Universidad Nacional de Misiones. Facultad de Humanidades y Ciencias Sociales. Secretaría de Investigación y Postgrado. Doctorado en Ciencias Humanas y Sociales

Doctorando
Mgter. Manuel Alejandro Verón

Modelo Ontosemiótico del Concepto de Diferencial. Implicaciones para la Formación de Profesores de Matemática

Tesis de Doctorado presentada para obtener el título de "Doctor en Ciencias Humanas y Sociales"

"Este documento es resultado del financiamiento otorgado por el Estado Nacional, por lo tanto, queda sujeto al cumplimiento de la Ley N° 26.899".

Dirección
Dra. María Belén Giacomone
Dr. Marcel David Pochulu

Posadas, Misiones, 2023

UNIVERSIDAD NACIONAL DE MISIONES

FACULTAD DE HUMANIDADES Y CIENCIAS SOCIALES

Doctorado en Ciencias Humanas y Sociales

Modelo Ontosemiótico del Concepto de Diferencial. Implicaciones para la Formación de Profesores de Matemática

Manuel Alejandro Verón

Tesis doctoral

Posadas, 2023

UNIVERSIDAD NACIONAL DE MISIONES

FACULTAD DE HUMANIDADES Y CIENCIAS SOCIALES

Doctorado en Ciencias Humanas y Sociales

Modelo Ontosemiótico del Concepto de Diferencial. Implicaciones para la Formación de Profesores de Matemática

Memoria de TESIS DOCTORAL realizada bajo la dirección de los doctores María Belén Giacomone y Marcel David Pochulu, que presenta Manuel Alejandro Verón para optar al grado de Doctor, en el Programa de Doctorado en Ciencias Humanas y Sociales de la Facultad de Humanidades y Ciencias Sociales de la Universidad Nacional de Misiones.

Agradecimientos

Agradezco a mis directores Dra. Belén Giacomone y Dr. Marcel Pochulu por haber aceptado dirigir esta tesis doctoral, por sus sabios consejos y aportes en este periodo de formación, y por su plena disposición y compromiso para la realización de esta investigación.

Agradezco especialmente a Belén Giacomone por acompañarme durante estos tres años en el desarrollo de la tesis, por orientarme, guiarme, enseñarme, escucharme y brindarme la oportunidad de trabajar a su lado, por compartir su experiencia y conocimiento, por incluirme en sus proyectos profesionales, por su humildad, su generosidad, su muy buena onda, por sus palabras de motivación, por confiar en mí, y por sus buenos consejos.

Agradezco al Dr. Juan Díaz Godino por alentarme a continuar con mi formación doctoral, por creer en mí y en mi trabajo, y especialmente, por proponer a Belén Giacomone como directora de tesis.

Agradezco profundamente a Margarita, por su humildad, su amistad, sus buenos consejos, por escucharme, por las largas conversaciones sobre los desafíos que implica la tesis y la vida, por impulsarme a crecer y superarme, y por confiar en mí.

Agradezco a los profesores y al Programa del Doctorado en Ciencias Humanas y Sociales de la Facultad de Humanidades y Ciencias Sociales de la Universidad Nacional de Misiones por sus sugerencias y por permitirme realizar mi investigación en el campo de la didáctica de la matemática.

Agradezco a todo el equipo de gestión, coordinación, profesores, y en particular, a los estudiantes del profesorado de matemática del Instituto Superior de Formación Docente que han colaborado en el trabajo de campo de la tesis.

Agradezco especialmente a mi familia, mi esposa Griselda y mis hijas Oriana e Ianara, por su paciencia, su comprensión y porque han sido un gran apoyo y acompañamiento durante todo el proceso de formación, gracias a ellas pude lograrlo.

Agradezco a mis padres, Teresa y José, por alentarme a superarme y por haberme enseñado que todo es posible y que con esfuerzo todo se logra.

Resumen

La introducción del cálculo en la enseñanza de las ciencias, en especial en las matemáticas, ha presentado a lo largo de la historia numerosos desafíos en cuanto a su enseñanza y su aprendizaje. Son muchas las investigaciones en el campo de la didáctica de la matemática que dan cuenta de la complejidad del tema, y en especial del concepto de la diferencial ya que se presenta como un concepto polisémico, con multiplicidad de significados (como en física y matemáticas) y por su relación con diferentes conceptos claves del cálculo que también presentan grandes dificultades en los procesos educativos (como límite, derivadas, integrales, etc.).

Esta complejidad plantea importantes problemas educativos, para estudiantes y profesores, en los niveles de educación secundaria y universitaria. Desde esta perspectiva, nos cuestionamos sobre los significados del concepto de diferencial de una función y sus implicancias para la formación de profesores de matemáticas.

En esta tesis doctoral se abordan dos grandes estudios. En un primer momento, se lleva a cabo un estudio teórico con el objetivo general de establecer un modelo ontosemiótico de referencia de los diversos significados del concepto de diferencial. La metodología empleada es cualitativa–descriptiva e histórica, basada en un estudio histórico-epistemológico que rastrea el origen y la evolución del concepto identificando las situaciones-problemas y prácticas matemáticas en las que interviene la diferencial. El análisis de los datos se fundamenta en el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS).

Teniendo en cuenta los resultados de las investigaciones en torno al estudio del diferencial, en un segundo momento se aborda el diseño, la implementación y la valoración de acciones formativas con el objetivo general de analizar y promover el desarrollo de conocimientos y competencias didáctico-matemáticas en futuros profesores de matemáticas. El problema de investigación se sustenta en el Modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticos del profesor de matemática, desarrollado en el marco del EOS, que incluye la descripción de 5 sub-competencias específicas del profesor de matemáticas.

En particular, se pone énfasis en dos de estas sub-competencias. En primer lugar, en el desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico, entendiéndola como la competencia para identificar la variedad de objetos y significados involucrados en la resolución de tareas matemáticas en torno al estudio del diferencial; en segundo lugar, se focaliza en el desarrollo de la competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica. La recogida de información se basa en el análisis de las anotaciones del profesor-investigador, los diálogos en las clases, las grabaciones en audio y las producciones escritas.

Los resultados muestran un gran avance en el desarrollo de estas competencias en los futuros profesores involucrados. A partir de unas secuencias de acciones formativas han logrado identificar prácticas, objetos y procesos matemáticos en forma experta y apropiarse de herramientas para el análisis detallado de la actividad matemática; han logrado reconocer potenciales conflictos epistémicos y cognitivos; han logrado valorar adecuadamente la idoneidad didáctica de diferentes propuestas de enseñanza.

En conclusión, esta investigación resalta la necesidad de promover y profundizar el estudio y desarrollo de nuevas experiencias formativas en relación con los procesos de enseñanza y aprendizaje de la diferencial en la formación de futuros profesores de matemáticas.

Palabras clave: diferencial, conocimientos didáctico-matemáticos, competencias profesionales, formación de profesores de matemáticas

Abstract

The introduction of calculus into science education, especially in mathematics, has posed numerous challenges throughout history in terms of teaching and learning. Many studies in the field of mathematics education have highlighted the complexity of the subject, particularly the concept of differential, as it is a polysemic concept with multiple meanings (in physics and mathematics) and due to its connection with other key calculus concepts that also present significant challenges in educational processes (such as limits, derivatives, integrals, etc.).

This complexity raises significant educational issues for both students and teachers at the secondary and university levels. From this perspective, we explore the meanings of the concept of differential in a function and its implications for the mathematics teacher education.

This doctoral thesis addresses two major studies. First, a theoretical study is conducted with the overall objective of establishing an onto-semiotic reference model for the various meanings of the concept of differential. The methodology employed is qualitative-descriptive and historical, rooted in a historical-epistemological investigation that traces the origin and development of this concept. It involves identifying problematic scenarios and mathematical practices related to various facets of the concept of differentials. The data analysis framework is firmly grounded in the Onto-semiotic Approach to Mathematical Knowledge and Instruction (OSA).

Taking into account the results of research on the study of differentials, the second phase involves the design, implementation, and evaluation of training actions with the general objective of analyzing and promoting the development of didactic-mathematical knowledge and competencies in future mathematics teachers. The research problem is based on the Model of Didactic-Mathematical Knowledge and Competences of the mathematics teacher developed within the framework of OSA, which includes the description of five specific professional sub-competencies.

This research focuses on two of these sub-competencies. Firstly, the development of the onto-semiotic analysis competence, understood as the competence to identify the variety of objects and meanings involved in solving mathematical tasks related to the study of the differential. Secondly, the focus is on the development of the competence to analyze and assess didactic suitability. Data collection is based on the analysis of the researcher's annotations, classroom dialogues, audio recordings, and written productions.

The results demonstrate significant progress in the development of these competencies in the future teachers involved. Through sequences of training actions, they have successfully identified mathematical practices, objects, and processes in an expert manner and have acquired tools for the detailed analysis of mathematical activity. They have also recognized potential epistemic and cognitive conflicts and have effectively assessed the didactic suitability of different teaching proposals.

In conclusion, this research underscores the need to promote and deepen the study and development of new training experiences related to the teaching and learning processes of differentials in the training of future mathematics teachers.

Keywords: differential, didactic-mathematical knowledge, professional competences, mathematics teacher education.

