por la expresión decimal de los números para realizar las tareas propuestas o pueden trabajar directamente con la expresión factorial o la dada por el algoritmo de la división o la propiedad distributiva.

Resolución: a) Podemos afirmar que 17 es divisor de 11x17, pues es un factor de la descomposición factorial prima de 11x17. Esto es así pues teniendo en cuenta la definición de divisor (concepto), podemos decir que 17 es divisor de 11x17, ya que existe un número, el 11, que multiplicado por 17 da por resultado 11x17.

b) El número 11x17+1870 está expresado en base a la propiedad distributiva, teniendo en cuenta que, como 11x17 = 187 y 1870 = 187x10, en función de la propiedad distributiva del producto respecto de la suma de números, al número en cuestión (11x17+1870) lo podemos escribir así: 187+187x10.

Ahora bien, 187+187x10 = 187x(1+10) = 187x11 (concepto y procedimiento), expresión que nos dice que el número dado en la consigna 11x17+1870, que también puede escribirse como 187+187x10, es múltiplo de 187, pues 187 es divisor del mismo, ya que, teniendo en cuenta la definición de divisor, el número de interés puede escribirse como 187x11 (concepto y argumento).

Entonces, cuando un número puede descomponerse en la suma de n productos con un factor común, es decir, puede escribirse en base a la propiedad distributiva, dicho número es múltiplo de ese factor común (propiedad).

c) El número 11x17+16 está expresado en base al algoritmo de la división; el dividendo es 203 (11x17+16), el divisor es 17, el cociente, 11, y el resto, 16.

El primer múltiplo de 187 es el mismo 187 y el múltiplo consecutivo es: 187+187 (procedimiento). El número 11x17+16 = 187+16, está comprendido entre estos dos múltiplos consecutivos de 187: 187<11x17+16<187+187, razón por la cual podemos afirmar que 11x17+16 no es múltiplo de 187, dado que, entre dos múltiplos consecutivos de un número no existe otro múltiplo (argumento).

Análisis del problema

La configuración epistémica del problema resulta ser la siguiente:

Lenguaje

Coloquial:
Divisor, factor, múltiplo, división, factor común, expresión de un número en base a la descomposición factorial prima, el algoritmo de la división y la propiedad distributiva,…

Simbólico:
187<11x17+16= 187+16<187+18= 374

17 es divisor de 11x17

Situación Problemática

Situación intramatemática que implica determinar si un número escrito en base 10, como producto de factores primos, en función de la propiedad distributiva o el algoritmo de la división, es múltiplo o divisor de otro número expresado en algunas de estas mismas formas.

REGLAS

Conceptos

Definición de divisor.

Propiedades

Cuando un número puede descomponerse en la suma de n productos con un factor común, es decir, puede escribirse en base a la propiedad distributiva, dicho número es múltiplo de ese factor común.
Propiedad distributiva del producto respecto de la suma.

Procedimientos

Observar la descomposición factorial prima de un número. Cualquier factor primo de tal descomposición, es divisor de dicho número.
Hallar múltiplos consecutivos.
Escribir un número en base a la propiedad distributiva del producto respecto de la suma.

Argumentos

- 17 es divisor de 11x17, pues lo justifica la definición de divisor.
- 11x17+1870 = 187+187x10 = 187x(1+10) = 187x11, por lo que 11x17+1870 es múltiplo de 187, pues 187 es divisor de 11x17+1870, teniendo en cuenta la definición de divisor.
- Como 11x17+16 = 187+16 está comprendido entre dos múltiplos consecutivos de 187 (el 187 y el 187+187), se puede afirmar que 11x17+16 no es múltiplo de 187, ya que, entre dos múltiplos consecutivos de un número no existe otro múltiplo.

La red de relaciones que aparece en la configuración epistémica

FS7,1: Entre el problema y el procedimiento de observar si un número p es un número primo de la descomposición factorial de un número n, para decidir que p es divisor de n.

FS7,2: Entre el procedimiento que consiste en observar si un número p es un primo de la descomposición factorial de un número n para decidir que es su divisor y el concepto dado por la definición de divisor.

FS7,3: Entre el problema y el procedimiento que consiste en expresar un número en base a la propiedad distributiva, dejando explícito el factor común, para decidir que el número en cuestión es múltiplo de ese factor común.

FS7,4: Entre el procedimiento que conlleva escribir un número en base a la propiedad distributiva, dejando explícito el factor común, y el concepto dado por la definición de divisor.

FS7,5: Entre el procedimiento de escribir un número en base a la propiedad distributiva, dejando a la vista el factor común, y la propiedad que dice que cuando un número puede descomponerse en la suma de n productos con un factor común, es decir, puede escribirse en base a la propiedad distributiva, dicho número es múltiplo de ese factor común.

FS7,6: Entre el problema y el procedimiento de acotar el número 11x17+16 entre dos múltiplos consecutivos de 187.

FS7,7: Entre el procedimiento de acotar el número 11x17+16 entre dos múltiplos consecutivos de 187, y el argumento que explica que aquel número no es múltiplo de 187, ya que, entre dos múltiplos consecutivos de un número no existe otro múltiplo.

Problema 8: Si fuera posible, escribe un número que tenga: a) Exactamente cuatro divisores naturales. b) Más de 15 divisores enteros. Si te resultó posible, explica la estrategia que usaste para encontrarlos y si no, explica por qué no es posible. En cualquier caso, fundamenta tu respuesta.

El problema está dado en un contexto intramatemático y requiere la tarea de encontrar un número que disponga de una determinada cantidad de divisores naturales (en el primer apartado) y enteros (en el segundo).

Resolución: a) Dado que la cantidad de divisores requerida es pequeña, se puede resolver el problema buscando el número solicitado por tanteo (procedimiento), aplicando alguna herramienta como la multiplicación o división (procedimiento), más aún, teniendo en cuenta que hay números chicos con 4 divisores naturales, como, por ejemplo, el 6 o el 8.

No obstante, un procedimiento que siempre lleva al éxito en la realización de este tipo de problema, es multiplicar dos números primos (procedimiento). En efecto, si p y q son dos números primos, el número compuesto pxq, tendrá 4 divisores naturales, que son los elementos del siguiente conjunto:

$$\{1, p, q, pxq\}$$

1 es uno de los divisores porque es divisor de todos los números (propiedad), pxq es también un divisor, dado que todo número es divisor de sí mismo (propiedad), p y q son divisores de pxq, teniendo en cuenta la definición de divisor (concepto). Y no existen otros divisores, ya que p y q son números primos, por lo que no pueden descomponerse en producto, salvo la descomposición trivial (p = 1xp) (propiedad), en cuyo caso ya se contaron 1 y p entre los divisores.

b) En el segundo apartado, se solicita encontrar un número que tenga más de 15 divisores enteros (16 divisores o más). Para simplificar la tarea, se puede buscar un número que tenga 8 divisores naturales y, por lo tanto, 16 divisores enteros, teniendo en cuenta que, si un número entero, distinto de cero, tiene una cantidad de divisores en el conjunto de los números naturales, dispone del doble de esa cantidad en el conjunto de los números enteros (propiedad).

Para resolver esta situación se pude trabajar de manera similar al caso anterior, esto es, hallar el número de interés multiplicando 3 números primos. En este caso, si p, q y r fueran primos, la cantidad de divisores naturales del número pxqxr es 8 y pertenecen al siguiente conjunto: $\{1, p, q, r, pxq, pxr, qxr, pxqxr\}$, siendo la cantidad de divisores enteros, 16.

También se puede abordar la tarea a través de la manipulación conveniente de la fórmula que permite obtener la cantidad de divisores naturales de un número. La cantidad de divisores naturales de un número $p_1^{c_1} x \ldots \ldots x p_n^{c_n}$, expresado en su descomposición factorial prima, está dada por: $(c_1 + 1) x \ldots \ldots x (c_n + 1)$, es decir, por el producto de los exponentes de los números primos de la base, aumentados en una unidad (concepto y argumento).

Empleando esta fórmula, si quisiéramos construir un número natural con 16 divisores enteros, esto es, 8 divisores naturales, podríamos formar una potencia de base prima y exponente n-1, siendo n la cantidad de divisores que deseamos que dicho número tenga. Es decir, un número con 8 divisores naturales podría construirse con una potencia de base 2 y exponente 7 (procedimiento). La base podría ser cualquier número primo, aunque el hecho que sea 2, facilita el cálculo de la potencia, por el tamaño del número.

La validación correspondiente lo constituye el hecho de contar la cantidad de divisores usando la fórmula indicada recientemente. Esto es, $2^7 = 128$, tiene 7+1 = 8, divisores naturales y, por lo tanto, 16 divisores enteros (procedimiento y argumento).

Análisis del problema

La configuración epistémica del problema resulta ser la siguiente:

Lenguaje

Coloquial:
Cantidad de divisores, multiplicación, división, potenciación, números primos, descomposición trivial,…

Simbólico:

$\{1, p, q, pxq\}$

$(c_1 + 1)x \ldots \ldots x$

$x(c_n + 1)$

Situación Problemática
Situación intramatemática que implica encontrar un número que disponga de una determinada cantidad de divisores (naturales en un caso y entero en otro).

REGLAS

Conceptos
Definición de divisor que involucra la multiplicación o división.
Fórmula de la cantidad de divisores naturales de un número.

Propiedades
1 es divisor de todos los números.
Todo número es divisor de sí mismo.
Un número primo p no puede descomponerse en producto, salvo la descomposición trivial 1xp.
Si un número entero, distinto de cero, tiene n divisores naturales, entonces tiene 2xn divisores enteros.

Procedimientos
Búsqueda de divisores empleando la multiplicación o división.
Herramientas de tanteo (para encontrar divisores y un número con una determinada cantidad de divisores).
Construir un número con cierta cantidad de divisores naturales, a través de plantear y resolver potencias de enteros.

Argumentos
Las tres primeras propiedades señaladas en esta configuración y el concepto de divisor (en el caso de multiplicar números primos para resolver el problema).
El concepto que deviene de la fórmula de la cantidad de divisores, para construir un número con una cantidad dada de divisores y para validar que un número tiene una cantidad determinada de divisores naturales.

La red de relaciones que aparece en la configuración epistémica

FS8,1: Entre el problema y el procedimiento de búsqueda, por tanteo, de un número con una cantidad dada de divisores.

FS8,2: Entre el problema y el procedimiento de multiplicar números primos para hallar un número con una determinada cantidad de divisores naturales.

FS8,3: Entre el procedimiento de multiplicar números primos para hallar un número con una determinada cantidad de divisores naturales y el argumento que lo avala (constituido por las tres primeras propiedades expuestas en la configuración epistémica y el concepto de divisor).

FS8,4: Entre el problema y el procedimiento de la potenciación para construir un número con una cantidad dada de divisores naturales.

FS8,5: Entre el procedimiento de la potenciación para construir un número con una cantidad dada de divisores naturales y el argumento dado por la fórmula de la cantidad de divisores.

FS8,6: Entre el procedimiento de hallar los divisores naturales de un número y la propiedad de encontrar todos sus divisores enteros, conociendo dichos divisores naturales.

Problema 9: En una estación de colectivos, un bus para con una frecuencia de 18 minutos y el otro lo hace cada 15 minutos, ¿habrá un encuentro posterior después de una coincidencia? Si la respuesta fuera afirmativa, ¿dentro de cuántos minutos, como mínimo, se encontrarán en esa estación, después de haber coincidido en esa estación los dos colectivos? Fundamenta tu respuesta.

El problema está dado en un contexto extramatemático (determinar, si fuera posible, el menor tiempo en que volverán a encontrase dos colectivos, en una estación, luego de una coincidencia), para lo cual la tarea se reduce a hallar el mínimo común múltiplo entre dos números.

Resolución: Las coincidencias se darán en minutos representados por números que son múltiplos de 15 y también de 18. Como de todas las coincidencias interesa la inmediata siguiente luego de un encuentro inicial que suponemos se da en el instante 0 minutos, se tiene que recurrir al cálculo del mínimo común múltiplo, pues nos ofrece esta posibilidad.

Sabemos que un número m se llama mínimo común múltiplo (MCM) de los números a y b (concepto) cuando:

m es múltiplo de a y de b.

todo múltiplo común de a y b es múltiplo de m.

Para encontrar el MCM podemos realizar la descomposición en factores primos de cada número, expresándolo como el producto de potencias de números primos (procedimiento).

Al tener dos números podemos encontrar el MCM a través de la descomposición en factores primos de ambos, esto es:

$15 = 3x5$ $18 = 2x9 = 2x3x3 = 2x3^2$ (procedimiento)

Para el cálculo realizamos las descomposiciones en factores primos de 15 y 18 (procedimiento), muy sencillas de obtener dado el tamaño de estos números.

Teniendo la descomposición en factores primos, encontramos el MCM multiplicando los factores primos con su mayor exponente (procedimiento), esto es:

$15 = 3x5$ $18 = 2x3^2$

$$MCM\ (15,18) = 3^2x2x5 = 90$$

En síntesis, y para fundamentar la respuesta, las paradas en la estación del primer colectivo (A), serían los números (minutos), que son elementos del siguiente conjunto:

$$Paradas_{\{A\}} = \{0, 18, 36, 54, 72, 90, 108, 126, 144, 162, 180, 198, 216, 234, 252, 270, \dots\}$$

Estos números surgen de considerar los múltiplos de 18, que resultan de multiplicar este número por cada uno de los números enteros no negativos (procedimiento).

De igual manera, las paradas del colectivo B, se dan en los minutos, cuyo valor numérico es un elemento del siguiente conjunto:

$$Paradas_{\{B\}} = \{0, 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, 135, 150,165,180, 195, 210, 225, 240, 255, 270, \dots\}$$

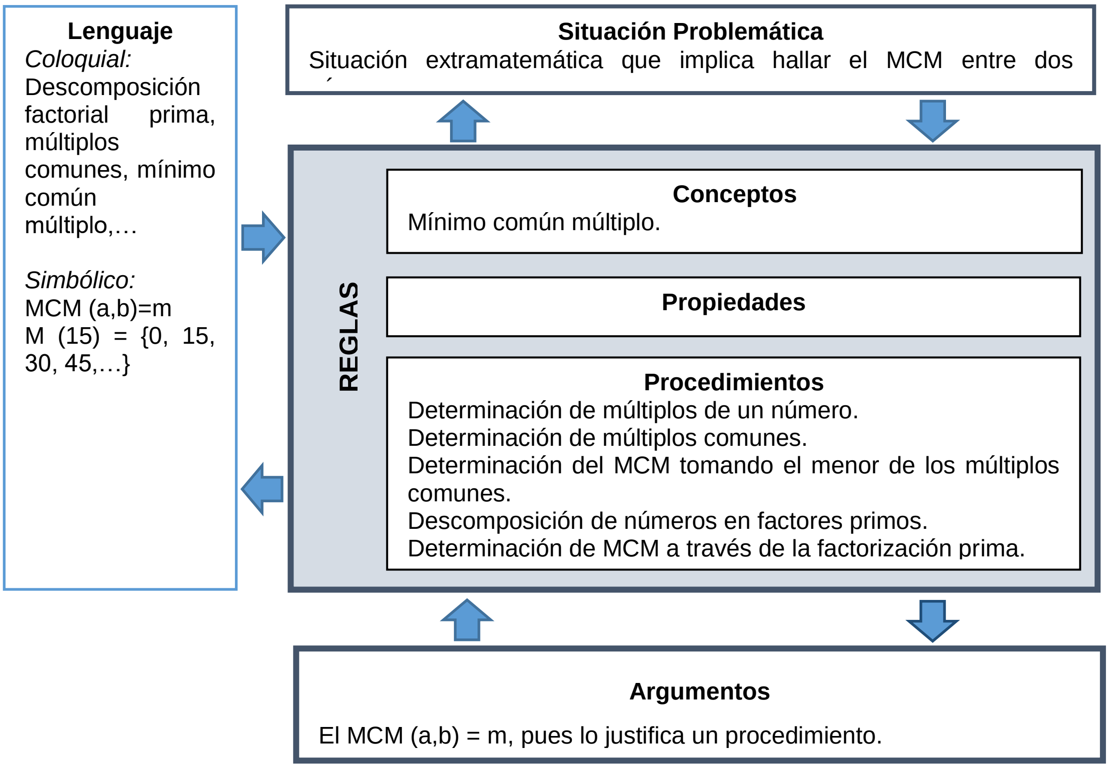
Estos números surgen de considerar los múltiplos no negativos de 15 (procedimiento).

Teniendo en cuenta una considerable cantidad de elementos de ambos conjuntos, podemos obtener varios múltiplos comunes de 18 y 15: 90, 180, 270, 360, 450, …. Ambos colectivos van a coincidir a los 90 minutos luego de estar juntos en el instante cero, como así también después de 180 minutos, 270 minutos, etc.

Como el 90 es el menor de los tiempos de coincidencia, en tanto el MCM(18,15) = 90, éste es el modo óptimo de hacerlo (argumento), esto es, los colectivos coincidirán nuevamente en la parada, luego de haber estado juntos en un instante que suponemos de 0 minutos, después de haber transcurrido 90 minutos.

Análisis del problema

La configuración epistémica del problema resulta ser la siguiente:



La red de relaciones que aparece en la configuración epistémica

FS9,1: Entre el problema y el concepto de MCM.

FS9,2: Entre el problema y el procedimiento de hallar en MCM a través de listar múltiplos comunes y tomar el menor.

FS9,3: Entre el concepto de MCM y el procedimiento de hallarlo a través de listar múltiplos comunes.

FS9,4: Entre el problema y el procedimiento de cálculo del MCM a través de la factorización prima.

FS9,5: Entre el problema y la argumentación dada por el procedimiento de cálculo del mínimo común múltiplo.

Problema 10: Se tienen dos cuerdas que miden 240 cm. y 308 cm. y se las quiere cortar en trozos que tengan la misma longitud, ¿cuál será la mayor longitud en que se las puede cortar, de forma tal que la longitud de corte sea la misma en ambas cuerdas y que no sobre cuerda?

Fundamenta tu respuesta.

El problema está dado en un contexto extramatemático (encontrar la cuerda de mayor longitud que entre en partes iguales en otras dos cuerdas dadas), para lo cual la tarea se reduce a hallar el máximo común divisor (MCD) entre dos números relativamente grandes.

Resolución: Como tenemos que cortar las cuerdas de la misma longitud, inicialmente tendríamos muchas opciones, como, por ejemplo, cortarlas en trozos de ½ cm, de 1 cm, de 2 cm, etc., pues el problema no establece condición alguna para ello. No obstante, asumiremos que serán cortadas en trozos que resulten ser una longitud entera y como debemos encontrar la mayor longitud que sea común, recurriremos al cálculo del máximo común divisor, pues nos ofrece esta posibilidad.

Sabemos que un número d se llama máximo común divisor de los números a y b (concepto) cuando:

d es divisor común de los números a y b,

d es divisible por cualquier otro divisor común de los números a y b.

Para encontrar el MCD podemos realizar la descomposición en factores primos de cada número, expresándolo como el producto de potencias de números primos (procedimiento), o usar el Algoritmo de Euclides (concepto y procedimiento) que es más eficiente cuando se trata de números grandes.

Al tener dos números, podemos encontrar el MCD a través de la descomposición en factores primos. Para ello realizamos divisiones del número recurriendo al menor número que lo divide (procedimiento) y tendremos en cuenta criterios de divisibilidad (propiedad) involucrados. En nuestro caso resulta:

240	*2*	*308*	*2*
120	*2*	*154*	*2*
60	*2*	*77*	*7*
30	*2*	*11*	*11*
15	*3*	*1*	
5	*5*		
1			

$240 = 2^4 \times 3 \times 5$

$308 = 2^2 \times 7 \times 11$

Para el cálculo tuvimos en cuenta los siguientes criterios de divisibilidad:

Un número es divisible por 2 cuando termina en una cifra par (propiedad).

Un número es divisible por 5 cuando termina en 0 o 5 (propiedad).

Un número es divisible por 7 cuando la diferencia entre el número sin la cifra de las unidades y el doble de la cifra de las unidades es 0 ó un múltiplo de 7 (propiedad).

Un número es divisible por 11, si la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan los lugares impares y la de los pares es 0 o un múltiplo de 11 (propiedad).

Teniendo la descomposición en factores primos de cada uno de los números, encontramos el MCD determinando los factores comunes con su menor exponente (procedimiento), esto es:

240 = 2^4x3x5 308 = 2^2x7x11

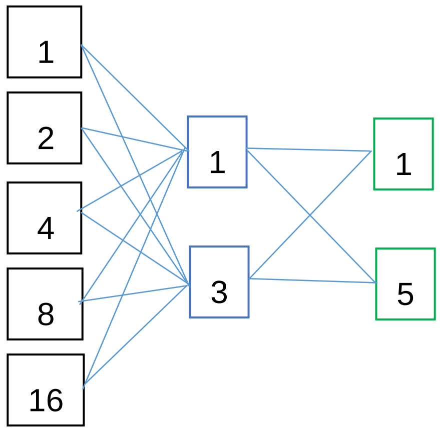
MCD (240,308) = 2^2 = 4

En síntesis, y para fundamentar la respuesta, la cuerda de 240 cm. podría ser cortada en longitudes enteras con las siguientes medidas:

$$Longitudes_{\{240\}} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 30, 40, 48, 60, 80, 120, 240\}$$

Estas medidas surgen de considerar los divisores de 240 que se obtienen por aplicar principios de conteo (procedimiento) entre los divisores de cada uno de los factores que tiene la descomposición prima, pues sabemos que los divisores de cada uno de los factores en que se descompone un número a, también son divisores de a (propiedad).

Así, 2^4 tiene 5 divisores: $\{1, 2, 4, 8, 16\}$ mientras que el 3 tiene a: $\{1, 3\}$ y el 5 a: $\{1, 5\}$. En total tendremos 5x2x2 = 20 divisores, que surgen de las siguientes combinaciones:

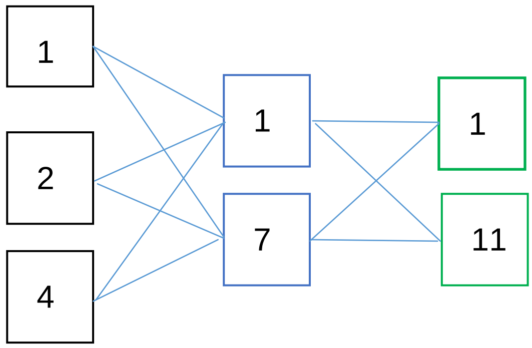


La cuerda de 308 cm. podría ser cortada en longitudes con las siguientes medidas:

$$Longitudes_{\{308\}} = \{1, 2, 4, 7, 11, 14, 22, 28, 44, 77, 154, 308\}$$

Estas medidas surgen de considerar los divisores de 308 que se obtienen por aplicar principios de conteo (procedimiento) entre los divisores naturales de cada uno de los factores que tiene la descomposición prima, pues sabemos que los divisores de cada uno de los factores en que se descompone un número a, también son divisores de a (propiedad).

Así, 2^2 tiene 3 divisores: $\{1, 2, 4\}$ mientras que el 7 tiene a: $\{1, 7\}$ y el 11 a: $\{1, 11\}$. En total tendremos 3x2x2 = 8 divisores, que surgen de las siguientes combinaciones:



Los divisores comunes de ambos números son 1, 2 y 4. Por ello, las cuerdas podrían ser cortadas en longitudes de 1, 2 y 4 cm, cuyos valores numéricos son los divisores comunes del 240 y 308, y como el 4 es el mayor de ellos en tanto MCD(204,308) = 4, éste es el modo óptimo de hacerlo (argumento), esto es, cortar cada cuerda en tramos de 4 centímetros.

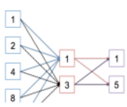
Análisis del problema

La configuración epistémica del problema resulta ser la siguiente:

Lenguaje
Coloquial: Descomposición factorial prima, divisores comunes, máximo común divisor, criterios de divisibilidad, principios de conteo, algoritmo de Euclides,…

Simbólico: MCD(a,b) = d
MCD(240,308) = 4
D(308) = {±1, ±2, …,±308}

Gráfico:



Situación Problemática
Situación extramatemática que implica hallar el MCD entre dos números enteros.

REGLAS

Conceptos
Máximo común divisor.

Propiedades
Criterio de divisibilidad por 2. Criterio de divisibilidad por 5.
Criterio de divisibilidad por 7. Criterios de divisibilidad por 11.
Si a = bxd y c|b, entonces, c|a.

Procedimientos
Descomposición en factores primos.
Algoritmos de la división. Determinación de MCD a través de la factorización prima. Principios de conteos. Determinación de divisores de un número.

Argumentos
El MCD (a,b) = d, pues lo justifica un procedimiento.

La red de relaciones que aparece en la configuración epistémica

FS10,1: Entre el problema y el concepto de MCD.

FS10,2: Entre el problema y el procedimiento de hallar el MCD a través de listar los divisores comunes de los números en cuestión y tomar el mayor.

FS10,3: Entre el concepto de MCD y el procedimiento de hallarlo a través de listar los divisores comunes de los números en cuestión y tomar el mayor.

FS10,4: Entre el problema y el procedimiento de hallar el MCD a través de la descomposición factorial prima.

FS10,5: Entre el procedimiento de la factorización prima de un número y la propiedad que involucra los criterios de divisibilidad de 2, 5, 7 y 11.

FS10,6: Entre el problema y la argumentación dada por el procedimiento de cálculo del máximo común divisor.

6.2.2. Validación del contenido del instrumento usando herramientas del Enfoque Ontosemiótico

Se retoma y adapta a los intereses de esta tesis los seis tipos de idoneidades didácticas que propone Godino (2011) para analizar un proceso instruccional, esto es, *idoneidad epistémica*, *ecológica*, *cognitiva*, *afectiva*, *interaccional* y *mediacional*.

Para llevar a cabo el análisis de estas idoneidades, se tienen en cuenta los criterios e indicadores de que considera el autor. Aquellos indicadores que se refieren explícitamente a instancias de producción en clases no fueron considerados; justamente en este sentido es que se habla de un proceso de adaptación de criterios.

6.2.2.1. Análisis de la idoneidad epistémica

Indicadores	***Análisis/valoraciones***
Situaciones/ problemas	De acuerdo con los diseños curriculares, los antecedentes de esta tesis y los libros de textos usuales del Nivel Medio, el instrumento cuenta con una serie de problemas que conforman una gran variedad de clases de problemas del Nivel Medio a los que responde la Divisibilidad. Esto se puede apreciar en el capítulo 6 donde se presentan los problemas de la versión final del instrumento y se indican los tipos de problemas a los que corresponden.
Lenguaje	- En el instrumento, las situaciones–problemas se presentan en forma coloquial y simbólica. - El nivel del lenguaje de las situaciones–problemas es adecuado al nivel de los destinatarios, aunque pensamos que algunas de las distintas representaciones de los números podrían dificultar la resolución de las tareas. Por ejemplo, cuando se solicita

	determinar si un número es divisor o múltiplo de otro, cuando uno de ellos está escrito en base al algoritmo de la división, propiedad distributiva o producto de factores primos. Otra dificultad que podría generar el lenguaje tiene que ver con los nombres (divisible, divisor, división, dividendo, divide,…) y las notaciones (divide, dividido, tal que, …) muy similares.
Reglas (definiciones, proposiciones, procedimientos)	Se proponen situaciones donde se deben generar procedimientos, propiedades o argumentos. En el caso de la tarea que consiste en encontrar un número (o más), conociendo una lista acotada, exhaustiva y ordenada de sus múltiplos, se pude emplear el procedimiento de restar dos múltiplos consecutivos, y no es usual relacionar “la resta” con “los múltiplos”, por lo que podría ser un procedimiento emergente de la situación. Asimismo, aunque no se propongan situaciones en las que explícitamente haya que demostrar una propiedad, en los casos en que se deba determinar si un número es divisor de otro expresado en base al algoritmo de la división o la propiedad distributiva, o determinar la unicidad de un número conociendo una lista ordenada y acotada de sus múltiplos, o encontrar los divisores de un número descomponiendo uno o varios factores de una de sus descomposiciones multiplicativas, hay que poner a funcionar propiedades destacadas de la noción de divisor.
Argumentos	- Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones que resuelven las situaciones–problemas y que se analizan a priori (análisis ontosemiótico y matriz de desempeño, cap. 6, secciones 6.2.1 y 6.2.3 respectivamente) son pertinentes para el Nivel Medio. La fundamentación de esta apreciación queda en evidencia en las distintas formas de validación que se analizan a priori en la matriz de desempeño, muchas de las cuales fueron apreciadas durante las exploraciones áulicas con las distintas versiones del instrumento. - Todas las situaciones–problemas del instrumento requieren explícitamente la exposición de argumentaciones.
Relaciones	Los objetos matemáticos primarios se relacionan entre sí en las prácticas de resolución de las situaciones–problemas del

	instrumento. Tales relaciones, al menos las inmediatas, están explicitadas en esta tesis, en las configuraciones epistémicas elaboradas por cada problema, durante el análisis a priori que se incluye. Más aún, luego de cada configuración se listan estas relaciones, caracterizándolas en términos de funciones semióticas.

6.2.2.2. Análisis de la idoneidad ecológica

Indicadores	***Análisis/valoraciones***
Adaptación al currículum	Los contenidos involucrados en las prácticas matemáticas que podrían realizar los alumnos a propósito de la resolución de las situaciones-problemas del instrumento, adelantados en la matriz de desempeño, forman parte de la currícula del Nivel Medio de nuestro país.
Apertura hacia la innovación didáctica	En la elaboración del instrumento mucho tuvieron que ver las investigaciones que forman parte de los antecedentes de esta tesis. Por ejemplo, se retomaron de ellas, algunos problemas que promueven relaciones explícitas entre la noción de divisor y la división, como así también la solicitud de realización de tareas de divisibilidad no solamente en los casos en los que los números están expresados en base 10, sino también cuando están escritos según su descomposición factorial prima, en base al algoritmo de la división o propiedad distributiva. Dichas investigaciones informan de ciertas dificultades de los alumnos en la realización de este tipo de tareas y promueven la realización de las mismas.
Adaptación socio-profesional y cultural	Los contenidos contribuyen a la formación socio–profesional de los estudiantes. En efecto, la realización de las tareas involucradas en el instrumento no solo conllevan la problematización de contenidos matemáticos enmarcados en la Divisibilidad, sino también, aquellos relacionados con la actividad matemática, tales como: análisis, reflexión, formulación de conjeturas, validación, etc.
Educación en valores	La tarea de resolución de los problemas del instrumento de indagación apunta a la formación en valores democráticos, teniendo en cuenta que la participación en la misma es de suma importancia en lo que respecta a la colaboración con la

	investigación y, por ende, con la construcción de conocimientos que ayudan a mejorar la educación matemática.
Conexiones intra e interdisciplinares	Los contenidos se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinares. En efecto, el estudio de la Divisibilidad de números naturales o enteros aporta elementos necesarios para el análisis de la divisibilidad de polinomios. Asimismo, disponer de herramientas pertinentes para encontrar múltiplos, divisores, múltiplos comunes, el mínimo común múltiplo, el máximo común divisor, etc., son conocimientos que resuelven numerosos tipos de problemas de otras áreas, como, por ejemplo, Física, Química y Economía.

6.2.2.3. Análisis de la idoneidad cognitiva

Indicadores	***Análisis/ valoraciones***
Conocimientos previos (Se tienen en cuenta los mismos elementos que para la idoneidad epistémica)	El análisis de los diseños curriculares, provinciales y nacionales, las investigaciones que se incluyen como antecedentes y los libros de textos usuales en el Nivel Medio, nos permite determinar que los alumnos cuentan con los conocimientos necesarios para realizar la tarea. No obstante, creemos que la búsqueda de divisores de números grandes o la determinación de si un número es divisor, factor, divisible o múltiplo de otro, cuando uno de ellos no está expresado en base diez, pueden resultar ser tareas nuevas y dificultosas para algunos alumnos. También pueden generar inconvenientes las tareas relativas a la determinación de un número conociendo sus divisores o una lista acotada de sus múltiplos.
Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales	Una vez realizada la tarea, se pretende socializar las producciones en el curso, involucrando a todos los alumnos. En efecto, con autorización institucional, se llevarán a cabo actividades de análisis, reflexión, discusión, avance y mejoramiento de las prácticas realizadas.
Aprendizaje: (Se tienen en cuenta los mismos	- El instrumento de valoración persigue determinar el nivel de comprensión alcanzado por los alumnos. En efecto, se trata de encontrar y caracterizar la red de relaciones entre los seis objetos primarios, definidas en términos de funciones semióticas, en

elementos para la idoneidad epistémica: situaciones, lenguajes, conceptos, procedimientos, proposiciones, argumentos y relaciones entre los mismos).	sistemas de prácticas de Divisibilidad. - Pretendemos que las funciones semióticas que establecen los estudiantes, nos permita determinar distintos niveles de comprensión. - Los resultados de esta investigación serán difundidos, pudiendo ser de mucho interés para investigadores y docentes. Entre otros conocimientos teóricos y metodológicos, los profesores podrán disponer de un instrumento validado, cuyas situaciones–problemas promueven el establecimiento de una interesante red de relaciones conceptuales entre objetos básicos de la Divisibilidad.

6.2.2.4. Análisis de la idoneidad afectiva

Indicadores	***Análisis/ valoraciones***
Intereses y necesidades	Las situaciones–problemas del instrumento se caracterizan por demandar desafíos, análisis y reflexión, por lo que consideramos que aportarían a la formación profesional de los alumnos (futuros docentes). Así, en todas las situaciones-problemas se solicita realizar actividades propias del quehacer matemático como lo son: plantear la duda, favorecer el análisis, la reflexión, la formulación de conjeturas, la explicación y validación de las mismas, la solicitud de exhaustividad en las respuestas, el estudio de condiciones bajo las cuales una afirmación se cumple, etc.
Actitudes	**-** Se promueve la participación responsable de los alumnos en esta tarea. Sobre este aspecto se hace mucho hincapié al momento de explicar y acordar las características y demandas del trabajo de resolución de las situaciones del instrumento. - Durante el planteo de la consigna general, se resalta el pedido de claridad y precisión en el vocabulario usado para comunicar las producciones.
Emociones	Se promueve la autoestima de los alumnos, desde el hecho de remarcar la gran importancia que tienen sus producciones para la realización de la investigación.

6.2.2.5. Análisis de la idoneidad interaccional

Indicadores	***Análisis/valoraciones***
Interacción docente-alumno	La interacción entre el docente y los alumnos se realiza al momento de la explicación de la tarea. El profesor/investigador usa diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos. Con predisposición da indicaciones, responde preguntas y construye acuerdos.
Interacción docente-alumno y de éstos entre sí	Dadas las características de la tarea, no se prevén interacciones entre los alumnos a propósito de la actividad de resolución de las situaciones del instrumento. No obstante, luego de realizado el trabajo, se pretende llevar a cabo algunas sesiones en las que se retomarán las situaciones–problemas, analizando, discutiendo, argumentando y validando las producciones. Además, pretendemos lograr consensos en cuanto a la elección de la forma de representación más pertinente para una situación, la herramienta más económica para realizar una determinada tarea o el argumento más convincente para aceptar o rechazar una afirmación.
Autonomía	Según las características de la actividad, se busca que los estudiantes asuman la responsabilidad de la resolución de todas las situaciones del instrumento (presentar soluciones; explorar ejemplos y contraejemplos para analizar y conjeturar; usar una variedad de herramientas para razonar, hacer conexiones, resolver problemas y comunicarlos).
Evaluación formativa	La observación sistemática del progreso cognitivo de los alumnos se realizará en el ámbito de las sesiones de clases en donde se socialicen y discutan las producciones de los estudiantes, una vez terminada la tarea de resolución de las situaciones del instrumento. Para ello, se expondrán y problematizarán los conflictos; se analizarán, discutirán y se expondrán nuevas preguntas y situaciones que tiendan a superarlos.

6.2.2.6. Análisis de la idoneidad mediacional

Indicadores	***Análisis/valoraciones***
Recursos materiales (Manipulativos, calculadoras, ordenadores)	Se permite el uso de calculadoras, las que podrían ser buenas herramientas para la realización de tareas de Divisibilidad, esto es, encontrar divisores y múltiplos, comprobar si un número es divisible por otro o divisor de otro, realizar cuentas para factorizar un número, etc.
Número de alumnos, horario y condiciones del aula.	- La actividad de resolución de las situaciones del instrumento, se realizará en el horario de cursado de la carrera de profesorado, durante aproximadamente dos horas. Esto hace que los alumnos no dejen de cumplir con otras obligaciones, como, por ejemplo, el trabajo. Estimamos que dicho lapso de tiempo es suficiente para el desarrollo de la actividad. - Elegiremos un salón de clases en buenas condiciones en cuanto a la disposición de espacio, la distribución de los alumnos, mobiliarios cómodos, luz adecuada, temperatura agradable, silencio, etc.
Tiempo (de enseñanza colectiva /tutorización; tiempo de aprendizaje)	Se prevén tres sesiones, de tres horas de duración cada una, para la problematización y ampliación de los saberes de los estudiantes, una vez realizada la experiencia con el instrumento. En caso de detectarse alumnos que sigan teniendo dificultades de comprensión de algunas nociones trabajadas en el instrumento, podrían organizarse otras sesiones de estudio, en horarios extra-clases.

6.2.2.7. Valoración de las idoneidades didácticas

En función del análisis realizado, podemos valorar el contenido del instrumento con idoneidad alta, salvo quizás el caso de la idoneidad interaccional, dado que, por las características de la actividad, no se establecen interacciones entre docente y alumnos y de éstos entre sí, en relación con el conocimiento.

Los fundamentos de la valoración realizada son los siguientes:

- La elaboración del instrumento de recolección de información sienta sus bases en investigaciones relacionadas con el tema de interés (incluidas en los antecedentes de esta tesis), los diseños curriculares y los libros de textos de uso frecuente en el Nivel Medio de nuestro país.