Índice general

Índice de Tablas

Índice de Figuras

Introducción General

Como profesor de la cátedra de Análisis Matemático siempre me he preguntado ¿qué es la diferencial de una función? Si bien a partir de mi formación y revisión de los libros de texto de cálculo, considero que es posible encontrar varias definiciones y explicaciones sobre este concepto, las mismas no logran dar respuesta satisfactoria a mi interrogante. Esto se debe a que, al trabajar este concepto con los futuros profesores de matemáticas (FPM), surgen muchas dudas e interrogantes, donde las explicaciones y justificaciones formales de la matemática no son suficientes para lograr comprender y entender qué es la diferencial, en qué contextos tiene sentido su uso y cuáles son los conocimientos didáctico-matemáticos que se deberían tener en cuenta para potenciar su enseñanza y aprendizaje, en particular en la formación de profesores de matemáticas.

Esta inquietud se materializó en una línea de investigación que ha comenzado con la tesis de maestría en la Universidad de Granada, bajo la dirección del Dr. Juan Díaz Godino, y que se ha ampliado con la realización de esta tesis doctoral en la Universidad Nacional de Misiones.

En esta introducción general de la memoria de tesis doctoral describo de manera sucinta las cuestiones de la investigación que se abordan y la organización de la misma.

Frente a las inquietudes planteadas, existen varios modelos parciales de los significados de la diferencial, clasificados según criterios, como los usos que le otorgan los estudiantes en el contexto de la matemática, física, ingeniería y las ciencias experimentales de diferentes carreras, pero en general, estos modelos no logran describir, explicar y articular la complejidad ontológica y semiótica que emerge de los significados de la diferencial. Por tales motivos, en esta investigación se plantea realizar un estudio histórico epistemológico del origen y evolución del concepto diferencial, y además, se construye un modelo ontosemiótico de referencia de los significados parciales de la diferencial.

Con el modelo ontosemiótico de los significados de la diferencial, se logró responder algunas inquietudes, pero no fue suficiente ya que en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas no solo interviene la faceta epistémica, sino que entra en un juego de interacción con conocimientos didáctico-matemáticos de las facetas cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica, los cuales conforman una red de conocimientos que los profesores deberían tener en cuenta para proponer y desarrollar propuestas didácticas idóneas con la finalidad de potenciar los aprendizajes de los estudiantes.

Luego surge una nueva inquietud vinculada a la formación de profesores de matemáticas, donde se plantea ¿qué competencias y conocimientos didáctico-matemáticos deberían desarrollar los FPM para optimizar los procesos de instrucción de la diferencial?, frente a este interrogante se diseña, implementa y evalúa dos ciclos formativos con los FPM en relación con la competencia de análisis e intervención didáctica de los profesores de matemáticas (Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017).

El plan de investigación contempla, en primer lugar, la descripción y caracterización de los significados parciales de la diferencial, desde una perspectiva epistémica construyendo un modelo ontosemiótico de significados. En segundo lugar, se amplía el modelo incorporando los conocimientos didáctico-matemáticos de los procesos de estudio de la diferencial en sus facetas epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica. En tercer lugar, se aborda el diseño, implementación y evaluación de dos ciclos de formación con experiencias formativas que propician el crecimiento profesional de los FPM y el desarrollo de conocimientos y competencias en la formación inicial de profesores con relación a la diferencial.

El interés y la relevancia de la problemática planteada se justifica por la importancia de estudiar el concepto diferencial y sus conexiones con otros conceptos centrales del cálculo como las derivadas, integrales y ecuaciones diferenciales. Además, este concepto se encuentra en la mayoría de los diseños curriculares de diversas carreras, ya que se destaca su amplia gama de usos y contextos de aplicación, principalmente en los procesos de modelización de diversos fenómenos de cambio, variación y acumulación. En este sentido, se considera que es necesario investigar estrategias formativas idóneas que promuevan el desarrollo de competencias y conocimientos didáctico-matemáticos de los procesos de enseñanza y aprendizaje sobre la diferencial.

El marco teórico que sustenta esta investigación es el Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino, Batanero y Font, 2007; 2020). Se aplica, por una parte, la metodología de análisis de contenido de los resultados de investigaciones claves para caracterizar los significados parciales de la diferencial y los conocimientos didáctico-matemáticos de los procesos de estudio de este concepto, aplicando las herramientas del análisis ontosemiótico y análisis de las facetas de la idoneidad didáctica (Godino, Batanero y Burgos, 2023). Estas herramientas se aplican también para el análisis de las producciones de las respuestas de los FPM que participan de los ciclos de formación.

Dentro de este marco teórico, se ha elaborado un modelo de categorías de conocimientos y competencias del profesor de matemáticas (Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017) (modelo CCDM) que nos permite reflexionar sobre la formación de profesores de matemáticas. Para desarrollar estas competencias y conocimientos, en el EOS se aportan determinadas herramientas teóricas y metodológicas, dando lugar a una competencia general de diseño e intervención didáctica, propia del profesor de matemáticas la que se compone de cinco sub-competencias. En particular, en esta investigación se diseña, implementan y evalúan dos ciclos formativos que promueven el desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico y la competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica, donde se utiliza la metodología de investigación basada en el diseño (Kelly, Lesh y Baek, 2008), en el sentido generalizado propuesto por el EOS (Godino, Rivas, Arteaga, Lasa y Wilhelmi, 2014).

La tesis está organizada en los siguientes capítulos:

En el Capítulo 1, se describen las investigaciones previas vinculadas al concepto diferencial y a los procesos de enseñanza y aprendizaje de este concepto. Esta información posibilita la formulación del planteamiento del problema específico de investigación, las preguntas y los objetivos.

En el Capítulo 2, se describe el marco teórico y metodológico. En el marco teórico se presenta una síntesis de las principales nociones desarrolladas en el EOS, describiendo su aplicación en las diferentes fases de la investigación; en la descripción de la metodología se presenta el tipo de investigación y profundiza en la metodología, técnicas e instrumentos aplicados en cada estudio y ciclo formación.

En el Capítulo 3, se realiza una síntesis del estudio histórico epistemológico sobre el origen y evolución del concepto diferencial de una función donde se identifican los problemas y las prácticas matemáticas que permitieron el surgimiento y evolución del concepto diferencial junto con los objetos matemáticos que intervienen en las mismas.

En el Capítulo 4, se presenta el modelo ontosemiótico de los significados parciales de la diferencial a partir de abordar el problema de caracterización de los significados de referencia de este concepto, aplicando la noción de significado pragmático de un objeto matemático que propone el EOS. La información incluida en el capítulo se corresponde con el artículo publicado en la revista Revemop:

Verón, M. A. y Giacomone, B. (2021). Análise dos significados do conceito de diferencial de uma perspectiva ontosemiótica. *Revemop*, *3*, e202109. https://doi.org/10.33532/revemop.e202109

En el Capítulo 5, se presentan los conocimientos didáctico-matemáticos de los procesos de estudio de la diferencial que permitieron la construcción de la Guía de Valoración de la Idoneidad Didáctica de la diferencial (GVID-Diferencial). La información incluida en el capítulo se corresponde con el artículo publicado en la revista Uniciencia:

Verón, M. A., Giacomone, B. y Pino-Fan, L. R. (2023). Guía de valoración de la idoneidad didáctica de un proceso de estudio del diferencial. *Uniciencia* (en prensa).

En el Capítulo 6, se describe el análisis y valoración de los conocimientos didáctico-matemáticos de una lección de un libro de texto de cálculo aplicando la GVID-Diferencial.

En el Capítulo 7, se presenta el diseño, implementación y evaluación del primer ciclo formativo orientado al desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico de los FPM. También se comparten las conclusiones de este estudio.

En el Capítulo 8, se presenta el diseño, implementación y evaluación del segundo ciclo formativo orientado al desarrollo de la competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de los FPM. También se comparten las conclusiones de este estudio.

En el Capítulo 9, se presenta una síntesis de los resultados de la investigación realizada según los objetivos planteados en el Capítulo 1, así como algunas cuestiones abiertas para abordar en un futuro proyecto de investigación.

La tesis finaliza con el listado de las fuentes bibliográficas referidas en los diferentes capítulos de la tesis. En anexos se encuentran las tareas diseñadas e implementadas en las intervenciones formativas con los futuros profesores de matemáticas.

Capítulo 1: Antecedentes y Problema de Investigación

1.1 Antecedentes y Justificación

La introducción del cálculo en la enseñanza de las ciencias, en especial en las matemáticas, presentó a lo largo de la historia muchos desafíos en cuanto a su enseñanza y su aprendizaje, generando diferentes dificultades y obstáculos, tanto para los profesores como para los estudiantes, cuestión que se mantiene a lo largo del tiempo, principalmente en el aprendizaje de los conceptos centrales del cálculo infinitesimal.

El surgimiento del cálculo en el siglo XVII supuso un gran avance en las ciencias y es considerado como "la herramienta teórica más poderosa jamás construida por los hombres a lo largo de la historia" (Rossi, 1997, p. 199), ya que permitió resolver una gran cantidad de problemas. Pero su desarrollo no estuvo del todo acompañado por la compresión y el rigor que caracteriza a los textos matemáticos, motivos que generaron varias contradicciones y deficiencias entre sus conceptos (Martínez-Torregrosa et al., 2002). Respecto a esta situación Eves (1981) dice:

> Atraídos por la potente aplicabilidad del asunto, careciendo de una verdadera comprensión de los fundamentos sobre los que debe apoyarse, los matemáticos manipulaban los procesos analíticos de una manera casi ciega, a menudo guiados por una ingenua intuición de que lo que hacían debía ser válido. (p. 134)

A continuación, presentamos brevemente diferentes investigaciones realizadas en el área del cálculo o análisis matemático que dan cuenta de la complejidad del tema, y en especial del concepto de diferencial. Esta complejidad plantea importantes problemas tanto para su enseñanza como su aprendizaje por parte de estudiantes y profesores, en los niveles de educación secundaria y universitaria.

De las investigaciones analizadas en torno al diferencial, se pueden distinguir diversos ángulos desde donde se consideró este objeto de estudio. Los más numerosos son los que tratan sobre las dificultades en la enseñanza y en el aprendizaje, tanto en estudiantes como en los profesores. En segundo lugar, en cantidad, encontramos muchas investigaciones sobre la historia de las matemáticas enfocadas en el cálculo y en especial en los infinitesimales. Como agregado a esta línea, mencionamos los que se ocupan del impacto e implicancias de estos estudios de la historia del cálculo en la enseñanza y aprendizaje del mismo. En tercer lugar, investigaciones que tienen como objeto de estudio a los infinitesimales, y en especial al diferencial, desde una estudio histórico–epistemológico y algunos de ellos avanzan sobre la construcción de modelos epistemológicos, enfoques, aproximaciones desde algunos marcos teóricos de la didáctica de la matemática.

En cuarto lugar, reflexionamos sobre los aportes teóricos y metodológicos de las diferentes perspectivas de investigación en la formación de profesores de matemática a la didáctica del análisis matemático. Y, por último, analizamos el impacto y las implicaciones de los modelos de significados en la formación de profesores de matemática.

1.1.1 Investigaciones sobre los aspectos epistémicos, cognitivos e instruccionales en la didáctica del análisis matemático

Diversos estudios han mostrado que los estudiantes y profesores presentan considerables deficiencias en los conceptos básicos del cálculo (Artigue, 1995; Ferrini-Mundy y Gaudard, 1992; Orton, 1983; Tall, 1981b; 1992; Thompson, 1994). Como así también en el concepto de diferencial (Gomez, 2019; Martínez-Torregrosa et al., 2002; Tall, 1981a). Las dificultades en torno al concepto de diferencial no son exclusivas de matemáticas, sino que se extienden a otras ciencias, como física, química e ingeniería, donde también hay estudios que reflejan esta problemática (Arcos, 2004; Artigue, et al., 1990; Hu y Rebello, 2013; López-Gay et al., 2015; Oldenburg, 2016).

Varias investigaciones plantean la necesidad de realizar un estudio histórico epistemológico del concepto de diferencial por la complejidad del concepto y por los diferentes significados con los cuales se presenta, resaltando el problema epistemológico de los significados del diferencial (Artigue, 1995; Cordero-Orosio, 1991; García, 2018; Gómez, 2019; Hu y Rebello, 2013; Pulido, 1997).

Las dificultades que presentan los estudiantes sobre el diferencial son del tipo estructural, relacionado con el cálculo algebraico por una presentación donde predomina los algoritmos, pero también conceptual, relacionado con la comprensión del objeto (Orton, 1983). Por otro lado, se plantea que las dificultades están estrechamente relacionadas con la forma en las cuales se presenta a los estudiantes, es decir, desde qué significado (Gómez, 2019), lo que implica de manera directa los conceptos que son empleados para definir al diferencial. En particular, se menciona que la presentación por medio del concepto de límite, como aparece en la mayoría de los textos actuales del cálculo, genera mayores dificultades por la complejidad del objeto matemático límite (Arcos, 2004; Oldenburg, 2016; Pulido, 1997).

Es importante tener en cuenta que el diferencial es un concepto polisémico (López-Gay et al., 2015) porque tiene varios significados, funciones y usos diferentes en matemáticas, física, ingeniería y en las ciencias experimentales (Arcos, 2004; Oldenburg, 2016, Verón, 2020). En matemáticas permite formalizar el cálculo independiente del contexto físico, mientras que en física tiene un uso productivo para varios conceptos ya que permite el modelado de fenómenos, sin tener una preocupación por el rigor en los conceptos y justificaciones de los procedimientos. "El concepto de diferencial, considerado como un incremento infinitesimal, fue de gran ayuda en la resolución de muchos problemas tanto matemáticos como físicos" (Badillo et al., 2005).

A pesar de su gran utilidad en matemáticas y en las ciencias experimentales, suele suceder que no es claro la finalidad con los cuales se emplean procedimientos que involucran diferenciales en la resolución de situaciones-problemas como lo evidencian las investigaciones de Artigue et al. (1990), Hu y Rebello (2013), Martínez-Torregrosa et al., (2002), entre otros.

La dificultad de una determinación precisa del significado del diferencial no se reduce solo a estudiantes y profesores, sino también a matemáticos que se plantearon, en diferentes momentos, acerca del mismo. Una muestra de ello se encuentra en el comentario de Freudenthal en 1973:

> Diferenciales inútiles pueden ser despedidas de inmediato. Si *dy, dx* aparecen sólo en la combinación *dy/dx* o bajo el signo integral después del integrando, la pregunta sobre qué significan individualmente *dx, dy* es equivalente a preguntarse qué significan las letras l, o, g, en log. (p. 550)

Además, existen varias investigaciones como las de Artigue et al. (1990) López-Gay (2001), Oldenburg (2016), Pulido (1997), que muestran como conviven y generan diferentes conflictos en estudiantes y profesores, en matemáticas y las ciencias experimentales, los diversos significados del concepto de diferencial que se presentan de forma explícita o implícita en los diferentes libros de textos de cálculo, física, química, ingeniería, etc.

Un aspecto importante del concepto de diferencial que destaca Gómez (2019) es la representación simbólica y su utilización en relación con los conceptos de derivada, integral y ecuaciones diferenciales, porque el diferencial aparece en las expresiones $dy = f'(x).dx$; $\frac{dy}{dx} = f'(x)$; $f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0$; $\int f(x)dx$ generando de esta forma diferentes conflictos en el aprendizaje y la enseñanza del concepto de diferencial.

1.1.2 Evolución del concepto de diferencial en la historia de la matemática

El concepto de diferencial fue crucial para el origen y desarrollo del cálculo infinitesimal porque es uno de los primeros conceptos que emerge de las prácticas matemáticas en la resolución de diferentes situaciones-problemas, es por ello que consideramos necesario realizar una revisión de las investigaciones en torno a la evolución del diferencial en la historia de la matemática.

A continuación, haremos referencia a diversos estudios cuyo objeto de estudio está relacionado con el concepto de diferencial y su interés esta puesta en la reconstrucción de las prácticas operativas y discursivas que caracterizan a cada época.

En Kleiner (2012) se realiza una reconstrucción histórica de las nociones fundacionales del cálculo, lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande, partiendo de los aportes de grandes matemáticos desde el siglo XVII hasta la actualidad.

Estudios sobre la evolución histórica del cálculo, en especial sobre los conceptos de límite, derivada, diferencial e integral encontramos en Boyer (1959), Edwards (1979), y Kitcher (1984). En forma particular sobre el concepto de diferencial tenemos a Artigue y Viennot (1987), Bos (1974), López-Gay (2001), Pulido (1997), Taylor (1974), entre otros. Muchos de los estudios respecto a la historia del cálculo se focalizan en los principales aportes de Cavalieri, Fermat, Newton, Leibniz, Euler, Lagrange, Cauchy, Weierstrass, Fréchet y Robinson, analizando en paralelo la construcción, evolución, consolidación y obstáculos que generó y que generan los infinitesimales en el cálculo.

Las investigaciones de Martínez-Torregrosa et al. (2006) y Kleiner (2012) permiten reconocer que, a lo largo de la historia de un concepto matemático, su estudio se realiza desde diferentes enfoques o lentes que responden a un conjunto de condiciones sociales y temporales que permiten avanzar en la construcción y consolidación de determinados aspectos del concepto.

Hilbert señaló que toda teoría matemática atraviesa tres períodos de desarrollo: el ingenuo, el formal y el crítico. En el caso del cálculo, el período ingenuo ocurrió en el siglo XVII, el formal en el XVIII y el crítico en el XIX. (Kleiner, 2012, p. 93)

1.1.3 Modelos de referencia de los significados del diferencial en educación matemática.

A lo largo de la historia de la educación matemática, y en especial de la didáctica del cálculo, encontramos a varios autores que han investigado sobre los significados del diferencial y han avanzado sobre un posible modelo de significados del diferencial, tanto para las matemáticas como la física, ingeniería y las ciencias experimentales. Es por ello que consideramos como punto de partida para nuestra investigación el estudio de los significados propuestos por los autores que se presentan a continuación con el fin de tener un panorama de la situación actual del concepto de diferencial en la educación matemática.

Tall (1981b) plantea una serie de enfoques según los significados atribuidos a los conceptos del cálculo desarrollados a partir del Pensamiento Matemático Avanzado (PMA) los cuales son:

- El método antiguo, intuitivo e infinitesimal: los infinitesimales intuitivos de Leibniz son considerados como cantidades.
- El método dinámico del límite: los infinitesimales son considerados como funciones.
- El método numérico: el infinitesimal es considerado como un valor numérico de una variable.
- El método del dibujo por ordenador: el infinitesimal es considerado como un indivisible.
- El método $\varepsilon - \delta$: el infinitesimal es desterrado del cálculo.
- El método infinitesimal moderno: similar al método antiguo de Leibniz pero utilizando la lógica moderna.