- En relación con las situaciones–problemas que forman parte del instrumento, podemos decir que representan una gran variedad de tipos de problemas del Nivel Medio, a los que responde la Divisibilidad. Las mismas se presentan en lenguaje coloquial y simbólico. En general, promueven duda, reflexión y juicio crítico en la elección de procedimientos adecuados y argumentos convincentes.
- La resolución de las situaciones del instrumento no solo apunta hacia la problematización de contenidos matemáticos enmarcados en la Divisibilidad, sino también, aquellos propios de la actividad de producción de conocimientos matemáticos, tales como: reflexión, formulación de conjeturas y validación. Por tal motivo, la realización de la tarea aporta buenos elementos para la formación profesional del futuro docente.
- A partir de las resoluciones a priori de las situaciones–problemas del instrumento y del análisis, determinación y explicitación de relaciones conceptuales presentes en las mismas se puede determinar un interesante entramado de relaciones conceptuales entre objetos matemáticos primarios.
- Analizamos y determinamos, en la matriz de desempeño, que los alumnos destinatarios cuentan con los conocimientos necesarios para enfrentar las resoluciones de las situaciones del instrumento. Todos los objetos matemáticos primarios involucrados en cada una de las resoluciones son contenidos de enseñanza de la Divisibilidad en el Nivel Medio.
- La agenda de la puesta en aula del instrumento se organiza tratando de atrapar el interés de los alumnos y promover su participación responsable y su espíritu crítico. La participación es de suma importancia en lo que respecta a la colaboración con la investigación y, consecuentemente, con la construcción de nuevos conocimientos en el ámbito de la Educación Matemática.
- Las acciones se llevan a cabo en tiempo adecuado y espacio y mobiliario pertinentes.

6.2.3. Matriz de desempeño

En la siguiente matriz, para cada una de las 10 situaciones-problemas del instrumento, se analizan y elaboran los sistemas de prácticas matemáticas que podrían desarrollar los estudiantes cuyas producciones podrían caracterizarse según 4 niveles progresivos de desempeño: novato, aprendiz, experto y distinguido.

Este trabajo de análisis a priori se retroalimenta de las producciones de alumnos durante las distintas exploraciones con el instrumento. Se lo utiliza como marco de referencia para el análisis de los sistemas de prácticas que desarrollan los alumnos destinatarios del Profesorado.

Problema 1: a) ¿3 es divisor de 30?, ¿y de 473? b) ¿3 es factor de 30? c) ¿441 es múltiplo de 7? Fundamenta tu respuesta.			
Niveles de comprensión			
Novato	***Aprendiz***	***Experto***	***Distinguido***
Utilizar definiciones “rudimentarias” de divisor, factor y múltiplo: a) 3 es divisor de 30, porque “entra 10 veces en 30” (Procedimiento: sumar 10 veces 3); 3 no es divisor de 473 porque “no entra” una cantidad exacta de veces en este número. b) 3 es factor de 30, porque está contenido 10 veces en 30 (el procedimiento consiste en sumar 10 veces 3). c) 441 es múltiplo de 7, dado que el 441 contiene 63 veces a 7 (suma 63 veces 7).	Utilizar la división para determinar si un número es divisor, factor o múltiplo de otro: a) 3 es divisor de 30 porque 30:3 tiene cociente igual a 10 y resto 0, o sea, se trata de una división exacta. 3 no es divisor de 473, puesto que 473:3 no es una división exacta. b) 3 es factor de 30, porque 30:3 es una división exacta. c) 441 es múltiplo de 7, dado que 441:7 es una división exacta.	Utilizar la definición de divisor y las relaciones conceptuales entre divisor, múltiplo y factor: a) 3 es divisor de 30, pues 3x10 = 30, es decir, existe un número, el 10, que multiplicado por 3 da 30. En cambio, 3 no es divisor de 473, pues no existe un número que multiplicado por 3 dé 473. b) 3 es factor de 30, porque es uno de sus divisores. c) 441 es múltiplo de 7, pues este número es divisor o factor de aquel.	Emplear las herramientas más pertinentes para resolver la situación (división, multiplicación, criterios de divisibilidad y propiedades de la divisibilidad) y relacionar los objetos Divisor, Factor, División, Múltiplo y Divisible: a) 3 es divisor de 30, pues 3x10 = 30. En cambio, 3 no es divisor de 473, pues 473:3, no es una división exacta. Además, se puede decir que 3 no es divisor de 473, ya que, empleando el criterio de divisibilidad por 3, la suma de las cifras de 437 no es múltiplo de 3. b) 3 es factor de 30, porque 3x10 = 30. c) 441 es múltiplo de 7, porque 441:7 es una división exacta. Asimismo, aplicando el criterio de divisibilidad por 7, 441 es múltiplo de 7, pues 44-2x1=42, quien es un número

			múltiplo de 7.
Problema 2: Si se divide al número "a" por el número "b", ¿existe alguna condición para que "b" sea divisor de "a"? Justifica tu respuesta.			
Niveles de comprensión			
Novato	***Aprendiz***	***Experto***	***Distinguido***
Realizar algunas divisiones entre los números "a" y "b" y determinar que, en los casos en que se obtiene cociente natural y resto 0, b es divisor de a.	Probar con divisiones como en el caso anterior, pero eligiendo los números "a" y "b" con cierto control, descartando, por ejemplo, la división entre números primos o números consecutivos. En función de ello determinar que, en los casos en que se obtiene cociente natural y resto 0, b es divisor de a.	Haciendo uso del algoritmo de la división, en una división a:b, con b distinto de cero, existen dos únicos números q y r de manera tal que a = bxq+r. Si r = 0, se tiene que a = bxq, y entonces "b" es divisor de "a", teniendo en cuenta la definición de divisor. O sea, en una división, el divisor de la división es divisor del dividendo, cuando el resto de la división es 0.	Relacionando los conceptos de divisor y múltiplo, determinar que "b" es divisor de "a" cuando este número es múltiplo del primero. Así, si el dividendo "a" es múltiplo del divisor "b", siendo b distinto de 0, la división entre a y b es igual a un número c, esto es, a:b = c, y despejando "a", queda: a = bxc, expresión que indica que "b" es divisor de "a" y, por lo tanto, "a" es múltiplo de "b".
Problema 3: Todos los múltiplos de un número, comprendidos entre 370 y 460 son: 380, 399, 418, 437 y 456. ¿De qué número se trata?, ¿es único? Explica cómo lo/s encontraste y fundamenta tu respuesta.			
Niveles de comprensión			
Novato	***Aprendiz***	***Experto***	***Distinguido***
Teniendo en cuenta que un número es múltiplo de otro si la división entre el primero y el segundo es exacta, por tanteo se busca el número natural del cual son múltiplos los números dados en la consigna, procediendo así: Se realiza la división 380:2, como la misma es exacta, se divide por 2 el siguiente	Un elemento del conjunto solución es el 19, pues es un factor común en la descomposición factorial prima de todos los números de la lista dada. Eso significa que 19 es divisor de todos los números de la lista y, por lo tanto, todos ellos son múltiplos de 19.	Tomando 380 como el n-ésimo múltiplo de un número k y 399 como el múltiplo siguiente de k, viendo que la consigna da una lista completa y ordenada de múltiplos de k, se tiene que: 380 = kxn; el	19 es el número buscado, teniendo en cuenta que dos múltiplos consecutivos de un número a, difieren en a. Es decir, si se toma cualquier número de la lista dada en la consigna y se resta el inmediato anterior, se obtiene 19. Así, de una lista

número de la lista (el 399); como dicha división no es exacta se descartan que son múltiplos de 2. Luego se empieza a probar nuevamente desde el primer número con la división por 3, es decir, 380:3, 399:3,…. Como la primera división no es exacta, se continúa probando, nuevamente desde el principio de la lista de números, dividirlos por 4, ... Se sigue con este procedimiento hasta que todos los números de la lista, al dividirlos por un determinado número, da cociente natural y resto 0, que es el caso del 19. Por lo tanto, todos los números dados en la consigna son múltiplos de 19. Conjeturando que -19 también puede ser solución (más aun teniendo en cuenta que la consigna solicita evaluar la unicidad de la solución), la división entera exacta entre los números de la consigna y -19, puede constituirse en un recurso de validación. Si se realiza la división por 1 de todos los múltiplos dados, se tiene que 1 también es solución. Al igual que el caso del -19, se puede conjeturar que -1 también es solución y validar con la división entera.	$380 = 2^2x5x19$ 399 = 3x7x19 418 = 2x11x19 437 = 19x23 $456 = 19x2^3x3$. Teniendo en cuenta la regla de los signos del producto de números enteros, las descomposiciones multiplicativas anteriores pueden escribirse, por ejemplo, así: $380 = 2^2x(-5)x(-19)$ 399 = (-3)x7x(-19) 418 = 2x(-11)x(-19) 437 = (-19)x(-23) 456 = (-19)x(-23)x3. Estas descomposiciones permiten determinar que -19 es divisor de todos los números de la consigna y, por lo tanto, que todos ellos son múltiplos de -19. Otras soluciones: Cada uno de los múltiplos dados en la consigna pueden escribirse según la descomposición multiplicativa trivial (ej.: 380 = 1x380 = (-1)x380, razón por la cual todos ellos son múltiplos de 1 y -1.	múltiplo siguiente, 399 = kx(n+1), empleando la definición de “múltiplo”. Restando miembro a miembro estas dos igualdades, se obtiene k = 19. Como un número entero y su opuesto tienen los mismos múltiplos, -19 es también solución del problema. Por otra parte, teniendo en cuenta que 1 y -1 son divisores de todos los números enteros, se tiene que los números enteros dados en la consigna son múltiplos de 1 y -1.	finita, exhaustiva y ordenada, de múltiplos de un número “a”, esto es: ±a, ±2a, ±3a,…, ±na…, restando dos múltiplos consecutivos cualesquiera de esta lista, el mayor menos el menor, se obtiene el número a: na-(n-1)a = na-na+a = a, al igual que: -na-[-(n+1)a] = -na+na+a = a. Utilizando este procedimiento, restando dos múltiplos consecutivos cualesquiera de la lista, el menor menos el mayor, se obtiene -19, la otra solución. Además, como 1 y -1 son divisores de todos los números enteros, los números enteros dados en la consigna son múltiplos de 1 y -1.

<table>
<tr><td colspan="4">Problema 4: 15a45 es un número de 5 cifras, ¿existe algún valor de “a” para que este número sea divisible por 3? En caso de que tu respuesta fuera afirmativa, indica todos los posibles valores de a. Explica cómo lo hiciste y justifica tu respuesta.</td></tr>
<tr><th colspan="4">Niveles de comprensión</th></tr>
<tr><th>Novato</th><th>Aprendiz</th><th>Experto</th><th>Distinguido</th></tr>
<tr><td>Asignar valores a “a”, desde 0 hasta 9, y realizar la división entre el número que resulta y el 3. Si el cociente es natural y el resto es cero, dicho número es divisible por 3.
Determinar de esta manera que los posibles valores de “a” son 0, 3, 6 ó 9.</td><td>Empleando el criterio de divisibilidad por 3, sumar las cifras del número en cuestión, esto es: 1+5+a+4+5 = 15+a. Luego, “a” debe ser un número de una cifra que sumado 15 da un múltiplo de 3. Si a = 0, se obtiene 15+0 = 15, un múltiplo de 3; si a = 1, no se obtiene un múltiplo de 3, etc. Con este procedimiento, determinar que los posibles valores de “a” son 0, 3, 6 ó 9...</td><td>Para que 15a45 sea divisible por 3, empleando el criterio de divisibilidad por 3, 1+5+a+4+5 = 15+a debe ser múltiplo de 3, o sea 15+a = 3xk, siendo k un número natural. Luego, despejando “a” y sacando factor común 3, queda: a = 3xk-15 = 3x(k-5), expresión que indica que “a” es múltiplo de 3 y como de la consigna se desprende que “a” es un dígito, sus posibles valores son 0, 3, 6 ó 9.</td><td>Para que el número 15a45 sea divisible por 3, teniendo en cuenta que la suma de dos números divisibles por 3 es divisible por 3, “a” debe ser un dígito divisible por 3. Es decir, 1+5+a+4+5 = (1+5+4+5)+a será divisible por 3 cuando “a” lo sea, ya que 1+5+4+5 = 15 es divisible por 3. Por lo tanto, “a” puede asumir los valores: 0, 3, 6 ó 9.
Razonando de otra manera, en el número “15a45”, 15 y 45 son divisibles por 3, Luego, teniendo en cuenta que la suma de dos números divisibles por 3, es divisible por 3, el número “(1+5)+(4+5)” es divisible por 3. Finalmente, para que 15a45 sea divisible por 3, (1+5)+(4+5)+a debe ser divisible por 3, por lo que resta considerar que “a” sea divisible por 3 y, como es un número de una cifra, sus posibles valores son: 0, 3, 6 o 9.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Problema 5: Se sabe que, si a y b son números naturales y a es divisor de b, siempre a es menor o igual que b. ¿Sucede lo mismo si los números fueran enteros? Identifica todas las posibilidades para este caso y justifica tu respuesta.</td></tr>
<tr><th colspan="4">Niveles de comprensión</th></tr>
<tr><th>Novato</th><th>Aprendiz</th><th>Experto</th><th>Distinguido</th></tr>
</table>

Probar con números enteros si a es divisor de b (siendo los dos números negativos o de distintos signos) y en los casos en que lo fuera, comparar "a" con "b" y observar que entre ellos no se establece el mismo orden que el que se da entre números naturales. Es decir, si a es divisor de b, en el conjunto de los números enteros, a puede ser menor, mayor o igual que b.	Tomar dos números enteros (ambos negativos o de distintos signos), sabiendo que uno de ellos es divisor del otro. Apreciar que el divisor puede ser menor, mayor o igual que el número del cual es divisor. Por ello, el orden que se establece entre dos números enteros, cuando uno de ellos es divisor del otro, no es el mismo que el que se da entre números naturales.	Según la definición, si a es divisor de b, b = axc, siendo a, b y c, números enteros. En esta igualdad, puede darse el caso que "b" fuera negativo, "a" positivo y "c" negativo (ej. -6 = 2x(-3)). La misma pone en evidencia que 2 es divisor de -6 y mayor que -6, razón suficiente para afirmar que el orden que se establece entre números enteros no es el mismo que el que se da entre números naturales, cuando uno de ellos es divisor del otro.	Teniendo en cuenta que, si "a" es divisor de "b", lo es también de su opuesto "-b", cuando "a" es menor o igual que "b", será mayor o igual que "-b" y viceversa. Es decir, siendo un número entero divisor de otro, el primero puede ser menor, mayor o igual que el otro. Por lo tanto, el orden que se establece entre números enteros no es el mismo que el que se da entre números naturales, cuando uno de ellos es divisor del otro.

Problema 6: ¿Es posible que dos números enteros distintos tengan los mismos divisores? Si tu respuesta es afirmativa, indica en qué condiciones eso ocurre. Justifica tu respuesta.

Niveles de comprensión			
Novato	***Aprendiz***	***Experto***	***Distinguido***
Probar al azar (buscando números y sus divisores) hasta encontrar dos números enteros que tengan los mismos divisores. Por ejemplo, 18 y -18 tienen los mismos divisores. Buscar otros ejemplos y determinar que los números enteros opuestos tienen	Probar al azar como en el nivel anterior, pero disponiendo de recursos más económicos para la búsqueda, por ejemplo, eligiendo números enteros que tengan pocos divisores o aquellos cuyos divisores fueran fáciles de encontrar,	Realizar un estudio de casos: como el mayor divisor de un número natural es él mismo, dos números naturales distintos nunca pueden tener los mismos divisores, pues difieren al menos en el divisor mayor. Lo mismo ocurre en el caso de dos enteros negativos distintos, teniendo en cuenta que el menor divisor de un entero negativo es él mismo. Por lo tanto, si existieran números con las condiciones requeridas, deberán ser enteros con distintos signos. Si fueran de distintos signos, no	Los números solicitados son dos enteros opuestos cualesquiera. Así, si a es divisor de b, b = a.c, luego, por la regla de los signos del producto de los números enteros, se tiene que: -b = -a.c = a.(-c) = a.c', siendo c' un número entero. Esta deducción muestra que, si "a" es divisor de un número

los mismos divisores enteros.	por ejemplo, los números primos.	opuestos, difieren al menos en el mayor de sus divisores (o en el menor). Si fueran opuestos, tienen los mismos divisores, ya que: si a es divisor de b, por la definición de divisor, b = axc; luego: -b = ax(-c), lo que muestra que "a" es también divisor del opuesto de b.	entero "b", lo es también de su opuesto.

Problema 7: Teniendo en cuenta que: 187 = 11x17, ¿son correctas las siguientes afirmaciones?:
a) 17 es divisor de 11x17
b) 11x17+1.870 es múltiplo de 187
c) 11x17+16 es múltiplo de 187

Niveles de comprensión			
Novato	***Aprendiz***	***Experto***	***Distinguido***
Usar definiciones "rudimentarias" de Divisor y Múltiplo y proceder así: a) 17 es divisor de 11x17, porque 17 "entra once veces" en 187 (17+17+17+…). b) 2.057 (11x17+1.870) es múltiplo de 187 porque "contiene 11 veces" a 187 (187+187+…) c) 203 (11x17+16) no es múltiplo de 187, porque "no contiene un número exacto de veces" a 187.	a) Dividir 187 por 17. Como se obtiene cociente 11 y resto 0, se tiene que 17 es divisor de 187. b) Expresar el número 11x17+1.870 en versión decimal (2.057) y dividirlo por 187. Como el cociente es 11 y el resto 0, se tiene que, 11x17+1.870 (o 2.057) es múltiplo de 187. c) Expresar el número dado en versión decimal: 203. Como la división entre 203 y 187 no es exacta, se tiene que 11x17+16 no es múltiplo de 187.	a) 17 es divisor de 187, pues cumple con la definición de divisor, ya que existe el 11, tal que 11x17 = 187. b) El número 11x17+1.870 puede escribirse como: 187+187x10, que es igual a 187x(10+1) = 187x11, o sea que 11x17+1870 es múltiplo de 187, pues éste número, por definición, es divisor de 11x17+1870. c) El número 11x17 = 187, es el primer múltiplo de 187, mientras que el siguiente múltiplo es 187+187. Como 11x17+16 = 187+16 está comprendido entre los dos múltiplos consecutivos de 187 recién indicados, 11x17+16 no es múltiplo de 187, dado que, entre dos múltiplos consecutivos de un número, no existe otro múltiplo.	a) 17 es divisor de 11x17 porque es un factor de la descomposición factorial prima de 11x17. En efecto, todo factor "p" de la descomposición factorial prima de un número "a", es su divisor, pues "a" puede expresarse como el producto entre p y q, siendo q el producto de todos los otros factores primos de la descomposición factorial prima de "a", cumpliendo entonces con la definición de divisor. b) 11x17+1.870 es múltiplo de 187 ya que dicho número es la suma de otros dos múltiplos de 187, 11x17 y 1.870. c) 11x17+16 no es múltiplo de 187, porque de los dos sumandos, uno sólo de ellos, el 11x17, es múltiplo de 187.

Problema 8: Si fuera posible, escribe un número que tenga:
a) Exactamente cuatro divisores naturales.
b) Más de 15 divisores enteros.
Si te resultó posible, explica la estrategia que usaste para encontrarlos y si no, explica por qué no es posible. En cualquier caso, fundamenta tu respuesta.

Niveles de comprensión			
Novato	***Aprendiz***	***Experto***	***Distinguido***
Buscar números al azar y divisores por tanteo hasta encontrar los números que reúnan las condiciones solicitadas en el problema.	a) En este caso se puede responder rápidamente buscando divisores por tanteo, ya que se pide un número con pocos divisores. b) Se pueden buscar números con cierto control sobre la posible cantidad de sus divisores, descartando, por ejemplo, números impares chicos, números primos, números que resultan del producto de dos números primos, etc.	a) Obtener el número buscado a través de multiplicar 2 números primos p y q. En tal caso, sus divisores naturales serán: 1, p, q y pxq. Ejemplo: 6 = 2x3, y sus divisores son 1, 2, 3 y 2x3. b) Se puede construir un número a partir del producto de 3 números primos, por ejemplo, 2x3x5, cuyos divisores son: 1, 2, 3, 5, 2x3, 2x5, 3x5 y 2x3x5. Este número tiene 8 divisores naturales y, por lo tanto, 16 divisores enteros.	a) Teniendo en cuenta que para aplicar la fórmula que permite obtener la cantidad de divisores naturales de un número, expresado en su descomposición factorial prima, hay que multiplicar todos los exponentes, aumentados en una unidad, de las bases primas de dicha descomposición, se puede construir un número con 4 divisores naturales a partir de resolver una potencia de base prima y exponente igual a 3, o sea, la cantidad de divisores pretendida que es 4, disminuida en una unidad. Por ejemplo: $2^3 = 8$, y sus divisores son: 2^0, 2^1, 2^2 y 2^3. b) El número solicitado deberá tener 16 divisores enteros o más, por lo que bastará buscar un número con 8 divisores naturales. Un número que reúne estas condiciones, teniendo en cuenta lo explicado en el apartado anterior, es por ejemplo $2^7 = 128$.

Problema 9: En una estación de colectivos, un bus para con una frecuencia de 18 minutos y el otro lo hace cada 15 minutos, ¿habrá un encuentro posterior después de una coincidencia? Si la respuesta fuera afirmativa, ¿dentro de cuántos minutos, como mínimo, se encontrarán en esa estación, después de haber coincidido en esa estación los dos colectivos? Fundamenta tu respuesta.

Niveles de comprensión			
Novato	***Aprendiz***	***Experto***	***Distinguido***
En el contexto del problema, listando ordenada y exhaustivamente	Multiplicando 18x15, se obtiene 270 que es un instante de	La razón entre los tiempos de demora en regresar a la estación de ambos	Se puede hallar la solución empleando el procedimiento que

los tiempos correspondientes a las paradas de ambos buses en la estación de referencia, empezando del tiempo 0 minutos, se puede hallar el menor tiempo transcurrido después de una coincidencia. Por lo tanto, existe una nueva coincidencia después del instante 0; dicho tiempo es de 90 minutos.	coincidencia. Los instantes de paradas anteriores de ambos colectivos se pueden hallar con restas sucesivas. Por ejemplo, para el caso del primer colectivo: 270-18 = 252; 252-18 = 234; 234-18 = 216, … Utilizando esta técnica para encontrar los instantes de paradas de ambos buses, se pueden encontrar algunas coincidencias y también la menor de todas, que es 90 minutos.	buses es 5/6. Luego de 6 vueltas del colectivo que tarda 15 minutos y de 5 vueltas del que demora 18 minutos, se dará el próximo encuentro (después del instante 0). Es decir, volverán a encontrarse en la estación a los 5x18 minutos y 6x15 minutos, o sea, a los 90 minutos.	permite hallar el mínimo común múltiplo, a partir de la descomposición factorial prima de 18 y 15; esto es, mcm (18,15) = 3^2x2x5 = 90.
Problema 10: Se tienen dos cuerdas que miden 240 cm. y 308 cm. y se las quiere cortar en trozos que tengan la misma longitud, ¿cuál será la mayor longitud en que se las puede cortar, de forma tal que la longitud de corte sea la misma en ambas cuerdas y que no sobre cuerda? Fundamenta tu respuesta.			
Niveles de comprensión			
Novato	***Aprendiz***	***Experto***	***Distinguido***
En el ámbito del contexto, buscar al azar los trozos comunes de cuerdas y tomar el de mayor longitud, o sea, el de 4 cm. Este número representa la mayor longitud de corte que se puede realizar en ambas cuerdas sin que sobren trozos de cuerdas.	Reconocer que se trata de un problema de máximo común divisor. Empleando la definición correspondiente, listar todos los divisores naturales de ambos números; en la lista queda al descubierto el máximo entre los divisores comunes, el 4, número que representa la mayor longitud de corte.	Buscar todos los divisores de uno de los números y comprobar quienes de ellos son divisores del otro número, identificando, de esta manera, los divisores comunes de 240 y 308, que son 1, 2 y 4. La solución del problema está dada por el mayor de los divisores comunes, o sea, el 4.	Empleando el procedimiento que permite hallar el máximo común divisor, a partir de la descomposición factorial prima de 240 y 308, o sea, mcd(240,308) = 2^2=4.

6.3. Consideraciones generales del capitulo

El análisis didáctico del instrumento de indagación que se expone en este capítulo, como se ha adelantado, consta de tres elementos: un análisis ontosemiótico de cada una de las situaciones-problemas que lo componen, un estudio de idoneidades didácticas que se constituye en una fuente de validación de instrumento y un análisis de prácticas resolutorias de sus distintas situaciones-problemas, clasificadas en cuatro niveles de desempeño.

El análisis ontosemiótico deja al descubierto los objetos matemáticos involucrados en cada una de las situaciones-problemas del instrumento o aquellos que podrían emerger de sistemas de prácticas de los estudiantes destinatarios, como así también unas interesantes relaciones entre objetos, definidas en término de funciones semióticas. Por ejemplo, quedan explícitas sendas relaciones conceptuales entre procedimientos, conceptos, propiedades y argumentos que permiten abordar tareas como la determinación de si un número es divisible, divisor, múltiplo o factor de otro si uno de ellos está expresado en distintas formas como la decimal, factorial, en base al algoritmo de la división o la propiedad distributiva; como así también otras relaciones que resuelven problemas tales como el de encontrar divisores y múltiplos o encontrar un número, conociendo todos sus divisores o una lista finita y ordenada de sus múltiplos.

El análisis de idoneidad didáctica que se emplea como una de las formas de validación del instrumento permite determinar, por ejemplo, que los objetos matemáticos y las relaciones que los vinculan son pertinentes para el Nivel Medio, que los problemas, intra y extra-matemáticos, constituyen una muestra exhaustiva de problemas de Divisibilidad en este nivel, que los mismos involucran y promueven la emergencia de una amplia gama de objetos matemáticos primarios de la Divisibilidad y que las condiciones de espacios y tiempos para la instrumentación áulica del instrumento son adecuadas.

Asimismo, este estudio pone de relieve que los problemas del instrumento, no solo promueven la problematización de contenidos matemáticos sino también de aquellos relacionados con la actividad matemática, tales como: realización de pruebas, formulación de conjeturas, reflexión, estudios de viabilidad y exhaustividad en las respuestas, análisis de las condiciones bajo las cuales una afirmación se cumple, explicación, validación, etc. Por tal motivo, la realización de estas tareas contribuye a la formación socio–profesional de los estudiantes de Profesorado.

También el análisis de la idoneidad didáctica del contenido del instrumento permite entrever ciertas dificultades potenciales en la resolución de las situaciones-problemas del mismo, algunas de las cuales podrían estar relacionadas con el uso del lenguaje como regulador y constructor de los significados emergentes en las prácticas matemáticas de los estudiantes, teniendo en cuenta que muchas de las denominaciones de los objetos básicos de la Divisibilidad y de las notaciones que se emplean para nombrarlos, son muy similares. Otras, podrían tener que ver con la realización de tareas de divisibilidad entre números que podrían estar expresados en forma factorial prima, en base al algoritmo de la división o la propiedad distributiva o al tener que buscar divisores de números grandes.

Finalmente, en la rúbrica o matriz de desempeño que se presenta al final del capítulo se exponen, de manera predictiva, unas posibles prácticas que podrían desarrollar los estudiantes a propósito de la resolución del contenido del instrumento. Los mismos fueron elaborados por el investigador al principio de la investigación y ampliados, completados o sustituidos a partir de los análisis a posteriori realizados sobre las prácticas de alumnos del nivel superior en las distintas instancias en que se enfrentaron con las diferentes versiones del instrumento.

La rúbrica se constituye en una excelente herramienta de referencia para efectuar el análisis de los sistemas de prácticas de los ingresantes al Profesorado, pues en las resoluciones de las situaciones-problemas se ponen en juego una gran variedad de relaciones conceptuales entre recursos lingüísticos, de procedimientos y argumentativos (definiciones, proposiciones, propiedades, deducciones, …), clasificados en cuatro niveles de desempeño: novato, aprendiz, experto y distinguido.

CAPÍTULO 7

Resultados y análisis

7.1. Introducción

En este capítulo se analiza la comprensión de la Divisibilidad, alcanzada por los estudiantes de la FaCENA-UNNE, ingresantes a la carrera de Profesorado en Matemática.

Se toma como contexto de análisis las prácticas matemáticas de estos alumnos, las que fueron desarrolladas a partir de la resolución del contenido de la última versión del instrumento de indagación.

Para ello, se elaboraron unas tablas en las que se identificaron las funciones semióticas involucradas en dichas prácticas personales. Las mismas se exponen en los anexos. Cabe aclarar que en dichas tablas se recuperan funciones semióticas correctas, no erróneas ni incompletas, dado que el interés de esta tesis se dirige a la determinación y valoración de lo que los alumnos comprenden.

Estas funciones semióticas se clasifican en niveles de comprensión. En cada nivel, se exploran, determinan y analizan las redes de relaciones conceptuales involucradas en las funciones semióticas correspondientes.

7.2. Caracterización de la indagación

La última exploración se llevó a cabo a principios del año 2018, en una de las primeras clases de la asignatura Álgebra 1, en la FaCENA, durante aproximadamente dos horas.

Los alumnos fueron previamente invitados a participar. En ese momento se dieron a conocer los motivos, las características y los requerimientos de la exploración.

En la instancia de prueba, asistieron 20 estudiantes, quienes trabajaron de manera muy ordenada y con mucha responsabilidad. La amplia mayoría lo hizo hasta cerca del final del tiempo estipulado.

Luego de haber analizado las prácticas personales, se convocó a varios estudiantes para pedirles la ampliación de algunas producciones, relacionadas por ejemplo con la falta de claridad en el uso del lenguaje, la falta de comprensión de un procedimiento, definición, propiedad, deducción, etc. o la ausencia de fundamentación.

Las entrevistas se realizaron individualmente, en horarios extra clases. Las mismas se exponen en la sección de los anexos.

7.3. Clasificación de las funciones semióticas detectadas en las prácticas de estudiantes

Las funciones semióticas establecidas por los estudiantes durante la resolución de las situaciones-problemas del instrumento, se clasifican de la siguiente manera:

1. Función semiótica actuativa (FSA): cuando su contenido es un procedimiento, una técnica, una manera de hacer.
2. Función semiótica argumentativa: clasificadas, a su vez, en:
   - Argumentativa conceptual (FSAC): la que tiene como contenido una justificación dada a través de una definición o concepto.
   - Argumentativa proposicional (FSAP): cuando su contenido es una justificación basada en una propiedad.
   - Argumentativa con contraejemplo (FSAContraej): cuando su contenido es una justificación dada a partir de un contraejemplo.
   - Argumentativa deductiva (FSAD): cuando su contenido es una justificación basada en una deducción.

Cabe aclarar que no se espera el surgimiento de nuevos objetos matemáticos en las prácticas de los estudiantes, al momento de resolver las situaciones-problemas del instrumento, ya que el propósito de la exploración se dirige a recuperar los conocimientos que disponen. Lo que se busca es la justificación de las producciones empleando definiciones, propiedades, deducciones, contraejemplos, etc.

7.4. Análisis de la comprensión alcanzada por los estudiantes

El análisis de la comprensión alcanzada por los estudiantes se lleva a cabo a través de la determinación de niveles de comprensión.

En cada nivel, se explicitan las funciones semióticas pertenecientes al mismo y se indican y analizan las redes de relaciones conceptuales involucradas en las mismas. En dicho análisis, se pone énfasis en el contenido de las funciones semióticas.

Dichos niveles están definidos en términos de la variedad, riqueza matemática y complejidad de las relaciones conceptuales involucradas en las funciones semióticas pertenecientes a los mismos. La complejidad se justifica, además, en el número de alumnos que ponen en juego una función semiótica.

Además de la clasificación en niveles de las funciones semióticas, el análisis de redes de relaciones conceptuales puestas en funcionamiento por los estudiantes, aporta sustanciales elementos para valorar la comprensión que tienen sobre la Divisibilidad.

7.4.1. Nivel 1: Funciones semióticas actuativas

A este nivel pertenecen las funciones semióticas cuyo contenido es un procedimiento, técnica o manera de hacer (FSA), establecidas por los estudiantes para resolver problemas de Divisibilidad en el Nivel Medio.

Cuando algún problema o tipo de problema no fue abordado o resuelto a través de alguna función semiótica actuativa, en la tabla siguiente se colocan puntos suspensivos.

Tipo de problema	***FSA establecidas para resolverlo***
¿Un número es divisor de otro? ¿Un número es factor de otro?	- Establecida entre el problema y el procedimiento de la división (para determinar si un número es divisor/factor de otro). - Establecida entre el problema y el procedimiento de buscar un número c que multiplicado por a dé b (a divisor de b, a factor de b). - Establecida entre el procedimiento de buscar un número c que multiplicado por a dé b y el procedimiento de la división para encontrar ese factor c (divisor/factor). - Establecida entre el problema y el procedimiento asociado a un criterio de divisibilidad (sólo para determinar si un número es divisor de otro).

¿Un número es múltiplo de otro?	- Establecida entre el problema y el procedimiento de la división. - Establecida entre el problema y el procedimiento de buscar un número c que multiplicado por a dé b (b múltiplo de a). - Establecida entre el procedimiento de buscar un número c que multiplicado por a dé b y el procedimiento de la división para encontrar ese factor c. - Establecida entre el problema y el procedimiento de multiplicar un número “a” por cada uno de los números naturales (para determinar si un número “b” es múltiplo de “a”).
¿En qué condiciones el divisor de la división es divisor del dividendo?	……
¿De cuáles números son múltiplos los números de una lista acotada, ordenada y exhaustiva de múltiplos?	- Establecida entre el problema y el procedimiento de restar dos múltiplos consecutivos, el mayor menos el menor (para encontrar una solución positiva). - Establecida entre el problema y el procedimiento de hallar por tanteo un divisor común de todos los múltiplos dados. - Establecida entre el problema y el procedimiento de tanteo consistente en buscar un número que sumado a un múltiplo dé el múltiplo siguiente. - Establecida entre el problema y el procedimiento de hallar la descomposición factorial prima de todos los múltiplos dados en la consigna (para determinar un factor común del cual son múltiplos esos números).
¿Cuál es el valor del literal que tiene un número en una de sus cifras para que el mismo resulte ser divisible por otro?	- Establecida entre el problema y el procedimiento de tanteo (para asignar un valor al literal). - Establecida entre el procedimiento de tanteo para asignar un valor al literal y el procedimiento de la división para determinar que un número es divisible por 3. - Establecida entre el procedimiento de tanteo para

	asignar un valor a un literal y el procedimiento que deviene del criterio de divisibilidad por 3.
¿Cuál es el orden que se establece entre los números enteros a y b, cuando a es divisor de b?	……
¿Es posible que dos números enteros tengan los mismos divisores?	- Establecida entre el problema y el procedimiento de tanteo (para buscar divisores y encontrar dos números enteros que tienen los mismos divisores).
¿Cuál es (o cuáles son) el número que tiene una cantidad dada de divisores naturales? ¿y enteros?	- Establecida entre el procedimiento de tanteo (para encontrar un número con los requerimientos de la consigna) y el procedimiento de tanteo (para buscar divisores de un número).
¿Cuál es el mínimo común múltiplo de dos números?	- Establecida entre el problema y el procedimiento de sumar minutos, a partir del primer múltiplo hasta obtener el próximo tiempo de coincidencia. - Establecida entre el problema y el procedimiento de cálculo del mínimo común múltiplo, el que consiste en multiplicar los factores comunes y no comunes con el mayor exponente.
¿Cuál es el máximo común divisor de dos números?	- Establecida entre el problema y el procedimiento de cálculo del máximo común divisor, buscando divisores, identificando los comunes y tomando el mayor. - Establecida entre el problema y el procedimiento de cálculo del máximo común divisor, el que consiste en multiplicar los factores comunes con el menor exponente.

7.4.2. Redes de relaciones conceptuales involucradas en las funciones semióticas actuativas

En esta sección se analizan y explicitan las redes de relaciones conceptuales involucradas en las funciones semióticas (FS) establecidas entre:

i. Tipos de problemas y procedimientos: los tipos de problemas considerados en la primera columna de la tabla anterior y los procedimientos que se emplean para resolverlos.
ii. Procedimientos entre sí: los procedimientos o técnicas que se relacionan para resolver esos tipos de problemas.

- ***FS que relaciona el problema de determinar si un número es divisor, factor o múltiplo de otro y el procedimiento consistente en:***

a) *Realizar una división:* En esta función semiótica está involucrado el procedimiento de la división para determinar que un número es divisor, factor o múltiplo de otro. Es decir, si la división a:b tiene cociente entero y resto cero, se tiene que "b es divisor y factor de a" y "a es múltiplo de b".
b) *Buscar un factor c:* Se usa el procedimiento que consiste en buscar un número c que multiplicado por a dé b, para determinar que "a es divisor o factor de b" y "b es múltiplo de a". El factor "c" puede encontrase rápidamente en los casos en los que se relacionan números chicos. En otros casos, se emplea la división para hallarlo; "c" es el cociente de la división entera exacta b: a.

- ***FS que relaciona dos procedimientos (para determinar si un número es divisor, factor o múltiplo de otro):***

Se tratan de los procedimientos: buscar el mencionado factor "c" y emplear la división (entera exacta) para encontrarlo.

Si un número "a" es divisor de otro número "b", la división b:a tiene cociente entero "c" y resto 0. En este caso, b=axc. Luego, se puede decir que "a" es divisor o factor de "b" o que "b" es múltiplo de "a", dado que existe un número "c" tal que b=axc.

- ***FS que relaciona el problema de determinar si un número es divisor de otro y el procedimiento asociado a un criterio de divisibilidad:***

En general los criterios de divisibilidad determinan cuando un número es "divisible" por otro. Usar un criterio de divisibilidad para decidir si un número es "divisor" de otro implica identificar correctamente la relación establecida entre las nociones de "divisor" y "divisible".