Diversos estudios posteriores a Tall (1981) permitieron desarrollar, en el marco del PMA, el constructo denominado esquemas conceptuales epistemológicos (ECE) para hacer referencia a:

la evolución histórica de los conceptos matemáticos o a los tipos de conocimientos asociados a la noción matemática, así como también a las representaciones, los procedimientos y métodos que los matemáticos usaron para resolver una situación en un contexto específico. Elementos que existieron en un cierto período histórico y que se aceptaron por la comunidad matemática en ese período de tiempo y en ese escenario particular. (Valdivé y Garbin, 2008, p. 419)

En Valdivé y Garbin (2008) se presentan siete ECE como resultado del estudio de la evolución histórica del infinitesimal, siendo los mismos:

- Grecia antigua: el infinitesimal asociado a la razón.
- Edad medieval (529-1436): el infinitesimal asociado a una unidad indivisible.
- Siglo XVI y principio del XVII: el infinitesimal como una diferencia.
- A mitad del siglo XVII: el infinitesimal como razón aritmética.
- Segunda mitad del siglo XVII hasta inicios del XVIII: el infinitesimal asociado a un incremento.
- Siglo XVIII y principio del XIX: el infinitesimal como símbolo.
- Finales del siglo XIX: el infinitesimal como una función.

Por otro lado, Dray y Manogue (2010) se preguntan, al igual que otros investigadores, ¿qué son los diferenciales? respondiendo que existen varias definiciones para los diferenciales, considerándolos como: cambios arbitrariamente pequeños de cantidades, notación abreviada del límite, una forma diferencial, infinitesimales de los números hiperreales en el análisis no estándar o también como todo lo anterior.

Pero estos autores plantean que su objetivo no es ofrecer definiciones formales del diferencial, sino más bien presentan dos usos que hacen los estudiantes de los diferenciales en la resolución de diferentes situaciones-problemas. En su investigación destacan dos usos de los diferenciales y los denominan como:

- Diferencial de ecuaciones: los diferenciales son utilizados para relacionar cambios en varias cantidades que están relacionadas por una ecuación, como una herramienta heurística donde no importa la relación de dependencia entre las variables.

Por ejemplo, el volumen de un cilindro es $V = \pi r^2 h$ y aplicando la propiedad del diferencial del producto $d(uv) = vdu + udv$ se obtiene $dV = 2\pi rhdr + \pi r^2 dh$.

— Diferencial de funciones: se expresan como $df = f'(x)dx$ y requiere que se seleccione en primer lugar la variable independiente de la función $f(x)$ y el concepto fundamental es la derivada.

En la investigación de Hu y Rebello (2013) identificaron cuatro significados del diferencial que son utilizados como un recurso en el contexto de la física que emergen de las entrevistas que realizan a un grupo de estudiantes respecto a la resolución de problemas de integración. Los significados que presentan son:

— Cantidad pequeña (Small amount): el diferencial como una cantidad infinitesimal de una cantidad física.

— Punto (Point): el diferencial como un punto sobre la recta y sin dimensión, o como una cantidad puntual de tamaño físico insignificante.

— Diferenciación (Differentiation): el símbolo del diferencial d como un indicador de la acción de la operación de tomar la derivada de una función.

— Variable de integración (Variable of integration): el diferencial como indicador de la variable de integración, sin representar algún significado físico.

Por otro lado, Von Korff y Rebello (2014) plantean una clasificación de los diferenciales como tipos de infinitesimales que se diferencian según su uso y contexto de aplicación en el campo de la física, además se utilizan las formas simbólicas que propone Sherin (2001). De esta manera, se argumenta que no es lo mismo trabajar con “cambios infinitesimales” y “cantidades infinitesimales” ya que dependen del fenómeno físico en estudio.

— Cambios infinitesimales: “conceptualizamos dx imaginando dos posiciones en puntos cercanas en una trayectoria y tomando la diferencia entre ellas” (Von Korff y Rebello, 2014, p. 701). De esta manera los cambios infinitesimales se pueden escribir como diferencias, empleando la forma simbólica $\square - \square = \triangle$. Por ejemplo, $dv = v_2 - v_1$ en cinemática significa un cambio de posición.

- Cantidad infinitesimal: se consideran que representan una pequeña cantidad de un elemento de una sustancia y se los refiere con el símbolo $\triangle$. Por ejemplo, dM representa una pequeña cantidad de masa, y “la masa de un objeto sólido se conceptualiza como una suma $dM's$” (Von Korff y Rebello, 2014, p. 700).

- Producto infinitesimal: simbólicamente se escribe como un producto entre una cantidad finita $\square$ y una cantidad infinitesimal $\triangle$, dado lugar a la expresión $\square \cdot \triangle$. Por ejemplo, el trabajo se define como $P \cdot dV$ o $F \cdot dx$.

En la investigación de López-Gay et al. (2015) se distinguen diferentes significados del diferencial según sus usos tanto en matemáticas como en física y en cómo se presentan en los libros de textos de cálculo. Así en matemáticas, se lo distingue como:

- Instrumento formal, carente de significado (asociado a la definición de Cauchy).
- Aproximación lineal del incremento ($\Delta y \approx f'dx = dy$).
- Estimación lineal tangencial (asociado a la definición de Fréchet).
- Infinitesimal (asociado a la definición de Robinson).

Mientras que en Física, se lo distingue como:

- Sin sentido (similar al significado de Instrumento formal, en matemáticas).
- Incremento infinitesimal (similares a las ideas intuitivas de Newton y Lebniz).
- Aproximación infinitesimal (similar a las ideas de infinitesimal de Robinson).
- Estimación lineal (similar a las ideas de estimación lineal tangencial de Fréchet).

En Pulido (2010) se presenta una clasificación de los significados del diferencial teniendo en cuenta las definiciones dadas por los libros de textos y la teoría de formas diferenciales. Entre los significados propone:

— El diferencial como un incremento finito: donde el diferencial de y se define como $dy = y'.dx$, que es la manera que se presenta actualmente en los libros de textos de cálculo.

— El diferencial como transformación lineal: donde se considera una función F de campo escalar ($R^n en\ R$), el diferencial de F en a ($a \in R^n$) se define como la transformación lineal $\lambda(a)$ y se escribe $dF = \lambda(a).dx$.

— El diferencial como un infinitésimo: donde el diferencial se define en términos del análisis no estándar con los infinitesimales.

— El diferencial como una forma diferencial: donde el diferencial se define y se generaliza en al cálculo de variedades en la teoría de las formas diferenciales.

Oldenburg (2016) plantea que es posible una conceptualización del análisis matemático utilizando los diferenciales, entendiéndolos como "predicciones lineales de cambios" (p. 58). Es por ello que los define como:

> Das Differential dx einer Größe x ist ebenfalls eine Größe, nämlich die bei lokaler Betrachtung „bestmögliche" lineare Prognose der Änderung Δx[1]. (Oldenburg, 2016, p. 58)

Ely (2021) presenta cinco definiciones del diferencial, destacando que las dos primeras son las que él considera más adecuadas para una interpretación del cálculo en términos de los diferenciales, pero las restantes suelen estar presente en el uso que realizan los estudiantes y en los libros de textos. Las definiciones del diferencial son:

— Un incremento infinitesimal de x: el diferencial se define como una cantidad infinitesimal, como se lo consideraba en el marco del cálculo del Leibniz. Ely (2021) plantea que esta misma idea se puede formalizar como un tipo de número hiperreal en el análisis no estándar.

— Un cambio arbitrariamente pequeño en x: el diferencial se define como un incremento de x que puede hacerse arbitrariamente pequeño. Es decir,

[1] Traducción: El diferencial dx de una cantidad (o tamaño) x es también una cantidad, es decir, la de consideración local "mejor posible" pronóstico lineal del cambio Δx.

dx es una cantidad que varía continuamente dentro de cualquier intervalo de tamaño fijo Δx.

— Una forma diferencial: se define, por ejemplo, a "dx como una densidad unidimensional que permite la integración sobre una variedad orientada" (Ely, 2021, p. 593).

— Una abreviatura de límites: dx no se define de manera particular, sino que solo adquiere significado en relación con otros símbolos, por ejemplo: $\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

— Una aproximación lineal: dx se define como un pequeño incremento de x, es decir $dx = \Delta x$. "Si $y = f(x)$ no es lineal, entonces el diferencial dy sirve como una aproximación para Δy, pero no es igual a él. Por lo tanto dy es una función de dos variables x y dx" (Ely, 2021, p. 539).

Ante esta diversidad de perspectivas sobre el concepto de diferencial en educación matemática, hemos considerado necesario realizar un estudio histórico-epistemológico focalizado en caracterizar los diversos significados de este concepto, identificando sus elementos característicos e interconexiones. Consideramos que, para ello, la perspectiva antropológica, pragmatista y semiótica sobre el conocimiento matemático del Enfoque Ontosemiótico (Godino et al., 2007; Font et al., 2013) puede ayudar a realizar esta reconstrucción y análisis de significados.

Un primer avance sobre los significados parciales del concepto de diferencial lo encontramos en la tesis de maestría de Verón (2020) donde logramos identificar y caracterizar cuatro configuraciones epistémicas de los objetos primarios asociados a cuatro significados sistémicos-pragmáticos del diferencial, los cuales son:

— Diferencial de Leibniz,

— Diferencial de Cauchy,

— Diferencial de Fréchet y

— Diferencial de Robinson en el Análisis no estándar.

En esta investigación se logra la reconstrucción de cuatros significados del diferencial en términos de configuraciones ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos, identificando en cada significado un sistema de prácticas matemáticas prototípicas, que intervienen en la resolución de una situación problema como el cálculo de la tangente a una curva, y los objetos matemáticos primarios como los lenguajes, conceptos-definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos que caracterizan y particularizan a cada significado parcial del concepto de diferencial.