- ***FS que relaciona el problema de determinar si un número "b" es múltiplo de otro número "a" y el procedimiento de multiplicar "a" por cada uno de los números naturales:***

Queda aquí en evidencia el uso del procedimiento que consiste en multiplicar "a" por cada uno de los números naturales hasta obtener "b". Si eso ocurre, se tiene que "b" es múltiplo de "a".

Dependiendo del tamaño de los números, podría tener que realizarse muchas multiplicaciones. Para evitar esta cuestión, habría que empezar a realizar multiplicaciones cuyos resultados estén próximos a "b".

- ***FS que relaciona el problema de determinar de cuáles números son múltiplos los números de una lista acotada, ordenada y exhaustiva de múltiplos, y el procedimiento consistente en:***

  a) Restar dos múltiplos consecutivos:

  Los números dados en la consigna son múltiplos consecutivos, ordenados de menor a mayor y acotados entre dos números naturales.

  El procedimiento nombrado, consiste en tomar cualquiera de ellos y restar el inmediato anterior. Cualesquiera sean esos múltiplos, de manera económica, permite encontrar una de las soluciones positivas.

  b) Buscar (por tanteo) un divisor común de todos los números (múltiplos) dados:

  El procedimiento involucra buscar por tanteo los divisores de los números dados (múltiplos), hasta encontrar un divisor común de todos ellos. El mismo, tiene por múltiplos a todos esos números. Puede observarse una relación entre las nociones de divisor y múltiplo.

  c) Buscar un número que sumado a un múltiplo dé el múltiplo siguiente:

  Se toma un número cualquiera de entre los múltiplos dados y se busca por tanteo el número que sumado a éste dé el múltiplo siguiente.

  El procedimiento involucra conocer que en una lista ordenada de menor a mayor y exhaustiva de múltiplos de "a", cada múltiplo se obtiene sumando "a" al anterior.

  d) Obtener la descomposición factorial prima de todos los múltiplos dados en la consigna:

  Este procedimiento permite dejar explícito un factor común de todos los múltiplos dados. Dicho factor tiene a todos los números dados en la consigna como múltiplos.

La técnica permite resolver cualquier problema del tipo de problemas que se está considerando, mientras se pueda determinar la descomposición factorial de los múltiplos dados.

Puede observarse el establecimiento de una relación entre las nociones de factor y múltiplo.

- ***FS que relaciona dos procedimientos para determinar el literal que tiene un número "a" (en una de sus cifras), para que resulte ser divisible por otro:***

  a) Tanteo y división:

  Se relaciona el tanteo para asignar un valor de una cifra al literal que tiene un número "a" en una de sus cifras y la técnica de dividir, para decidir si "a" resulta ser divisible por un número.

  La división no se emplea únicamente como recurso de decisión, ya que en algunos casos se utiliza para corroborar que "a" es divisible por un número, habiendo establecido una conjetura sobre el tipo de número que tiene que ser dicho literal. El hecho de anticipar las características del literal, optimiza la tarea realizada a partir del "tanteo sin control".

  b) Tanteo y aplicación de un criterio de divisibilidad:

  Se emplea el tanteo para asignar un valor de una cifra al literal que tiene un número "a" en una de sus cifras, y la técnica que deviene de la aplicación de un criterio de divisibilidad, para decidir si "a" resulta ser divisible por un número.

  La división no se emplea únicamente como recurso de decisión, ya que en algunos casos se utiliza para corroborar que "a" es divisible por un número, habiendo establecido una conjetura sobre el tipo de número que tiene que ser dicho literal. El hecho de anticipar las características del literal, supera el procedimiento de "tanteo sin control".

- ***FS que relaciona el problema de determinar si existen dos números enteros que tengan los mismos divisores y el procedimiento de tanteo:***

El procedimiento de tanteo consiste en buscar divisores de algunos números hasta encontrar ejemplos de dos números (enteros opuestos) que tienen los mismos divisores enteros.

Se evidencia, además, una relación entre el problema asociado a la tarea de buscar divisores y ciertos procedimientos para encontrarlos, tales como:

división, obtención de descomposiciones multiplicativas, aplicación de algún criterio de divisibilidad, etc.

- ***FS que relaciona dos procedimientos, ambos de tanteo, para abordar el problema consistente en la determinación de un número (o más de uno) con una cantidad dada de divisores naturales y enteros:***

El problema da como dato la cantidad de divisores (ya sean, naturales o enteros) y solicita determinar un número que cumpla con esos requerimientos. El procedimiento consiste en buscar al azar números y calcular por tanteo sus divisores, hasta encontrar dos números enteros que tengan los mismos divisores. Con esta técnica se puede emplear mucho tiempo en resolver el problema, inclusive, no garantiza abordar con éxito la tarea.

- ***FS que relaciona un problema de mínimo común múltiplo de dos números y el procedimiento consistente en:***

  a) *Obtener los múltiplos de dos números naturales "a" y "b" (a través de sumas) y tomar el menor de los comunes:*

  El procedimiento consiste en obtener los múltiplos del número natural "a", sumando una, dos, …, n veces "a", empezando desde "a". De igual manera, se obtienen los múltiplos de "b". El procedimiento termina cuando se encuentra el primer múltiplo común.

  Esta técnica puede caracterizarse como económica cuando haya que calcular el mínimo común múltiplo de dos números pequeños (o relativamente pequeños), cuya diferencia sea también pequeña (o relativamente pequeña).

  b) *Cálculo del mcm a partir de la descomposición factorial prima de ambos números:*

  La aplicabilidad del procedimiento involucra poder obtener la descomposición factorial prima de ambos números. En caso de lograrlo, el mcm de dos (o más) números se obtiene multiplicando los factores comunes y no comunes, con el mayor exponente.

- ***FS que relaciona un problema de máximo común divisor de dos números y el procedimiento consistente en:***

  a) *Buscar divisores de ambos números y tomar el mayor de los comunes*

El procedimiento conlleva la búsqueda de divisores y la identificación de los divisores comunes, tomando de entre los mismos, el mayor.

La técnica será poco económica en los casos de tener números grandes o que tengan muchos divisores o que sea difícil encontrarlos (ej. números primos grandes o producto de primos grandes).

b) Cálculo del mcd a partir de la descomposición factorial prima de ambos números:

La posibilidad de aplicación del procedimiento involucra poder obtener la descomposición factorial prima de ambos números. En caso de lograrlo, el mcd de dos (o más) números se obtiene multiplicando los factores comunes provistos del menor exponente.

7.4.3. Nivel 2: Funciones semióticas argumentativas conceptuales, proposicionales y con contraejemplos

A este nivel pertenecen las funciones semióticas cuyo contenido es una argumentación dada por: una definición, un concepto (FSAC), una propiedad (FSAP) o un contraejemplo (FSAContraej).

Tipo de problema	***FSAC, FSAP y FSAContraej establecidas para resolverlo***
¿Un número es divisor de otro? ¿Un número es factor de otro?	FSAC1: Establecida entre el problema y la definición de divisor: a es divisor de b, si existe un número c, tal que b = a.c (para justificar que un número es divisor de otro). FSAC2: Establecida entre los conceptos de divisor y múltiplo (para justificar que un número es divisor de otro). FSAC3: Establecida entre las nociones de divisor y divisible (para justificar que un número es divisor de otro). FSAC4: Establecida entre los conceptos de factor y divisor (para justificar que un número es factor de otro). FSAC5: Establecida entre los conceptos de factor y múltiplo (para justificar que un número es factor de otro). FSAC6: Establecida entre los conceptos de factor y divisible (para justificar que un número es factor de otro). FSAP1: Establecida entre el problema de determinar si un número es factor o divisor de otro y la justificación dada a

	través del criterio de divisibilidad por 3. FSAP2: Establecida entre el problema y la propiedad: un factor de una descomposición multiplicativa de un número, es divisor del mismo.
¿Un número es múltiplo de otro?	FSAC1: Establecida entre el problema y la definición de múltiplo: a es múltiplo de b si la división a:b da por resultado un número entero (para justificar que un número es múltiplo de otro). FSAC2: Establecida entre el problema y la definición de múltiplo: a es múltiplo de b, si existe un número c, tal que a = b.c (para justificar que un número es múltiplo de otro). FSAC3: Establecida entre los conceptos de divisor y múltiplo (para justificar que un número es múltiplo de otro). FSAP1: Establecida entre el problema y la propiedad: la suma de dos múltiplos de un número es múltiplo del mismo (para justificar que un número, expresado en base a la propiedad distributiva, es múltiplo de otro).
¿En qué condiciones el divisor de la división es divisor del dividendo?	FSAC1: Establecida entre el problema y el concepto: el divisor de la división es divisor del dividendo, cuando el dividendo es múltiplo del divisor. FSAC2: Establecida entre el problema y el concepto: el divisor de una división es divisor del dividendo cuando la división tiene cociente entero y resto 0.
¿De cuáles números son múltiplos los números de una lista acotada, ordenada y exhaustiva de múltiplos?	FSAC1: Establecida entre el procedimiento de restar dos múltiplos consecutivos para encontrar el número del cual son múltiplos y la justificación dada por el concepto: entre dos o más múltiplos consecutivos de un número a, hay una diferencia igual a “a”. FSAC2: Establecida entre el procedimiento de restar dos múltiplos consecutivos, el mayor y el menor, y la justificación dada por el concepto: en una progresión aritmética la razón (el 19) se halla restando un término cualquiera y el anterior (para encontrar el número del cual son múltiplos (razón)). FSAC3: Establecida entre el procedimiento de hallar la descomposición factorial prima de todos los múltiplos

	dados, buscando un factor común y la justificación a través del concepto: el factor común de la descomposición factorial prima de unos números los tiene a todos ellos como múltiplos. FSAC4: Establecida entre dos conceptos: el número del cual son múltiplos los elementos de una sucesión ordenada, finita y exhaustiva, es un divisor común de esos elementos. FSAP1: Establecida entre el problema y la propiedad: todos los números naturales son múltiplos de 1. FSAP2: Establecida entre el problema y la propiedad: 1 es divisor de todos los números naturales.
¿Cuál es el valor del literal que tiene un número en una de sus cifras para que el mismo resulte ser divisible por otro?	FSAP1: Establecida entre el procedimiento de tanteo para asignar un valor al literal que tiene un número para que éste resulte ser divisible por 3 y la justificación dada por el criterio de divisibilidad por 3. FSAP2: Establecida entre el procedimiento de tanteo para asignar un valor al literal que tiene un número para que éste resulte ser divisible por 3 y la propiedad: la suma de dos números divisibles por 3, es divisible por 3.
¿El orden que se establece entre dos números, cuando uno de ellos es divisor del otro, es el mismo en N y en Z?	FSAP1: Establecida entre el problema y la propiedad: si a es divisor de b, es también divisor de –b. FSAContraej1: Establecida entre el problema y un contraejemplo.
¿Es posible que dos números enteros tengan los mismos divisores?	FSAP1: Establecida entre el problema y la propiedad: los números enteros opuestos tienen los mismos divisores. FSAP2: Establecida entre el problema y la propiedad: 1 y -1 son divisibles por 1 y -1 (1 y -1 tienen los mismos divisores).
¿Cuál es (o cuáles son) el número que tiene una cantidad dada de divisores naturales? ¿y enteros?	……

¿Cuál es el mínimo común múltiplo de dos números?	FSAC1: Establecida entre el procedimiento de ir sumando "t" minutos, a partir del primer múltiplo (t), hasta obtener el próximo tiempo de coincidencia (entre buses), y la definición: el mínimo común múltiplo de dos números es el menor de todos los múltiplos comunes.
¿Cuál es el máximo común divisor de dos números?	FSAC1: Establecida entre el procedimiento de cálculo del máximo común divisor, buscando divisores, identificando los comunes y tomando el mayor, y la definición: el máximo común divisor de dos números es el mayor de sus divisores comunes.

7.4.4. Redes de relaciones conceptuales involucradas en las funciones semióticas argumentativas (conceptuales, proposicionales y con contraejemplos)

En esta sección se analizan y explicitan las redes de relaciones conceptuales involucradas en las funciones semióticas establecidas entre:

I. Tipos de problemas y argumentos: los tipos de problemas considerados en la primera columna de la tabla anterior y los argumentos (conceptos, definiciones, propiedades, contraejemplos) que se emplean para resolverlos.
II. Procedimientos y argumentos: los argumentos (conceptos, definiciones, propiedades) que fundamentan los procedimientos.
III. Argumentos entre sí: los argumentos (conceptos, definiciones, propiedades) que se relacionan para resolver esos tipos de problemas.

- ***FS que relaciona el problema de determinar si un número es divisor de otro y las definiciones de estos objetos:***

La función semiótica tiene como contenido la definición de divisor: a es divisor de b, si existe un número c de tal manera que b = axc. La técnica asociada consiste en buscar "c". Para ello, dependiendo del tamaño de los números, es conveniente realizar la división b:a, apelar a un criterio de divisibilidad, etc.

- ***FS que relaciona dos conceptos para determinar que un número es divisor o factor de otro:***

a) *Divisor y múltiplo:* en la FS se pone de manifiesto que un número a es divisor de un número b, si b es múltiplo de a.

El establecimiento de esta relación entre estos dos objetos primarios pone de manifiesto un nuevo problema, que consiste en determinar si un número es múltiplo de otro. Una apreciación similar vale en los cuatro apartados siguientes.

- *Divisor y divisible:* un número a es divisor de un número b, cuando b es divisible por a.
- *Factor y divisor:* un número a es factor de un número b, si es un divisor del mismo.
- *Factor y múltiplo:* un número a es factor de un número b, cuando b es múltiplo de a.
- Factor y divisible: un número a es factor de un número b, cuando b es divisible por a.

- ***FS que relaciona el problema de determinar si un número es divisor o factor de otro y una propiedad:***

  a) *La propiedad asociada a un criterio de divisibilidad:* por medio de la aplicación y fundamentación de un criterio de divisibilidad, se determina que un número es factor o divisor de otro.

  b) *La propiedad que expresa que "un factor de una descomposición multiplicativa de un número, es divisor del mismo":* para decidir que a es divisor o factor de b, se busca una descomposición multiplicativa de b, siendo "a" uno de sus factores.

- ***FS que relaciona el problema de determinar si un número es múltiplo de otro y las definiciones:***

  a) *Un número a es múltiplo de un número b, si la división a:b tiene cociente entero y resto 0.*

  b) Esta definición involucra una técnica apropiada para resolver el problema correspondiente.

  c) *Un número a es múltiplo de un número b, si existe un número c, tal que a = bxc.*

No siempre es sencillo encontrar una determinada descomposición multiplicativa de un número, sin emplear la división, algún criterio de divisibilidad, la descomposición factorial prima, etc.

- ***FS que relaciona los conceptos de divisor y múltiplo para determinar que un número es múltiplo de otro: el número a es múltiplo del número b, si b es divisor de a.***

El establecimiento de esta relación conceptual involucra poder determinar si un número es divisor de otro.

- ***FS que relaciona el problema de determinar si un número es múltiplo de otro y la propiedad que expresa que "la suma de dos múltiplos de un número, es múltiplo del mismo":***

Para determinar si a es múltiplo de b, esta FS involucra poder expresar "a" como la suma de dos o más múltiplos de b.

Si a es un número grande del cual no se sabe si es múltiplo de b, puede descomponerse en sumandos más pequeños que sean múltiplos de b, aportando a la resolución del problema.

Asimismo, si "a" está expresado en base a la propiedad distributiva, es múltiplo del factor común correspondiente y, por lo tanto, de cada uno de los sumandos.

- ***FS que relaciona el problema de determinar las condiciones bajo las cuales el divisor de la división es divisor del dividendo y los conceptos:***

  a) El divisor de la división es divisor del dividendo, cuando el dividendo es múltiplo del divisor.

  En esta FS se utiliza el término "divisor" para nombrar un número (uno de los elementos de la división) y también para denotar una relación entre números (ser divisor de).

  Para explicitar la condición solicitada en la consigna, se establece una relación entre las nociones de divisor y múltiplo. El problema emergente tiene que ver con poder decidir si un número es múltiplo de otro (el dividendo del divisor).

  b) El divisor de la división es divisor del dividendo cuando la división correspondiente tiene cociente entero y resto 0.

- ***Fs que, para resolver el problema de determinar de cuál número son múltiplos los números de una lista ordenada, exhaustiva y acotada de múltiplos, relaciona el procedimiento de restar dos múltiplos consecutivos y la justificación dada por el concepto:***

  a) Entre dos o más múltiplos consecutivos de un número a, hay una diferencia igual a "a".

Este concepto tiene asociada una técnica adecuada para resolver el problema de interés. Involucra restar dos números, reconociendo que la lista de múltiplos es consecutiva y completa (entre dos cotas).

b) En una progresión aritmética la razón (el número requerido) se halla restando un término cualquiera y el anterior.

Se reconoce que la lista de múltiplos dada es una progresión aritmética cuya razón es uno de los números requeridos.

Ninguno de estos conceptos hace emerger el 1 como solución. Ello ocurre, a partir del empleo de propiedades que se indican más adelante.

- ***FS que relaciona el procedimiento de hallar la descomposición factorial prima de todos los múltiplos dados, buscando un factor común (para resolver el problema anterior) y el concepto: el factor común de la descomposición factorial prima de unos números los tiene a todos ellos como múltiplos.***

En tanto se pueda obtener la descomposición factorial prima de todos los múltiplos dados, la técnica garantiza la resolución de la situación.

- ***FS que relaciona dos conceptos para resolver el problema anterior: el número del cual son múltiplos los elementos de una sucesión ordenada, finita y exhaustiva, es un divisor común de ellos.***

Este concepto pone de manifiesto el nuevo problema relacionado con la tarea de hallar divisores e identificar el divisor común.

- ***FS que relaciona el problema anterior con la propiedad:***

a) Todos los números son múltiplos de 1.

Esta propiedad exhibe al 1 como una de las soluciones positivas.

b) 1 es divisor de todos los números.

El empleo de esta propiedad para abordar el problema requiere tener disponible la relación: 1 es divisor de todos los números naturales, por lo que, todos ellos son múltiplos de 1.

- ***FS que relaciona un procedimiento y una propiedad, para resolver el problema de encontrar el literal que tiene un número para que el mismo sea divisible por otro:***

a) Tanteo para buscar dicho literal y la justificación dada por un criterio de divisibilidad.

Por medio del tanteo se busca el valor de una de las cifras de un número (literal). La búsqueda puede ser al azar (basta con probar con los dígitos) o con cierto control (si se tiene alguna conjetura acerca del tipo de número que corresponde).

Una vez asignado un valor al literal, el empleo de un criterio de divisibilidad permite comprobar que el número en cuestión resulta ser divisible por un determinado número.

b) Tanteo para buscar el literal y la propiedad: la suma de dos números divisibles por un tercero, es divisible por éste.

Como se trata de determinar la cifra desconocida de un número, para que éste resulte ser divisible por 3 (problema del instrumento), se suman las cifras sin el literal, obteniéndose un múltiplo de 3. Por ello, en función del criterio de divisibilidad por 3, el literal debe ser un dígito múltiplo de 3.

El conocimiento de la propiedad mencionada y del criterio de divisibilidad por 3, mejoran sustancialmente la técnica de tanteo para abordar la situación.

- ***FS que relaciona el problema de la determinación del orden que se establece entre dos números enteros, cuando uno de ellos es divisor del otro, y la propiedad: si a es divisor de b, es también divisor de –b.***

En el conjunto de los números naturales, si a es divisor de b, a es menor o igual que b.

La propiedad mencionada, permite determinar que en el conjunto de los números enteros no ocurre lo mismo. Así, como a es divisor de –b, siendo a y b números naturales, sucede que a es mayor que –b. Es decir, en Z, un divisor puede ser mayor que el número correspondiente.

- ***FS que relaciona el problema de la determinación del orden que se establece entre dos números, cuando uno de ellos es divisor del otro, y un contraejemplo.***

Como ya se expresó anteriormente, si a y b son números naturales y a es divisor de b, a es siempre menor o igual que b. Para desacreditar que ocurre lo mismo en el conjunto de los números enteros, se usa un contraejemplo.

- ***FS que relaciona el problema de la determinación de la existencia de dos números que tengan los mismos divisores y la propiedad:***

a) Los números enteros opuestos tienen los mismos divisores.

Es una propiedad que de estar disponible permite responder la pregunta en cuestión de manera pertinente.

b) 1 y -1 son divisibles por 1 y -1.

Es una propiedad que, a pesar de no extenderse al caso general de dos números enteros opuestos, permite responder la cuestión sobre la existencia de dos números enteros que tienen los mismos divisores.

Se establece una relación entre las nociones de “divisor” y “divisible”; esto es, si a es divisor de b, b es divisible por a.

- ***FS que relaciona el procedimiento de cálculo del mínimo común múltiplo, buscando múltiplos e identificando el menor de los comunes, y la definición: el mínimo común múltiplo de dos números es el menor de todos los múltiplos comunes.***

El establecimiento de esta FS implica identificar un problema extramatemático de “encuentros” entre dos móviles como un problema de mínimo común múltiplo entre dos números naturales.

Los múltiplos de ambos números se van obteniendo sumando una cantidad “t_1” (tiempo de demora del primer móvil), a partir del primer múltiplo positivo “t_1” (ídem para t_2), hasta obtener el próximo instante de encuentro (después de un instante 0). Es decir, los múltiplos de ambos números se obtienen a través de sumas reiteradas, identificándose el menor múltiplo común positivo como la solución de la cuestión.

En el caso de disponer de números grandes, de números cuya diferencia es un número grande o de tener que obtener el mínimo común múltiplo de más de dos números, esta práctica resolutoria se torna poco adecuada.

- ***FS que relaciona el procedimiento de cálculo del máximo común divisor, buscando divisores, identificando los comunes y tomando el mayor, y la definición: el máximo común divisor de dos números es el mayor de sus divisores comunes.***

El establecimiento de esta FS implica identificar un problema extramatemático de “optimización de cortes de longitudes” como un problema de máximo común divisor entre dos números naturales.

La definición indicada tiene asociada una técnica que implica obtener divisores e identificar el mayor de los comunes.

La búsqueda de divisores de números que tienen muchos divisores, de números primos grandes, de números que resultan del producto de primos grandes, etc. resulta ser una tarea difícil, por lo que esta forma de resolución del problema no siempre es pertinente.

7.4.5. Nivel 3: Funciones semióticas argumentativas deductivas

A este nivel pertenecen las funciones semióticas que tienen como contenido una argumentación dada a través de una deducción (FSAD).

Tipo de problema	***FSAD establecidas para resolverlo***
¿Un número es divisor de otro? ¿Un número es factor de otro?	……
¿Un número es múltiplo de otro?	Que relaciona el problema y la argumentación: 11x17+1870 = 187+187x10 = 187x(1+10) = 187x11. Por lo tanto, el número dado es múltiplo de 187 (para determinar que un número expresado en base a la propiedad distributiva es múltiplo de otro).
¿En qué condiciones el divisor de la división es divisor del dividendo?	……
¿De cuáles números son múltiplos los números de una lista acotada, ordenada y exhaustiva de múltiplos?	……
¿Cuál es el valor del literal que tiene un número en una de sus cifras para que el mismo resulte ser divisible por otro?	……
¿Cuál es el orden que se establece entre los números enteros a y b, cuando a es divisor de b?	Establecida entre el problema y la argumentación: si a y b son números naturales y a|b, se sabe que a≤b. Si a|b, entonces, a|-b, siendo a>-b, considerando que a y b son números naturales. En este caso, al ser el divisor mayor que el número, el orden que se establece entre a y b en Z no es el mismo que en N.
¿Es posible que dos números enteros	……

tengan los mismos divisores?	
¿Cuál es (o cuáles son) el número que tiene una cantidad dada de divisores naturales? ¿y enteros?	……
¿Cuál es el mínimo común múltiplo de dos números?	……
¿Cuál es el máximo común divisor de dos números?	Establecida entre el problema y la argumentación: como hay una relación de 5/6 entre las demoras de ambos buses, el que tarda más tiempo (18 min.) dará 5 vueltas y el que tarda menos (15 min.), 6 vueltas, para volver a encontrarse. El primero realiza 5 vueltas en 90 min., y el otro, 6 vueltas en 90 min. O sea, se volverán a encontrar a los 90 min.

7.4.6. Redes de relaciones conceptuales involucradas en las funciones semióticas argumentativas deductivas

En esta sección se analizan y explicitan las redes de relaciones entre objetos matemáticos primarios, involucradas en las funciones semióticas establecidas entre los tipos de problemas considerados en la tabla anterior y las argumentaciones deductivas.

- ***FS que relaciona el problema de determinar si un número expresado en base a la propiedad distributiva es múltiplo de otro, y la deducción:*** *11x17+1180 = 187+187x10 = 187x(1+10) = 187x11, por lo tanto, 11x17+1180 es múltiplo de 187.*

Hay un reconocimiento que 11x17+1180 es un número. No hay necesidad de obtener la versión decimal del mismo para responder la pregunta acerca de si es múltiplo de 187.

En el desarrollo de la deducción se ponen en funcionamiento conocimientos de tipo procedimental, como sumar y obtener descomposiciones multiplicativas de un número. Asimismo, se emplean definiciones y propiedades: la definición de múltiplo (la que indica que un número es múltiplo de un factor de una descomposición multiplicativa del mismo) y la propiedad distributiva del producto respecto de la suma de números naturales.

- **FS que relaciona el problema de determinar el orden que se establece entre dos números, cuando uno es divisor de otro, y la deducción:** *Si a y b son números naturales y a|b, se sabe que a≤b. Si a|b, entonces, a|-b, siendo a>-b, considerando que a y b son números naturales. En este caso, al ser el divisor mayor que el número, el orden que se establece entre a y b en Z no es el mismo que en N.*

Esta argumentación deductiva, desarrollada en lenguaje simbólico y coloquial, permite responder la pregunta planteada.

Puede apreciarse el establecimiento de una relación entre las nociones de “divisor” y “divide”, ya que en el problema se pide relacionar dos números, cuando uno de ellos es divisor del otro, y en la argumentación aparece planteada la relación “divide”, inclusive, con la notación pertinente.

En el desarrollo de la deducción se aprecia la correcta identificación de los números a y b en la relación a|b, como así también, el uso de la propiedad: si a|b, entonces, a|-b. La misma permite determinar que la relación entre a y b, cuando el primero es divisor del segundo, no es la misma en N y Z.

- **FS que relaciona un problema de mínimo común múltiplo, y la deducción:** *Como hay una relación de 5/6 entre las demoras de ambos buses, el que tarda más tiempo (18 min.) dará 5 vueltas y el que tarda menos (15 min.), 6 vueltas, para volver a encontrarse. El primero realiza 5 vueltas en 90 min., y el otro, 6 vueltas en 90 min. O sea, se volverán a encontrar a los 90 min.*

Esta deducción, desarrollada en lenguaje coloquial, permite responder la cuestión planteada.

Se establece una relación entre los tiempos de demora de los buses a través de una razón aritmética.

Se deduce, a partir de esta relación, la cantidad de vueltas que deben dar ambos colectivos antes de volver a encontrase. Hay un reconocimiento del hecho de que el colectivo que tarda más tiempo en regresar a la estación, realizará menos vueltas hasta volver a encontrarse con el otro bus que tarda menos, y viceversa. Con estos conocimientos, multiplicando números naturales, se puede resolver el problema planteado.

Este tipo de prácticas, no habituales en el Nivel Medio, permite abordar problemas de mínimo común múltiplo entre dos números naturales.

7.5. Consideraciones generales del capítulo

En este capítulo se analiza la comprensión de la Divisibilidad alcanzada por los estudiantes de la FaCENA-UNNE, ingresantes a la carrera de Profesorado en Matemática. Para ello, se recuperan las funciones semióticas que elaboran a propósito de la resolución de las situaciones-problemas de la última versión del instrumento de indagación y se las clasifica en niveles de comprensión, los que están definidos en términos de la variedad, riqueza matemática y complejidad de las relaciones conceptuales involucradas en las funciones semióticas que incluyen. La complejidad se justifica, además, en el número de alumnos que ponen en juego una función semiótica.

Al primer nivel, pertenecen las funciones semióticas actuativas; al segundo, las funciones semióticas argumentativas conceptuales, proposicionales y con contraejemplos, mientras que el tercer nivel, incluye las funciones semióticas argumentativas deductivas.

El análisis de las prácticas de los estudiantes, en términos de funciones semióticas, pone en evidencia un gran número de objetos matemáticos primarios pertenecientes a la Divisibilidad y activa un conglomerado de relaciones conceptuales entre ellos, en cada uno de los niveles.

En el primer nivel, se establecen relaciones entre problemas y procedimientos y entre estos últimos entre sí.

Para realizar tareas que tienen que ver con la determinación de si un número es divisor (o factor), múltiplo (o divisible) de otro o con la búsqueda de divisores y múltiplos, aparecen relacionadas la multiplicación y la división. Así, para saber si a es divisor o factor de b o b es múltiplo de a (o divisible por a), la búsqueda de un número c que multiplicado por a dé b, se realiza generalmente mediante la división, aunque también aparecen técnicas de tanteo y otras relacionadas con los criterios de divisibilidad.

Para buscar un número, a partir de una lista acotada, ordenada y completa de sus múltiplos, se despliegan procedimientos que relacionan este problema con una resta o con la descomposición factorial prima de los números de esa lista.

En el primer caso, una de las soluciones positivas se obtiene restando un múltiplo cualquiera y su inmediato anterior. En el segundo caso, la descomposición factorial prima explicita uno de los números buscados (el otro, o sea el 1, surge mediante el empleo de una propiedad). En ciertos casos, una de las soluciones positivas se encuentra buscando los divisores de los números de la lista y tomando el común. La comprobación se realiza encontrando los números que, multiplicados por la solución, dé cada uno de los múltiplos de la lista. Además, se evidencian procedimientos de tanteo para buscar un número que, sumado a cualquier número de la lista, dé el múltiplo siguiente.

En la tarea que implica obtener un número que tenga una cantidad dada de divisores, aparecen relacionados los procedimientos de tanteo: para buscar el número correspondiente y también sus divisores.

Los problemas de mínimo común múltiplo o máximo común divisor, involucran procedimientos que devienen de la definición nominal de estos objetos o que se relacionan con la descomposición factorial prima de los números correspondientes. En el primer caso, buscando múltiplos y divisores de dos números y tomando el menor de los múltiplos comunes o el mayor de los divisores comunes, respectivamente. En el segundo, multiplicando los factores comunes y no comunes con el mayor exponente o realizando el producto de los factores comunes con el menor exponente, respectivamente.

En el segundo nivel, se establecen relaciones entre problemas y argumentos (definiciones, propiedades, contraejemplos), procedimientos y argumentos y argumentos entre sí.

Los contenidos de las funciones semióticas dejan explícitos importantes definiciones y propiedades de los objetos de la Divisibilidad.

Para justificar que un número es factor (o divisor), múltiplo (o divisible) de otro, de ponen de manifiesto las definiciones de estos objetos, algunos criterios de divisibilidad y varias relaciones conceptuales entre los mismos (ejemplo: divisor y múltiplo: a es divisor de b, si b es múltiplo de a). Asimismo, aparecen implicadas ciertas propiedades, como la que indica que “la suma de dos múltiplos de un número es múltiplo de este” o que “un factor de una descomposición multiplicativa de un número es divisor del mismo”.

En cuanto a la solicitud de determinación de las condiciones para que el divisor de la división sea divisor del dividendo, se ponen de manifiesto interesantes relaciones entre un número (divisor como elemento de la división) y una relación entre números (ser divisor de). Las funciones semióticas correspondientes relacionan este problema con conceptos como: “el divisor de la división es divisor del dividendo, cuando el dividendo es múltiplo del divisor” o “el divisor de una división es divisor del dividendo cuando la división tiene cociente entero y resto 0”.

En relación con el problema de hallar ciertos números enteros, conociendo una lista acotada, ordenada y exhaustiva de múltiplos, aparecen relacionados el procedimiento de restar dos múltiplos consecutivos y conceptos como los siguientes: “entre dos o más múltiplos consecutivos de un número a, hay una diferencia de a” o “en una progresión aritmética, la razón se halla restando un término cualquiera y el anterior”. Además, se ven relaciones ciertos significados de los objetos Múltiplo y Divisor, como por ejemplo, “el factor común de la descomposición factorial prima de unos números los tiene a todos ellos como múltiplos” o “el número del cual son múltiplos los elementos de una sucesión ordenada, finita y exhaustiva, es un divisor común de esos elementos”. Teniendo en cuenta a las propiedades, emergen las siguientes para resolver la situación indicada recientemente: “todos los números naturales son múltiplos de 1” o “1 es divisor de todos los números”.

Para analizar si el orden que se establece entre dos números, cuando uno de ellos es divisor del otro, es el mismo en N y Z, las funciones semióticas detectadas en las prácticas de los alumnos relacionan este problema con un contraejemplo o con la propiedad “si un número es divisor de otro, es también divisor de su opuesto”; en ambos casos para afirmar que el orden señalado no es el mismo en esos conjuntos.

Ante la cuestión de analizar la existencia de dos números enteros que tengan los mismos divisores, emerge una propiedad resolutoria de esta cuestión: “los números enteros opuestos tienen los mismos divisores”.

Para resolver problemas de máximo común divisor y mínimo común múltiplo, las funciones semióticas que se establecen relacionan estas cuestiones con las definiciones nominales de estos objetos.

Finalmente, en el tercer nivel, se establecen relaciones entre problemas y argumentaciones deductivas. Solo se responden tres situaciones del instrumento de indagación.

En el problema de determinación acerca de si un número (expresado en base a la propiedad distributiva) es múltiplo de otro, en la deducción correspondiente, aparecen relacionadas las nociones de descomposición multiplicativa de un número, propiedad distributiva y divisor. Precisamente, al número en cuestión se lo transforma en un producto de dos factores (mediante una descomposición multiplicativa y la aplicación de la propiedad distributiva), respondiendo así la pregunta de la consigna, empleando la definición de divisor.

En cuanto a la situación que solicita determinar el orden que se establece entre dos números, cuando uno de ellos es divisor del otro, la argumentación deductiva permite desacreditar que dicho orden es el mismo en los conjuntos N y Z, poniendo de relieve una importante propiedad de la relación Divide: si $a|b$, entonces, $a|-b$.

Considerando un problema de mínimo común múltiplo (encuentro entre dos móviles), el contenido de la función semiótica establecida para resolverlo deja en evidencia que se establece una relación entre los tiempos de demoras de los móviles, a través de una razón aritmética. Luego, se deduce a partir de esta relación, la cantidad de vueltas que deben dar ambos móviles antes de volver a encontrase (considerando el instante 0 como el primer encuentro). Con estos conocimientos, multiplicando números naturales (cantidad de vueltas y tiempo de demora de cada móvil), se resuelve el problema planteado.

CAPÍTULO 8

Conclusiones

8.1. Consideraciones generales

En este capítulo recuperamos las conclusiones a las que hemos arribado en la investigación, teniendo en cuenta el objetivo general que nos hemos propuesto, el que se dirige a valorar la comprensión alcanzada, en el Nivel Medio, por los estudiantes que inician la carrera de Profesorado en Matemática, en la Facultad de Ciencias Exactas, Naturales y Agrimensura de la Universidad Nacional del Nordeste, sobre objetos matemáticos de la Divisibilidad. Dicha valoración se realiza a través del análisis y clasificación de las funciones semióticas que estos estudiantes establecen cuando resuelven situaciones-problemas de Divisibilidad, y de las redes de relaciones conceptuales involucradas en esas funciones semióticas. Godino (2003) sostiene que el hecho de comprender un objeto (ostensivo o no, concreto o abstracto) por parte de un sujeto (persona o institución) se interpreta en términos de las funciones semióticas que tal sujeto puede establecer. Asimismo, Font (2002), indica que el hecho de considerar que las funciones semióticas tienen un papel muy importante en el proceso relacional entre entidades (o grupos de ellas), activadas en prácticas que se realizan dentro de un determinado juego de lenguaje, permite también entender la comprensión en términos de funciones semióticas. En efecto, se puede interpretar la comprensión de un objeto por parte de un sujeto en términos de funciones semióticas que el mismo puede establecer, en unas circunstancias fijadas, en las que se pone en juego al objeto como funtivo (expresión o contenido).

Para cumplir con el objetivo trazado, construimos y validamos un instrumento de indagación, conformado por una muestra de problemas de Divisibilidad, que fue suministrado a los estudiantes.

El análisis ontosemiótico de las prácticas de los estudiantes, que han trabajado con la versión final del instrumento, nos permitió determinar y clasificar funciones semióticas, en términos de una amplia red de relaciones entre objetos matemáticos de la Divisibilidad.

Para la presentación de las conclusiones, seguiremos el orden que nos marcó los objetivos específicos de la investigación.

Finalmente, exponemos las limitaciones de la investigación y las perspectivas futuras para continuar con el estudio.

8.2. Determinación y clasificación de funciones semióticas en las prácticas de los estudiantes

En las prácticas de los estudiantes, se determinan las funciones semióticas que elaboran para resolver las situaciones-problemas del instrumento de indagación.

Se clasifican estas funciones teniendo en cuenta la variedad, riqueza matemática y complejidad de las relaciones conceptuales en ellas involucradas. La complejidad se justifica, además, en el número de alumnos que ponen en juego una función semiótica.

La clasificación es la siguiente:

1. *Función semiótica actuativa* (FSA): cuando su contenido es un procedimiento, una técnica, una manera de hacer.
2. *Función semiótica argumentativa*: clasificadas, a su vez, en:

- Argumentativa conceptual (FSAC): la que tiene como contenido una justificación dada a través de una definición o concepto.
- Argumentativa proposicional (FSAP): cuando su contenido es una justificación basada en una propiedad.
- Argumentativa con contraejemplo (FSAContraej): cuando su contenido es una justificación dada a partir de un contraejemplo.
- Argumentativa deductiva (FSAD): cuando su contenido es una justificación basada en una deducción.

Esta clasificación nos permitió determinar niveles de comprensión que los estudiantes tienen del objeto Divisibilidad, en el Nivel Medio. Así, los que sólo establecen funciones semióticas actuativas, pertenecen al primer nivel. Aquellos que, además, pueden elaborar funciones semióticas argumentativas (conceptuales, proposicionales y a partir de contraejemplos), están en el segundo nivel; mientras que los que pueden establecer funciones semióticas argumentativas deductivas, pertenecen al tercer nivel.

8.3. La red de relaciones conceptuales involucrada en las funciones semióticas

El análisis de las prácticas de los estudiantes, en términos de funciones semióticas, pone en evidencia un gran número de objetos matemáticos primarios pertenecientes a la Divisibilidad y activa un conglomerado de relaciones conceptuales entre ellos.

8.3.1. La red de relaciones en las funciones semióticas del primer nivel

Se establecen relaciones entre problemas y procedimientos y entre estos últimos entre sí.

Para realizar tareas que tienen que ver con la determinación de si un número es divisor (o factor), múltiplo (o divisible) de otro o con la búsqueda de divisores y múltiplos, aparecen relacionadas la multiplicación y la división. Así, para saber si a es divisor o factor de b o b es múltiplo de a (o divisible por a), la búsqueda de un número c que multiplicado por a dé b, se realiza generalmente mediante la división, aunque también aparecen técnicas de tanteo y otras relacionadas con los criterios de divisibilidad.

Para buscar un número, a partir de una lista acotada, ordenada y completa de sus múltiplos, se despliegan procedimientos que relacionan este problema con una resta o con la descomposición factorial prima de los números de esa lista. En el primer caso, una de las soluciones positivas se obtiene restando un múltiplo cualquiera y su inmediato anterior. En el segundo caso, la descomposición factorial prima explicita uno de los números buscados (el otro, o sea el 1, surge mediante el empleo de una propiedad). En ciertos casos, una de las soluciones positivas se encuentra buscando los divisores de los números de la lista y tomando el común. La comprobación se realiza encontrando los números que, multiplicados por la solución, dé cada uno de los múltiplos de la lista. Además, se evidencian procedimientos de tanteo para buscar un número que, sumado a cualquier número de la lista, dé el múltiplo siguiente.

En la tarea que implica obtener un número que tenga una cantidad dada de divisores, aparecen relacionados los procedimientos de tanteo: para buscar el número correspondiente y también sus divisores.

Los problemas de mínimo común múltiplo o máximo común divisor, involucran procedimientos que devienen de la definición nominal de estos objetos o que se relacionan con la descomposición factorial prima de los números correspondientes. En el primer caso, buscando múltiplos y divisores de dos números y tomando el menor de los múltiplos comunes o el mayor de los divisores comunes, respectivamente. En el segundo, multiplicando los factores comunes y no comunes con el mayor exponente o realizando el producto de los factores comunes con el menor exponente, respectivamente.

8.3.2. La red de relaciones en las funciones semióticas del segundo nivel

Se establecen relaciones entre problemas y argumentos (definiciones, propiedades, contraejemplos), procedimientos y argumentos y argumentos entre sí.

Los contenidos de las funciones semióticas dejan explícitos importantes definiciones y propiedades de los objetos de la Divisibilidad.

Para justificar que un número es factor (o divisor), múltiplo (o divisible) de otro, se ponen de manifiesto las definiciones de estos objetos, algunos criterios de divisibilidad y varias relaciones conceptuales entre los mismos (ejemplo: divisor y múltiplo: a es divisor de b, si b es múltiplo de a). Asimismo, aparecen implicadas ciertas propiedades, como la que indica que "la suma de dos múltiplos de un número es múltiplo de este" o que "un factor de una descomposición multiplicativa de un número es divisor del mismo".

En cuanto a la solicitud de determinación de las condiciones para que el divisor de la división sea divisor del dividendo, se ponen de manifiesto interesantes relaciones entre un número (divisor como elemento de la división) y una relación entre números (ser divisor de). Las funciones semióticas correspondientes relacionan este problema con conceptos como: "el divisor de la división es divisor del dividendo, cuando el dividendo es múltiplo del divisor" o "el divisor de una división es divisor del dividendo cuando la división tiene cociente entero y resto 0".

En relación con el problema de hallar ciertos números enteros, conociendo una lista acotada, ordenada y exhaustiva de múltiplos, aparecen relacionados el procedimiento de restar dos múltiplos consecutivos y conceptos como los siguientes: “entre dos o más múltiplos consecutivos de un número a, hay una diferencia de a” o “en una progresión aritmética, la razón se halla restando un término cualquiera y el anterior”. Además, se ven relaciones ciertos significados de los objetos Múltiplo y Divisor, como por ejemplo, “el factor común de la descomposición factorial prima de unos números los tiene a todos ellos como múltiplos” o “el número del cual son múltiplos los elementos de una sucesión ordenada, finita y exhaustiva, es un divisor común de esos elementos”. Teniendo en cuenta a las propiedades, emergen las siguientes para resolver la situación indicada recientemente: “todos los números naturales son múltiplos de 1” o “1 es divisor de todos los números”.

Para analizar si el orden que se establece entre dos números, cuando uno de ellos es divisor del otro, es el mismo en N y Z, las funciones semióticas detectadas en las prácticas de los alumnos relacionan este problema con un contraejemplo o con la propiedad “si un número es divisor de otro, es también divisor de su opuesto”; en ambos casos para afirmar que el orden señalado no es el mismo en esos conjuntos.

Ante la cuestión de analizar la existencia de dos números enteros que tengan los mismos divisores, emerge una propiedad resolutoria de esta cuestión: “los números enteros opuestos tienen los mismos divisores”.

Para resolver problemas de máximo común divisor y mínimo común múltiplo, las funciones semióticas que se establecen relacionan estas cuestiones con las definiciones nominales de estos objetos.

8.3.3. La red de relaciones en las funciones semióticas del tercer nivel

Se establecen relaciones entre problemas y argumentaciones deductivas. Solo se responden tres situaciones del instrumento de indagación.

En el problema de determinación acerca de si un número (expresado en base a la propiedad distributiva) es múltiplo de otro, en la deducción correspondiente, aparecen relacionadas las nociones de descomposición multiplicativa de un número, propiedad distributiva y divisor. Precisamente, al número en cuestión se lo transforma en un producto de dos factores (mediante una descomposición multiplicativa y la aplicación de la propiedad distributiva), respondiendo así la pregunta de la consigna, empleando la definición de divisor.

En cuanto a la situación que solicita determinar el orden que se establece entre dos números, cuando uno de ellos es divisor del otro, la argumentación deductiva permite desacreditar que dicho orden es el mismo en los conjuntos N y Z, poniendo de relieve una importante propiedad de la relación Divide: si a|b, entonces, a|-b.

Considerando un problema de mínimo común múltiplo (encuentro entre dos móviles), el contenido de la función semiótica establecida para resolverlo deja en evidencia que se establece una relación entre los tiempos de demoras de los móviles, a través de una razón aritmética. Luego, se deduce a partir de esta relación, la cantidad de vueltas que deben dar ambos móviles antes de volver a encontrase (considerando el instante 0 como el primer encuentro). Con estos conocimientos, multiplicando números naturales (cantidad de vueltas y tiempo de demora de cada móvil), se resuelve el problema planteado.

8.4. Dificultades que persisten en la comprensión de objetos matemáticos referidos a la Divisibilidad

Si bien en esta tesis no se persigue el objetivo de identificar las funciones semióticas incompletas o erróneas, pues estamos valorando la comprensión, pensamos que la recuperación de las principales dificultades observadas en las prácticas de los estudiantes, puede ayudar al profesor cuado vaya a diseñar procesos de enseñanza y aprendizaje de la Divisibilidad. Algunas de ellas son:

a) Los estudiantes no suelen poder encontrar todos los divisores de un número, al no disponer de herramientas pertinentes para hacerlo, sobre todo, cuando se trata de un número grande o de un número con muchos divisores. Tampoco analizan la exhaustividad de la búsqueda.

b) En la realización de lo que podríamos llamar “tarea inversa” al cálculo de divisores, esto es, buscar un número conociendo sus divisores o la cantidad de ellos, los estudiantes solo disponen de técnicas de tanteo, consistentes en la búsqueda azarosa del número solicitado, a través de la identificación de sus divisores. Lo mismo ocurre, en menor medida, cuando se requiere hallar un número, conociendo una lista acotada, ordenada y exhaustiva de sus múltiplos.

c) Cuando los números están expresados en base al teorema fundamental de la aritmética, la propiedad distributiva o el algoritmo de la división, los alumnos necesitan obtener su versión decimal, para realizar tareas básicas de divisibilidad.
d) El estudio de las condiciones bajo las cuales una afirmación resulta ser verdadera, suele ser una tarea inconclusa. Tal es el caso de determinar en qué condiciones el divisor de una división es divisor del dividendo (aún pudiendo, en general, relacionar divisor y múltiplo) o decidir si el orden que se establece entre dos números naturales, cuando uno de ellos es divisor del otro, es el mismo que el que se da entre dos números enteros. Otro ejemplo de esta cuestión lo constituye la tarea que involucra decidir si existen números enteros con los mismos divisores y el análisis de las condiciones respectivas.
e) También parecieran ser dificultosas para los estudiantes, por haber sido resueltas en muy pocos casos, las situaciones problemáticas de máximo común divisor y mínimo común múltiplo.

8.5. Síntesis de los aportes que realiza esta investigación

Los aportes fundamentales de este trabajo están dirigidos a:

a) *Docentes del Nivel Medio:* se provee una muestra de problemas de Divisibilidad, que contempla algunas situaciones requeridas en el ámbito de investigaciones en Didáctica de la Divisibilidad y en los diseños curriculares. Por nombrar algunas interesantes, por no ser habituales en las aulas e involurar una amplia red de relaciones conceptuales, podríamos referirnos a aquellas tareas que requieren trabajar con números expresados en base al teorema fundamental de la aritmética, el algoritmo de la división o la propiedad distributiva, como así también, las que conllevan la búsqueda de números, conociendo sus divisores y algunos de sus múltiplos.

   Asimismo, los docentes lectores, disponen también de elementos teóricos y metodológicos para realizar el análisis a priori de actividades de eneñanza.

Conocen, además, las producciones que efectivamente los alumnos pueden realizar, esto es, los procedimientos que emplean, los recursos argumentativos, el lenguaje utilizado y sus principales dificultades.

b) *Docentes de la carrera de Profesorado en Matemática:* cuentan con el aporte de valiosos conocimientos relacionados con los saberes previos de los estudiantes y con las dificultades generales que tienen, en la comprensión de la temática en cuestión. Esta base es fundamental para planificar actividades de mejora.

   Disponen también de criterios generales para proponer a los futuros profesores, el diseño de tareas de enseñanza, orientado por un minucioso análisis didáctico, llevado a cabo desde la perspectiva del Enfoque Ontosemiótico.

c) *Investigadores en Educación Matemática:* cuentan con el conocimiento metodológico de una investigación basada en el diseño, orientada por herramientas de análisis de un enfoque teórico y metodológico de la Educación Matemática.

   Estos actores pueden complementar dichos conocimientos con las fuentes epistémicas y didácticas referenciales y con la caracterización de las formas de construcción, valoración, suministro y evaluación de un instrumento de indagación de la comprensión de un objeto matemático de enseñanza.

8.6. Dificultades y limitaciones de la investigación

Un primer aspecto especialmente observado fue la longitud total del instrumento de indagación. Fue importante precisar los contenidos de la Divisibilidad que debieron estar involucrados en los problemas que lo conforman, sabiendo siempre que no se trataba de reconstruir las clases de problemas a los que responde este objeto en el Nivel Medio. El desafío consistió en elaborar un instrumento con un variado conjunto de problemas que incluya y relacione la mayor cantidad de objetos de la Divisibilidad en el nivel indicado, pero que, a la vez, pueda ser respondido por los estudiantes en un tiempo aceptable, a fin de evitar cansancio y desinterés. La revisión de los diseños curriculares, libros de textos, investigaciones relacionadas, pruebas pilotos de las sucesivas versiones del instrumento, los análisis didácticos permanentes de las prácticas de estudiantes y el constante análisis de la idoneidad didáctica del instrumento, hicieron posible superar tal desafío.

Otra dificultad, digna de destacar, fue poder determinar si se realizaría la exploración sobre la última versión del instrumento con todos los alumnos de Álgebra 1 o no. Se decidió explicar claramente los alcances de la actividad para después invitarlos a participar, tratando de promover un mayor nivel de compromiso.

Debe tenerse en cuenta que las conclusiones a las que se arriba son válidas en el contexto en el cual se encuentran los estudiantes que conforman la muestra, lo cual constituye una limitación de la investigación.

8.7. Perspectivas futuras de investigación

La determinación y clasificación de las funciones semióticas, empleadas para valorar la comprensión de los estudiantes destinatarios de la exploración, emergieron de un contexto particular. La investigación podría desarrollare en otros contextos, a partir del análisis de otros sistemas de prácticas.

Asimismo, podría dirigirse a la elaboración de otros instrumentos de indagación, que contengan una variedad diferente de problemas, que involucren objetos matemáticos y relaciones conceptuales distintos.

Durante el análisis de los resultados obtenidos, se evidenció una amplia gama de funciones semióticas erróneas e incompletas, que podrían analizarse y clasificarse. Esta tarea no fue realizada en la tesis, dado que lo que se persigue es determinar lo que los estudiantes comprenden sobre la Divisibilidad, no lo que no saben sobre este objeto. A modo de ejemplos, hay muchos casos que dan cuenta de la escasez de recursos pertinentes para determinar si un número es factor, múltiplo, divisor o divisible por otro, como así también, para realizar tareas que tienen que ver con la determinación del o de los números, conociendo sus divisores o múltiplos. De igual manera, las prácticas de los estudiantes muestran la necesidad de obtener la expresión decimal de los números expresados en su descomposición factorial prima, en base al algoritmo de la división o propiedad distributiva, para realizar tareas de Divisibilidad.

Además, queda pendiente la elaboración de actividades de enseñanza sobre el tema, donde se planteen todas o algunas de las situaciones-problemas del instrumento de indagación y se favorezca el surgimiento de objetos primarios de la Divisibilidad y de relaciones entre los mismos, como herramientas resolutorias.

Finalmente, es necesario tener en cuenta que la comprensión lograda por un estudiante, en un momento dado de su trayectoria escolar, difícilmente llegue a ser total, aunque tampoco nula, sino que abarca aspectos parciales de los diversos componentes y niveles de abstracción posibles. El reconocimiento de la complejidad sistémica del significado del objeto implica, además, saber que su apropiación por parte del sujeto deviene de un proceso dinámico, progresivo y no lineal, como consecuencia de los distintos dominios de experiencia y contextos institucionales en que participa. En este sentido, un aspecto sobre el cual es posible continuar la investigación es realizar un estudio temporal del desarrollo de la construcción del significado de la Divisibilidad. Esto podría realizarse a través del estudio de casos, en el que se realice el seguimiento de algunos estudiantes en distintos momentos de su avance académico, al inicio de la carrera universitaria, durante la mitad o al encontrarse en una etapa avanzada de la carrera. Una investigación de este estilo permitiría observar si esa construcción avanza, se mantiene o decae.

Bibliografía

Arends, R. (2004). *Learning to teach*. (6th Ed.). Boston, USA: Mc GrawHill

Becker, M.; Pietrocola, N. y Sánchez, C. (2001). *Aritmética*. Buenos Aires, Argentina: Red Olímpica.

Bell, P. (2004). On the theoretical breadth of design-based research in Education. *Educational Psychologist*, 4(39), 243-253.

Blumer, H. (1969). *Symbolic interactionism. Perspective and metho*d. Englewood Cliffs NJ, USA: Prentice Hall.

Bodí, S. (2006). *Análisis de la comprensión de divisibilidad en el conjunto de los Números Naturales* (Tesis doctoral). Universidad de Alicante, España.

Bodí, S.; Valls, J. y Llinares, S. (2007). *La comprensión de la divisibilidad en N. Un análisis implicativo.* Disponible en: http://www.asi4.uji.es/actas/p2a1.pdf

Boyer, C. (1999). *Historia de la Matemática*. Madrid, España: Manuales de Alianza Editorial.

Brown, A. (2002). Patterns of thought and prime factorization. En S. R. Campbell y R. Zazkis (Eds.), *Learning and teaching number theory: Research in cognition and instruction* (pp. 131-137). Westport, CT: Ablex Publishing.

Campbell, S. (2000), Bringing insights from research into the classroom: The case of introductory number theory. Discussion: Treating Symptoms? In *Proceedings of the 3rd Annual conference of the Association of Mathematics Teacher Educator*. Chicago, ERIC document ED445909.

Chevallard, Y. (1989). *Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel*. Seminaire de Didactique des Mathematiques et de l'Informatique.Université Joseph Fourier-Grenoble I.

Cobb, P. y Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. In A.E. Kelly, R.A. Lesh, y J. Y. Baek (Eds.), *Handbook of design research methods in education. Innovations in* *science, technology, engineering and mathematics learning and teaching* (pp. 68-95). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Conference Board of the Mathematical Sciences (CBMS). (2001). *The mathematical education of teachers.* Providence, RI: American Mathematical Society.

D'Amore, B. y Godino, J. (2007). El Enfoque Ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. *Relime,* 10(2), 191-218.

Distéfano, L. (2017). *Procesos de significación para algunos símbolos matemáticos en estudiantes universitarios.* (Tesis de doctorado). Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Argentina.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking, In Tall, D (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking,* (pp 95-123). Boston: Kluwer Academic Publishers.

Espinoza, R. (2011). *Determinación de prácticas aritméticas con divisores en el Nivel Medio. Informe de investigación, realizado en el marco de la convocatoria: Conocer para incidir sobre las prácticas pedagógicas 2008.* Buenos Aires, Argentina: Instituto Nacional de Formación Docente, Ministerio de Educación de la Nación.

Espinoza, R. (2012). Estudios didáctico–matemáticos de prácticas asociadas a la Divisibilidad en Números Enteros. (Tesis de Maestría). Universidad Nacional del Nordeste, Corrientes, Argentina.

Etchegaray, S. (1998). Análisis epistemológico y didáctico de nociones elementales de Teoría de Números. (Tesis de Maestría). Universidad Nacional de Río Cuarto, Argentina.

Fernández, T.; Cajaraville, J. y Godino, J. (2007). Configuraciones epistémicas y cognitivas en tareas de visualización y razonamiento espacial. En M. Camacho; P. Flores y M. P. Bolea (Eds.), *Investigación en educación matemática*, (pp. 189-198). Disponible en : http://funes.uniandes.edu.co/ 1252/1/Fernandez2008Configuraciones_SEIEM_189. pdf

Font, V. (2002). Una organización de los programas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. *EMA*, 7(2), 127-170.

Font, V. (2011). Las funciones y la competencia disciplinar en la formación docente matemática. *UNO, 56*, 86-94.

Font, V. y Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educaçao Matemática Pesquisa*, 8(1), 67-98.

Gentile, E. (1984). *Notas de Álgebra I*. Buenos Aires, Argentina: EUDEBA.

Gentile, E. (1991). *Aritmética elemental en la formación matemática*. Buenos Aires, Argentina: Edipubli S.A.

Godino, J. D. (1993). La metáfora ecológica en el estudio de la noosfera matemática. *Quadrante, Revista Teórica e de Investigacao*, 2(2), 69-79.

Godino, J. D. (2000). Significado y comprensión en matemáticas. *UNO, 25*, 77-7.

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Godino, J. D. (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil. Disponible en: http://www.lematec.net.br/CDS/XIIICIAEM/artigos/CP-godino.pdf

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática,* 1, 111-132.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2006). *Un Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Godino, J.; Font, V.; Contreras, A. y Wilhelmi, M. (2005). *Articulación de marcos teóricos en didáctica de las matemáticas.* Disponible en: http://www4.ujaen.es/~aestepa/TAD/Comunicaciones/Godino_y_cols_Articulacion.pdf.

Godino, J.; Font, V.; Wilhelmi, M. y Arreche, M. (2009). ¿Alguien sabe que es el número? *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 19, 34-46.

Godino, J., Wilhelmi, M. y Bencomo, D. (2005). Suitability criteria of a mathematical instruction process. A teaching experience of the function notion. *Mediterranean journal for research in Mathematics Education* 4(2), 1-26.

Gros, B. (2007). *El design-research com a proposta metodològica per treballar la relación entre la innovación i la recerca*. Disponible en: http://innovauoc.org/foruminnovacio/2007/11/design-research-com-aproposta-metodologica-per-treballar-la-relacio-entre-la-innovacio-i-larecerca.

Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

INFD (2010). *Proyecto de mejora para la formación inicial de profesores para el nivel secundario. Área: Matemática.* Buenos Aires: Ministerio de Educación, Instituto Nacional de Formación Docente y Secretaría de Políticas Universitarias.

Kelly, A., Lesh, R. et Baek, J. (Eds.), (2008). *Handbook of design research methods in education. Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching.* New York, NY: Routledge.

Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático desde la antigüedad hasta nuestros días*. Madrid, España: Alianza Editorial.

López, A. (2015). *Significados de la relación de divisibilidad de maestros en formación manifestados en el desarrollo de un modelo de enseñanza*. Granada, España: Universidad de Granada. Disponible en: http://digibug.ugr.es/bitstream/10481/42431/1/25682234.pdf

Ministerio de Educación (2011). *Núcleos de Aprendizajes Prioritarios. Ciclo Básico, Educación Secundaria*. Disponible en http://file:///C:/Users/Usuario/Downloads/DISEÑOS%20CURRICULARES/NAP%20DE%20TODO%20EL%20PAÍS.pdf

Ministerio de Educación de Corrientes (2012). *Diseño curricular jurisdiccional. Ciclo básico de la Secundaria Orientada*. Disponible en: http://file:///C:/Users/Usuario/Downloads/dise%C3%B1o%20secundaria%20ciclo%20basico%20(1).pdf

Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología del Chaco (2012). *Currículum para la Educación Secundaria*. Disponible en http://http://www.dirdocumentacion.com.ar/repo/modulos/buscador/documentos/CURRICULUM%20NIVEL%20SECUNDARIA.pdf

National Council of Teaching Mathematics (NCTM) (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Autor.

Pino-Fan, L., Godino, J. y Font, V. (2013), Diseño y aplicación de un instrumento para explorar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático del futuro profesor sobre la derivada (Primera parte). *REVEMAT*, 8(2), 1-49.

Pino-Fan, L., Godino, J. y Font, V. (2013). Diseño y aplicación de un instrumento para explorar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático del futuro profesor sobre la derivada (Segunda parte). *REVEMAT*, 8(10), 1-47.

Pochulu, M. (2011). Enfoque Ontosemiótico del conocimiento e instrucción matemática. En: M. Pochulu y M. Rodríguez (Comps.), *Educación Matemática – Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos* (pp. 54 – 84). Los Polvorines: Ediciones UNGS y EDUVIM.

Pochulu, M. y Rodríguez, M. (2017). *Clase 1: Conocimientos didácticos y matemáticos del profesor en la formación de profesores. Curso de Posgrado: Cuando un profesor de matemática forma futuros profesores: mucho más allá de saber enseñar matemática*. Los Polvorines, Argentina: Universidad Nacional de General Sarmiento.

Rodríguez, M.; Pochulu, M. y Ceccarini, A. (2011). Criterios para organizar la enseñanza de Matemática Superior que favorecen la comprensión. Un ejemplo sobre aproximaciones polinómicas de funciones. *Educação Matemática Pesquisa 13 (3),* 624-650.

Simon, M. & Forgette-Giroux, R. (2001). A rubric for scoring postsecondary academic skills. *Practical Assessment, Research & Evaluation*, 7 (18). Disponible en http://pareonline.net/getvn.asp?v=7&n=18

Vallejos Vargas, E. (2012). *Análisis y propuesta en torno a las justificaciones en la enseñanza de la divisibilidad en el primer grado de secundaria*. Lima, Perú: Pontificia Universidad Católica del Perú.

Vera Vélez, L. (2008). *La rúbrica y la lista de cotejo*. Disponible en http://www.tecnoedu.net/lecturas/materiales/lectura10.pdf

Vergnaud, G. (1994), Multiplicative conceptual field: what and why? Guerson, H. & Confrey J. (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (41-59). Albany: SUNY.

Vygotski, L. (1934). *Pensamiento y lenguaje*. Buenos Aires, Argentina: Paidós.

Zazkis, R. (2000). Factors, divisors and multiples: Exploring the web of students' connections. *Research in Collegiate Mathematics Education*, 4, 210-238.

Zazkis, R. (2001). Múltiplo, divisores y factores: explorando la red de conexiones de los estudiantes. *Relime*, 4(1), 63-92.

Zazkis, R. et Campbell, S. (1996). Divisibility and Multiplicative structure of natural numbers: preservice teacher's understanding. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(5), 540-563.

Zazkis, R. & Gadowsky, K. (2001). Attending to transparent features of opaque representations of natural numbers. In A. Cuoco (Ed.), *NCTM 2001 Yearbook: The roles of representation in school mathematics*, (41-52), Reston: NCTM.

Zazkis, R. & Liljedah, P. (2004). Understanding primes: the role of representation. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35(3), 164-186.

Anexo 1: Protocolo para solicitar la evaluación de pares expertos

Recurrimos a usted como par experto debido al amplio conocimiento que tiene del campo de la Didáctica de la Matemática, y en particular del objeto de estudio de la investigación que estamos llevando a cabo, como así también, del marco teórico utilizado (EOS).

La investigación que estamos realizando se enmarca en una tesis de doctorado con las siguientes características:

- **Tesista:** Mgter. Ricardo Fabián Espinoza
- **Director:** Dr. Marcel David Pochulu
- **Título de la Tesis:** La comprensión alcanzada por estudiantes de Profesorado en Matemática, referida a la Divisibilidad, al comenzar la Universidad
- **Programa:** Doctorado en Ciencias Humanas y Sociales
- **Institución:** Universidad Nacional de Misiones, Facultad de Humanidades y Ciencias Sociales
- **Objetivos de la Tesis:**

General:

Valorar la comprensión que han alcanzado en el Nivel Medio los estudiantes que inician la carrera de Profesorado en Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas, Naturales y Agrimensura de la Universidad Nacional del Nordeste, sobre objetos matemáticos enmarcados en la Divisibilidad.

Específicos:

- Determinar los conceptos y propiedades, referidos a objetos básicos de Divisibilidad, que ponen en práctica los alumnos ingresantes al Profesorado en Matemática, al momento de resolver problemas.
- Especificar los procedimientos y técnicas que emplean habitualmente dichos alumnos en contextos de resolución de problemas enmarcados en la Divisibilidad.

- Caracterizar el tipo de argumentaciones y uso de lenguaje que emplean los alumnos cuando brindan explicaciones sobre la resolución de situaciones que involucran temas de Divisibilidad.
- Identificar relaciones conceptuales entre objetos matemáticos primarios en prácticas de resolución de problemas.

Puesto que esta investigación conllevó a diseñar un instrumento que nos permitiera recabar información sobre la comprensión alcanzada por estudiantes de Profesorado en Matemática, referida a la Divisibilidad, al comenzar la Universidad, se hace necesario validar el mismo.

Dado que en nuestro trabajo es central la noción de “comprensión” y debido a que tiene múltiples acepciones, tomamos las posiciones de investigadores en Educación Matemática como Font (2011), Pochulu y Rodríguez (2017), Rodríguez, Pochulu y Ceccarini (2011), Hiebert y Lefevre (1986), Godino (2000), Godino (2003), entre otros, y se la entiende aquí del siguiente modo:

> Comprender un objeto matemático significa producir, organizar y reorganizar la red de relaciones que se deben establecer en la resolución de una situación problemática (intra y extra-matemática) que "obliga" al funcionamiento del objeto, los procedimientos o técnicas que se despliegan para resolverla, las definiciones, propiedades, argumentos que validan las acciones realizadas, todas ellas soportadas y reguladas por el lenguaje simbólico, propio de la Matemática, y la lengua natural. (INFD, 2010, p. 122).

En consecuencia, entendemos que se ha comprendido un determinado objeto matemático si el alumno es capaz de articular coherentemente una red de relaciones entre los seis objetos primarios que propone el EOS.

Realizadas estas aclaraciones, les solicitamos su colaboración para evaluar:

- La adecuación de las relaciones conceptuales “inmediatas” que adelantamos a priori para cada situación–problema del instrumento.
- La ausencia de alguna relación conceptual importante.
- La redacción clara y precisa de los enunciados de las situaciones-problemas.
- Otro aspecto que no esté considerado y que resulte relevante ante su revisión.

Para facilitar su evaluación, indicamos las características más relevantes del diseño del instrumento. Posteriormente exponemos el instrumento propiamente dicho y el análisis a priori de las situaciones-problemas que lo componen.

Consideraciones básicas sobre el Instrumento

Se diseñó un instrumento que pone en juego una red de relaciones que debería activar un individuo que ha comprendido el objeto Divisibilidad y que se manifiesta a través de las prácticas operativas y discursivas que lleva a cabo.

El instrumento consiste en una serie de situaciones-problemas, que promueven que los estudiantes pongan en funcionamiento conceptos, procedimientos, propiedades, lenguaje y argumentos referidos a la Divisibilidad y establezcan relaciones entre dichos elementos de significado. El diseño de estas situaciones tuvo referencia en investigaciones previas sobre el tema, diseños curriculares y las propuestas de libros de textos de uso frecuente en el nivel medio de nuestro país.

Génesis y desarrollo del Instrumento

Primera versión

A inicios del año 2016 se diseñó un instrumento que contaba con 13 situaciones-problemas de Divisibilidad, luego de haber realizado una profunda revisión de antecedentes, diseños curriculares y textos escolares durante todo el año 2015.

Se resolvió cada una de las situaciones-problemas y se especificaron ciertas relaciones conceptuales involucradas en esas prácticas.

Posteriormente se puso a prueba con un reducido número de estudiantes a fin de realizar los ajustes correspondientes (mejorar el análisis a priori de las situaciones que contempla, mejorar la redacción de las consignas, estimar tiempos de resolución, entre otros). Esta experimentación, dada en llamar “prueba piloto”, se llevó a cabo con alumnos de primer año de la carrera de Profesorado en Matemática del ISFD “Dr. Juan Pujol” de la ciudad de Corrientes, que aún no habían trabajado con temas de Divisibilidad en dicho Profesorado.

Segunda versión

Las producciones de los estudiantes que resolvieron el contenido del primer instrumento se analizaron a posteriori. Este trabajo permitió mejorar el análisis a priori de la primera versión del instrumento, lo cual posibilitó la elaboración de una segunda versión. Dicho mejoramiento tuvo que ver con los siguientes aspectos:

a) La redacción de las consignas, desde el análisis de las dificultades de interpretación que tenían los alumnos.

En relación con las consignas, en el diseño del nuevo instrumento se buscó sembrar la duda sobre las cuestiones planteadas y propiciar el estudio de condiciones bajo las cuales una afirmación se cumple.

Por citar ejemplos, en el primer instrumento, el problema que solicitaba encontrar números distintos que tuvieran los mismos divisores, se transformó, en la segunda versión, en un problema que solicita determinar si existen números enteros con los mismos divisores y, de ser así, la exhibición de los mismos y la fundamentación de la respuesta (problema 6). Asimismo, en el problema 2 de la segunda versión del instrumento, se solicita explícitamente el estudio de condiciones para que el divisor de una división sea divisor del dividendo, no siendo así en la versión original.

b) En el análisis a priori del nuevo instrumento, se narran más detalladamente los procesos cognitivos posibles de desarrollar para resolver las distintas situaciones-problemas. Como nota distintiva de la exhaustividad perseguida en este aspecto, se explicitan en cada resolución los elementos de significados primarios, tales como: problemas, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos, indicando, además, las posibles dificultades en el uso del lenguaje.

c) Se quitaron, de la versión original del instrumento, aquellos problemas para cuyas resoluciones se movilizaban las mismas relaciones conceptuales, o muy similares, presentes en otros problemas ya considerados. Por ejemplo:

- Se excluyó la situación en la que se pedía explícitamente el hallazgo de divisores de números grandes (problema 11), pues esta tarea ya estaba contemplada en la solicitud de la determinación del máximo común divisor (problema 13).

- La situación en la que se solicitaba realizar tareas de determinación de si un número es divisor, múltiplo, factor, etc. de otro número, cuando uno de ellos está expresado en su factorización prima (problema 6), pues esta tarea estaba involucrada en el problema 7.

d) Se quitó el problema 10, teniendo en cuenta que, si bien plantea el establecimiento de relaciones conceptuales entre dos objetos matemáticos estrechamente vinculados, como la División y Fracción, en el ámbito de la enseñanza, en los diseños curriculares y libros de textos, no aparecen relacionados. Pareciera, entonces, que esta relación no se constituye en objeto de enseñanza en el Nivel Medio de nuestro país.

A partir de las mejoras indicadas, se concreta la segunda versión del instrumento, la que cuenta con diez situaciones-problemas que ponen en juego una red de relaciones que debería activar un individuo que ha comprendido el objeto matemático Divisibilidad y que se manifiesta a través de las prácticas operativas y discursivas que lleva a cabo.

Por cada una de las situaciones-problemas que conforman esta nueva versión se anticipan sistemas de prácticas que podrían desarrollar los alumnos destinatarios, se las modelizan con configuraciones epistémicas y se determinan las relaciones conceptuales más inmediatas.

Análisis a priori de las situaciones-problemas del instrumento

El análisis didáctico llevado a cabo a priori para cada una de las situaciones-problemas del nuevo instrumento, se realiza por medio de una configuración epistémica, herramienta teórica y metodológica del Enfoque Ontosemiótico.

Para cada una de las 10 situaciones-problemas se indica el tipo de problema al que corresponde, se elabora al menos una resolución y se explicitan las relaciones inmediatas, detectadas a priori, entre objetos matemáticos primarios necesarias de establecer para elaborar dichas resoluciones.

La resolución presentada se diseña asumiendo a priori unas producciones de alumnos caracterizadas como adecuadas o pertinentes. Cabe aclarar que no es de interés analizar dificultades en términos de conflictos semióticos, pues el propósito de la tesis se dirige a valorar la comprensión de los estudiantes.

Con el propósito de profundizar el análisis a priori realizado sobre el nuevo instrumento, se elabora una matriz de desempeño, que se adjunta y pone a su consideración.

El propósito de esta matriz es la valoración a priori de la comprensión de las situaciones-problemas del instrumento de recolección de datos, en cuatro niveles: Novato, Aprendiz, Experto y Distinguido. Es útil, por lo tanto, como marco de referencia para el análisis de los sistemas de prácticas que desarrollarán los alumnos a propósito de la resolución de las situaciones que conforman dicho instrumento.

Para distinguir estos niveles, se tienen en cuanta los siguientes aspectos:

a. La pertinencia, economía o adecuación de los conocimientos empleados en la resolución, especialmente de los procedimientos.
b. La utilización de conocimientos óptimos como definiciones, proposiciones y propiedades.
c. La incorporación de argumentos para validar las proposiciones.

Anexo 2: Informe de pares expertos

1. Informe de la Dra. María Laura Distéfano

Título: Evaluación de Instrumento por jueces expertos
Tesista: Mgter. Ricardo Fabián Espinoza
Director: Dr. Marcel David Pochulu

Título de la Tesis: La comprensión alcanzada por estudiantes de Profesorado en Matemática, referida a la Divisibilidad, al comenzar la Universidad

Programa: Doctorado en Ciencias Humanas y Sociales
Institución: Universidad Nacional de Misiones, Facultad de Humanidades y Ciencias Sociales

Este informe resume la evaluación realizada sobre el instrumento elaborado para relevar datos relativos a los conocimientos de Divisibilidad en estudiantes que inician la carrera de Profesorado de Matemática.

Como valoración general del instrumento propuesto, puede decirse que es acorde a los objetivos definidos y al nivel educativo en que se encuentran los estudiantes a los que se dirige. Se trata de una muestra representativa de tareas que aborda distintos conceptos en relación al tema Divisibilidad. En general, las consignas son claras, precisas y están expresadas en un lenguaje pertinente. A continuación, agrego algunos comentarios particulares a los problemas propuestos, con el objetivo de que aporten al avance del trabajo.

El enunciado del Problema 2 es el único que percibo como poco claro. Pareciera que el objetivo, al formularlo tal como aparece, fuera el de trabajar los dos conceptos o interpretaciones a los que alude la palabra “divisor”. Sin embargo, la resolución propuesta sobre la cual se construyó la configuración no parece ir en esta dirección, sino que está focalizada en el análisis del valor del resto de la división. Si el objetivo de este ejercicio es este último, entonces sería conveniente reformular el enunciado para evitar el conflicto semiótico que podría producirse y que podría derivar en perder la oportunidad de obtener la información deseada. Sugiero algunas formas de re-enunciarlo aunque, por supuesto, no son las únicas: “En una división entre los números m y n, ¿bajo qué condición n es divisor de m?”; “En una división entre dos números, ¿bajo qué condiciones el dividendo es múltiplo del divisor?”.

En el Problema 4 se evalúa la regla de divisibilidad del 3. Si el objetivo de este instrumento es indagar si los estudiantes conocen las reglas de divisibilidad, quizás sea conveniente incorporar algún otro problema que requiera de la aplicación de la regla de divisibilidad de otros números.

En el enunciado del Problema 6, en la formulación de la segunda pregunta está implícito que la respuesta a la primera pregunta es afirmativa. Una posible manera de reformularla podría ser: “¿Es posible que dos números enteros distintos tengan los mismos divisores? Si la respuesta es afirmativa, indique bajo qué condiciones ocurre; si la respuesta es negativa, explique las razones”.