1.1.4 Implicaciones de los modelos de referencia de los significados de los objetos matemáticos en la formación de profesores de matemática

Diversas investigaciones han construido diferentes modelos de referencia de los significados de los conceptos matemáticos para diferentes objetivos, para explorar el nivel de compresión de los estudiantes, para el diseño de actividades, para el análisis de libros de textos, para estudiar la enseñanza de un contenido y sus relaciones con otros conceptos.

En el marco del EOS se han desarrollado varias investigaciones que realizan una reconstrucción de los significados de diferentes objetos matemáticos con el fin de disponer de un significado global u holístico de referencia, también denominado modelo ontosemiótico de referencia, para el estudio y valoración de los procesos de enseñanza y aprendizaje de los objetos matemáticos.

Los modelos de significados de referencia de un concepto constituyen una herramienta teórica y metodológica que permite caracterizar la complejidad ontosemiótica de un objeto matemático y la representatividad de los significados. Estos modelos constituyen un sistema complejo de prácticas matemáticas de las cuales emergen objetos primarios, y en consecuencia son elementos (o criterios) fundamentales para el diseño de tareas y cuestionarios, para caracterizar la compresión de los estudiantes, profesores y futuros profesores (Font et al., 2020).

La investigación de Verón (2020) es un aporte fundamental para el desarrollo de esta investigación dado que, si bien existen muchas investigaciones sobre el diferencial, hay pocos desarrollos que se centran en los significados de dicho concepto y en las conexiones intra e interdisciplinarias, lo que podría obstaculizar el proceso de enseñanza y aprendizaje ocasionando una enseñanza descontextualizada.

En esta investigación se avanza sobre la construcción de un modelo ontosemiótico de referencia del concepto de diferencial desde la perspectiva teórica y metodológica del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino et al., 2020), donde se plantea como línea futura de investigación la ampliación de los significados del diferencial en las matemáticas superiores como la geometría diferencial, el cálculo de variedades y las ecuaciones diferenciales con el fin de reconstruir un significado holístico u global de referencia del diferencial. También se presenta como una línea futura de investigación el diseño, análisis, implementación y evaluación de propuestas didácticas para trabajar sobre el significado global del concepto de diferencial en la formación de profesores de matemáticas. Estas dos líneas de investigación abiertas pretendemos abordar con esta tesis y para lograrlo consideramos como marco teórico el EOS.

El modelo ontosemiótico de referencia de los diversos significados del concepto de diferencial tendrá una implicancia directa en la formación de profesores de matemática, ya que se considera necesario que el profesor desarrolle conocimientos de los distintos significados y contextos de uso que hacen funcionar y dan sentido a un concepto, y competencias profesionales para llevarlos a la práctica. Por ejemplo, desde el Instituto Nacional de Formación Docente (INFOD) se considera que:

> Comprender un objeto matemático significa haber transitado por diversas experiencias que le permitan al estudiante producir, organizar y re-organizar la red de relaciones que se deben establecer en la resolución de una situación problemática que "obliga" al funcionamiento del objeto, los procedimientos o técnicas que se despliegan para resolverla, las definiciones, propiedades, argumentos que validan las acciones realizadas, todas ellas soportadas y reguladas por el lenguaje simbólico, propio de la Matemática, y la lengua natural. (INFOD, 2010)

1.2 Problema de Investigación

1.2.1 Planteamiento del problema y preguntas de investigación

Teniendo en cuenta los antecedentes expuestos y el marco teórico, nos cuestionamos sobre los significados del concepto de diferencial de una función y sus implicancias para la formación de profesores de matemáticas.

Sabiendo que el concepto de diferencial genera diversas dificultades en su enseñanza y aprendizaje, tanto en profesores como en estudiantes (López-Gay, 2015), por los diversos significados y contextos en los cuales es utilizado en matemáticas y en las ciencias experimentales e ingeniería (Pulido, 2010), consideramos necesario determinar un modelo de referencia que pueda ser aplicado para orientar los procesos de estudio en torno a este concepto en las carreras universitarias.

Nuestro problema de investigación concierne al estudio de los distintos significados del objeto matemático diferencial y las implicaciones que esto tiene para la formación de profesores de matemáticas. En este sentido, no solo se contemplará la reconstrucción de un modelo teórico, sino también las implicaciones de este modelo en la educación matemática; es decir, se contemplará el desarrollo de conocimientos y competencias didáctico-matemáticas para la enseñanza y aprendizaje del concepto de diferencial desde la mirada del modelo ontológico semiótico previamente establecido.

Concretamente nos planteamos las siguientes cuestiones:

1) *¿Cuáles son las configuraciones de objetos y procesos matemáticos implicados en las prácticas que constituyen los diversos significados del concepto de diferencial? (Configuraciones epistémicas)*

2) *¿Cuáles son los diversos significados del diferencial y qué elementos permiten distinguirlos?*

3) *¿Cómo se relacionan y articulan entre sí los diversos significados del diferencial?*

4) *¿Es posible definir un modelo, para categorizar los significados del diferencial según el grado de generalidad y formalización de los objetos intervinientes?*

5) *¿Qué situaciones-problemas permiten abordar y articular los significados parciales del concepto de diferencial en la formación inicial de profesores de matemática?*

6) *¿Qué aspectos y criterios deberían tener en cuenta un profesor para optimizar los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto de diferencial?*

7) *¿Cuáles son las configuraciones de objetos y procesos puestas en juego por los futuros profesores de matemática en la resolución de los problemas en torno a los significados parciales de la diferencial? (configuraciones cognitivas)*

8) *¿Qué tipo de acciones formativas sería necesario y posible implementar en un programa de formación para iniciar a los futuros profesores en el conocimiento y la competencia para el análisis ontosemiótico?*

9) *¿Qué tipo de acciones formativas sería necesario y posible implementar en un programa de formación para promover en los futuros profesores el conocimiento y uso competente de herramientas para la reflexión sistemática sobre un proceso de estudio del diferencial?*

10) *¿Cuál es el grado de idoneidad didáctica del proceso formativo implementado en la formación inicial de profesores de matemática sobre el significado global del concepto de diferencial?*

11) *¿Qué cambios se deberían introducir en el diseño e implementación del proceso formativo para incrementar su idoneidad didáctica en una próxima implementación en la formación inicial de profesores de matemática?*

Las respuestas a estos interrogantes nos permitirán, en primer lugar, caracterizar y establecer niveles entre los diversos significados del diferencial, en función de las configuraciones de prácticas, objetos y procesos, que intervienen en la resolución de las situaciones-problemas, donde se pone en juego el concepto de diferencial. En segundo lugar, se pretende diseñar, implementar y valorar un ciclo formativo en la formación de profesores de matemática en relación con los diversos significados del concepto de diferencial con el objetivo de indagar sobre las implicancias del modelo ontosemiótico de referencia para la formación de profesores de matemática.

En la siguiente sección se detallan los objetivos que pretendemos lograr en esta tesis.

1.2.2 Objetivos de investigación

Los objetivos generales y específicos de nuestro trabajo lo formulamos en los siguientes términos:

OG-1: *Establecer un modelo ontosemiótico de referencia de los diversos significados del concepto de diferencial.*

Este objetivo general se concreta en los siguientes objetivos específicos:

OE-1.1: *Realizar un estudio histórico-epistemológico del concepto diferencial.*

OE-1.2: *Identificar los significados parciales del concepto diferencial a partir del estudio histórico-epistemológico.*

OE-1.3: *Reconocer las configuraciones de prácticas, objetos y procesos asociados a los diversos significados del diferencial.*

OE-1.4: *Reconstruir un significado holístico o global de referencia del diferencial a partir de los significados parciales y las configuraciones ontosemióticas identificadas.*

OG-2: *Analizar y promover el crecimiento profesional en los futuros profesores de matemáticas sobre conocimientos y competencias didáctico-matemáticas relativos al modelo ontosemiótico del concepto de diferencial.*

OE-2.1: *Diseñar e implementar experiencias formativas en un grupo de futuros profesores de matemática para desarrollar en ellos conocimientos y competencias didáctico-matemáticas sobre la enseñanza del concepto de diferencial.*

OE-2.2: *Valorar la idoneidad didáctica de las experiencias formativas e identificar mejoras potenciales.*

Capítulo 2: Marco Teórico y Metodológico

2.1 El Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS)

2.1.1 Bases epistemológicas, ontológicas, semióticas, antropológicas, cognitivas e instruccionales del EOS

Siguiendo la mencionada línea de investigación, este trabajo se enmarca en el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS) desarrollado por Godino y colaboradores (Godino, 2017; Godino et al., 2007; 2020).

El EOS es un sistema teórico que adopta una visión antropológica y pragmatista de las matemáticas, al considerar como problema epistemológico ¿cómo emerge y se desarrolla la matemática? ya que entiende que la actividad de las personas en la resolución de problemas es un elemento central en la construcción del conocimiento matemático. En cuanto al problema ontológico, se pregunta sobre ¿qué es un objeto matemático y qué tipos de objetos intervienen en la actividad matemática?, donde plantea que los objetos emergen de un sistema de prácticas y que existe una tipología de objetos que se caracteriza y describe a partir de una configuración ontosemiótica (Godino et al., 2020).

En el problema semiótico-cognitivo, se pregunta sobre ¿qué es conocer un objeto matemático? ¿qué significa el objeto para un sujeto en un momento y circunstancias dadas? Desde el EOS se asume que el conocimiento es el conjunto de relaciones que el sujeto (persona o institución) establece entre los objetos y las prácticas, y que se modelizan por medio de las funciones semióticas (Godino et al., 2020).