El Problema 7 evalúa los mismos conceptos que el Problema 1, más allá de que esté formulado de manera diferente. Se vuelve a evaluar “ser divisor” y “ser múltiplo”. El estudiante podría efectuar el cálculo en cada inciso y luego efectuar la división para analizar si es múltiplo, observando el resto de la división entera. En este caso, mi sugerencia es eliminar este problema o bien, indicar expresamente en el enunciado del problema que se realice el análisis sin efectuar previamente las operaciones formuladas en los incisos. Otra posibilidad es incorporar algún literal en las expresiones, de modo que no se pueda efectuar el cálculo para reducir la expresión a un único número.

Las relaciones que se derivan de las configuraciones epistémicas realizadas sobre una resolución experta son adecuadas y exhaustivas. En todos los casos se especifican los objetos primarios que se vinculan en la relación enunciada. Dado que se utilizan herramientas del Enfoque Ontosemiótico, como son los objetos primarios y las configuraciones entre ellos, me permito sugerir que las relaciones entre estos objetos, enunciadas para cada uno de los problemas propuestos, se definan como funciones semióticas, especificando en cada caso el antecedente y el consecuente. Es posible que esta forma de definir las relaciones permita detectar si algunas funciones semióticas que se replican en distintos problemas, lo cual podría permitir encontrar posibles regularidades que enriquezcan el análisis de las resoluciones efectuadas por los estudiantes.

Quedo a disposición del tesista y del director ante cualquier duda que surgiera de este informe o de otros aspectos que deseen someter a evaluación.

2. Informe de la Dra. Alicia Mabel Rodríguez

Título: Evaluación de Instrumento por jueces expertos

Tesista: Mgter. Ricardo Fabián Espinoza

Director: Dr. Marcel David Pochulu

Título de la Tesis: La comprensión alcanzada por estudiantes de Profesorado en Matemática, referida a la Divisibilidad, al comenzar la Universidad

Programa: Doctorado en Ciencias Humanas y Sociales

Institución: Universidad Nacional de Misiones, Facultad de Humanidades y Ciencias Sociales

Los aspectos analizados han sido los siguientes, tal como fuera solicitado:

- La adecuación de las relaciones conceptuales “inmediatas” adelantadas a priori para cada situación–problema del instrumento.

- La ausencia de alguna relación conceptual importante.

- La redacción clara y precisa de los enunciados de las situaciones-problemas.

- Otro aspecto que no esté considerado y que resulte relevante para el trabajo.

Considero que las situaciones-problema incluidas en el instrumento son adecuadas para alcanzar uno de los objetivos de la tesis: valorar adecuadamente la comprensión alcanzada por los estudiantes respecto del objeto Divisibilidad. Los análisis a priori de las posibles resoluciones de cada una de las situaciones, en términos de establecer relaciones entre los objetos primarios del EOS, han sido sumamente detallados y completos, desde mi perspectiva. El trabajo desarrollado en este aspecto muestra la factibilidad de alcanzar el objetivo analizando las producciones de los estudiantes. Enfatizo con esta observación la importancia de tener en claro cómo se realizará el análisis de los datos, más allá de disponer de un instrumento que permita recabarlos.

No advierto relaciones conceptuales ausentes ni otros aspectos que no estén considerados y puedan ser relevantes para este trabajo.

Respecto de la redacción de las situaciones-problema, menciono algunas consideraciones, por si resultan de utilidad al tesista y su director.

El enunciado del problema 2 dice “En una división entre números enteros “a” y “b”, ¿bajo qué condición “b” es divisor de “a”?”. Aquí comento un par de cosas: i) al decir división entre a y b, me pregunto si sólo cabe entender que se refieren a “a dividido b” y no da lugar el enunciado a entender “b dividido a”. Por otra parte, ii) la pregunta induce a que hay alguna condición (da certeza, asegura existencia) y además indica que “esa condición es única” (unicidad). Propongo una reformulación –si es que están de acuerdo, por supuesto- del estilo siguiente que atendería a todos los comentarios mencionados: “Si se divide al entero a por el entero b, ¿existe alguna condición para que b sea divisor de a? Justifica tu respuesta”.

El Problema 4 establece “15a45 es un número de 5 cifras, ¿existe algún valor de “a” para que este número sea divisible por 3? Explicá cómo lo hiciste y justificá tu respuesta”. A raíz de las anticipaciones que hacen de las resoluciones que muestran comprensión, entiendo que se espera que el estudiante halle todos los posibles valores de a. Observo dos cuestiones aquí: i) el enunciado no obliga a esto, ya que, exhibiendo un valor de a, por ejemplo, a = 0, el alumno respondería al planteo de manera correcta. Esto podría subsanarse, simplemente agregando “en caso de respuesta afirmativa, indicá todos los posibles valores de a”. Por otro lado, esta consigna es la que veo como más débil, en el siguiente sentido: se resuelve correctamente por un proceso de exhaustividad muy breve. Sin dudas lo tienen identificado, y así y todo han decidido incluirlo, por lo que sólo es un comentario para ustedes. Sumo un comentario que seguramente han tenido en cuenta pero que tal vez sea conveniente explicitarlo en el texto, más allá de este problema, pero que este problema me permite ejemplificar. Considero que el alumno podría estar en un nivel avanzado de comprensión y resolver un problema con “recursos poco sofisticados”. Si esto ocurriera, vista su resolución en la matriz el investigador podría tender a valorar la comprensión de ese sujeto como del nivel más bajo. En este caso, hacer diez casos es simple, efectivo y más rápido que un planteo de otro tipo. Con esto digo que: si acaso resolviera así, no sería suficiente indicador de estar en un nivel bajo porque en este caso “no necesitó otro recurso”.

El Problema 5 dice “Si a y b son números naturales y a es divisor de b, siempre a es menor o igual que b, ¿sucede lo mismo si los números fueran enteros? Justifica tu respuesta”. Por el análisis realizado, entiendo que no se conformarían con que digan “no, no sucede lo mismo” y muestren un caso en el que falle. Pareciera que quisieran todas las posibilidades. También pondría un punto seguido luego de la proposición válida en naturales. Es decir, propongo algo así: “Se sabe que, si a y b son números naturales y a es divisor de b, siempre a es menor o igual que b. ¿Sucede lo mismo si los números fueran enteros? Identifica todas las posibilidades para este caso y justifica tu respuesta”.

El Problema 6 dice: “¿Es posible que dos números enteros distintos tengan los mismos divisores? ¿en qué condiciones? Justifica tu respuesta”. Así como está planteado, la pregunta “en qué condiciones” induce a que la respuesta a la pregunta anterior, deba ser afirmativa. Propongo algo como: “¿Es posible que dos números enteros distintos tengan los mismos divisores? Si tu respuesta es afirmativa, indica en qué condiciones eso ocurre. Justifica tu respuesta”.

El Problema 8 dice: “Si fuera posible, escribe un número que tenga: a) Exactamente cuatro divisores naturales. b) Más de 15 divisores enteros. Explica la estrategia que usaste para encontrarlos y fundamenta tu respuesta”. El enunciado inicia abriendo la posibilidad a que exista o no tal número, pero al expresar “explica la estrategia que usaste para encontrarlos”, se quita la incertidumbre inicial y se da certeza. Propongo mantener la incertidumbre pues suma riqueza a la actividad matemática del alumno. Podría quedar algo como: “Si fuera posible, escribe un número que tenga: a) Exactamente cuatro divisores naturales. b) Más de 15 divisores enteros. Si te resultó posible, explica la estrategia que usaste para encontrarlos y si no, explica por qué no es posible. En cualquier caso, fundamenta tu respuesta”.

El planteo del problema 9 dice “En una estación de colectivos, un bus para con una frecuencia de 18 minutos y el otro lo hace cada 15 minutos, ¿dentro de cuántos minutos, como mínimo, se encontrarán en esa estación, después de haber coincidido en esa estación los dos colectivos? Fundamenta tu respuesta.”. Desde el enunciado se sabe que habrá un momento en el que se encuentren los buses. Simplemente me pregunto por qué dar esa información al estudiante. Podría preguntarse si es posible que eso ocurra.

Felicito al tesista y a su director y anticipo que harán un excelente y valioso trabajo.

2. Informe de la Dra. Cristina Mercedes Camós

Título: Evaluación de Instrumento por jueces expertos

Tesista: Mgter. Ricardo Fabián Espinoza

Director: Dr. Marcel David Pochulu

Título de la Tesis: La comprensión alcanzada por estudiantes de Profesorado en Matemática, referida a la Divisibilidad, al comenzar la Universidad

Programa: Doctorado en Ciencias Humanas y Sociales

Institución: Universidad Nacional de Misiones, Facultad de Humanidades y Ciencias Sociales

Los aspectos analizados han sido los solicitados.

1) Las situaciones planteadas en el instrumento permiten valorar la comprensión alcanzada por los estudiantes. Los análisis a priori realizados respecto a las posibles resoluciones de los alumnos fueron sumamente detallados y enmarcados según el EOS. Además, para cada situación–problema se detallan funciones semióticas que considero son adecuadas.

2) En cuanto a la ausencia de alguna relación conceptual planteo el siguiente interrogante:

- En el Problema 1 ¿no es pertinente describir una función semiótica que relacione el dividendo, el divisor y el resto? Los alumnos (en el nivel Novato) podrían decir “que no sobra nada” ó “el resto es cero”. En el nivel Novato dudo que puedan expresar “es una división entera exacta”, tal vez la expresión sea: “el resultado dio exacto” ó “la división dio exacta”.

3) Respecto de la redacción y preguntas de las situaciones–problemas, detallo algunas cuestiones deseando que alguna de ellas sea de utilidad para el Tesista y el Director:

- En el Problema 3 la expresión “los múltiplos de un número son tales”, considero que no equivale (para los alumnos) a que se considere que son “todos los múltiplos”. Los estudiantes no tienen el hábito de leer enunciados detenidamente ni tampoco de releerlos. Tal vez se pueda cambiar la expresión de forma que no quede duda que deben considerarse todos los múltiplos.

- En el Problema 4 los alumnos también pueden argumentar sin recurrir a un k’, trabajando con la expresión: a= 3x(k-5) dando valores a k desde 0 hasta 9 y considerando que “a” es positivo.

- En el Problema 9 considero que el concepto de Mínimo Común Múltiplo generalmente se recuerda como un cantito: “los comunes y no comunes,,,,,”

No comprenden el significado del Mínimo Común Múltiplo porque la palabra “común” y la palabra “mínimo” no tienen el sentido matemático que deberían tener. No asocian los cálculos que realizan con la expresión lingüística porque generalmente nunca se les enseñó.

- En el Problema 10 el comentario es el mismo que en el problema 9.

Quiero expresar lo interesante que resultó para mí realizar esta evaluación esperando que algún aporte les haya sido útil.

Estoy segura que esta Tesis será un éxito. Felicitaciones para ambos.

3. Informe del Dr. Gustavo Carnelli

Evaluación realizada por: Dr. Gustavo Carnelli

Tesista: Mgter. Ricardo Espinoza

Director: Dr. Marcel Pochulu

Título de la tesis: La comprensión alcanzada por estudiantes del Profesorado en Matemática, referida a la Divisibilidad de Números Enteros, al comenzar la Universidad.

A partir de:

a) los materiales facilitados:

- protocolo para solicitar la evaluación de pares expertos;

- análisis ontosemiótico del instrumento;

- la matriz de comprensión

b) la solicitud de evaluar los siguientes aspectos:

- la adecuación de las relaciones conceptuales “inmediatas” que adelantamos a priori para cada situación-problema del instrumento

- la ausencia de alguna relación conceptual importante

- la redacción clara y precisa de los enunciados de las situaciones-problema

- otro aspecto que no esté considerado y que resulte relevante ante su revisión

Presento, a continuación, mi evaluación:

El instrumento y su análisis se enmarcan en el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática, desarrollado inicialmente por Juan Díaz Godino. La producción es precisa y ajustada a los elementos teóricos que la sostienen,

Para llegar a la formulación presentada de las situaciones-problemas sobre divisibilidad, se han realizado distintos acercamientos y se han probado ante estudiantes, incorporando modificaciones y ajustes, como se indica, con precisión, en uno de los documentos. Los detalles expuestos de este proceso de revisión y los cambios propuestos son, a mi entender, cuidados y pertinentes.

Considero que la redacción finalmente propuesta de los enunciados de las situaciones-problemas resulta clara y precisa.

Para cada situación-problema se presenta una configuración epistémica y una red de relaciones que los autores llaman “inmediatas”. A partir de la lectura y el estudio de estos materiales, considero que son correctas y se ajustan a los intereses del trabajo.

La matriz de comprensión muestra, para cada situación-problema una serie de indicadores que permiten asignar un nivel de comprensión de un total de cuatro niveles propuestos. Los indicadores propuestos se ven adecuados y sumamente cuidados en su diseño.

Por último, planteo el siguiente interrogante acerca de los tiempos de resolución de las actividades por parte de los estudiantes. Si bien en los documentos facilitados no se hace mención a los tiempos asignados a los estudiantes para la resolución de las 10 situaciones-problemas y, pese a que seguramente es una variable que ha sido tenido en cuenta por el tesista y su director, me permito señalar la necesidad de evaluar si no resulta excesiva la demanda de la resolución de la totalidad de las actividades en un único encuentro a un grupo de estudiantes (suponiendo que está previsto realizarlo así). Más precisamente, realizo la consideración ante la posibilidad de que su extensión pueda favorecer la pérdida de atención de algunos estudiantes ante la tarea, con la consiguiente pérdida de valiosa información para la investigación.

Anexo 3: Primera versión del instrumento de indagación

Esta versión consta de 13 situaciones–problemas. Para cada una de ellas se indica el tipo de problema al que corresponde, se elabora al menos una resolución y se explicitan las relaciones inmediatas establecidas entre objetos matemáticos primarios, detectadas a priori, necesarias de establecer para elaborar dichas resoluciones.

Consigna inicial: Resuelve las siguientes situaciones-problemas, señalando siempre los procedimientos que utilizas**.**

No borres ningún escrito que hagas. Si te das cuenta que escribiste algo incorrecto, indícalo y vuelve a realizarlo a continuación.

Trata de escribir lo más claro y preciso que puedas.

1) a) Completa con las palabras: “divisor” o “múltiplo”:

4 es …………… de 20, 10 es ……………de 2; -21 es …………… de -7; 30 es ……………de -900; 0 es ………….. de 8; 0 es ……………. de 0; 1 es ………………. de 27.

¿Cómo te das cuenta que un número es divisor o múltiplo de otro?

b) Considera la siguiente colección de números: 1, -3, 6, -8, 15, 36, -39, 42, -48, -69, 3.600, 2.412.

i. Los números del listado que son múltiplos de 36 son: ………………………….

ii. Los números del listado que son divisibles por 36 son: …..……………………

iii. Los números del listado que son factores de 36 son: …………………………..

iv. Los números del listado que son divisores de 36 son: ………………………….

Explica cómo encontraste los números solicitados en cada caso.

En el apartado a) de esta primera situación, la tarea consiste en determinar si un número entero es divisor o múltiplo de otro número entero. En el ítem b), de una colección finita de números enteros, es necesario identificar los números que son múltiplos, divisibles, factores o divisores de un número entero.

Identificar los números que son múltiplos, divisibles, factores o divisores de un número entero, involucra también reconocer los que no lo son.

Resolución: *1)a) 4 es divisor de 20, pues existe el número 5 de tal manera que 20 = 4x5; 10 es múltiplo de 2, pues 2 es divisor de 10. De igual manera se pueden completar los restantes.*

b) i. Los números del listado que son múltiplos de 36 son 3.600 y 2.412, dado que 36 es divisor de estos números.

ii. Los números del listado que son divisibles por 36 son 3.600 y 2.412, pues 36 es divisor de cada uno de estos números.

iii. Los números del listado que son factores de 36 son 1, -3, 6 y 36, ya que estos números son divisores de 36.

iv. Los números del listado que son divisores de 36 son 1, -3, 6 y 36, pues 36 = 1x36 = -3x(-12) = 6x6 = 36x1.

Para resolver el primer apartado es necesario establecer una relación R_{11} entre el problema y la definición de divisor y una relación R_{12} entre las definiciones de múltiplo y divisor. Para el segundo, es necesario establecer la relación R_{13} entre el problema y las definiciones de estos objetos matemáticos mencionados y de algunos de ellos entre sí: R_{14} (entre divisor y múltiplo), R_{15} (entre divisor y factor) y R_{16} (entre divisor y divisible).

2) Los múltiplos de un número comprendidos entre 370 y 460 son: 380, 399, 418, 437 y 456. ¿De qué número?, ¿es único?

Explica cómo lo/s encontraste/s y fundamenta tu respuesta.

Aquí la tarea consiste en hallar un número conociendo sus múltiplos naturales comprendidos entre dos números naturales.

Resolución: *456-437 = 437-418 = 418-399 = 399-380 = 19, que es el número buscado, pues dos múltiplos consecutivos de un número natural a, difieren en a.*

El número encontrado no es único; otro número que se constituye también en la solución del problema es el -19, quien tiene los mismos múltiplos enteros que 19.

Es necesario establecer una relación R_{21} entre el problema y un procedimiento, el que consiste en restar dos múltiplos consecutivos para encontrar el número en cuestión.

Además, se aprecia una relación R_{22} entre este procedimiento y un argumento que lo avala, el que explica que dos múltiplos consecutivos de un número natural a, difieren en a. Este argumento se relaciona con la definición de múltiplo (R_{23}).

Como hay dos números que se constituyen en respuesta a esta cuestión, dos enteros opuestos, se evidencia también una relación R_{24} entre el procedimiento recientemente explicado y la propiedad que expresa que dos números enteros opuestos poseen los mismos múltiplos enteros. Es decir, a partir del empleo del procedimiento considerado, se encuentra la solución natural, y con la propiedad indicada, la solución negativa.

3) 15a45 es un número de 5 cifras, ¿existe algún valor de "a" para que este número sea:

a) Múltiplo de 5?

b) Divisible por 3?

Explica cómo lo hiciste y justifica tu respuesta.

En este caso, la tarea consiste en decidir si existe un dígito desconocido "a", que ocupa el lugar de las centenas de un número natural de cinco cifras, para que éste sea Múltiplo o divisible por otro natural de una cifra.

Resolución: *a) Cualquiera sea el dígito a, el número 15a45 siempre es múltiplo de 5, dado que la cifra que corresponde a las unidades es 5.*

b) Para que el número 15a45 sea divisible por 3, teniendo en cuenta que la suma de dos números divisibles por 3 es divisible por 3, "a" debe ser un dígito divisible por 3. En efecto, 1+5+a+4+5 = (1+5+4+5)+a será divisible por 3 cuando "a" lo sea, ya que 1+5+4+5 = 15 es divisible por 3. Por lo tanto, a puede asumir los valores: 0, 3, 6 y 9.

Para enfrentar la situación-problema hay que poner a funcionar la relación R_{31} entre el problema y el lenguaje simbólico de la escritura del número 15a45, pues es necesario reconocer que “a” es un dígito y representa una cifra de este número.

Hay también una relación R_{32} establecida entre el problema y un concepto dado en llamar criterio de divisibilidad (divisibilidad por 3 y por 5).

Para resolver el segundo apartado, es necesario relacionar la situación problema con la propiedad: La suma de dos números divisibles por un número a, es divisible por a (R_{33}).

4) Si a y b son números naturales y a es divisor de b, siempre a es menor o igual que b, ¿sucede lo mismo si los números fueran enteros? Justifica tu respuesta.

La tarea consiste en determinar si el orden que se establece entre dos números enteros es el mismo que el que se da entre dos números naturales, cuando uno de los números es divisor del otro.

Resolución: *5 es divisor de sí mismo y también de 10 y de -10 y con estos ejemplos basta para determinar que, en el conjunto de los números enteros, si a es divisor de b, a puede ser mayor, menor o igual que b, con lo cual se puede decir que las relaciones de orden entre a y b, cuando a es divisor de b, no es la misma en el conjunto de los números naturales y en el de los enteros.*

Teniendo en cuenta que un número entero y su opuesto tienen los mismos divisores, se puede también determinar que, en el conjunto de los números enteros, si a es divisor de b, a puede ser mayor, menor o igual que b.

Se hace necesario establecer una relación R_{41} entre la definición de divisor y un procedimiento de tanteo que consiste en comparar a y b, cuando a es divisor de b.

Asimismo, se da una relación R_{42} entre este procedimiento y la propiedad: si a es divisor de b, siendo a y b números enteros, a puede ser menor, mayor o igual que b.

También se puede resolver la tarea haciendo funcionar la propiedad que manifiesta que un número entero y su opuesto tienen los mismos divisores. A partir de la misma, se determina que el orden entre a y b, cuando a es divisor de b, no es el mismo en los conjuntos N y Z. Por lo tanto, queda en evidencia, una relación R_{43} entre el problema y esta propiedad.

5) Encuentra dos números enteros distintos que tengan los mismos divisores.
Justifica tu respuesta.

La tarea consiste en encontrar dos números enteros distintos con los mismos divisores, justificando la respuesta.

Resolución: *Podrían ser cualquier número entero y su opuesto, ya que ellos tienen los mismos divisores, por ejemplo 1 y -1.*

Para resolver este problema es necesario poner a funcionar la relación R_{51} entre el problema y la propiedad que manifiesta que, si un número entero es divisor de otro entero, es también divisor de su opuesto.

Puede establecerse también una relación R_{52} entre la propiedad indicada y el siguiente argumento: si a es divisor de b, b = a.c, luego -b = -a.c = a.(-c) = a.c'. El mismo justifica que el entero b y su opuesto tienen los mismos divisores, dado que esta deducción deja ver que cualquier entero "a" que es divisor de "b", lo es también de "-b". Queda al descubierto otra relación R_{53}, entre este argumento y la definición de divisor.

6) Consideremos el número b = 33x52x7
a) ¿7 es divisor de b?, ¿y 26?
b) ¿b es divisible por 5?, y ¿por -2?, ¿por 11?, ¿por 15?
En cada caso, justifica tu respuesta.

En esta situación-problema se requiere reconocer si un número natural expresado en forma decimal es divisor de un número entero expresado de manera factorial (primer ítem).

En el segundo apartado, la tarea consiste en determinar si un número natural b, expresado en forma factorial, es divisible por otros números enteros expresados en forma decimal.

Resolución: *a) 7 es divisor de b porque es un factor de una descomposición multiplicativa de b. Además, teniendo en cuenta la definición de divisor, como b = 33x52x7 = 1.716x7, se puede afirmar que 7 es divisor de b. También 26 es* *divisor de b, pues es factor de 52, quien es a su vez un factor en una descomposición multiplicativa de b (b = 33x52x7 = 33x26x2x7).*

b) Obteniendo la descomposición factorial prima de b = 3x11x2^{2}x13x7, se puede determinar que b es divisible por 2 y por 11, porque estos números son factores de dicha descomposición de b. Además, como b es divisible por 2, es también divisible por -2. Por otra parte, b no es divisible por 5 pues este número no es factor de la descomposición factorial prima de b. Tampoco es divisible por 15, dado que este número no es factor de ninguna descomposición factorial de b.

Para resolver la situación, podría establecerse una relación R_{61} entre lenguajes, esto es, relacionando las expresiones decimal y factorial de un número. Convirtiendo un número de expresión factorial a decimal, relacionando luego el problema con la definición de divisor (R_{62}).

Si no se convirtiera a expresión decimal los números escritos factorialmente, para solucionar las cuestiones podrían darse las siguientes relaciones:

- En el apartado a, se da una relación R_{63} entre el problema y el procedimiento que consiste en determinar que un número es divisor de otro observando si es un factor de una de sus descomposiciones factoriales o si es factor de un factor de la misma.
- Se debe establecer también una relación R_{64} entre el procedimiento anterior y el siguiente argumento: si a = bxc, tanto b como c son divisores de a, y si b = b_1xb_2, tanto b_1 como b_2 son divisores de a, pues a = b_1x$b_2$xc = b_1x($b_2$xc) = $b_1$xb' y, análogamente a = $b_2$xb'.
- Queda al descubierto también una relación R_{65} entre la propiedad que expresa que "el divisor del divisor de un número a, es también divisor de a" y el argumento esgrimido anteriormente.
- Finalmente, se establece una relación R_{66} entre el argumento señalado y la definición de divisor.
- En apartado b es necesario establecer una relación R_{67} entre las definiciones de "divisible" y "divisor". Luego, las relaciones R_{63}, R_{64} y R_{65}.

Para resolver el problema de manera más económica, se requiere obtener la descomposición factorial prima de b, es decir que se hace necesario relacionar el problema con un procedimiento que permite obtener dicha descomposición (R_{68}).

7) Teniendo en cuenta que: 187 = 11x17, ¿son correctas las siguientes afirmaciones?:

a) 17 es divisor de 11x17

b) 11x17+16 es múltiplo de 187

c) 11x17+1870 es múltiplo de 187

En cada caso, fundamenta tu respuesta.

En el primer ítem, la tarea consiste en decidir si un número expresado en base 10, es divisor de un número expresado según su descomposición factorial prima.

En el segundo apartado, el problema consiste en determinar si un número, expresado en base al algoritmo de la división, es múltiplo de otro número en su versión decimal.

En el tercer apartado, la tarea consiste en determinar si un número, expresado en base a la propiedad distributiva, es múltiplo de otro número expresado en base 10.

Resolución: *a) 17 es divisor de 11x17, pues es un factor de la descomposición factorial prima de este número. Teniendo en cuenta la definición de divisor, 17 es divisor de 11x17, pues existe un número, el 11, que multiplicado por 17 da por resultado 11x17.*

b) 11x17+16 no es múltiplo de 187, porque de los dos sumandos, uno sólo de ellos (el 11x17) es múltiplo de 187. Para que la suma de dos números sea múltiplo de otro número, siendo múltiplo de uno de ellos, debe ser necesariamente múltiplo del otro.

Luego, un número expresado en base al algoritmo de la división, nunca es múltiplo del divisor (elemento de la división).

c) 11x17+1870 es múltiplo de 187 ya que dicho número es la suma de otros dos números que son múltiplos de 187. Luego, un número expresado en base *a la propiedad distributiva, siempre es múltiplo del divisor (elemento de la división).*

Por otra parte, el número 11x17+1870 puede escribirse: 11x17+187x10 = 187x(1+10) = 187x11, siendo entonces múltiplo de 187, teniendo en cuenta la definición de divisor.

En el primer apartado de esta resolución, es necesario establecer una relación R_{71} entre la situación y la propiedad que dice que un número es divisor de otro, si es un factor de su descomposición factorial prima. Luego, una relación R_{72} entre esta propiedad y la definición de divisor.

En los demás ítem, se vislumbra una nueva relación, R_{73}, entre la situación y la propiedad que manifiesta que la suma de dos múltiplos de un número, es múltiplo de éste.

Y luego una relación R_{74} entre la propiedad anterior y su fundamentación (argumento): La suma de dos múltiplos de “a” es múltiplo de “a”: $axc_1+axc_2 = ax(c_1+c_2) = axc$, siendo c_1, c_2 y c, números enteros. Esta deducción deja al descubierto una nueva relación R_{75}, la que está dada entre el argumento esgrimido y la definición de divisor.

8) Si fuera posible, escribe un número que tenga:

a) Exactamente cuatro divisores naturales.

b) Más de 15 divisores enteros.

Explica la estrategia que usaste para encontrarlos y fundamenta tu respuesta.

La tarea requiere encontrar un número con una determinada cantidad de divisores naturales (en el primer apartado) y enteros (en el otro caso).

Resolución: *a) Buscando divisores por tanteo, de números chicos, se puede encontrar un número con cuatro divisores naturales, por ejemplo, el 8. Por otra parte, un número que resulte del producto de dos números primos, p y q, también tiene 4 divisores naturales: 1, p, q y pxq.*

b) El número solicitado deberá tener 16 divisores o más, por lo que bastará buscar un número con 8 divisores naturales (16 enteros). Por ejemplo, 2^7 =

128, pues según la fórmula de la cantidad de divisores, la cantidad de divisores naturales de este número es: 7+1 = 8, y la cantidad de divisores enteros es 16.

En el apartado a, la resolución podría venir de la mano de un procedimiento rudimentario. Es necesario entonces relacionar el problema con un procedimiento de tanteo (R_{81}), teniendo en cuenta la definición de divisor. Está presente por lo tanto otra relación R_{82} entre el procedimiento y la definición indicados.

Para realizar la resolución de la otra manera indicada recientemente, es necesario poner a funcionar una relación (R_{83}) entre el problema y la definición de números primos y otra relación, la R_{84}, entre el problema y la propiedad: un número que resulta del producto de dos números primos, tiene exactamente 4 divisores naturales.

Para abordar la cuestión del segundo ítem, es necesario relacionar la situación con un concepto: la fórmula que permite determinar la cantidad de divisores (R_{85}), ya que la técnica del tanteo se torna poco económica. Así, un número "a" con "n" cantidad de divisores, siendo $n = n_1 \times \ldots \times n_m$, será de la forma $a = p_1^{(n_1-1)} x\ldots\ldots x p_m^{(n_m-1)}$, con $p_1, \ldots, p_m$ primos distintos y $n_1, \ldots, n_m$ factores de una descomposición factorial de n.

A su vez, se hace evidente una relación R_{86} entre conceptos: el señalado anteriormente y la expresión que da la cantidad de divisores naturales de un número, una vez conocida su descomposición factorial prima.

9) En una división entre números enteros, ¿siempre el divisor de la división es divisor del dividendo?

Justifica tu respuesta.

La tarea, explícita en la consigna, solicita determinar si en una división entera, el divisor de la misma es siempre divisor del dividendo.

Resolución: *En una división entre números enteros no siempre el divisor de la división es divisor del dividendo. En efecto, en la división a:b, a y b enteros, b distinto de cero, existen dos únicos números enteros q y r de manera tal que a = bxq+r. Si r = 0, a = bxq, y entonces b (divisor de la división) es divisor de "a" (dividendo), teniendo en cuenta la definición de divisor.*

Es necesario relacionar lenguajes correctamente (R_{91}), dado que se hace necesario diferenciar un número (elemento de una división) de una relación entre números (ser divisor de).

Para responder la tarea, se hace necesario poner a funcionar una relación R_{92} entre la misma y la propiedad: En una división de números enteros, si el cociente es entero y el resto es cero, el divisor de la división es divisor del dividendo. Se establece también una relación R_{93} entre esta propiedad y el siguiente argumento: En toda división, el dividendo es igual al divisor multiplicado por el cociente y sumado el resto; si todos los elementos de la misma son enteros y el resto es cero, se tiene que el dividendo es igual al divisor por el cociente, por lo que el divisor de la división es divisor del dividendo, en virtud de la definición de divisor. Hay entonces una relación entre este argumento y, por un lado, la definición de divisor (R_{94}) y, por otro, con una de las propiedades de la división entera (R_{95}).

10) Sabiendo que un número a es divisor de un número b, siendo a y b no simultáneamente nulos, ¿qué puedes decir de la fracción $\frac{a}{b}$?, ¿y de la fracción $\frac{b}{a}$?

Fundamenta tu respuesta.

Por medio de esta tarea se trata de establecer relaciones entre objetos matemáticos distintos: la relación de divisor (relación entre números) y la fracción (un número).

Resolución: *A partir de la consigna, se excluye el caso de que a y b fueran iguales a 0, y entonces, como se sabe que a es divisor de b, a debe ser distinto de cero. Por ello, queda considerar los casos: b = 0 y b ≠ 0.*

- *Si a es divisor de b, cuando b = 0,* $\frac{a}{b}$ *no existe, mientras* $\frac{b}{a} = \frac{0xa}{a} = 0$.
- *Si a es divisor de b, con b ≠ 0, b = axc, por lo cual* $\frac{a}{b} = \frac{a}{axc} = \frac{1}{c}$ *y* $\frac{b}{a} = \frac{axc}{a} = c$.

En estas condiciones, cuando a = b, se tiene que $\frac{a}{b} = \frac{b}{a} = 1$.

Está presente una relación R_{101}, entre la situación problemática y la propiedad: si a es divisor de b, $\frac{a}{b}$ no existe (si b = 0) o es igual a una fracción reducible a la forma $\frac{1}{c}$ (b ≠ 0), mientras que, en ambos casos, $\frac{b}{a}$ es un número natural.

Esta propiedad se relaciona con el argumento siguiente (R_{102}): Si a es divisor de b (b = 0), $\frac{a}{b}$ no existe, mientras que $\frac{b}{a} = \frac{ax0}{a} = 0$. Cuando b ≠ 0, b = axc, por lo cual: $\frac{a}{b} = \frac{a}{axc} = \frac{1}{c}$ y $\frac{b}{a} = \frac{axc}{a} = c$. En el caso que a = b, $\frac{a}{b} = \frac{b}{a} = 1$.

Finalmente, éste argumento se relaciona con la definición de divisor (R_{103}).

11) ¿Cuáles son todos los divisores enteros de 480?

Explica cómo los obtienes y cómo estás seguros de que encontraste todos.

La tarea consiste en encontrar todos los divisores enteros de un número natural (grande).

Resolución: *El número 480 expresado en su descomposición factorial prima es: 2^5x3x5. A partir de la misma, consideramos las siguientes potencias de 2, de 3 y de 5, respectivamente: 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4,2^5, 3^0, 3^1, 5^0 y 5^1. Realizando todos los productos posibles entre estas potencias, se hallan todos los divisores naturales del número en cuestión: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 30, 32, 40, 48, 60, 80, 96, 120, 160, 240 y 480. En el conjunto de los números naturales, el 480 tiene 24 divisores, mientras que, en el conjunto de los números enteros tiene 48 divisores.*

La fórmula de la cantidad de divisores ((5+1)x(1+1)x(1+1) = 24) indica que efectivamente el número en cuestión tiene 24 divisores naturales y 48 (2x24) divisores enteros.

En esta práctica matemática, se pueden apreciar la existencia de las siguientes relaciones: Una relación R_{111} entre el problema y la técnica de expresar un número según su descomposición factorial prima. Otra, R_{112}, que se establece entre el problema y la técnica de encontrar divisores que se usó y explicó en la resolución anterior. Una tercera relación, R_{113}, entre esta última técnica señalada y el argumento constituido en la fórmula que permite obtener la cantidad de divisores naturales de un número y que, por lo tanto, valida haber encontrado todos esos divisores. Finalmente, una cuarta relación R_{114} que se da entre el procedimiento de encontrar todos los divisores naturales y la propiedad que establece que, si un número entero es divisor de otro entero, es también divisor de su opuesto, conocimiento que permite encontrar la totalidad de divisores enteros, conociendo solamente los divisores naturales.

12) En una parada de colectivos, un bus pasa con una frecuencia de 18 minutos y el otro cada 15 minutos, ¿dentro de cuántos minutos, como mínimo, se encontrarán en la parada, después de haber coincidido los dos colectivos? Fundamenta tu respuesta.

La tarea consiste en resolver un problema de simultaneidad de encuentro entre tres móviles en una parada de colectivos, para lo cual habrá que hallar el mínimo común múltiplo entre números naturales.

Resolución: *Empleando la definición correspondiente, listando ordenada y exhaustivamente algunos múltiplos naturales de ambos números, queda en evidencia el mínimo entre los múltiplos comunes: 90.*

También se puede hallar la solución empleando el procedimiento que permite hallar el mínimo común múltiplo, a partir de la descomposición factorial prima de 18 y 15; esto es, $3^2x2x5 = 90$.

Se hace necesario establecer una relación R_{121} entre la situación problemática y el concepto de mínimo común múltiplo y luego, otra relación R_{122}, entre dicho concepto y la técnica indicada.

13) Se tienen dos cuerdas que miden 240 cm y 308 cm y se quiere cortarlas en trozos de igual longitud, ¿cuál será la mayor longitud en que se las puede cortar, de forma tal que no sobre cuerda? Fundamenta tu respuesta.

La tarea consiste en encontrar la cuerda de mayor longitud que entre en partes iguales en otras dos cuerdas dadas, para lo cual habrá que hallar el máximo común divisor entre números naturales relativamente grandes.

Resolución: *Empleando la definición correspondiente, listando los divisores naturales de ambos números, queda a la vista que el máximo entre los divisores comunes es 4.*

También se puede hallar la solución empleando el procedimiento que permite hallar el máximo común divisor, a partir de la descomposición factorial prima de 240 y 308; esto es, $2^2 = 4$.

Se hace necesario establecer una relación R_{131} entre la situación problemática y el concepto de máximo común divisor. Luego, otra relación R_{132}, entre este concepto y la técnica para hallarlo.

Anexo 4: Segunda versión del instrumento de indagación

Esta versión consta de 10 situaciones-problemas.

Para cada una de ellas se indica el tipo de problema al que corresponde y se elabora al menos una resolución. Estas prácticas resolutorias expertas se modelizan a través de configuraciones epistémicas.

Finalmente, se explicitan las relaciones inmediatas establecidas entre objetos matemáticos primarios, detectadas a priori, necesarias de establecer para elaborar dichas resoluciones.

Consigna inicial: Resuelve las siguientes situaciones-problemas, indicando siempre los procedimientos que utilizas**.** No borres ningún escrito que hagas. En todo caso, indica que no es correcto lo que has hecho y vuelve a realizarlo a continuación. Trata de escribir lo más claro y preciso posible.

Problema 1:

a) ¿3 es divisor de 30?, ¿y de 473?, ¿y de -654?

b) ¿3 es factor de 30?

c) ¿441 es múltiplo de 7?

El problema está dado en un contexto intramatemático y conlleva la tarea de determinar si un número, dado en su expresión decimal, es divisor, factor o múltiplo de otro número escrito también en base 10.

Resolución:

o) Podemos decir que 3 es divisor de 30, pues existe el número (entero) 10, que multiplicado por 3, da como resultado 30, de acuerdo con la definición de divisor:

Un número “a” es divisor de un número “b”, si existe un número “c” tal que a = bxc (concepto).

Para determinar si 3 es divisor de 473, usar como herramienta la definición anterior es poco pertinente, pues no es muy sencillo obtener un número que multiplicado por 3 dé 473 (procedimiento). En este caso, podemos recurrir al procedimiento de la división, respaldado en la siguiente definición:

Un número a, distinto de cero, es divisor de un número b, si la división b:a es entera exacta (concepto).

Este concepto permite disponer de una herramienta, en este caso más pertinente que la multiplicación, para determinar si un número es divisor de otro: la división. Luego, como 473:3 no es una división entera exacta (procedimiento), 3 no es divisor de 473.

Para responder esta pregunta, también se puede recurrir al criterio de divisibilidad por 3 (concepto y procedimiento). Así, sumando las cifras del número 473, se obtiene 14 que no es múltiplo de 3, por lo que 3 no es divisor de 473.

Para determinar si 3 es divisor de -654, se puede realizar la división 654:3 (procedimiento). Como la misma es entera exacta, esto es, tiene cociente igual a 218 y resto 0, podemos afirmar que 3 es divisor de 654. Luego, como 3 es divisor de 654, es también divisor de -654, ya que, si un número entero es divisor de otro número entero, es también divisor de su opuesto (propiedad). Esta propiedad se constituye en una herramienta importante para determinar, entre números enteros positivos y negativos o ambos negativos, si uno de ellos es divisor del otro, sin tener que recurrir a la división, teniendo en cuenta toda la dificultad que podría ocasionar realizar la división entre números enteros positivo y negativo o ambos negativos.

Con respecto al segundo apartado, podríamos afirmar que 3 es factor de 30, si 3 fuera divisor de 30. Así, un número "a" es factor de un número "b", sí y sólo si, es divisor del mismo (concepto).

Como, de acuerdo con la definición de divisor, 3 es divisor de 30, pues 3x10 = 30 (procedimiento), concluimos que 3 es factor de 30.

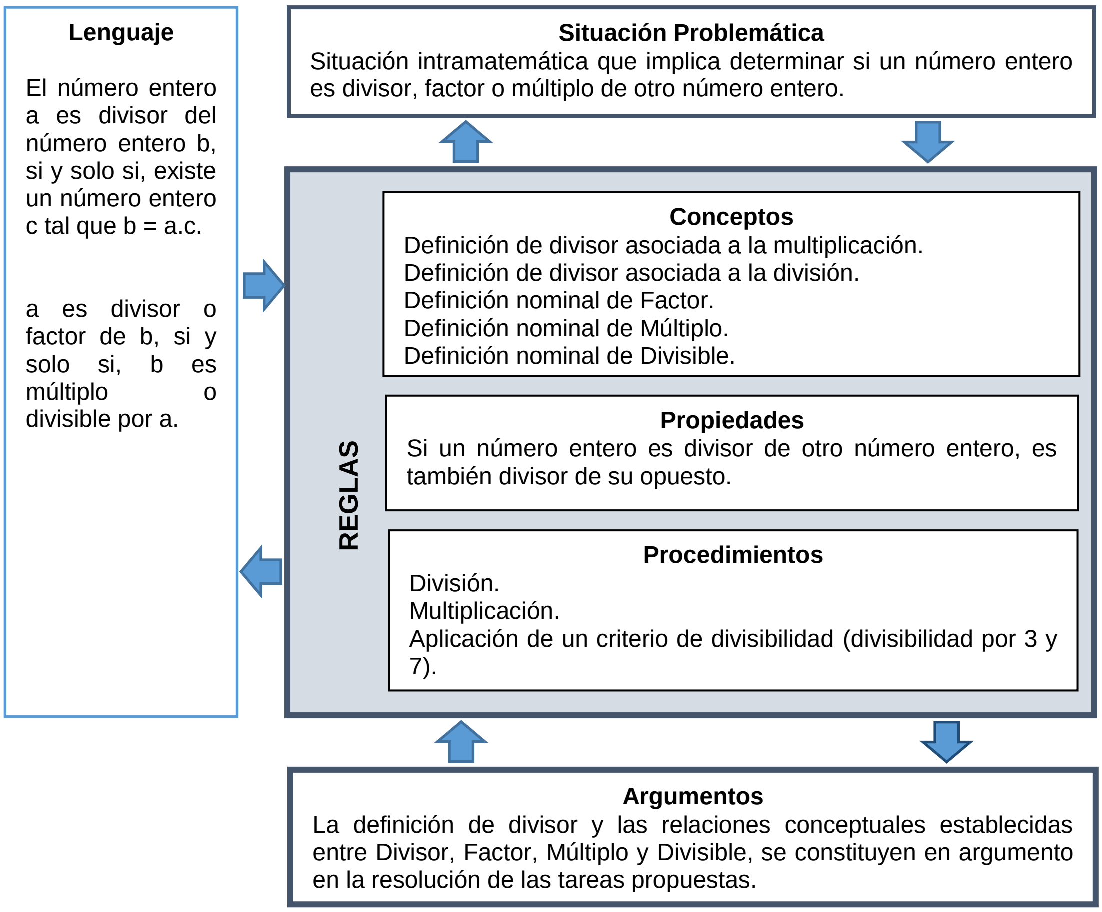
Podríamos afirmar que 441 es múltiplo de 7, si 7 fuera divisor de 441. Así, un número "b" es múltiplo de un número "a", sí y sólo si, a es divisor de b (concepto).

Como 7 es divisor de 441, pues 441:7 da cociente 63 y resto 0 (procedimiento), o sea, se trata de una división entera exacta, podemos afirmar que 441 es múltiplo de 7.

Además, teniendo en cuenta que un número “b” es múltiplo de un número “a”, si y solo si, b es divisible por a (concepto), acudiendo al criterio de divisibilidad por 7, podemos afirmar que 441 es divisible por 7, pues 44-2.1 = 42 (concepto y procedimiento), es un número divisible por 7 y, por lo tanto, múltiplo de 7. Finalmente, como 441 es divisible por 7, se tiene que 441 es múltiplo de 7.

Análisis del problema

La configuración epistémica del problema resulta ser la siguiente:



La red de relaciones que aparece en la configuración epistémica

Si bien podemos establecer un número significativo de relaciones entre los objetos primarios presentes en la configuración epistémica de este problema, sólo nos quedaremos, a fines de esta investigación, con las siguientes.

La misma consideración vale para la determinación de las relaciones conceptuales movilizadas por el resto de los problemas.

R1,1: Entre el problema y el concepto de divisor que involucra la multiplicación.

R1,2: Entre el concepto de divisor que involucra la multiplicación y el procedimiento de la multiplicación para decidir si un número es divisor de otro.

R1,3: Entre el problema y el concepto de divisor que involucra la división.

R1,4: Entre el concepto de divisor que involucra la división y el procedimiento de la división para decidir si un número es divisor de otro.

R1,5: Entre el problema y la propiedad que indica que, si un número entero es divisor de otro número entero, es también divisor de su opuesto.

R1,6: Entre los conceptos de Factor y Divisor.

R1,7: Entre los conceptos de Múltiplo y Divisor.

R1,8: Entre los conceptos de Múltiplo y Divisible.

R1,9: Entre el problema y el argumento dado por la definición de Divisor.

R1,10: Entre el problema y los argumentos dados por las definiciones nominales de Factor, Múltiplo y Divisible (en relación con la definición de Divisor).

Problema 2: En una división entre números enteros “a” y “b”, ¿bajo qué condición “b” es divisor de “a”?

La tarea, explícita en la consigna de este problema inserto en un contexto intramatemático, solicita determinar la condición bajo la cual, en una división entera, el divisor de la misma es divisor del dividendo.

Es necesario destacar que se llama Divisor a un número y también a una relación entre números. En el primer caso cuando se hace referencia a uno de los cuatro elementos de la división y, en el segundo, cuando se nombra a la relación de divisor (si hablamos de un número como divisor de otro).

Resolución: *Consideremos, como ejemplo, las dos siguientes divisiones (procedimiento):*

14:2 (cociente 7 y resto 0), 19:3 (cociente 6 y resto 1)

En la primera, el divisor de la división (el 2) es divisor del dividendo (14), dado que existe un número (el 7) que multiplicado por 2 da como resultado 14 (concepto). En la segunda división entera, podríamos decir que 3 "es divisor" de la división, pero "no es divisor" del dividendo, pues no existe un número que multiplicado por 3 dé 19, ya que 3x6 = 18 (menor que 19) y 3x7 = 21 (mayor que 19) (argumento).

El contraejemplo de la segunda de las divisiones, permite validar la afirmación: en una división entre números enteros no siempre el divisor de la división es divisor del dividendo y entonces, según el requerimiento de la consigna, habrá que buscar la condición bajo la cual esta propiedad se cumple.

En la división a:b, siendo a y b números enteros, con b≠0, teniendo en cuenta el algoritmo de la división (concepto y procedimiento), se puede afirmar que existen dos únicos números enteros q y r de manera tal que:

a = bxq+r.

Cuando r = 0, se tiene que a = bxq, por lo tanto, en función de la definición de divisor (concepto), podemos afirmar que "b" (divisor de la división) es divisor del dividendo "a". Es decir, en una división entre dos números enteros el divisor de la división es divisor del dividendo, cuando el resto de la división es cero o sea que se trata de una división entera y exacta (propiedad).

Análisis del problema

La configuración epistémica del problema resulta ser la siguiente:

Lenguaje

14:2 (cociente 7 y resto 0).

a = bxq+r. Si r = 0, entonces a = bxq, por lo que b (divisor de la división es divisor de a (dividendo).

Situación Problemática
Situación intramatemática que implica determinar la condición bajo la cual, en una división entre números enteros, el divisor de la misma es divisor del dividendo.

REGLAS

Conceptos
Definición de divisor que involucra la multiplicación.
Algoritmo de la división.

Propiedades
El divisor de una división entre números enteros es divisor del dividendo cuando el resto de la división entera es 0.

Procedimientos
División.
Escribir una división de la forma a = bxq+r.

Argumentos
En la división entera a:b, existen dos únicos números enteros, q y r, tal que: a = bxq+r. Si r = 0, entonces a = bxq, por lo que b (divisor de la división) es divisor de a (dividendo).

La red de relaciones que aparece en la configuración epistémica

R2,1: Entre el problema y el lenguaje (el nombre Divisor atribuido a dos objetos matemáticos diferentes).

R2,2: Entre el problema y el procedimiento de la división.

R2,3: Entre el procedimiento de la división y la propiedad que manifiesta que “el divisor de una división entre números enteros es divisor del dividendo cuando el resto de la división entera es cero”.

R2,4: Entre la propiedad que expresa que “el divisor de una división entre números enteros es divisor del dividendo cuando el resto de la división entera es cero” y el argumento “en la división entera a:b, existen dos únicos números enteros, q y r, tal que: a = bxq+r. Si r = 0, entonces a = bxq, por lo que “b” (divisor de la división) es divisor de “a” (dividendo), teniendo en cuenta la definición de divisor.

Problema 3: Los múltiplos de un número, comprendidos entre 370 y 460 son: 380, 399, 418, 437 y 456. ¿De qué número se trata?, ¿es único?

Explica cómo los encontraste y fundamenta tu respuesta.

El problema está dado en un contexto intramatemático, pues involucra la tarea de hallar un número, o más de uno, conociendo sus múltiplos enteros comprendidos entre dos números naturales.

La consigna asegura la existencia de un número en las condiciones dadas y plantea analizar la unicidad.

Resolución: *En principio es necesario tener presente que en la consigna se da una lista, ordenada de menor a mayor, de "todos" los múltiplos de un número, comprendidos entre dos números naturales. La expresión "los múltiplos de un número son tales…" equivale a decir que se consideran todos.*

Sabemos que un número b es múltiplo de un número a, sí y sólo si, a es divisor de b (concepto), o sea: $b = k.a$

Por ello, el 380 que según la consigna es un múltiplo de un número desconocido "a", resulta de multiplicar "a" por un número, es decir: $380 = k.a$

El próximo múltiplo de la lista es el 399, quien se obtiene de multiplicar "a" por el número k+1, o sea, el siguiente de k:

$399 = (k+1).a = k.a + a$ *(concepto y procedimiento)*

Queda así formado un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{cases} 380 = k.a \\ 399 = k.a + a \end{cases}$$

Si lo resolvemos por el método de reducción (procedimiento y argumento), esto es, restando de la segunda ecuación, la primera, obtenemos que a = 19, quien es el número buscado.

Si planteamos un sistema similar al anterior, tomando dos múltiplos consecutivos cualesquiera de la lista de múltiplos dada en la consigna y lo resolvemos de la manera indicada, obtendremos la misma solución.

Este número no es la única solución del problema, también lo es el -19, que tiene los mismos múltiplos, ya que un número entero y su opuesto tienen los mismos múltiplos enteros (propiedad).

Análisis del problema

La configuración epistémica del problema resulta ser la siguiente:

Lenguaje

Un número b es múltiplo de un número a, si y sólo sí, a es divisor de b.

$$380 = k.a$$

$$\begin{cases} 380 = k.a \\ 399 = k.a + a \end{cases}$$

"Los múltiplos de un número son tales…" equivale a decir que se consideran todos los múltiplos.

Situación Problemática

Situación intramatemática que implica hallar uno o más números enteros, conociendo una lista ordenada y acotada de sus múltiplos enteros positivos.

REGLAS

Conceptos

Múltiplo de un número (en relación con Divisor).
Múltiplo siguiente.

Propiedades

Un número entero y su opuesto tienen los mismos múltiplos enteros.

Procedimientos

Método de reducción para la resolución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Argumentos

La solución es 19, pues lo justifica el método de reducción.
-19 es la otra solución, pues lo justifica la propiedad señalada en esta configuración.

La red de relaciones que aparece en la configuración epistémica

R3,1: Entre el problema y el lenguaje: para avanzar en la resolución del problema es necesario comprender que la expresión "los múltiplos de un número son tales…", equivale a decir que se consideran todos.

R3,2: Entre el problema y el concepto de múltiplo.

R3,3: Entre los conceptos de múltiplo y de múltiplo siguiente. Esta relación permite modelizar algebraicamente la situación–problema a través de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

R3,4: Entre el problema y el procedimiento de resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, que permite hallar la solución natural.

R3,5: Entre el problema y el procedimiento de resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que no solamente lo resuelve sino también justifica su resolución y que, por lo tanto, se constituye en un argumento.

R3,6: Entre el problema y la propiedad que manifiesta que un número entero y su opuesto tienen los mismos múltiplos enteros, que no solamente permite hallar la solución negativa, conociendo la solución natural, sino que también justifica dicha solución y que, en ese sentido, se constituye en argumento.

Problema 4: 15a45 es un número de 5 cifras, ¿existe algún valor de "a" para que este número sea divisible por 3?

Explica cómo lo hiciste y justifica tu respuesta.

El problema se inscribe en un contexto intramatemático y conlleva la tarea de determinar la existencia de un dígito desconocido "a" de un número natural de cinco cifras, expresado en base 10, para que el mismo sea divisible por otro número natural de una cifra.

Resolución: *Para que el número 15a45 sea divisible por 3, la suma de sus cifras debe ser divisible por 3, teniendo en cuenta el criterio de divisibilidad por 3 (concepto y procedimiento).*

Si sumamos las cifras del número dado (procedimiento), 1+5+a+4+5, y aplicamos la propiedad asociativa de la suma (procedimiento), obtenemos:

(1+5+4+5)+a = 15+a, o sea, un número desconocido por cuanto no conocemos "a". Por este motivo, no podemos responder la pregunta solamente aplicando tal criterio de divisibilidad.

Ahora bien, habiendo realizado la suma de las cifras del número en cuestión y expresando dicha suma como suma de dos sumandos, siendo uno de ellos divisible por 3 (el 15), para que el número de interés resulte ser divisible por 3, el otro sumando (a) debe ser divisible por 3 (concepto), teniendo en cuenta que la suma de dos números divisibles por 3, es divisible por 3 (propiedad).

Por ello, como "a" es un dígito, pues 15a45 según la consigna es un número de 5 cifras, sus posibles valores son: 0, 3, 6 y 9 que son números divisibles por 3, dado que 3 es divisor de cada uno de ellos (concepto).

Análisis del problema

La configuración epistémica del problema resulta ser la siguiente:

Lenguaje

1+5+a+4+5=

(1+5+4+5)+a=

15+a

La suma de dos números divisibles por 3, es divisible por 3.

Situación Problemática

Situación intramatemática que implica determinar la existencia de un dígito desconocido de un número natural, expresado en base 10, para que el mismo sea divisible por 3.

REGLAS

Conceptos

Definición de Divisible (en relación con la definición de Divisor).
Definición de Divisible (en relación con el criterio de divisibilidad por 3).
Criterio de divisibilidad por 3.

Propiedades

La suma de dos números enteros divisibles por 3, es divisible por 3.
Propiedad asociativa de la suma de números enteros.

Procedimientos

Realización de multiplicaciones y divisiones para decidir si un número es divisible por 3.
Realización de sumas de números enteros.
Aplicación de la propiedad asociativa de la suma de números enteros.

Argumentos

Los argumentos lo constituyen el procedimiento que conlleva determinar si un número es divisible por 3 (sumando sus cifras) y la propiedad que expresa que la suma de dos números enteros, divisibles por 3, es divisible por 3.

La red de relaciones que aparece en la configuración epistémica

R4,1: Entre el problema y el concepto de Divisible (asociado al concepto de Divisor).

R4,2: Entre el problema y el concepto de Divisible (asociado al criterio de divisibilidad por 3).

R4,3: Entre el problema y el procedimiento que conlleva la aplicación del criterio de divisibilidad por 3 (sumar las cifras de un número).

R4,4: Entre el procedimiento de sumar las cifras de un número y la propiedad del criterio de divisibilidad por 3.

R4,5: Entre el procedimiento que conlleva la aplicación del criterio de divisibilidad por 3 y la propiedad que expresa que la suma de dos números divisibles por 3, es divisible por 3.

R4,6: Entre el problema y el argumento dado por la propiedad del criterio de divisibilidad por 3.

R4,7: Entre el problema y el argumento dado por la propiedad que indica que la suma de dos números divisibles por 3, es divisible por 3.

Problema 5: Si a y b son números naturales y a es divisor de b, siempre a es menor o igual que b, ¿sucede lo mismo si los números fueran enteros?

Justifica tu respuesta.

El problema se da en un contexto intramatemático e involucra la tarea de determinar si el orden que se establece entre dos números enteros, cuando uno de ellos es divisor del otro, es el mismo que el que se da entre dos números naturales.

Resolución: *La búsqueda de ejemplos y contraejemplos, comparando números enteros entre sí (salvo el caso en que los mismos sean números naturales, por el dato de la consigna) (procedimiento), ayuda a avanzar en la resolución de la situación.*

En los casos en los que los números enteros fueran iguales, uno de ellos es divisor del otro y viceversa (argumento), teniendo en cuenta la definición de divisor (concepto). Incluso, en el caso del "0", se tiene que 0 es divisor de 0 (propiedad), pues según la definición de divisor (concepto), existe un número c, tal que 0 = 0xc. O sea, en este caso, el orden que se establece entre dos *números enteros, cuando uno de ellos es divisor del otro, es el mismo que el que se da entre dos números naturales.*

Siendo exhaustivos en la búsqueda de casos particulares, habrá que considerar ahora los casos en los cuales los números enteros son: (a) ambos negativos y (b) uno negativo y el otro positivo.

*a) Si a y b fueran negativos: Siendo a divisor de b, existe un número entero c, tal que b = axc (*concepto*). Como "b" y "axc" son iguales, sus opuestos también son iguales, esto es:*

-b = -(axc), expresión equivalente a:

-b = -axc, la cual nos indica que el opuesto de b es mayor o igual que el opuesto de a, ya que "-a", "-b" y "c" son números enteros positivos, y por ello, se puede deducir finalmente que $b \leq a$*, o lo que es lo mismo,* $a \geq b$ *(*argumento*). En este caso, el orden que estamos analizando no es el mismo en el conjunto de los números enteros que en el de los naturales.*

b) Si a y b fueran de distintos signos: en primer lugar, teniendo que a es divisor de b, considerando $a<0$ *y* $b>0$*, por ejemplo "-3 divisor de 9", se tiene que* $a<b$*, pues todo número negativo es menor que todo número positivo (*concepto y argumento*). Decir que* $a<b$ *implica afirmar que* $a \leq b$*. Luego, en este caso, el orden establecido es el mismo en Z y en N.*

En segundo lugar, teniendo que a es divisor de b, considerando que $a>0$ *y* $b<0$*, por ejemplo "2 divisor de -8", no se cumple que* $a \leq b$*, pues ningún número negativo es mayor que un número positivo (*concepto y argumento*). Este contraejemplo permite determinar que, en este caso, el orden que estamos estudiando no es el mismo en Z y en N.*

*Desde otro punto de vista, haciendo funcionar la propiedad: "Un número entero y su opuesto tienen los mismos divisores" (*propiedad*), se puede determinar que, en el conjunto de los números enteros, si a es divisor de b, a puede ser mayor, menor o igual que b. En efecto, si a es divisor de b,* $a \leq b$ *en el conjunto de los números naturales; luego, como por la propiedad señalada, a es también divisor de -b, se tiene entonces que* $a \geq -b$*, es decir, en el conjunto de los números enteros existen infinitos casos en los que un divisor de un número es mayor o igual que el número (*argumento*).*

Análisis del problema

La configuración epistémica del problema resulta ser la siguiente:

Lenguaje

Si a es divisor de b,
b=axc, entonces:
-b=-axc

…el caso de "2 divisor de -8", no cumple que a≤b.

Situación Problemática

Problema intramatemático que involucra determinar si el orden que se establece entre dos números enteros, es el mismo que el que se da entre dos números naturales, cuando uno de los números es divisor del otro.

REGLAS

Conceptos

Definición de divisor (estructura multiplicativa).
Un número entero negativo es menor que uno positivo.

Propiedades

Un número entero y su opuesto tienen los mismos divisores.

Procedimientos

Búsqueda de casos particulares (con ayuda de ejemplos, generalizaciones y contraejemplos), comparando números enteros entre sí, en el caso en el que uno de ellos es divisor del otro: (a) los números enteros son iguales, (b) los enteros son distintos (ambos negativos o de distintos signos).

Argumentos

Si dos números enteros son iguales, siempre uno de ellos es divisor del otro y viceversa, teniendo en cuenta la definición de divisor.
Si fueran ambos negativos, siendo a divisor de b, b=axc. Luego, -b=-(axc), expresión equivalente a: -b=-axc, la cual nos indica que el opuesto de b es mayor o igual que el opuesto de a, dado que -a, -b y son positivos, y por ello, se puede deducir finalmente que a≥b.
Si fueran de distintos signos: Si a es divisor de b, siendo a<0 y b>0, se tiene que a≤b, pues todo número entero negativo es menor que todo número positivo. Si a es divisor de b, siendo a>0 y b<0, se da que a≥b, por la misma razón esgrimida recientemente.
Si a es divisor de b, a≤b en el conjunto de los números naturales; luego, como por la propiedad señalada en esta configuración, a es también divisor de -b, se tiene entonces que a≥-b.

La red de relaciones que aparece en la configuración epistémica

R5,1: Entre el problema y la propiedad que indica que un número entero y su opuesto tienen los mismos divisores.

R5,2: Entre el problema y el procedimiento que consiste en la búsqueda de casos particulares (a divisor de b, (i) a=b (ii) a≠b (ambos negativos o de distintos signos).

R5,3: Entre el concepto de divisor y el procedimiento de búsqueda de casos particulares.

R5,4: Entre el procedimiento de búsqueda de casos particulares y el argumento: Si dos números enteros son iguales, siempre uno de ellos es divisor del otro y viceversa.

R5,5: Entre el procedimiento de búsqueda de casos particulares y el argumento: Si a y b son números enteros negativos, siendo a divisor de b, b = axc. Luego, -b = -(axc), expresión equivalente a: -b = -axc, la cual nos indica que el opuesto de b es mayor o igual que el opuesto de a, dado que -a, -b y c son positivos, y por ello, se puede deducir finalmente que a≥b.

R5,6: Entre el procedimiento de búsqueda de casos particulares y el argumento: Si a y b son números enteros de distintos signos: Si a es divisor de b, siendo a<0 y b>0, se da que a≤b, pues todo número entero negativo es menor que todo número positivo. Asimismo, asumiendo que a es divisor de b, siendo a>0 y b<0, se da que a≥b, por la misma razón señalada recientemente.

R5,7: Entre el problema y el argumento: Si a es divisor de b, a≤b en el conjunto de los números naturales; luego, como a es también divisor de –b, por la tercera propiedad señalada en la configuración, se tiene entonces que a≥-b.

Problema 6: ¿Es posible que dos números enteros distintos tengan los mismos divisores?, ¿en qué condiciones?

Justifica tu respuesta.

Esta situación es un tipo de problema inscripto en un contexto intramatemático que involucra la tarea de decidir si existen dos números enteros distintos que tengan los mismos divisores y las condiciones bajo las esto sucede.

Resolución: *Para resolver la situación, realizaremos un exhaustivo análisis de casos particulares (procedimiento):*

- Consideremos el caso en el que “a” y “b” son números enteros distintos, ambos positivos o ambos negativos. Si los dos fueran positivos y “a” fuese menor que “b”, “b”, quien es divisor de sí mismo (propiedad), no puede ser divisor de “a”, pues los divisores de un número entero, en valor absoluto, son menores o iguales que el valor absoluto de dicho número (propiedad). Si

ambos fueran negativos y “a” fuese menor que “b”, “a” no es divisor de “b”, porque el valor absoluto de “a” es mayor que el valor absoluto de “b” y, en función de la propiedad anterior, ningún divisor en valor absoluto puede ser mayor que el valor absoluto del número correspondiente.
Luego, como difieren en al menos un divisor, a y b no tienen los mismos divisores.
- Entonces, si existieran dos números enteros, distintos, con los mismos divisores, deberían tener signos diferentes, presentándose dos casos para analizar: si fueran opuestos o no.

En el primer caso, dos números enteros opuestos tienen los mismos divisores enteros (propiedad). Si a es divisor de b, por la definición de divisor:

b = axc, cϵZ (concepto), y por la regla de los signos del producto de números enteros, -b = -axc = ax(-c), -cϵZ (concepto y procedimiento), por lo que “a” es también divisor de “-b” (argumento).

En el segundo caso, si los números no fueran opuestos, tampoco tienen los mismos divisores, pues al menos se diferencian en el mayor divisor natural del número de mayor valor absoluto. Dicho divisor es mayor que todos los divisores del número de menor valor absoluto y, por lo tanto, distinto de todos ellos (argumento).

En resumen: el único caso en el que dos números enteros distintos tienen los mismos divisores enteros, es cuando son opuestos.

Análisis del problema

La configuración epistémica del problema resulta ser la siguiente:

Lenguaje

Si los dos números son distintos, no tienen los mismos divisores…

-b = (-a)xc = ax(-c), -cϵZ

Situación Problemática

Tipo de problema intramatemático que implica determinar si existen dos números enteros distintos que tengan los mismos divisores y las condiciones bajo las cuales esto sucede.

REGLAS

Conceptos

Definición de divisor (estructura multiplicativa).
Regla de los signos del producto de números enteros.

Propiedades

Todo número entero es divisor de sí mismo.
Los números enteros opuestos tienen los mismos divisores.
Los divisores de un número entero, en valor absoluto, son menores o iguales que el valor absoluto de dicho número entero.

Procedimientos

Análisis de casos particulares (fundamentadas mediante propiedades o generalizaciones deductivas).
Aplicación de la regla de los signos del producto de números enteros.

Argumentos

- El argumento que avala que dos números enteros distintos, ambos positivos o ambos negativos, no tienen los mismos divisores, se basa en la tercera propiedad expuesta en esta configuración epistémica.
- Si a es divisor de b, por la definición de divisor, b = axc, cϵZ, y por la regla de los signos del producto de números enteros, -b = (-a)xc = ax(-c), -cϵZ, por lo que a es también divisor de -b. Esto es, si dos números enteros son opuestos, tienen los mismos divisores.
- Si los números no fueran opuestos, no tienen los mismos divisores, pues al menos se diferencian en el mayor divisor (positivo) del número de mayor valor absoluto, divisor que es también mayor que todos los divisores del número de menor valor absoluto y, por lo tanto, distinto de todos ellos.

La red de relaciones que aparece en la configuración epistémica

R6,1: Entre el problema y el procedimiento de análisis de casos particulares.

R6,2: Entre el problema y el concepto de divisor.

R6,3: Entre el problema y la propiedad que indica que todo número es divisor de sí mismo.

R6,4: Entre la propiedad que indica que todo número es divisor de sí mismo y el argumento que explica que dos números enteros distintos no tienen los mismos divisores.

R6,6: Entre el problema y la propiedad que indica que el valor absoluto de cualquier divisor de un número entero es menor o igual que el valor absoluto de dicho número.

R6,7: Entre la propiedad que indica que el valor absoluto de cualquier divisor de un número es menor o igual que el valor absoluto de dicho número y el argumento que explica que dos números enteros distintos no tienen los mismos divisores.

R6,8: Entre la propiedad que indica que dos números enteros opuestos tienen los mismos divisores y el argumento deductivo que la avala, explicitado en la configuración epistémica anterior.

R6,9: Entre el procedimiento de análisis de casos particulares y el argumento que explica que, si los números enteros no fueran opuestos, no tienen los mismos divisores, pues al menos se diferencian en el mayor divisor natural del número de mayor valor absoluto.

Problema 7: Teniendo en cuenta que: 187 = 11x17, ¿son correctas las siguientes afirmaciones?:

a) 17 es divisor de 11x17.

b) 11x17+1870 es múltiplo de 187.

c) 11x17+16 es múltiplo de 187.

En cada caso, fundamenta tu respuesta.

Este caso nos pone en presencia de un problema intramatemático.

En el primer ítem, la tarea consiste en decidir si un número expresado en base 10, es divisor de otro número expresado en su descomposición factorial prima.

En el segundo apartado, la tarea consiste en determinar si un número, expresado en base a la propiedad distributiva, es múltiplo de otro número expresado en base 10.

En el tercer apartado, la tarea consiste en determinar si un número, expresado en base al algoritmo de la división, es múltiplo de otro número en su versión decimal.

Resolución: *a) Podemos afirmar que 17 es divisor de 11x17, pues es un factor de la descomposición factorial prima de 11x17. Esto es así, pues, teniendo en cuenta la definición de divisor (concepto), podemos decir que 17 es divisor de 11x17, pues existe un número, el 11, que multiplicado por 17 da por resultado 11x17.*

b) El número 11x17+1870 está expresado en base a la propiedad distributiva, teniendo en cuenta que, como 11x17 = 187 y 1870 = 187x10, en función de la propiedad distributiva del producto respecto de la suma de números enteros, al número en cuestión (11x17+1870) lo podemos escribir así: 187+187x10.

Ahora bien, 187+187x10 = 187x(1+10) = 187x11 (concepto y procedimiento), expresión que nos dice que el número dado en la consigna 11x17+1870, que también puede escribirse como 187+187x10, es múltiplo de 187, pues 187 es divisor del mismo, ya que, teniendo en cuenta la definición de divisor, el número de interés puede escribirse como 187x11 (concepto y argumento).

Entonces, cuando un número puede descomponerse en la suma de n productos con un factor común, es decir, puede escribirse en base a la propiedad distributiva, dicho número es múltiplo de ese factor común (propiedad).

c) El número 11x17+16 está expresado en base al algoritmo de la división entera; el dividendo es 203 (11x17+16), el divisor es 17, el cociente, 11 y el resto, 16.

El primer múltiplo de 187 es el mismo 187 y el múltiplo consecutivo es: 187+187 = 374 (procedimiento). El número 11x17+16 = 203, está comprendido entre estos dos múltiplos consecutivos de 187: 187 < 203 < 374, razón por la cual podemos afirmar que 11x17+16 no es múltiplo de 187, dado que, entre dos múltiplos consecutivos de un número, no existe otro múltiplo *(argumento).*

Análisis del problema

La configuración epistémica del problema resulta ser la siguiente:

Lenguaje

187<11x17+16= 187+16<187+18= 374

17 es divisor de 11x17

Situación Problemática

Situación intramatemática que implica determinar si un número entero escrito en base 10, en función de la propiedad distributiva o el algoritmo de la división entera, es múltiplo o divisor de otro número entero expresado en algunas de estas mismas versiones.

REGLAS

Conceptos

Definición de divisor.

Propiedades

Cuando un número entero puede descomponerse en la suma de n productos con un factor común, es decir, puede escribirse en base a la propiedad distributiva, dicho número es múltiplo de ese factor común.
Propiedad distributiva del producto respecto de la suma de números enteros.

Procedimientos

Observar la descomposición factorial prima de un número entero. Cualquier factor primo de tal descomposición, es divisor de dicho número.
Hallar múltiplos consecutivos.
Escribir un número entero en base a la propiedad distributiva del producto respecto de la suma.

Argumentos

- 17 es divisor de 11x17, pues lo justifica la definición de divisor.
- 11x17+1870 = 187+187x10 = 187x(1+10) = 187x11, por lo que 11x17+1870 es múltiplo de 187, pues 187 es divisor de 11x17+1870, teniendo en cuenta la definición de divisor.
- Como 11x17+16 está comprendido entre dos múltiplos consecutivos de 187 (el 187 y el 187+187), se puede afirmar que 11x17+16 no es múltiplo de 187, ya que, entre dos múltiplos consecutivos de un número entero, no existe otro múltiplo.

La red de relaciones que aparece en la configuración epistémica

R7,1: Entre el problema y el procedimiento de observar si un número p es un número primo de la descomposición factorial de un número n, para decidir que p es divisor de n.

R7,2: Entre el procedimiento que consiste en observar si un número p es un primo de la descomposición factorial de un número n para decidir que es su divisor y el concepto dado por la definición de divisor.

R7,3: Entre el problema y el procedimiento que consiste en expresar a un número en base a la propiedad distributiva, dejando explícito el factor común, para decidir que el número en cuestión es múltiplo de ese factor común.

R7,4: Entre el procedimiento que conlleva escribir un número en base a la propiedad distributiva, dejando explícito el factor común, y el concepto dado por la definición de divisor.

R7,5: Entre el procedimiento de escribir un número en base a la propiedad distributiva, dejando a la vista el factor común, y la propiedad que dice que cuando un número puede descomponerse en la suma de n productos con un factor común, es decir, puede escribirse en base a la propiedad distributiva, dicho número es múltiplo de ese factor común.

R7,6: Entre el problema y el procedimiento de acotar el número 11x17+16 entre dos múltiplos consecutivos de 187.

R7,7: Entre el procedimiento de acotar el número 11x17+16 entre dos múltiplos consecutivos de 187, y el argumento que explica que aquel número no es múltiplo de 187, ya que, entre dos múltiplos consecutivos de un número, no existe otro múltiplo.

Problema 8: Si fuera posible, escribe un número que tenga:

a) Exactamente cuatro divisores naturales.

b) Más de 15 divisores enteros.

Explica la estrategia que usaste para encontrarlos y fundamenta tu respuesta.

El problema está dado en un contexto intramatemático y requiere la tarea de encontrar un número que disponga de una determinada cantidad de divisores naturales (en el primer apartado) y enteros (en el segundo).

Resolución: *a) Dado que la cantidad de divisores requerida es pequeña, podemos resolver el problema buscando el número solicitado por tanteo (procedimiento), aplicando alguna herramienta como la multiplicación o división (procedimiento), más aún, teniendo en cuenta que hay números chicos con 4 divisores naturales, como, por ejemplo, el 6 o el 8.*

No obstante, un procedimiento que siempre lleva al éxito en la realización de este tipo de problema, es multiplicar dos números primos (procedimiento). En *efecto, si p y q son dos números primos, el número compuesto pxq tendrá 4 divisores naturales, que son los elementos del siguiente conjunto:*

$$\{1, p, q, pxq\}$$

1 es uno de los divisores porque es divisor de todos los números (propiedad), pxq es también un divisor, dado que todo número es divisor de sí mismo (propiedad), p y q son divisores de pxq, teniendo en cuenta la definición de divisor (concepto). Y no existen otros divisores, ya que p y q son números primos, por lo que no pueden descomponerse en producto, salvo la descomposición trivial (p = 1xp) (propiedad), en cuyo caso ya se contaron los divisores 1 y p.

b) En el segundo apartado, se solicita encontrar un número que tenga más de 15 divisores enteros (16 divisores o más). Para simplificar la tarea, se puede buscar un número que tenga 8 divisores naturales y, por lo tanto, 16 divisores enteros, teniendo en cuenta que, si un número entero, distinto de cero, tiene una cantidad de divisores en el conjunto de los números naturales, dispone del doble de esa cantidad en el conjunto de los números enteros (propiedad).

Para resolver esta situación se pude trabajar de manera similar al caso anterior, esto es, hallar el número de interés multiplicando 3 números primos. En este caso, si p, q y r fueran primos, la cantidad de divisores naturales del número pxqxr es 8 y pertenecen al siguiente conjunto: $\{1, p, q, r, pxq, pxr, qxr, pxqxr\}$, *siendo la cantidad de divisores enteros igual a 16.*

También se puede abordar la tarea a través de la manipulación conveniente de la fórmula que permite obtener la cantidad de divisores naturales de un número. La cantidad de divisores naturales de un número ${p_1}^{c_1}x \ldots \ldots x{p_n}^{c_n}$, *expresado en su descomposición factorial prima, está dada por:*

$(c_1 + 1)x \ldots \ldots x(c_n + 1)$, *es decir, por el producto de los exponentes de los números primos de la base, aumentados en una unidad (concepto y argumento).*

Empleando esta fórmula, si quisiéramos construir un número natural con 16 divisores enteros, esto es, 8 divisores naturales, podríamos formar una potencia de base prima y exponente n-1, siendo n la cantidad de divisores que *deseamos que dicho número tenga. Es decir, un número con 8 divisores naturales podría construirse con una potencia de base 2 y exponente 7 (procedimiento). Incluso, la base podría ser cualquier número primo, aunque el hecho que sea 2, facilita el cálculo de la potencia, por el tamaño del número.*

La validación correspondiente lo constituye el hecho de contar la cantidad de divisores, usando la fórmula indicada recientemente. Esto es, $2^7 = 128$, tiene 7+1 = 8, divisores naturales y, por lo tanto, 16 divisores enteros (procedimiento y argumento).