Frente a los problemas epistemológicos y semiótico-cognitivos, desde el EOS se han desarrollado las nociones de significados pragmáticos y la configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos para comprender el sentido de los objetos matemáticos.

2.1.2 Significados sistémicos-pragmáticos

Se define como práctica matemática a "toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a distintos contextos y problemas" (Godino y Batanero, 1994, p. 334). Un objeto matemático, como objeto institucional se considera como un "emergente del sistema de prácticas sociales asociadas a un campo de problemas” (p. 335), y el significado de un objeto queda formado por el “sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas de las que emerge el objeto en un momento dado” (p. 338).

Al identificar el significado pragmático de un objeto matemático con las prácticas operativas y discursivas que se realizan para resolver un tipo de situación-problema, una estrategia metodológica para describir dicho significado consiste en la elección de un problema prototípico, elaborar la secuencia de prácticas e identificar la trama de objetos y procesos que se ponen en juego en la solución. Este análisis permite gestionar procesos de estudio matemático y reconocer la complejidad ontosemiótica de la actividad matemática como fuente de explicación de las dificultades que se presentan en los procesos de instrucción matemática (Burgos y Godino, 2020).

La diferencia entre el sentido y significado de un objeto matemático se encuentra que, al considerar, desde el punto de vista pragmático, que el significado de un objeto se caracteriza por un sistema de prácticas, éstas se pueden parcelar en diferentes subconjuntos de clases de prácticas más específicas que son empleadas en un determinado contexto y con un determinado tipo de notación, produciendo de esta manera un sentido específico. De esta manera, cada contexto ayuda a generar sentido, es decir, permite generar un subconjunto de prácticas matemáticas, pero no logra generar todos los sentidos (Font et al., 2020).

El conjunto de los significados parciales de un objeto permite construir un significado de referencia de este, a partir de identificar las interconexiones entre ellos, lo que posibilita establecer niveles de generalización y formalización entre los significados.

2.1.3 Configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos

Para el análisis del significado de los conceptos matemáticos se ha desarrollado la noción de configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos que intervienen en la resolución de situaciones-problemas, las cuales son la razón de ser de la actividad matemática y de los objetos emergentes de la misma. Los objetos matemáticos son clasificados en categorías según su naturaleza y función (Godino et al. 2007, p. 132):

- *lenguajes (términos, expresiones, notaciones, gráficos) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, etc.);*
- *situaciones-problemas (aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios);*

— *conceptos (introducidos mediante definiciones o descripciones);*

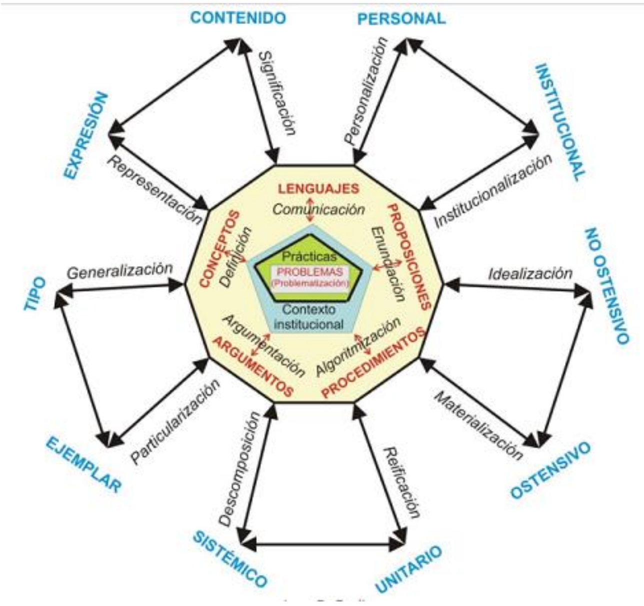
— *proposiciones (enunciados sobre conceptos);*

— *procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo);*

— *argumentos (enunciados para justificar las proposiciones y procedimiento deductivos o de otro tipo).*

Figura 2.1

Configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos



Fuente: Godino (2014, p. 23).

La configuración ontosemiótica es una herramienta teórica y metodológica muy útil porque permite describir la complejidad de los objetos matemáticos y de las prácticas matemáticas de las cuales emergen e interactúan los objetos. Es por lo que cada configuración permite la resolución de un determinado tipo de problema del campo de problemas donde interviene de manera clave el objeto en estudio.

2.1.4 Modelo ontosemiótico de referencia del significado global de un concepto y los niveles de complejidad ontosemiótica

Desde el EOS, un objeto matemático es “cualquier entidad material o inmaterial que interviene en la práctica matemática, apoyando y regulando su realización” (Godino et al., 2020, p. 6). Esta definición general de objeto se complementa con una tipología de objetos, dentro de la cual se incluyen los conceptos, entendidos desde una perspectiva unitaria como una entidad matemática que se define (concepto-definición). Pero sobre un concepto matemático, como el diferencial, se puede adoptar también una perspectiva sistémica, en cuyo caso el concepto de diferencial viene a ser la configuración ontosemiótica asociada a una de sus definiciones, y, por tanto, al sistema de prácticas, objetos y procesos implicados en la resolución de un problema prototípico en que interviene el diferencial. Como para el concepto de diferencial, o cualquier otro concepto, se pueden encontrar diferentes definiciones ligadas a diferentes contextos de uso y situaciones-problemas, cada una de ellas constituye un significado parcial o sentido del concepto. El significado pragmático global del concepto de diferencial será, por tanto, la trama de configuraciones ontosemióticas que se puede reconstruir en las cuales dicho objeto interviene de manera clave, determinando de esta manera, lo que se conoce como modelo ontosemiótico del concepto matemático.

La perspectiva que adopta el EOS sobre la complejidad de los objetos matemáticos permite "reformular la visión ingenua de que hay un mismo objeto matemático con diferentes representaciones" (Font et al., 2020, p. 116). Porque se considera hay un sistema complejo de prácticas para resolver problemas, en las que el objeto matemático no aparece directamente, sino más bien emergen representaciones del objeto, diferentes definiciones, proposiciones y propiedades del objeto, procedimientos y técnicas que se aplican al objeto y argumentos sobre el objeto, lo cual se denominan configuraciones epistémicas de los objetos primarios (Font et al., 2020).Este tipo de acciones, se vienen llevando a cabo desde el EOS con otros conceptos, por ejemplo, la tesis doctoral de Burgos (2020) que aborda un modelo ontosemiótico del razonamiento proporcional y sus implicaciones en la formación del profesorado de matemáticas, el modelo ontosemiótico de los significados de la probabilidad (Batanero, 2005), del razonamiento algebraico (Godino et al., 2014), de la proporcionalidad (Godino, Beltrán-Pellicer et al., 2017, Burgos, 2020), etc. En términos teóricos, asumimos una concepción pragmática (operacional) del significado, que implica concebir a los objetos matemáticos como herramientas conceptuales que emergen y se desarrollan a través de su uso.

Adoptar un modelo teórico para un determinado concepto, es importante para afrontar el problema educativo-instruccional. Tanto en el diseño curricular, como en el diseño de libros de textos escolares, o en la planificación de la enseñanza, las herramientas del EOS permiten al investigador, profesor, formador, decidir cuáles serán los sistemas de prácticas que se quieren poner en juego respecto a un conjunto de objetos matemáticos para que los estudiantes (del nivel que se está educando) los conozcan y aprendan a utilizarlos de manera competente para resolver un determinado tipo de situaciones-problemas. Estos sistemas de prácticas son los significados institucionales (o epistémicos) de los objetos matemáticos y, precisamente, constituyen los significados de referencia de la enseñanza.

2.1.5 Teoría de la Idoneidad Didáctica

Frente a la pregunta ¿Qué tipo de acciones y recursos se debería implementar en los procesos de instrucción para optimizar el aprendizaje matemático? (Godino et al., 2021). Desde la perspectiva del EOS se ha desarrollado la noción de idoneidad didáctica como criterio sistémico de optimización de un proceso de instrucción matemática. Considerándolo como el grado en que dicho proceso reúne ciertas características que permiten calificarlo como óptimo o adecuado para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes y los significados institucionales pretendidos o implementados, teniendo en cuenta las circunstancias y los recursos disponibles (Godino et al., 2020).

La Teoría de la Idoneidad Didáctica (Godino et al., 2023) propone seis facetas o dimensiones para el análisis y valoración de un proceso de instrucción, los cuales son desarrollados por Godino (2013, p. 116) como:

- *Idoneidad epistémica:* se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia.
- *Idoneidad ecológica:* grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla.
- *Idoneidad cognitiva:* expresa el grado en que los significados pretendidos/ implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/implementados.
- *Idoneidad afectiva:* grado de implicación (interés, motivación, ...) del alumnado en el proceso de estudio. La idoneidad afectiva está relacionada

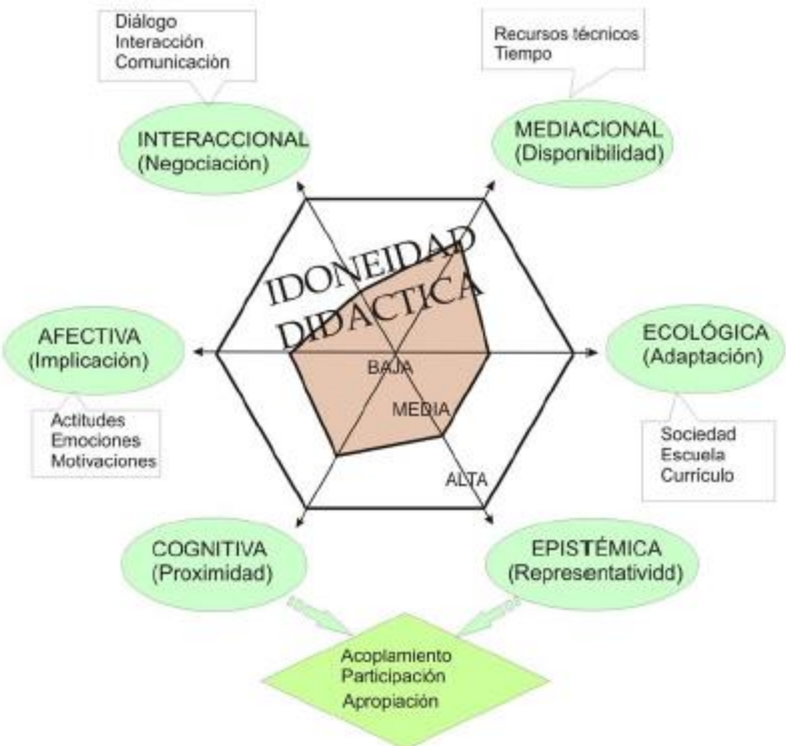
tanto con factores que dependen de la institución como con factores que dependen básicamente del alumno y de su historia escolar previa.

— *Idoneidad interaccional:* Un proceso de enseñanza-aprendizaje tendrá mayor idoneidad desde el punto de vista interaccional si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales, y por otra parte permitan resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción.

— *Idoneidad mediacional:* grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza aprendizaje.

Figura 2.2

Facetas de la Idoneidad Didáctica



Fuente: Godino (2013, p. 117).

El grado de idoneidad didáctica se puede representar mediante un hexágono regular como se muestra en la Figura 2.2. Cada vértice corresponde al grado de idoneidad correspondiente a un proceso de estudio pretendido o planificado, donde a priori se considera el grado máximo de las idoneidades parciales. El hexágono irregular interior corresponde a las idoneidades parciales efectivamente logradas en la realización del proceso de estudio implementado.

La Teoría de las Idoneidad Didáctica (TID) (Godino et al., 2023) nos brinda herramientas teóricas y metodológicas que nos permite, el análisis de un proceso de estudio puntual de una sesión de clases, una planificación, una unidad didáctica, una propuesta curricular o el desarrollo de un ciclo formativo para la formación de futuros profesores de matemáticas, como se pretende abordar en esta investigación. También es posible emplearlos para analizar aspectos parciales de un proceso de estudio, como un libro de texto, un material didáctico, conflictos en el cognitivos, respuestas de los estudiantes a una tarea, entre otros. Lograr que un proceso de estudio resulte con una alta idoneidad es complejo, debido a las dimensiones que intervienen en el mismo. Es por ello que, se han desarrollado, indicadores empíricos para cada uno de los componentes de cada idoneidad parcial con el objetivo de utilizarlos como unos principios que guían el análisis y valoración de los procesos de estudio pretendido o implementados.

La utilización de la idoneidad didáctica como herramienta metodológica ha sido estudiado por Malet et al. (2021) donde identificaron nueve categorías emergentes de aplicación y contextos de uso de esta herramienta desde el 2005 hasta el 2020. En las investigaciones analizadas se destaca la idoneidad didáctica como herramienta para valorar orientaciones curriculares, planes de estudio o programas de formación; para valorar videos educativos; para determinar criterios de idoneidades de tópicos específicos; para desarrollar la competencia de análisis didáctico en la formación docente; para valorar el diseño y/o implementación de un ciclo educativo; para valorar el diseño y/o implementación de un ciclo educativo; para valorar las acciones didácticas o producciones escritas de los profesores en formación; para interpretar valoraciones realizadas por profesores o futuros profesores; y para diseñar actividades y secuencias didácticas.

Dada la creciente relevancia y la amplia adopción a nivel internacional, nuestra tesis se apoya en la teoría de la idoneidad didáctica para abordar tres aspectos cruciales. En primer lugar, se enfoca en desarrollar criterios que caractericen las idoneidades de cada una de las facetas para el estudio del concepto del diferencial. En segundo lugar, se centra en el diseño de actividades y su evaluación durante la implementación de un ciclo formativo. Es importante destacar que estos dos aspectos involucran a los mismos investigadores que aplican la teoría de la idoneidad didáctica.

Un tercer aspecto crucial implica la aplicación de esta teoría por parte de los futuros profesores. Nuestra propuesta se orienta hacia el diseño de un programa formativo que habilite a los participantes para utilizar la teoría de manera competente. De esta forma, se busca que los futuros profesores sean capaces de aplicar estos criterios de manera efectiva en su labor educativa.

2.1.6 Modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemático del Profesor de Matemática (CCDM)

Investigadores en el campo de la formación de profesores han enfrentado el interrogante sobre cuáles son o deberían ser los conocimientos necesarios para la enseñanza de las matemáticas (Chapman, 2014; English, 2008; Mason, 2016). En este sentido, varios investigadores han desarrollado modelos teóricos proponiendo diferentes categorías y componentes de los conocimientos y competencias necesarios para la enseñanza (Escudero et al., 2015; Neubrand, 2018; Petrou y Goulding, 2011; Schoenfeld y Kilpatrick, 2008; Shulman, 1987; entre otros).

Desde la perspectiva del Enfoque Ontosemiótico, se propone el modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticos (modelo CCDM) como una extensión del modelo de Conocimientos Didáctico-Matemáticos (CDM) del profesor de matemáticas. En el modelo CMD se propone que los conocimientos de los profesores pueden organizarse de acuerdo con tres grandes dimensiones: matemática, didáctica y meta didáctico-matemática.

La primera dimensión, matemática, refiere a los conocimientos que debe tener un profesor de las matemáticas escolares que enseña y se divide en dos tipos: un conocimiento *común del contenido*, referido a aquellos conocimientos que debería tener un profesor sobre un objeto matemático en particular (por ejemplo, el diferencial); este conocimiento le permitirá resolver tareas o problemas propuestas en el currículo y/o en los libros de texto del nivel en el cual se esté desempeñando; un conocimiento ampliado del contenido, articulado y compartido con los niveles educativos superiores.

La segunda dimensión, refiere a los conocimientos sobre los diversos aspectos involucrados en los procesos de enseñanza y aprendizaje de tales matemáticas (conocimiento profundo de las matemáticas escolares y su interacción con aspectos cognitivos y afectivos de los estudiantes, recursos y medios, interacciones en el aula, y aspectos ecológicos).

La dimensión meta didáctico-matemática es la que refiere a los conocimientos que debe tener un profesor para poder sistematizar la reflexión sobre su propia práctica y así poder emitir juicios valorativos sobre su práctica o la de otros (Breda, Font y Pino-Fan 2018; Pino-Fan et al., 2022; Pino-Fan et al., 2018).

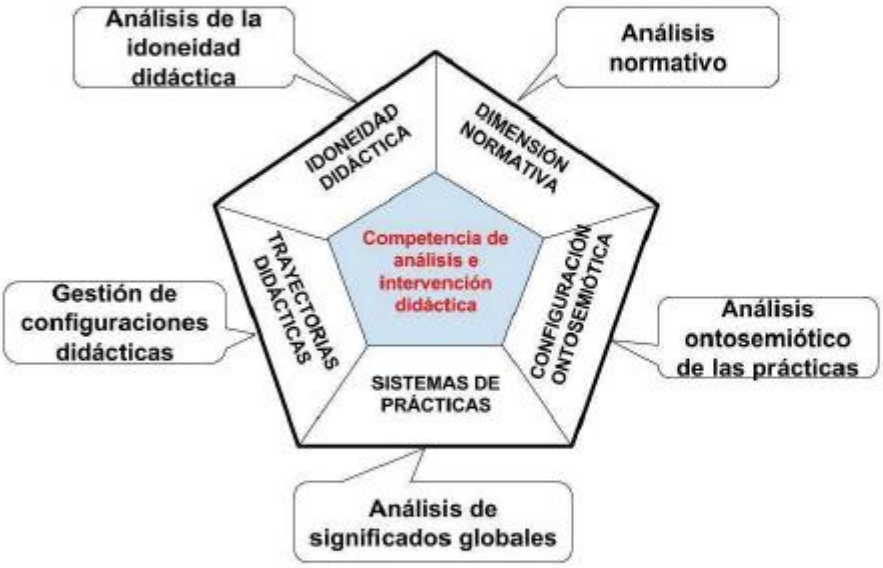
El modelo CDM se ha presentado en varios trabajos como una herramienta teórico-metodológica que permite desarrollar, competencias claves para la práctica del profesor de matemáticas. Se espera que el profesor pueda analizar la actividad matemática al resolver los problemas, identificando prácticas, objetos y procesos puestos en juego, y problemas didácticos que se presentan en la enseñanza, donde también intervienen objetos matemáticos y didácticos específicos que el profesor debe conocer.

Para el desarrollo de estas competencias y conocimientos, desde el EOS se plantea la competencia general de diseño e intervención didáctica, específica del profesor de matemáticas, que a su vez se compone de cinco sub-competencias como se muestra en la Figura 2.3 (Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017):

- *competencia de análisis de los significados globales,*
- *competencia de análisis ontosemiótico de prácticas matemáticas,*
- *competencia de análisis y gestión de configuraciones didácticas,*
- *competencia de análisis normativo, y*
- *competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica*.