Análisis del problema

La configuración epistémica del problema resulta ser la siguiente:

Lenguaje

El número 6 tiene 4 divisores naturales.

$\{1, p, q, pxq\}$

$(c_1 + 1)x \ldots \ldots x$

$x(c_n + 1)$

Situación Problemática

Situación intramatemática que implica encontrar un número que disponga de una determinada cantidad de divisores (naturales en un caso y entero en otro).

REGLAS

Conceptos

Definición de divisor que involucra la multiplicación o división.
Fórmula de la cantidad de divisores naturales de un número entero.

Propiedades

1 es divisor de todos los números enteros.
Todo número entero es divisor de sí mismo.
Un número primo p no puede descomponerse en producto, salvo la descomposición trivial 1xp.
Si un número entero, distinto de cero, tiene n divisores naturales, entonces tiene 2xn divisores enteros.

Procedimientos

Búsqueda de divisores empleando la multiplicación o división.
Herramientas de tanteo (para encontrar divisores y un número con una determinada cantidad de divisores).
Construir un número con cierta cantidad de divisores naturales, a través de plantear y resolver potencias.
Emplear la fórmula para hallar cantidad de divisores.

Argumentos

Las tres primeras propiedades señaladas en esta configuración y el concepto de divisor (en el caso de multiplicar números primos para resolver el problema).
El concepto que deviene de la fórmula de la cantidad de divisores, para construir un número con una cantidad dada de divisores y para validar que un número tiene una cantidad determinada de divisores naturales.

La red de relaciones que aparece en la configuración epistémica

R8,1: Entre el problema y el procedimiento de búsqueda, por tanteo, de un número con una cantidad dada de divisores.

R8,2: Entre el problema y el procedimiento de multiplicar números primos para hallar un número con una determinada cantidad de divisores naturales.

R8,3: Entre el procedimiento de multiplicar números primos para hallar un número con una determinada cantidad de divisores naturales y el argumento que lo avala (constituido por las tres primeras propiedades expuestas en la configuración epistémica y el concepto de divisor).

R8,4: Entre el problema y el procedimiento de la potenciación para construir un número con una cantidad dada de divisores naturales.

R8,5: Entre el procedimiento de la potenciación para construir un número con una cantidad dada de divisores naturales y el argumento dado por la fórmula de la cantidad de divisores.

R8,6: Entre el procedimiento de hallar los divisores naturales de un número entero y la propiedad de encontrar todos sus divisores enteros, conociendo los dichos divisores naturales.

Problema 9: En una estación de colectivos, un bus para con una frecuencia de 18 minutos y el otro lo hace cada 15 minutos, ¿dentro de cuántos minutos, como mínimo, se encontrarán en esa estación, después de haber coincidido en esa estación los dos colectivos? Fundamenta tu respuesta.

El problema está dado en un contexto extramatemático (determinar el menor tiempo en que volverán a encontrase dos colectivos, en una estación, luego de una coincidencia). La tarea se reduce a hallar el mínimo común múltiplo entre dos números naturales.

Resolución: *Las coincidencias se darán en minutos representados por números naturales, que son múltiplos de 15 y también de 18. Como de todas las coincidencias, nos interesa la inmediata siguiente luego de un encuentro* *inicial que suponemos se da en el instante 0 minutos, tendremos que recurrir al cálculo del mínimo común múltiplo, pues nos ofrece esta posibilidad.*

Sabemos que un número m se llama mínimo común múltiplo (MCM) de los números a y b (concepto) cuando:

a) *m es múltiplo de a y de b.*
b) *todo múltiplo común de a y b es múltiplo de m.*

Para encontrar el MCM podemos realizar la descomposición en factores primos de cada número, expresándolo como el producto de potencias de números primos (procedimiento).

Al tener dos números naturales, podemos encontrar el MCM a través de la descomposición en factores primos de ambos; esto es:

15 = 3x5 18 = 2x9 = 2x3x3 = $2x3^2$ *(procedimiento)*

Para el cálculo realizamos las descomposiciones en factores primos de 15 y 18 (procedimiento), muy sencillas de obtener dado el tamaño de estos números.

Teniendo la descomposición en factores primos, encontramos el MCM determinando los factores primos con su mayor exponente (procedimiento), esto es:

15 = 3x5 *18 =* $2x3^2$

MCM (15,18) = $3^2x2x5 = 90$

En síntesis, y para fundamentar la respuesta, las paradas en la estación del primer colectivo (A), serían los números (minutos), que son elementos del siguiente conjunto:

$$Paradas_{\{A\}} = \{0, 18, 36, 54, 72, 90, 108, 126, 144, 162, 180, 198, 216, 234, 252, 270, \dots\}$$

Estos números surgen de considerar los múltiplos de 18, que resultan de multiplicar este número por cada uno de los números enteros no negativos (procedimiento).

De igual manera, las paradas del colectivo B, se dan en los minutos, cuyo valor numérico es un elemento del siguiente conjunto:

$$Paradas_{\{B\}} = \{0, 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, 135, 150,165,180, 195, 210, 225, 240, 255, 270, \dots\}$$

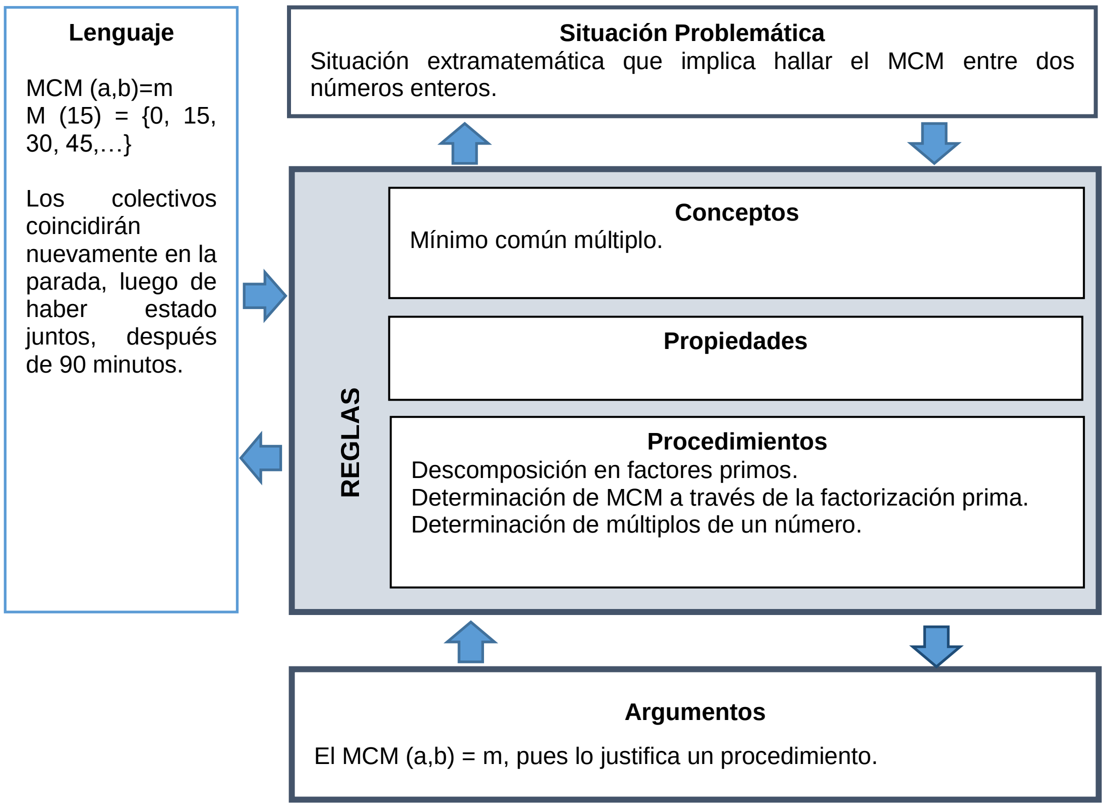
Estos números surgen de considerar los múltiplos de 15 (procedimiento).

Teniendo en cuenta una considerable cantidad de elementos de ambos conjuntos, podemos obtener varios múltiplos comunes de 18 y 15: 90, 180, 270, 360, 450, …. Ambos colectivos van a coincidir a los 90 minutos luego de estar juntos en el instante cero, como así también después de 180 minutos, 270 minutos, etc.

Como el 90 es el menor de los tiempos de coincidencia, en tanto el MCM(18,15) = 90, éste es el modo óptimo de hacerlo (argumento), esto es, los colectivos coincidirán nuevamente en la parada, luego de haber estado juntos en un instante que suponemos 0 minutos, después de haber transcurrido 90 minutos.

Análisis del problema

La configuración epistémica del problema resulta ser la siguiente:



La red de relaciones que aparece en la configuración epistémica

R9,1: Entre el problema y el concepto de MCM.

R9,2: Entre el concepto de MCM y el procedimiento de hallarlo a través de la descomposición factorial prima.

R9,3: Entre el procedimiento de la descomposición factorial prima de un número y el procedimiento de obtener descomposiciones multiplicativas de un número.

R9,4: Entre el problema y el procedimiento del cálculo del MCM que lo resuelve.

R9,5: Entre el problema y el procedimiento del cálculo del MCM que no solamente lo resuelve, sino que también lo justifica y que, por ende, se constituye en un argumento.

Problema 10: Se tienen dos cuerdas que miden 240 cm. y 308 cm. y se quiere cortar cada una de ellas en trozos de igual longitud, ¿cuál será la mayor longitud en la que se las puede cortar, de forma tal que no sobre cuerda?

Fundamenta tu respuesta.

El problema está dado en un contexto extramatemático (encontrar la cuerda de mayor longitud que entre en partes enteras iguales en otras dos cuerdas dadas). La tarea se reduce a hallar el máximo común divisor entre dos números naturales relativamente grandes.

Resolución: *Como tenemos que cortar las cuerdas de la misma longitud, inicialmente tendríamos muchas opciones, como, por ejemplo, cortarlas en trozos de ½ cm, de 1 cm, de 2 cm, etc., pues el problema no establece condición alguna para ello. No obstante, asumiremos que serán cortadas en trozos que resulten ser una longitud entera y como debemos encontrar la mayor longitud que sea común, recurriremos al cálculo del máximo común divisor, pues nos ofrece esta posibilidad.*

Sabemos que un número d se llama máximo común divisor (MCD) de los números a y b (concepto) cuando:

c) d es divisor común de los números a y b, *d) d es divisible por cualquier otro divisor común de los números a y b.*

Para encontrar el MCD podemos realizar la descomposición en factores primos de cada número, expresándolo como el producto de potencias de números primos (procedimiento), o usar el Algoritmo de Euclides (concepto y procedimiento) que es más eficiente cuando se trata de números grandes.

Al tener dos números naturales, podemos encontrar el MCD a través de la descomposición en factores primos. Para ello realizamos divisiones del número recurriendo al menor número que lo divide (procedimiento) y tendremos en cuenta criterios de divisibilidad (propiedad) involucrados. En nuestro caso resulta:

240	2	308	2
120	2	154	2
60	2	77	7
30	2	11	11
15	3	1	
5	5		
1			

$240 = 2^4 \times 3 \times 5$ $\qquad$ $308 = 2^2 \times 7 \times 11$

Para el cálculo tuvimos en cuenta los siguientes criterios de divisibilidad:

e) Un número es divisible por 2 cuando termina en una cifra par (propiedad).

f) Un número es divisible por 5 cuando termina en 0 o 5 (propiedad).

g) Un número es divisible por 7 cuando la diferencia entre el número sin la cifra de las unidades y el doble de la cifra de las unidades es 0 ó un múltiplo de 7 (propiedad).

h) Un número es divisible por 11, si la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan los lugares impares y la de los pares es 0 o un múltiplo de 11 (propiedad).

Teniendo la descomposición en factores primos de cada uno de los números, encontramos el MCD determinando los factores comunes con su menor exponente (procedimiento), esto es:

240 = 2^4x3x5 *308 = 2^2x7x11*

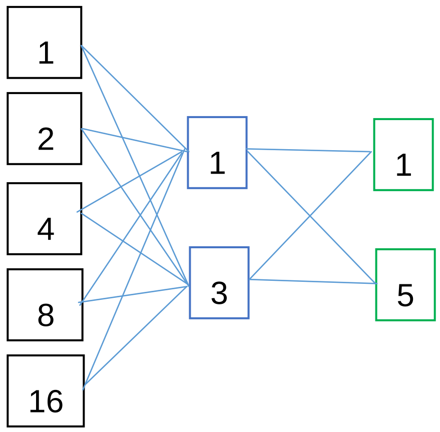
MCD (240,308) = 2^2 = 4

En síntesis, y para fundamentar la respuesta, la cuerda de 240 cm podría ser cortada en longitudes enteras con las siguientes medidas:

$$Longitudes_{\{240\}} = \{1,2,3,4,5,6,8,10,12,15,16,20,24,30,40,48,60,80,120,240\}$$

Estas medidas surgen de considerar los divisores de 240 que se obtienen por aplicar principios de conteo (procedimiento) entre los divisores naturales de cada uno de los factores que tiene la descomposición prima, pues sabemos que los divisores de cada uno de los factores en que se descompone un número a, también son divisores de a (propiedad).

Así, 2^4 *tiene 5 divisores:* $\{1,2,4,8,16\}$ *mientras que el 3 tiene dos:* $\{1,3\}$ *y el 5 también dos:* $\{1,5\}$. *En total tendremos* $5x2x2 = 20$ *divisores, que surgen de las siguientes combinaciones:*



Resultan ser divisores del 240 los siguientes números

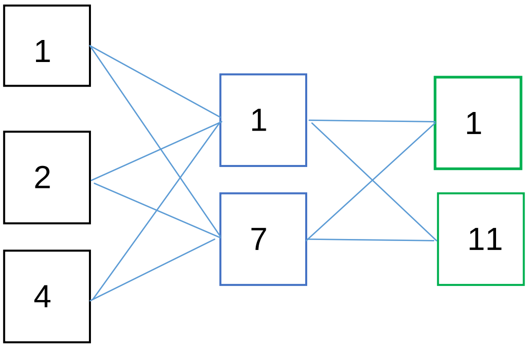
$$D(240) = \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5, \pm6, \pm8, \pm10, \pm12, \pm15, \pm16, \pm20, \pm24, \pm30, \pm40, \pm48, \pm60, \pm80, \pm120, \pm240\}$$

La cuerda de 308 cm podría ser cortada en longitudes enteras con las siguientes medidas:

$$Longitudes_{\{308\}} = \{1,2,4,7,11,14,22,28,44,77,154,308\}$$

Estas medidas surgen de considerar los divisores de 308 que se obtienen por aplicar principios de conteo (procedimiento) entre los divisores naturales de cada uno de los factores que tiene la descomposición prima, pues sabemos que los divisores de cada uno de los factores en que se descompone un número a, también son divisores de a (propiedad).

Así, 2^2 *tiene 3 divisores:* $\{1,2,4\}$ *mientras que el 7 tiene dos:* $\{1,7\}$ *y el 11 también dos:* $\{1,11\}$*. En total tendremos* $3x2x2 = 8$ *divisores, que surgen de las siguientes combinaciones:*



Resultan ser divisores del 308 los siguientes números

$$D(308) = \{\pm1, \pm2, \pm4, \pm7, \pm11, \pm14, \pm22, \pm28, \pm44, \pm77, \pm154, \pm308\}$$

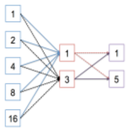
Los divisores comunes de ambos números son 1, 2 y 4. Por ello, las cuerdas podrían ser cortadas en longitudes de 1, 2 y 4 cm, cuyos valores numéricos son los divisores comunes del 240 y 308, y como el 4 es el mayor de ellos en tanto MCD(204,308) = 4, éste es el modo óptimo de hacerlo (argumento), esto es, cortar cada cuerda en tramos de 4 centímetros.

Análisis del problema

La configuración epistémica del problema resulta ser la siguiente:

Lenguaje

MCD(a,b)=d
MCD(240,308)=4
D(308) = {±1, ±2, …,±308}



El modo óptimo de hacerlo en cortar cada cuerda en tramo de 4 cm.

Situación Problemática
Situación extramatemática que implica hallar el MCD entre dos números enteros.

REGLAS

Conceptos
Máximo común divisor.

Propiedades
Criterio de divisibilidad por 2. Criterio de divisibilidad por 5.
Criterio de divisibilidad por 7. Criterios de divisibilidad por 11.
Si a = bxd y c|b, entonces, c|a.

Procedimientos
Descomposición en factores primos.
Algoritmos de la división. Determinación de MCD a través de la factorización prima. Principios de conteos. Determinación de divisores de un número.

Argumentos
El MCD (a,b) = d, pues lo justifica un procedimiento.

La red de relaciones que aparece en la configuración epistémica

R10,1: Entre el problema y el concepto de MCD.

R10,2: Entre el concepto de MCD y el procedimiento de hallarlo a través de la descomposición factorial prima.

R10,3: Entre el procedimiento de la factorización prima de un número y el procedimiento del algoritmo de la división.

R10,4: Entre el procedimiento de la factorización prima de un número y la propiedad que involucra los criterios de divisibilidad de 2, 5, 7 y 11.

R10,5: Entre el procedimiento de la factorización prima de un número y el procedimiento que involucra principios de conteo para obtener divisores.

R10,6: Entre el problema y el procedimiento del cálculo del MCD que lo resuelve.

R10,7: Entre el problema y el procedimiento del cálculo del MCD que no solamente lo resuelve, sino que también lo justifica y que, por ende, se constituye en un argumento.

Anexo 5: Funciones semióticas en prácticas de estudiantes

En las tablas que se exponen a continuación, una por cada situación-problema de la última versión del instrumento de indagación, se registran las funciones semióticas detectadas en las prácticas de 20 estudiantes de la FaCENA-UNNE, al resolver dichos problemas.

Con SP1,……, SP10 se indican las situaciones-problemas del instrumento, mientras que, con A1,……, A20 se mencionan los alumnos que decidieron participar de la exploración. Con puntos suspensivos se rellenan los lugares correspondientes a aquellos estudiantes que no resolvieron el problema o establecieron funciones semióticas incorrectas o incompletas.

La nomenclatura usada para caracterizar y clasificar las funciones semióticas es la siguiente:

a. Función semiótica actuativa (FSA)
b. Función semiótica argumentativa:
   i) Argumentativa conceptual (FSAC)
   j) Argumentativa proposicional (FSAP)
   k) Argumentativa con contraejemplo (FSAContraej)
   l) Argumentativa deductiva (FSAD)

SP1: a) ¿3 es divisor de 30?, ¿y de 473? b) ¿3 es factor de 30? c) ¿441 es múltiplo de 7? Fundamenta tu respuesta.	
A1	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de la división (para determinar si un número es divisor de otro (3 divisor de 30 y no es divisor de 473)). FSA2: Establecida entre el problema y el procedimiento de la división (para determinar si un número es múltiplo de otro).

	FSA3: Establecida entre el problema y el procedimiento de multiplicar un número "a" por cada uno de los números naturales (para determinar si un número es múltiplo de "a"). FSAC1: Establecida entre los conceptos de divisor y múltiplo (para justificar que un número es divisor de otro). FSAC2: Establecida entre los conceptos de factor y múltiplo (para justificar que un número es factor de otro).
A2	……
A3	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de buscar un número c que multiplicado por a dé b (para determinar que a es divisor de b (3 es divisor de 30 y no es divisor de 473)). FSact2: Establecida entre el procedimiento de buscar un número c que multiplicado por a dé b, para determinar que a es divisor de b, y el procedimiento de la división, para encontrar ese factor c. FSA3: Establecida entre el problema y el procedimiento de buscar un número c que multiplicado por a dé b (para determinar que b es múltiplo de a). FSA4: Establecida entre el procedimiento de buscar un número c que multiplicado por a dé b, para determinar que b es múltiplo de a, y el procedimiento de la división, para encontrar ese factor c. FSAC1: Establecida entre el problema y la definición de divisor: a es divisor de b, si existe un número c, tal que b = a.c (para justificar que un número es divisor de otro). FSAC2: Establecida entre el problema y la definición de múltiplo: a es múltiplo de b si la división a:b da por resultado un número entero (para justificar que un número es múltiplo de otro). FSAC3: Establecida entre el problema y la definición de múltiplo: a es múltiplo de b, si existe un número c, tal que a = b.c (para justificar que un número es múltiplo de otro).
A4	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de buscar un número c que multiplicado por a dé b (para determinar que a es divisor de b (3 es divisor de 30 y no es divisor de 473)). FSA2: Establecida entre el procedimiento de buscar un número c que multiplicado

	por a dé b, para determinar que a es divisor de b, y el procedimiento de la división, para encontrar ese factor c. FSA3: Establecida entre el problema y el procedimiento de buscar un número c que multiplicado por a dé b (para determinar que b es múltiplo de a). FSA4: Establecida entre el procedimiento de buscar un número c que multiplicado por a dé b, para determinar que b es múltiplo de a, y el procedimiento de la división, para encontrar ese factor c.
A5	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de la división (para determinar si un número es divisor de otro (3 es divisor de 30 y no es divisor de 473)). FSA2: Establecida entre el problema y el procedimiento de la división (para determinar si un número es factor de otro). FSA3: Establecida entre el problema y el procedimiento de buscar un número c que multiplicado por a dé b (para determinar que b es múltiplo de a). FSA4: Establecida entre el procedimiento de buscar un número c que multiplicado por a dé b, para determinar que b es múltiplo de a, y el procedimiento de la división, para encontrar ese factor c.
A6	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de la división (para determinar si un número es divisor de otro). FSA2: Establecida entre el problema y el procedimiento de buscar un número c que multiplicado por a dé b (para determinar que a es factor de b). FSA3: Establecida entre el procedimiento de buscar un número c que multiplicado por a dé b, para determinar que a es factor de b, y el procedimiento de la división, para encontrar ese factor c. FSA4: Establecida entre el problema y el procedimiento de buscar un número c que multiplicado por a dé b (para determinar que b es múltiplo de a). FSA5: Establecida entre el procedimiento de buscar un número c que multiplicado por a dé b, para determinar que b es múltiplo de a, y el procedimiento de la división, para encontrar ese factor c.
A7	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de buscar un número c que multiplicado por a dé b (para determinar que a es divisor de b (3 es divisor de

	30 y no es divisor de 473)). FSA2: Establecida entre el procedimiento de buscar un número c que multiplicado por a dé b, para determinar que a es divisor de b, y el procedimiento de la división, para encontrar ese factor c. FSA3: Establecida entre el problema y el procedimiento de buscar un número c que multiplicado por a dé b (para determinar que a es factor de b). FSA4: Establecida entre el procedimiento de buscar un número c que multiplicado por a dé b, para determinar que a es factor de b, y el procedimiento de la división, para encontrar ese factor c. FSA5: Establecida entre el problema y el procedimiento de la división (para determinar si un número es múltiplo de otro).
A8	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de la división (para determinar si un número es divisor de otro (3 no es divisor de 473)). FSA2: Establecida entre el problema y el procedimiento de buscar un número c que multiplicado por a dé b (para determinar que a es divisor de b (3 es divisor de 30)). FSA3: Establecida entre el procedimiento de buscar un número c que multiplicado por a dé b, para determinar que a es factor de b, y el procedimiento de la división, para encontrar ese factor c. FSA4: Establecida entre el problema y el procedimiento de buscar un número c que multiplicado por a dé b, para determinar que a es factor de b, y el procedimiento de la división para encontrar ese factor desconocido. FSA5: Establecida entre el procedimiento de buscar un número c que multiplicado por a dé b, para determinar que b es múltiplo de a, y el procedimiento de la división, para encontrar ese factor c. FSA6: Establecida entre el problema y el procedimiento de buscar un número c que multiplicado por a dé b, para determinar que b es múltiplo de a, y el procedimiento de la división para encontrar ese factor desconocido.
A9	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de buscar un número c que multiplicado por a dé b (para determinar que a es divisor de b (3 es divisor de 30 y no es divisor de 473)). FSA2: Establecida entre el procedimiento de buscar un número c que multiplicado

	por a dé b, para determinar que a es divisor de b, y el procedimiento de la división, para encontrar ese factor c. FSA3: Establecida entre el problema y el procedimiento de buscar un número c que multiplicado por a dé b (para determinar que a es factor de b). FSA4: Establecida entre el procedimiento de buscar un número c que multiplicado por a dé b, para determinar que a es factor de b, y el procedimiento de la división, para encontrar ese factor c. FSA5: Establecida entre el problema y el procedimiento de buscar un número c que multiplicado por a dé b (para determinar que b es múltiplo de a). FSA6: Establecida entre el procedimiento de buscar un número c que multiplicado por a dé b, para determinar que b es múltiplo de a, y el procedimiento de la división, para encontrar ese factor c.
A10	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento que involucra el criterio de divisibilidad por 3 (para determinar que un número es divisor de 3 (30 es divisible por 3 y 473 no es divisible por 3)). FSA2: Establecida entre el problema y el procedimiento de la división (para determinar si un número es múltiplo de otro). FSAC1: Establecida entre las nociones de divisor y divisible (para justificar que un número es divisor de otro). FSAC2: Establecida entre las nociones de factor y múltiplo (para justificar que un número es factor de otro).
A11	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de la división (para determinar si un número es divisor de otro (3 es divisor de 30 y no es divisor de 473)). FSA2: Establecida entre el problema y el procedimiento de buscar un número c que multiplicado por a dé b (para determinar que a es factor de b). FSA3: Establecida entre el procedimiento de buscar un número c que multiplicado por a dé b, para determinar que a es factor de b, y el procedimiento de la división, para encontrar ese factor c. FSA4: Establecida entre el problema y el procedimiento de buscar un número c que multiplicado por a dé b (para determinar que b es múltiplo de a). FSA5: Establecida entre el procedimiento de buscar un número c que multiplicado

	por a dé b, para determinar que b es múltiplo de a, y el procedimiento de la división, para encontrar ese factor c.
A12	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de la división (para determinar si un número es divisor de otro (3 es divisor de 30 y no es divisor de 473)). FSA2: Establecida entre el problema y el procedimiento de multiplicar un número por números naturales (para encontrar sus múltiplos y determinar si un número es múltiplo de otro).
A13	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de la división (para determinar que un número es divisor de otro (3 es divisor de 30 y no es divisor de 473)). FSAC1: Establecida entre los conceptos de factor y divisor (para justificar que un número es factor de otro). FSAC2: Establecida entre los conceptos de divisor y múltiplo (para justificar que un número es múltiplo de otro).
A14	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de la división (para determinar si un número es divisor de otro (3 es divisor de 30 y no es divisor de 473)). FSA2: Establecida entre el problema y el procedimiento de buscar un número c que multiplicado por a dé b (para determinar que a es factor de b). FSA3: Establecida entre el procedimiento de buscar un número c que multiplicado por a dé b, para determinar que a es factor de b, y el procedimiento de la división, para encontrar ese factor c. FSA4: Establecida entre el problema y el procedimiento de buscar un número c que multiplicado por a dé b (para determinar que b es múltiplo de a). FSA5: Establecida entre el procedimiento de buscar un número c que multiplicado por a dé b, para determinar que b es múltiplo de a, y el procedimiento de la división, para encontrar ese factor c.
A15	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de buscar un número c que multiplicado por a dé b (para determinar que a es divisor de b (3 es divisor de 30 y no es divisor de 473)).

	FSA2: Establecida entre el procedimiento de buscar un número c que multiplicado por a dé b, para determinar que a es divisor de b, y el procedimiento de la división, para encontrar ese factor c. FSA3: Establecida entre el problema y el procedimiento de buscar un número c que multiplicado por a dé b (para determinar que a es factor de b). FSA4: Establecida entre el procedimiento de buscar un número c que multiplicado por a dé b, para determinar que a es factor de b, y el procedimiento de la división, para encontrar ese factor c. FSA5: Establecida entre el problema y el procedimiento de buscar un número c que multiplicado por a dé b (para determinar que b es múltiplo de a). FSA6: Establecida entre el procedimiento de buscar un número c que multiplicado por a dé b, para determinar que b es múltiplo de a, y el procedimiento de la división, para encontrar ese factor c.
A16	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de la división (para determinar que un número es divisor de otro (3 es divisor de 30 y no es divisor de 473)). FSA2: Establecida entre el problema y el procedimiento de buscar un número c que multiplicado por a dé b (para determinar que a es factor de b). FSA3: Establecida entre el procedimiento de buscar un número c que multiplicado por a dé b, para determinar que a es factor de b, y el procedimiento de la división, para encontrar ese factor c. FSA4: Establecida entre el problema y el procedimiento de buscar un número c que multiplicado por a dé b (para determinar que b es múltiplo de a). FSA5: Establecida entre el procedimiento de buscar un número c que multiplicado por a dé b, para determinar que b es múltiplo de a, y el procedimiento de la división, para encontrar ese factor c.
A17	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de la división (para determinar que un número es divisor de otro (3 es divisor de 30 y no es divisor de 473)). FSA2: Establecida entre el problema y el procedimiento de la división (para determinar que un número es factor de otro). FSA3: Establecida entre el problema y el procedimiento de la división (para

	determinar que un número es múltiplo de otro). FSAC1: Establecida entre los conceptos de divisor y divisible (para justificar que un número es divisor de otro). FSAP1: Establecida entre el problema y el criterio de divisibilidad por 3 (para justificar que un número es divisor de otro).
A18	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de la división (para determinar si un número es divisor de otro (3 es divisor de 30 y no es divisor de 473)). FSA2: Establecida entre el problema y el procedimiento de buscar un número c que multiplicado por a dé b (para determinar si b es múltiplo de a). FSA3: Establecida entre el procedimiento de buscar un número c que multiplicado por a dé b, para determinar que b es múltiplo de a, y el procedimiento de la división, para encontrar ese factor c.
A19	FSA1: Establecida entre el problema y la división (para determinar que un número es múltiplo de otro (30 es múltiplo de 3 y 473 no es múltiplo de 3)). FSAC1: Establecida entre los conceptos de divisor y múltiplo (para justificar que un número es divisor de otro). FSAC2: Establecida entre los conceptos de factor y divisible (para justificar que un número es factor de otro).
A20	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de la división (para determinar que un número es divisor de otro (3 es divisor de 30)). FSA2: Establecida entre el problema y el procedimiento de buscar un número c que multiplicado por a dé b (para determinar si a es divisor de b (3 no es divisor de 473)). FSA3: Establecida entre el problema y el procedimiento de buscar un número c que multiplicado por a dé b, para determinar si a es divisor de b, y el procedimiento de la división para encontrar ese factor desconocido. FSA4: Establecida entre el problema y el procedimiento de buscar un número c que multiplicado por a dé b (para determinar que a es factor de b). FSA5: Establecida entre el procedimiento de buscar un número c que multiplicado por a dé b, para determinar si a es factor de b, y el procedimiento de la división

	para encontrar ese factor desconocido. FSA6: Establecida entre el problema y el procedimiento de buscar un número c que multiplicado por a dé b (para determinar que b es múltiplo de a). FSA7: Establecida entre el procedimiento de buscar un número c que multiplicado por a dé b, para determinar que b es múltiplo de a, y el procedimiento de la división para encontrar ese factor desconocido.

SP2: Si se divide al número "a" por el número "b", ¿existe alguna condición para que "b" sea divisor de "a"? Justifica tu respuesta.	
A1	……
A2	……
A3	……
A4	……
A5	……
A6	……
A7	……
A8	……
A9	……
A10	FSAC1: Establecida entre el problema y el concepto: el divisor de la división es divisor del dividendo, cuando el dividendo es múltiplo del divisor.
A11	……
A12	……
A13	……
A14	……

A15	……
A16	……
A17	FSAC1: Establecida entre el problema y el concepto: el divisor de una división es divisor del dividendo cuando la división arroja cociente entero y resto 0.
A18	……
A19	……
A20	FSAC1: Establecida entre el problema y el concepto: b es divisor de a si el resultado de dividir a por b es un número entero.

SP3: Todos los múltiplos de un número, comprendidos entre 370 y 460 son: 380, 399, 418, 437 y 456. ¿De qué número se trata?, ¿es único? Explica cómo lo/s encontraste y fundamenta tu respuesta.	
A1	……
A2	……
A3	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de restar dos múltiplos consecutivos, el mayor menos el menor (para encontrar una de las soluciones positiva, teniendo una lista acotada, exhaustiva y ordenada de sus múltiplos).
A4	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de restar dos múltiplos consecutivos, el mayor menos el menor (para encontrar una de las soluciones positiva, teniendo una lista acotada, exhaustiva y ordenada de sus múltiplos). FSAC1: Establecida entre el procedimiento de restar dos múltiplos consecutivos, el mayor y el menor, y la justificación dada por el concepto: en una progresión aritmética la razón (el 19) se halla restando un término cualquiera y el anterior (para encontrar el número del cual son múltiplos (razón)).
A5	……
A6	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de restar dos múltiplos consecutivos, el mayor menos el menor (para encontrar una de las soluciones

	positiva, teniendo una lista acotada, exhaustiva y ordenada de sus múltiplos). FSAP1: Establecida entre el problema y la propiedad: Todos los números naturales son múltiplos de 1.
A7	……
A8	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de restar dos múltiplos consecutivos, el mayor menos el menor (para encontrar una de las soluciones positiva, teniendo una lista acotada, exhaustiva y ordenada de sus múltiplos).
A9	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de restar dos múltiplos consecutivos, el mayor menos el menor (para encontrar una de las soluciones positiva, teniendo una lista acotada, exhaustiva y ordenada de sus múltiplos). FSAC1: Establecida entre el procedimiento de restar dos múltiplos consecutivos para encontrar el número del cual son múltiplos y la justificación dada por el concepto: entre dos o más múltiplos consecutivos de un número a, hay una diferencia igual a “a”.
A10	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de restar dos múltiplos consecutivos, el mayor menos el menor (para encontrar una de las soluciones positiva, teniendo una lista acotada, exhaustiva y ordenada de sus múltiplos).
A11	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de hallar divisores por tanteo usando la técnica de dividir. FSA2: Establecida entre el problema y el procedimiento de hallar por tanteo un divisor común de todos los múltiplos dados (para determinar que todos ellos son múltiplos de ese divisor común).
A12	……
A13	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de hallar divisores por tanteo usando la técnica de dividir. FSA2: Establecida entre el problema y el procedimiento de hallar por tanteo un divisor común de todos los múltiplos dados (para determinar que todos ellos son múltiplos de ese divisor común). FSAC1: Establecida entre los conceptos de múltiplo y divisor (para justificar la existencia de un número conociendo una lista finita, exhaustiva y ordenada de sus

	múltiplos).
A14	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de hallar divisores por tanteo usando la técnica de dividir. FSA2: Establecida entre el problema y el procedimiento de hallar por tanteo un divisor común de todos los múltiplos dados (para determinar que todos ellos son múltiplos de ese divisor común). FSAC1: Establecida entre dos conceptos: el número del cual son múltiplos los elementos de una sucesión ordenada, finita y exhaustiva, es un divisor común de esos elementos. FSAP1: Establecida entre el problema y la propiedad: 1 es divisor de todos los números naturales.
A15	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de tanteo consistente en buscar un número que sumado a un múltiplo dé el múltiplo siguiente (para determinar un número conociendo una lista acotada, ordenada y exhaustiva de sus múltiplos). FSAP1: Establecida entre el problema y la propiedad: todos los números son múltiplos de 1.
A16	……
A17	……
A18	……
A19	……
A20	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de hallar la descomposición factorial prima de todos los múltiplos dados en la consigna (para determinar un factor común del cual son múltiplos los números dados en la consigna). FSAC1: Establecida entre el procedimiento de hallar la descomposición factorial prima de todos los múltiplos dados, buscando un factor común y la justificación a través del concepto: el factor común de la descomposición factorial prima de unos números los tiene a todos ellos como múltiplos.

SP4: 15a45 es un número de 5 cifras, ¿existe algún valor de “a” para que este número sea divisible por 3? En caso de que tu respuesta fuera afirmativa, indica todos los posibles valores de a. Explica cómo lo hiciste y justifica tu respuesta.	
A1	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de tanteo (para asignar un valor al literal (cifra) que tiene un número para que éste resulte ser divisible por 3). FSA2: Establecida entre el procedimiento de tanteo para asignar un valor a un literal y el procedimiento de la división (para determinar que un número es divisible por 3).
A2	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento que deviene del criterio de divisibilidad por 3 (para determinar si un número es divisible por 3). FSA2: Establecida entre el problema y el procedimiento de tanteo (para asignar un valor al literal (cifra) que tiene un número para que éste resulte ser divisible por 3). FSAP1: Establecida entre el procedimiento de tanteo para asignar un valor al literal que tiene un número para que éste resulte ser divisible por 3 y la propiedad: la suma de dos números divisibles por 3, es divisible por 3.
A3	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de tanteo (para asignar un valor numérico al literal (cifra) que tiene un número para que éste resulte ser divisible por 3). FSA2: Establecida entre el procedimiento de tanteo para asignar un valor a un literal y el procedimiento de la división (para determinar que un número es divisible por 3).
A4	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de tanteo (para asignar un valor al literal (cifra) que tiene un número para que éste resulte ser divisible por 3). FSA2: Establecida entre el procedimiento de tanteo para asignar un valor a un literal y el procedimiento de la división (para determinar que un número es divisible por 3).
A5	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de tanteo (para asignar un valor al literal (cifra) que tiene un número para que éste resulte ser divisible por

	3). FSA2: Establecida entre el procedimiento de tanteo para asignar un valor a un literal y el procedimiento de la división (para determinar que un número es divisible por 3).
A6	……
A7	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de tanteo (para asignar un valor al literal (cifra) que tiene un número para que éste resulte ser divisible por 3). FSA2: Establecida entre el procedimiento de tanteo para asignar un valor a un literal y el procedimiento de la división (para determinar que un número es divisible por 3).
A8	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de tanteo (para asignar un valor al literal (cifra) que tiene un número para que éste resulte ser divisible por 3). FSA2: Establecida entre el procedimiento de tanteo para asignar un valor a un literal y el procedimiento de la división (para determinar que un número es divisible por 3).
A9	……
A10	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de tanteo (para asignar un valor al literal (cifra) que tiene un número para que éste resulte ser divisible por 3). FSAP1: Establecida entre el procedimiento de tanteo (pensado, con control) para asignar un valor al literal que tiene un número para que éste resulte ser divisible por 3 y la propiedad: la suma de dos números divisibles por 3, es divisible por 3.
A11	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de tanteo (para asignar un valor al literal (cifra) que tiene un número para que éste resulte ser divisible por 3). FSAP1: Establecida entre el procedimiento de tanteo para asignar un valor al literal que tiene un número para que éste resulte ser divisible por 3 y la justificación dada por el criterio de divisibilidad por 3 (para justificar que un número es divisible por 3).

A12	……
A13	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de tanteo (para asignar un valor al literal (cifra) que tiene un número para que éste resulte ser divisible por 3). FSA2: Establecida entre el procedimiento de tanteo para asignar un valor a un literal y la división (para determinar que un número es divisible por 3).
A14	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de tanteo (para asignar un valor al literal (cifra) que tiene un número para que éste resulte ser divisible por 3). FSAP1: Establecida entre el procedimiento de tanteo para asignar un valor al literal que tiene un número para que éste resulte ser divisible por 3 y la justificación dada por el criterio de divisibilidad por 3 (para justificar que un número es divisible por 3).
A15	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de asignar todos los números posibles al literal (cifra) que tiene un número para que éste resulte ser divisible por 3. FSA2: Establecida entre el problema y el procedimiento de la división (para determinar si un número es divisible por otro).
A16	……
A17	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de asignar todos los números posibles al literal (cifra) que tiene un número para que éste resulte ser divisible por 3. FSA2: Establecida entre el procedimiento de tanteo para asignar todos los valores posibles al literal que tiene un número para que resulte ser divisible por 3 y el procedimiento de la división. FSAP1: Establecida entre el problema y el procedimiento de asignar todos los números posibles al literal que tiene un número para que éste resulte ser divisible por 3 y la justificación dada por el criterio de divisibilidad por 3.
A18	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de la división (para determinar si un número es divisible por otro).

	FSA2: Establecida entre el problema y el procedimiento de asignar todos los números posibles al literal (cifra) que tiene un número para que éste resulte ser divisible por 3.
A19	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de tanteo (para asignar todos los valores posibles al literal (cifra) que tiene un número para que éste resulte ser divisible por 3). FSA2: Establecida entre el procedimiento de asignar todos los números posibles al literal que tiene un número para que éste resulte ser divisible por 3 y la comprobación mediante el procedimiento de la división.
A20	FSAP1: Establecida entre el problema y la justificación dada por el criterio de divisibilidad por 3 (para justificar que un número es divisible por 3). FSA2: Establecida entre el problema y la propiedad: la suma de números divisibles por 3, es divisible por 3 (para determinar la cifra desconocida de un número y justificar el hecho de que resulte ser divisible por 3).

SP5: Se sabe que, si a y b son números naturales y a es divisor de b, siempre a es menor o igual que b. ¿Sucede lo mismo si los números fueran enteros? Identifica todas las posibilidades para este caso y justifica tu respuesta.	
A1	……
A2	……
A3	FSAContraej1: Establecida entre el problema y un contraejemplo (para justificar que en Z no se establece el mismo orden que en N, entre dos números, cuando uno de ellos es divisor del otro).
A4	……
A5	FSAContraej1: Establecida entre el problema y un contraejemplo (para justificar que en Z no se establece el mismo orden que en N, entre dos números, cuando uno de ellos es divisor del otro).
A6	FSAContraej1: Establecida entre el problema y un contraejemplo (para justificar que en Z no se establece el mismo orden que en N, entre dos números, cuando

	uno de ellos es divisor del otro).
A7	……
A8	……
A9	FSAContraej1: Establecida entre el problema y un contraejemplo (para justificar que en Z no se establece el mismo orden que en N, entre dos números, cuando uno de ellos es divisor del otro).
A10	……
A11	……
A12	……
A13	……
A14	……
A15	……
A16	……
A17	……
A18	……
A19	……
A20	FSAP1: Establecida entre el problema y la propiedad: si a es divisor de b, es también divisor de –b. FSAD1: Establecida entre el problema y la argumentación: si a y b son números naturales y a|b, se sabe que a≤b. Si a|b, entonces, a|-b, siendo a>-b, considerando que a y b son números naturales. En este caso, al ser el divisor mayor que el número, el orden que se establece entre a y b en Z no es el mismo que en N.

SP6: ¿Es posible que dos números enteros distintos tengan los mismos divisores? Si tu

respuesta es afirmativa, indica en qué condiciones eso ocurre. Justifica tu respuesta.	
A1	……
A2	……
A3	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de tanteo (para buscar divisores y encontrar dos números enteros que tienen los mismos divisores). FSAP1: Establecida entre el problema y la propiedad: los números enteros opuestos tienen los mismos divisores.
A4	……
A5	……
A6	……
A7	……
A8	……
A9	……
A10	FSAP1: Establecida entre el problema y la propiedad: los números enteros opuestos tienen los mismos divisores.
A11	……
A12	……
A13	FSAC1: Establecida entre las nociones de divisor y divisible (para justificar que un número es divisor de otro). FSAP1: Establecida entre el problema y la propiedad: 1 y -1 son divisibles por 1 y -1 (1 y -1 tienen los mismos divisores).
A14	……
A15	……
A16	……

A17	……
A18	……
A19	……
A20	……

SP7: Teniendo en cuenta que: 187 = 11x17, ¿son correctas las siguientes afirmaciones?: a) 17 es divisor de 11x17. b) 11x17+1.870 es múltiplo de 187. c) 11x17+16 es múltiplo de 187.	
A1	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de la división (para determinar si un número es divisor de otro –pasado a versión decimal-). FSA2: Establecida entre el problema y el procedimiento de la división (para determinar si un número –pasado a versión decimal- es múltiplo de otro).
A2	FSAP1: Establecida entre el problema y la propiedad: un factor de una descomposición multiplicativa de un número, es divisor del mismo (para justificar que un número es divisor de otro). FSAP2: Establecida entre el problema y la propiedad: la suma de dos múltiplos de un número, es múltiplo de este (para justificar que un número es múltiplo de otro).
A3	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de encontrar un número que multiplicado por otro dé como resultado un tercero (para determinar que el tercero –pasado a base 10- es múltiplo del segundo). FSA2: Establecida entre el problema y el procedimiento de la división (para determinar si un número –expresado en base 10- es múltiplo de otro). FSAC1: Establecida entre el problema y la definición de divisor: a es divisor de b si existe c tal que axc = b.
A4	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de la división (para determinar si un número es divisor de otro, (pasado a versión decimal)).

	FSA2: Establecida entre el problema y el procedimiento de la división (para determinar si un número –pasado a versión decimal- es múltiplo de otro).
A5	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de la división (para determinar si un número es divisor de otro –pasado a base 10-). FSA2: Establecida entre el problema y el procedimiento de la división (para determinar si un número –pasado a base 10- es múltiplo de otro).
A6	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de la división (para determinar si un número es divisor de otro –pasado a base 10-). FSA2: Establecida entre el problema y el procedimiento de la división (para determinar si un número –pasado a base 10- es múltiplo de otro).
A7	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de la división (para determinar si un número es divisor de otro (pasado a versión decimal)). FSA2: Establecida entre el problema y el procedimiento de la división (para determinar si un número –pasado a versión decimal- es múltiplo de otro).
A8	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de la división (para determinar si un número es divisor de otro –pasado a versión decimal-). FSA2: Establecida entre el problema y el procedimiento de la división (para determinar si un número –pasado a versión decimal- es múltiplo de otro).
A9	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de la división (para determinar si un número es divisor de otro –pasado a versión decimal-). FSA2: Establecida entre el problema y el procedimiento de la división (para determinar si un número –pasado a versión decimal- es múltiplo de otro).
A10	FSAC1: Establecida entre las nociones de múltiplo y divisor (para justificar que un número es divisor de otro número expresado en base a su descomposición factorial prima). FSAC2: Establecida entre el problema y el concepto: si un número a se multiplica por un número b, siempre se obtiene un múltiplo de a. FSAP1: Establecida entre el problema y la propiedad: la suma de dos múltiplos de un número es múltiplo del mismo (para justificar que un número, expresado en base a la propiedad distributiva, es múltiplo de otro).

A11	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de la división (para determinar si un número es divisor de otro –pasado a versión decimal-). FSA2: Establecida entre el problema y el procedimiento de la división (para determinar si un número –pasado a versión decimal- es múltiplo de otro).
A12	……
A13	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de la división (para determinar si un número es divisor de otro –pasado a versión decimal-). FSA2: Establecida entre el problema y el procedimiento de la división (para determinar si un número –pasado a versión decimal- es múltiplo de otro).
A14	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de la división (para determinar si un número –pasado a versión decimal- es múltiplo de otro). FSAP1: Establecida entre el problema y la propiedad: un factor de una descomposición multiplicativa de un número, es divisor del mismo (para justificar que un número es divisor de otro).
A15	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de la división (para determinar si un número es divisor de otro –pasado a versión decimal-). FSA2: Establecida entre el problema y el procedimiento de la división (para determinar si un número –pasado a versión decimal- es múltiplo de otro).
A16	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de la división (para determinar si un número es divisor de otro –pasado a la versión decimal-). FSA2: Establecida entre el problema y el procedimiento de la división (para determinar si un número –pasado a su versión decimal- es múltiplo de otro) FSAC1: Establecida entre el problema y el concepto: un número a es divisor de un número b, si b es n veces a (para justificar que un número es divisor de otro –pasado a base 10-). FSAC2: Establecida entre el problema y el concepto: un número b es múltiplo de un número a, si b es n veces a (para justificar que un número –pasado a base 10- es múltiplo de otro).
A17	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de la división (para determinar si un número es divisor de otro –pasado a versión decimal-).

	FSA2: Establecida entre el problema y el procedimiento de la división (para determinar si un número –pasado a versión decimal- es múltiplo de otro). FSAC1: Establecida entre los conceptos de divisor y múltiplo (para justificar que un número es divisor de otro –pasado a versión decimal-).
A18	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de la división (para determinar si un número es divisor de otro –pasado a versión decimal-). FSA2: Establecida entre el problema y el procedimiento de encontrar un número que multiplicado por otro dé como resultado un tercero (para determinar que el tercero –pasado a base 10- es múltiplo del segundo). FSA3: Establecida entre el procedimiento de buscar un número que multiplicado por otro dé como resultado un tercero, para determinar que el tercero –pasado a base 10- es múltiplo del segundo, y el procedimiento de la división para encontrarlo.
A19	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de la división (para determinar si un número es divisor de otro –pasado a versión decimal-). FSA2: Establecida entre el problema y el procedimiento de la división (para determinar si un número –pasado a versión decimal- es múltiplo de otro).
A20	FSAP1: Establecida entre el problema y la propiedad: un factor de una descomposición multiplicativa de un número, es divisor del mismo (para justificar que un número es divisor de otro). FSAP1: Establecida entre el problema y la propiedad: la suma de dos múltiplos de un número, es múltiplo de éste (para justificar que un número, expresado en base al algoritmo de la división, no es múltiplo de otro). FSAD1: Establecida entre el problema y la argumentación: 11x17+1870 = 187+187x10 = 187x(1+10) = 187x11. Por lo tanto, el número dado es múltiplo de 187 (para determinar que un número expresado en base a la propiedad distributiva es múltiplo de otro).

SP8: Si fuera posible, escribe un número que tenga: a) Exactamente cuatro divisores naturales.

b) Más de 15 divisores enteros. Si te resultó posible, explica la estrategia que usaste para encontrarlos y si no, explica por qué no es posible. En cualquier caso, fundamenta tu respuesta.	
A1	……
A2	……
A3	FSA1: Establecida entre el procedimiento de tanteo (para encontrar un número con los requerimientos de la consigna) y el procedimiento de tanteo (para buscar divisores de un número). FSA2: Establecida entre el problema y el procedimiento de la división (para buscar divisores y determinar si un número es divisor de otro). FSAC1: Establecida entre las nociones de divisor y divide (para determinar si un número es divisor de otro).
A4	……
A5	……
A6	……
A7	……
A8	……
A9	FSA1: Establecida entre el procedimiento de tanteo (para encontrar un número con los requerimientos de la consigna) y el procedimiento de tanteo (para buscar divisores de un número). FSA2: Establecida entre el problema y el procedimiento de la división (para buscar divisores y determinar si un número es divisor de otro).
A10	……
A11	……
A12	……
A13	……

A14	……
A15	……
A16	……
A17	FSA1: Establecida entre el procedimiento de tanteo (para encontrar un número con los requerimientos de la consigna) y el procedimiento de tanteo (para buscar divisores de un número). FSA2: Establecida entre el problema y el procedimiento de la división (para buscar divisores y determinar si un número es divisor de otro).
A18	……
A19	……
A20	……

SP9: En una estación de colectivos, un bus para con una frecuencia de 18 minutos y el otro lo hace cada 15 minutos, ¿habrá un encuentro posterior después de una coincidencia? Si la respuesta fuera afirmativa, ¿dentro de cuántos minutos, como mínimo, se encontrarán en esa estación, después de haber coincidido en esa estación los dos colectivos? Fundamenta tu respuesta.	
A1	……
A2	……
A3	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de sumar minutos, a partir del primer múltiplo hasta obtener el próximo tiempo de coincidencia. FSAC1: Establecida entre el procedimiento de ir sumando “t” minutos, a partir del primer múltiplo (t), hasta obtener el próximo tiempo de coincidencia (entre buses) y la definición: el mínimo común múltiplo de dos números es el menor de todos los múltiplos comunes.
A4	……

A5	……
A6	……
A7	……
A8	……
A9	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de sumar minutos, a partir del primer múltiplo hasta obtener el próximo tiempo de coincidencia. FSAC1: Establecida entre el procedimiento de ir sumando “t” minutos, a partir del primer múltiplo (t), hasta obtener el próximo tiempo de coincidencia (entre buses) y la definición: el mínimo común múltiplo de dos números es el menor de todos los múltiplos comunes.
A10	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de cálculo del mínimo común múltiplo, el que consiste en multiplicar los factores comunes y no comunes con el mayor exponente.
A11	……
A12	……
A13	FSAD1: Establecida entre el problema y la argumentación: como hay una relación de 5/6 entre las demoras de ambos buses, el que tarda más tiempo (18 min.) dará 5 vueltas y el que tarda menos (15 min.), 6 vueltas, para volver a encontrarse. El primero realiza 5 vueltas en 90 min., y el otro, 6 vueltas en 90 min. O sea, se volverán a encontrar a los 90 min.
A14	……
A15	……
A16	……
A17	……
A18	……
A19	……

A20	FSAD1: Establecida entre el problema y la argumentación: como hay una relación de 5/6 entre las demoras de ambos buses, el que tarda más tiempo (18 min.) dará 5 vueltas y el que tarda menos (15 min.), 6 vueltas, para volver a encontrarse. El primero realiza 5 vueltas en 90 min., y el otro, 6 vueltas en 90 min. O sea, se volverán a encontrar a los 90 min.

SP10: Se tienen dos cuerdas que miden 240 cm. y 308 cm. y se las quiere cortar en trozos que tengan la misma longitud, ¿cuál será la mayor longitud en que se las puede cortar, de forma tal que la longitud de corte sea la misma en ambas cuerdas y que no sobre cuerda? Fundamenta tu respuesta.	
A1	……
A2	……
A3	……
A4	……
A5	……
A6	……
A7	……
A8	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de la división (para buscar divisores). FSA2: Establecida entre el problema y el procedimiento de cálculo del máximo común divisor, buscando divisores, identificando los comunes y tomando el mayor. FSAC1: Establecida entre el procedimiento de cálculo del máximo común divisor, buscando divisores, identificando los comunes y tomando el mayor y la definición: el máximo común divisor de dos números es el mayor de sus divisores comunes.
A9	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de la división (para buscar divisores). FSA2: Establecida entre el problema y el procedimiento de cálculo del máximo

	común divisor, buscando divisores, identificando los comunes y tomando el mayor. FSAC1: Establecida entre el procedimiento de cálculo del máximo común divisor, buscando divisores, identificando los comunes y tomando el mayor y la definición: el máximo común divisor de dos números es el mayor de sus divisores comunes.
A10	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de cálculo del máximo común divisor, el que consiste en multiplicar los factores comunes con el menor exponente.
A11	……
A12	……
A13	FSA1: Establecida entre el problema y el procedimiento de la división (para buscar divisores). FSA2: Establecida entre el problema y el procedimiento de cálculo del máximo común divisor, buscando divisores, identificando los comunes y tomando el mayor. FSAC1: Establecida entre el procedimiento de cálculo del máximo común divisor, buscando divisores, identificando los comunes y tomando el mayor y la definición: el máximo común divisor de dos números es el mayor de sus divisores comunes.
A14	……
A15	……
A16	……
A17	……
A18	……
A19	……
A20	……

Anexo 6: Entrevistas a estudiantes

Se exponen aquí las entrevistas realizadas a los alumnos destinatarios de la experiencia, luego de analizar sus prácticas y habiendo hecho un primer análisis de las funciones semióticas que establecieron al enfrentarse con la resolución del contenido de la versión final del instrumento de indagación.

Los alumnos fueron convocados en horarios extra clases para pedirles ampliación, cuando no se comprendía cabalmente alguna de sus producciones. Esto explica el motivo por el cual no fueron todos entrevistados (Ej. A1, A7 y A20).

Las entrevistas se desarrollaron en forma individual.

Al entrevistador se lo nombra con la letra E y a los alumnos con la letra A.

La redacción de las respuestas fue mejorada, sin cambiar los conceptos vertidos ni los razonamientos puestos en juego.

El análisis de las entrevistas permitió mejorar y completar las funciones semióticas que establecieron a propósito de la resolución del instrumento.

Entrevistas

A1: no fue entrevistado.

A2

Sobre el problema 1:

E: ¿cómo encontraste los números 0, 3, 6 y 9?

A: sumé 1, 5, 4 y 5 y me dio 15 que es un número divisible por 3 y entonces pensé que el valor que falta tiene que ser 3. Después sumé 1, 5, 3, 4 y 5 y me dio que es divisible por 3. Luego me di cuenta que podría funcionar también con el 6, el 9 y el 0.

E: ¿y a puede asumir otros valores que no sean 0, 3, 6 y 9?

A: no, porque tengo que sumar todos los números y me tiene que dar un número divisible por 3; o sea, ya sumé 1, 5, 4 y 5 y me dio que es divisible por 3, por lo que a debe ser también divisible por 3.

Sobre el problema 4:

E: ¿cómo encontraste el valor de a para que el número 15a45 sea divisible por 3?

A: fui probando con los números…

E: ¿de qué manera?

A: primero sumé: 1+5+4+5 y me da 15, quien es un número divisible por 3. Después este resultado sumaba con los números y si me daba, ese número podría ser.

E: ¿qué significa si me daba?

A: que la suma entre 15 y el número que buscaba tenía que ser divisible por 3…fui probando de 0 hasta 9, porque es una cifra solamente.

A3

Sobre el problema 1:

E: Decís que 3 es divisor de 30, porque existe un número que multiplicado por 3 da 30…

A: sí, el 10.

E: ¿y por qué si existe el 10 que multiplicado por 3 da 30, es divisor de 30?

A: porque eso dice la definición.

E: ¿qué dice la definición?

A: un número es divisor de otro número si hay un número por el que se multiplica el primero y el resultado es el segundo número.

E: También dijiste que 3 no es divisor de 473 porque no existe un número entero que multiplicado por 3 da por resultado 473… ¿cómo asegurar que no existe?

A: porque dividí 473:3 y el resultado no es un número entero, es un número decimal.

Sobre el problema 6:

E: al principio decís que no es posible que dos números enteros distintos tengan los mismos divisores y luego indicás que 6 y -6 cumplen con esa condición…

A: porque interpreté mal… después me di cuenta.

E: ¿de qué te diste cuenta?

A: de que el 6 y el -6 tienen los mismos divisores y también otros números, uno positivo y otro negativo.

E: ¿uno positivo y otro negativo?

A: sí, pasa con todos…

E: ¿me podrías dar ejemplos?

A: 5 y -5, 10 y -10…

E: ¿y cómo te diste cuenta de eso?

A: primero me di cuenta del 6 y -6 y después me di cuenta de que todos los opuestos tienen los mismos divisores… me di cuenta y fui buscando todos los divisores y eran iguales.

E: o sea que dos números enteros opuestos tienen los mismos divisores.

Sobre el problema 7:

E: decís que 17 es divisor de 187, ¿por qué?

A: porque 17x11 = 187.

E: ¿podrías explicarme mejor?

A: se cumple por la definición.

E: ¿qué definición?

A: la definición de divisor… hay un número que multiplicado por 17 da por resultado 187… y el número ya se sabe porque está en el enunciado.

Sobre el problema 8:

E: decís que 6 tiene 4 divisores y que 1000 tiene más de 15 divisores enteros…

A: sí, fui probando con la calculadora.

E: ¿fuiste probando?

A: sí, qué números lo dividían.

E: ¿cómo es eso?

A: en el caso del 6 es fácil porque uno ya se da cuenta que 1, 2, 3 y 6 son números que dividen a 6.

E: ¿y esos son todos?

A: sí

E: ¿cómo podés afirmar que son todos?

A: y porque con 4 y 5 no se puede dividir.

E: ¿no se puede dividir…?

A: 6 dividido 4 y 6 dividido 5 no da resto cero.

E: ¿y cómo sabés que 1.000 tiene más de 15 divisores?

A: encontré más de 15 divisores del 1.000.

E: ¿de qué manera?

A: haciendo 1.000 dividido varios números y me daba un número exacto y entonces esos números son divisores de 1.000…así fui encontrando.

E: ¿y cómo te diste cuenta de que el 1.000 tiene más de 15 divisores enteros?

A: al azar, busqué varios números y no me daban y entonces busqué un número grande y fui probando… con el 1.000 me dio bien.

Sobre el problema 9:

E: para resolver el problema 9 sumaste las demoras de ambos buses, llegando a 90 en ambos casos, ¿por qué?

A: porque tenía que obtener el menor.

E: ¿el menor?

A: sí, el menor múltiplo.

E: ¿me podrías dar más detalles?

A: hay que llegar al menor número que se repita en los dos casos…o sea, de los múltiplos que se repiten, debo tomar el menor.

A4

Sobre el problema 7:

E: ¿por qué decís que 17 es divisor de 11x17, diciendo que 187:11 = 17?

A: porque 11x17 me da por resultado 187; luego hice 187 dividido 17 y me dio 11.

E: ¿qué tiene que ver esa división con el hecho de que 17 sea divisor de 11x17?

A: como es una división de resultado exacto y resto 0, entonces 17 es divisor de 187.

E: luego decís que 11x17+1.870 es múltiplo de 187, pero no explicás el motivo.

A: Resolví esa cuenta y me dio 2.057; después dividí este número por 187 y me dio como resultado 11…entonces es múltiplo de 187.

E: ¿quién es múltiplo de 187?

A: el número que da por resultado esa cuenta, el número 2.057.

A5

Sobre el problema 1:

E: Dijiste que 441 es múltiplo de 7 porque 7x63 = 441…

A: sí, porque 7 se puede multiplicar por el 63 y da por resultado 441.

E: ¿qué significa eso de que se puede multiplicar…?

A: y que hay un número que multiplicado por 7 da 441.

E: ¿cómo encontraste el 63?

A: haciendo la división.

E: ¿qué división?

A: 441 dividido 7…eso da por resultado 63.

E: ¿y que esa división dé por resultado 63, que tiene que ver con el hecho de que 441 sea múltiplo de 7?

A: y que 7 por 63 da por resultado 441.

A6

Sobre el problema 1:

E: dijiste que 3 es factor de 30 porque 3x10 = 30 y que 441 es múltiplo de 7 porque 7x63 = 441…

A: para saber si es factor y también si es múltiplo se puede hacer así…

E: ¿cómo encontraste el 10?

A: es casi automático, fácil de encontrar.

E: ¿pasa lo mismo con el 63?

A: no, cuesta un poco más…yo lo hice dividiendo.

E: ¿qué dividiste?

A: 441 dividido 7 y me dio 63; por lo tanto, 7x63 es igual a 441.

A7: no fue entrevistado.

A8

Sobre el problema 10:

E: ¿cómo podés asegurar que 4 es la máxima longitud en que se deben cortar las cuerdas?

A: porque fui dividiendo los dos números por 2, por 3, por 4… por dos y por 4 da resto cero.

E: ¿resto 0?

A: si divido los dos números del problema por 2 y por 4.

E: ¿eso qué significa?

A: que 2 y 4 son divisores de los dos números.

E: ¿y por qué eliges el 4 y no el 2?

A: porque el problema dice que hay que cortar en la mayor longitud posible.

E: ¿no habrá otro número mayor que 4 que sea divisor de 240 y 308?

A: probé con todos y no me dio.

E: ¿quiénes son todos?

A: si divido por 240 me da 1, si divido por la mitad me da 2, o sea, probé de 120 para abajo.

E: ¿y lo mismo hiciste con 308?

A: sí y vi qué número era divisor de los dos números.

E: ¿después qué hiciste?

A: elegí el 4 porque es el mayor de los divisores comunes.

A9

Sobre el problema 1:

E: Decís que 3 es divisor de 30 porque 3x10 = 30 y que 473 no es múltiplo de 3…

A: porque no hay ningún número que multiplicado por 3 dé resultado 473.

E: ¿cómo podés afirmarlo?

A: haciendo la división no se encuentra el número.

E: ¿no se encuentra ese número?, ¿no existe?

A: no, no existe…porque 473:3 da por resultado un número decimal. Eso quiere decir que no hay ningún número que multiplicado por 3 dé 473.

E: este procedimiento también lo usaste para determinar si un número es factor de otro y si es múltiplo de otro.

A: sí, se hace de la misma manera, haciendo la división.

Sobre el problema 9:

E: para resolver el problema 9 sumaste las demoras de ambos buses, llegando a 90 en ambos casos, ¿por qué?

A: porque calculo el múltiplo común menor.

E: ¿qué tiene que ver el múltiplo común menor con el problema?

A: se suman los minutos y se obtienen los múltiplos.

E: ¿cómo es eso?

A: sumando en cada caso lo que tarda cada colectivo se van obteniendo los múltiplos, hasta llegar a uno de ellos que coincida, coincide en el 90…el 90 es el menor tiempo que tardan para volver a encontrarse.

E: ¿qué tiene que ver con el múltiplo común menor?

A: el 90 es el múltiplo común menor… es el menor múltiplo común de los dos números.

E: de 15 y 18…

A: sí.

Sobre el problema 10:

E: viendo tu trabajo, entiendo que 4 es la longitud en la que se pueden cortar las cuerdas… ¿cómo podrías afirmarlo?

A: haciendo 240:4 y 308:4

E: ¿por qué dividido 4?

A: fui probando, con la calculadora, dividiendo los dos números por 2, por 3, por 4 y después ya no se podía más.

E: ¿qué significa que no se podía más?

A: que 240 y 308 ya no se puede dividir por otro número más grande que 4, que sea el mismo en los dos casos, y que no tenga resto.

E: ¿cómo podés afirmarlo?

A: porque fui probando con todos.

E: ¿con todos?

A: y llegué hasta la mitad de los números y en ese caso da 2 y resto 0, después ya no se puede.

E: ¿por qué no se puede?

A: porque el cociente es un número decimal.

E: ¿y por qué elegiste la división?

A: para buscar los divisores de esos números.

E: ¿qué tienen que ver los divisores con la longitud máxima en que deben cortarse las cuerdas?

A: y 4 es divisor, es divisor de los dos números y es la longitud máxima.

E: ¿se podría decir que 4 es el máximo común divisor de 240 y 308?

A: sí.

A10

Sobre el problema 6:

E: El problema solicita una condición…

A: 6 y -6 tienen los mismos divisores, porque los divisores positivos y negativos son divisores de los dos números.

E: ¿y cuál es la condición para que dos números enteros tengan los mismos divisores?

A: y también pueden ser 10 y -10, 18 y -18, o sea, tiene que ser uno negativo y otro positivo.

E: ¿cualquier número positivo y cualquier número negativo?

A: no, cualquiera no, tienen que ser los mismos, pero uno positivo y otro negativo.

E: esos números se llaman opuestos, los que tienen el mismo valor absoluto y distinto signo.

A: sí, sí, …, no me acordaba el nombre.

A11

Sobre el problema 1:

E: dijiste que 3 es factor de 30, porque 3x10 = 30 y que 441 es múltiplo de 7, porque 63x7 = 441.

A: si, porque encontré esos números que multiplican y dan 30 y 441.

E: ¿cómo los encontraste?

A: el 10 es fácil y en el otro caso, hice la división 441:7 y me dio por resultado 63.

Sobre el problema 3:

E: ¿cómo te diste cuenta que los números 370, 399, 418, … son múltiplos de 19?

A: fui probando con divisiones… me costó encontrar el 19.

E: ¿por qué te costó?

A: porque hice muchas divisiones, pero con la calculadora iba más rápido.

E: ¿es el único número que tiene por múltiplos esos números de la consigna?

A: creo que no, pero no encontré más números…

Sobre el problema 4:

E: ¿cómo encontraste los valores de a para que 15a45 sea divisible por 3?

A: fui probando.

E: ¿me podés explicar un poco más eso de que fuiste probando?

A: buscaba un número, por ejemplo, el 3, sumaba 1+5+3+4+5, y como el resultado es múltiplo de 3, entonces el 3 funciona… recién al final me di cuenta que el 0 también podía ser.

E: ¿con qué números probaste?

A: del 1 al 9,… del cero al 9.

A12

Sobre el problema 1:

E: Dijiste que 441 no es múltiplo de 7 porque no se encuentra entre sus múltiplos… ¿qué significa?

A: y que si multiplico por 7 no da 441.

E: ¿a quién multiplicás por 7?

A: a cualquier número.

E: ¿será que no existe ese número o no lo encontraste?

A: no, no existe, porque multipliqué por todos.

E: ¿qué significa que multiplicaste por todos?

A: fui probando uno por uno hasta que el resultado de la multiplicación pasó el 441…

E: ¿hiciste tantas multiplicaciones?

A: fui probando y después ya tomé números más grandes para multiplicar…al pasar el resultado el número 441 quiere decir que no hay un número que multiplicado por 7 dé como resultado 441.

A13

Sobre el problema 10:

E: decís que hay que cortar la cuerda en trozos de 4 cm., ¿cómo encontraste el 4?

A: busqué uno por uno los divisores de 240 y de 308.

E: ¿cómo los buscaste?

A: dividiendo por 2, 3, 4, y con 4 da exacto.

E: ¿qué significa que da exacto?

A: que no hay resto.

E: ¿no hay resto?

A: el resto es 0.

E: pero al dividir por 2 también da cociente entero y resto cero, porque 240 y 308 son números pares, ¿no se pueden cortar las cuerdas en trozos de 2 cm?

A: no, porque el problema pide el máximo número.

E: ¿estás seguro que 4 es la longitud máxima?

A: sí, porque con números más grandes no da.

E: ¿me podrías explicar mejor?

A: si divido 240 y 308 por un número, mayor que 4, no da resto 0.

E: ¿probaste con todos los números?

A: iba probando con la calculadora, si se podía con 240, no se podía con 308 o al revés, no daba resto 0.

E: a ver, retomemos: recién dijiste que buscaste uno por uno los divisores de 240 y de 308…

A: y son el 2 y el 4.

E: ¿son todos?

A: y el 1 también.

E: y de esos, elegiste el 4…

A: sí, porque es el mayor de los divisores comunes.

E: de 240 y 308.

A: sí.

A14

Sobre el problema 1:

E: decías que 3 es factor de 30 porque 3x10 = 30, ¿de dónde sale el10?

A: el 10 es el número por el cual se multiplica 3 para que dé por resultado 30.

E: También decís que 441 es múltiplo de 7 porque 441 = 7x63, ¿cómo obtenés el 63?

A: dividiendo 441:7.

E: ¿Cómo en el caso anterior, el de 3x10…?

A: sí, pero en este caso no hacía falta dividir, porque el número se encuentra fácil.

A15

Sobre el problema 3:

E: Dijiste que el número del cual son múltiplos los números dados en la consigna, es 19, ¿cómo lo obtuviste?

A: sumando.

E: ¿cómo?

A: sumando 19 a cada número, el resultado me da el siguiente.

E: sí, pero lo que pregunto es ¿cómo te diste cuenta que 19 es el número solicitado?

A: y fui probando con dos o tres números primero, hasta que me di cuenta que 19 era el número.

E: también decís que otro de los números buscados es el 1…

A: sí, porque todos los números son múltiplos de 1.

Sobre el problema 4:

E: ¿cómo obtuviste el valor de a para que el número 15a45 sea divisible por 3?

A: tiene que ser un número de una cifra…fui probando con todos, después me di cuenta que tiene que ser múltiplo de 3, como el 6, el 9.

E: ¿cómo te diste cuenta de eso?

A: porque me dio bien con el 3…también con el 0.

E: ¿estás seguro que los valores que obtuviste son todos?

A: sí, porque hice la división para comprobar.

E: ¿a qué división te referís?

A: por ejemplo 15345:3, da resto 0…también me da resto 0, cuando pongo 0, 6 y 9 en el lugar de a.

E: 5:2 también tiene resto 0 y 5 no es divisible por 2.

A: claro, pero el cociente tiene que ser un número entero.

A16

Sobre el problema 1:

E: ¿por qué decís que 3 es divisor de 30 y no es divisor de 473?

A: porque comprobé con la división.

E: ¿qué división?

A: dividí 473 por 3 y me dio resto 0, pero el cociente me dio decimal.

E: ¿y por qué 441 es múltiplo de 7?... dijiste que lo es porque 7x63 = 441.

A: sí, porque encontré un número que multiplicado por 7 da por resultado 441.

E: ¿funciona con cualquier tipo de número?

A: no, tiene que ser entero.

E: ¿y cómo encontraste el 63?

A: hice 441 dividido 7.

A17

Sobre el problema 2:

E: ¿Cuándo se divide a por b, para que b sea divisor de a, la única condición es que el resto de la división sea 0?

A: sí.

E: con este criterio podríamos decir que 2 es divisor de 10…

A: sí.

E: y que también 3 es divisor de 7…

A: ¡no, no!......lo que quiero decir es que el cociente debe ser entero y el resto 0.

Sobre el problema 4:

E: ¿Cómo encontraste los números 0, 3, 6 y 9?

A: fui probando…

E: ¿fuiste probando…? ... ¿con cuáles números?

A: probé con los números del 0 al 9 y al número que resultaba lo dividía por 3. Si me daba cociente entero y resto 0, es porque podía ser 3 el valor de la cifra desconocida. O también, más rápido, probaba y sumaba las cifras del número que resultaba y si esa cifra era múltiplo de 3, entonces funcionaba el número por el cual reemplazaba la cifra desconocida, es decir, era divisible por 3.

Sobre el problema 8:

E: ¿cómo encontraste el número que tiene 4 divisores naturales?, ¿y el que tiene más de 15 divisores enteros?

A: fui probando…tomaba un número e iba buscando sus divisores.

E: ¿de qué manera buscabas los divisores?

A: y dividiendo, pero en el caso del 10 es fácil, se puede encontrar al instante, no hace ni falta dividir. Lo mismo pasa en el otro caso, es fácil también, porque busqué números con los cuales la división es exacta.

E: ¿a qué división te referís?

A: por ejemplo, 20 es divisor de 1.000.000, porque la división entre este número y 20 me da cociente 50.000 y resto 0, o sea, es una división exacta.

A18

Sobre el problema 1:

E: dijiste que 441 es múltiplo de 7 porque 63x7 = 441…

A: así compruebo que es múltiplo.

E: ¿qué significa el 63?

A: es el número que multiplicado por 7 da por resultado 441.

E: ¿cómo lo obtuviste?

A: hice 441:7 y me dio 63, entonces, 63x7 = 441, haciendo un pasaje de términos.

A19

Sobre el problema 1:

E: decís que 3 es divisor de 30 porque 30 es múltiplo de 3…

A: sí, de esta manera se comprueba.

E: ¿qué significa que 30 es múltiplo de 3?

A: 3x10 = 30 o también 30:3 = 10.

E: también decís que 3 es factor de 30 porque éste número es divisible por 3.

A: como 30 es divisible por 3, 3 es factor de 30.

E: ¿qué significa que 30 sea divisible por 3?

A: que 30:3 me da como resultado 10.

Sobre el problema 4:

E: ¿cómo encontraste los valores de a para que el número 15a45 sea divisible por 3?

A: fui probando con todos los números.

E: ¿con todos los números?

A: del 0 al 9 porque tiene que ser una cifra nomás.

E: ¿y cómo sabés si son todos los valores que encontraste?

A: porque con esos números solamente da.

E: ¿podés explicar un poco más?

A: pongo el 3, 6 y 9 en el lugar de a y hago, por ejemplo 15345:3 y me da una división exacta.

E: ¿qué es una división exacta?

A: que tengo un número entero en el cociente y 0 de resto.

A20: no fue entrevistado.