Figura 2.3

Componentes de la competencia de análisis e intervención didáctica



Fuente: Godino, Batanero, Font y Giacomone (2016, p. 292)

El modelo CCDM nos permite adoptar una posición teórica sobre qué entendemos por conocimientos y competencias profesionales del profesor de matemáticas y diseñar secuencias didácticas que pongan en juego el concepto de diferencial de manera fundamentada.

Competencia de análisis ontosemiótico de prácticas matemáticas: se considera que el profesor de matemáticas debe ser conocer y comprender la idea de configuración de objetos y procesos matemáticos, implicados en las tareas y sus posibles soluciones, y ser capaz de usarla de manera competente en los procesos de diseño didáctico. Esta identificación le permitirá comprender la progresión de los aprendizajes, gestionar los necesarios procesos de institucionalización y evaluar las competencias matemáticas de los alumnos.

Competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica: como ya se ha mencionado, en el marco del EOS se ha introducido la noción de idoneidad didáctica, que orienta el análisis a nivel macroscópico de los procesos de estudio matemático. Se espera que el profesor de matemáticas, fijado un tema específico en un contexto educativo determinado, por ejemplo, el estudio de la diferencia en el bachillerato sea competente en emitir un juicio fundamentado sobre la idoneidad didáctica de tal proceso de estudio matemático, y para ello, es imprescindible realizar una reconstrucción de los significados de referencia didáctica del tema correspondiente. La noción de idoneidad didáctica (Godino, 2013) permite al docente reflexionar sobre ¿cuáles son los conocimientos didáctico-matemáticos resultados de las investigaciones e innovaciones sobre la diferencial de una función? ¿cuál es el grado de idoneidad didáctica del proceso de enseñanza-aprendizaje implementado? y ¿qué cambios se deberían introducir en el diseño e implementación del proceso de estudio para incrementar su idoneidad didáctica? La noción de idoneidad didáctica se ha introducido como una herramienta de apoyo para la reflexión global sobre la práctica didáctica, su valoración y mejora progresiva. El profesor de matemáticas debe conocer, comprender y valorar esta herramienta y adquirir competencia para su uso pertinente. Se trata de la competencia de análisis de la idoneidad didáctica de los procesos de estudio matemáticos (Godino, Giacomone et al., 2017).

Desde el modelo CCDM se vienen desarrollando investigaciones a nivel internacional, como lo mencionan Font et al. (2020) destacando la importancia de desarrollar la sub-competencias de análisis y valoración de la idoneidad didáctica. Además, destacan que el uso de los criterios de idoneidad didáctica constituye una herramienta muy potente para organizar la reflexión del profesor sobre su práctica, para valorarla y proponer mejoras en la misma.

En dichas investigaciones se destacan dos aspectos que consideramos fundamentales para nuestra investigación, en primer lugar resaltan que aunque no se trabaje explícitamente sobre la enseñanza de los componentes e indicadores de los criterios de idoneidad didáctica, algunos de ellos, y en particular la componente "muestra representativa de la complejidad del objeto matemático" de la idoneidad epistémica, están presentes de forma implícita en las valoraciones de las propuestas didácticas que realizan profesores o futuros profesores (Breda y Lima, 2016; Breda et al., 2017).

El segundo punto que se resalta es la incorporación de dispositivos o ciclos formativos para enseñar a valorar la idoneidad epistémica de un proceso de enseñanza y aprendizaje, como parte del proceso de formación del futuro profesor de matemáticas, teniendo en cuenta que no es una tarea sencilla para los estudiantes, profesores y formadores (Breda et al., 2017; Seckel y Font, 2020).

Para el estudio de la componente "muestra representativa de la complejidad del objeto matemático" es necesario que los dispositivos o ciclos formativos destinados para la formación de profesores de matemáticas hagan hincapié en la necesidad de realizar un análisis preliminar sobre los significados del objeto matemático y que este orientado a la reconstrucción de un significado global del concepto que se quiere enseñar con la finalidad de ser consciente de su complejidad (Font et al., 2020).

2.2 Descripción General de la Metodología

2.2.1 Enfoque metodológico, técnicas e instrumentos

La investigación se encuadra en una metodología cualitativa (McMillan y Schumacher, 2001) utilizando distintos métodos para lograr cada objetivo. Para afrontar el objetivo general 1 pretende realizar un estudio histórico-epistemológico sobre el origen y evolución del concepto de diferencial a lo largo de la historia del cálculo, y luego efectuar un análisis ontosemiótico de las prácticas, objetos y procesos que intervienen en la resolución de situaciones-problemas asociadas a cada tipo de significado.

Con respecto al método a emplear para la recolección de datos, en primer lugar, se realizará un estudio documental histórico-epistemológico sobre el origen y evolución del concepto diferencial para construir un significado de referencia de este (Godino et al., 2007). Para este estudio se consultarán diferentes fuentes de información, como libros, revistas y páginas especializadas en didáctica de la matemática y en la historia de las matemáticas.

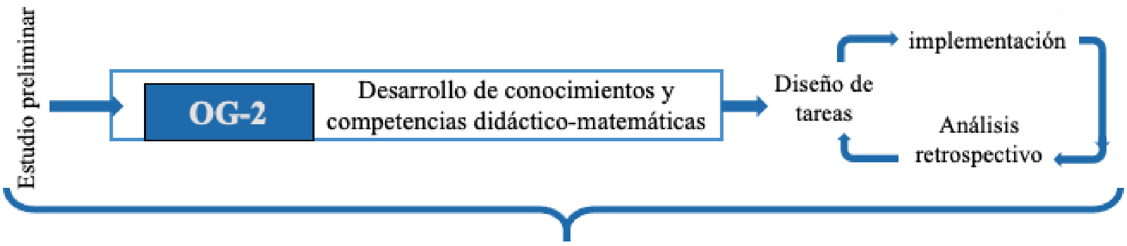
Posteriormente, se empleará la técnica de análisis ontosemiótico (Godino, 2002) basado en la metodología de análisis de contenido, de los significados puestos en juego en la resolución de situaciones-problemas a partir de la identificación de los objetos y procesos que intervienen en las prácticas matemáticas operativas y discusivas.

Para el análisis ontosemiótico, en primer lugar, se seleccionará una situación-problema del estudio histórico epistemológico y sus diferentes formas de resolución. Luego se identificaron los objetos primarios intervinientes en las prácticas matemáticas reconociendo los diferentes grados de generalidad y formalidad, lo que nos permitirá establecer los significados parciales del objeto y definir relaciones jerárquicas entre ellas en función de su complejidad (Burgos y Godino, 2020).

Para la organización y estudio de los datos del análisis ontosemiótico se utilizará la organización propuesta por Godino, Beltrán-Pellicer et al. (2017) para establecer relaciones entre las prácticas matemáticas mediante una tabla. Dicha tabla cuenta con tres columnas en la cual se dispone el sistema de prácticas resolutivas, en la primera columna, se identifican los usos e intencionalidad de cada práctica en la resolución de la tarea, en la columna central, y en la tercera columna, los objetos matemáticos que entran en juego en cada práctica.

El análisis de cada tabla, es decir, el análisis ontosemiótico de las situaciones-problemas permitirá una reflexión en torno a cómo entran en juego los objetos y procesos matemáticos identificados, para reconocer el significado del concepto que está asociado a las prácticas matemáticas, operativas y discursivas, de la resolución del problema seleccionado.

El segundo objetivo general se enmarca en un enfoque cualitativo que recolecta y analiza datos a lo largo de un ciclo formativo, de tipo descriptivo y exploratorio. Se aplicará el método de las investigaciones de diseño (Kelly et al., 2008) basado en las cuatro fases siguientes y fundamentadas por las herramientas del EOS: estudio preliminar, diseño de tareas, implementación, análisis retrospectivo:



Valoración de la idoneidad didáctica de todo el ciclo formativo

En el *estudio preliminar* se contempla la descripción de los significados institucionales en términos de configuraciones de prácticas, objetos y procesos matemáticos, y el sistema de relaciones y restricciones institucionales que condicionan el proceso de estudio (faceta epistémica-ecológica). Además, se analizan las prácticas personales de los estudiantes en términos de configuración de prácticas, objetos y procesos matemáticos, y se tiene en cuenta las componentes de la afectividad (emociones, actitudes, creencias y valores) en los estudiantes en relación con los objetos matemáticos y el proceso de estudio diseñado (faceta cognitiva-afectiva). También, se describen los patrones de interacción entre profesor y estudiantes, el uso de los recursos materiales y tecnológicos, y el tiempo destinado a las experiencias formativas (faceta interaccional-mediacional)

Para el *diseño de tareas*, se consideran los siguientes aspectos: se precisa la secuencia de las situaciones didácticas a implementar teniendo en cuenta el análisis a priori y la adaptación de la secuencia al contenido establecido en el diseño curricular (factores epistémicos y ecológicos). También, se identifican las características de los participantes, sus conocimientos previos y sus potenciales dificultades de aprendizaje (factores cognitivos y afectivos). Además, se establece el tiempo destinado para abordar la secuencia de actividades y los recursos a utilizar (factores instruccionales). Es importante considerar que el diseño puede tener variaciones de acuerdo a cómo se va desarrollando la implementación.

En la *implementación* se observa, registra y describe con detalle la implementación efectiva de las acciones formativas. Esta descripción de la trayectoria didáctica efectiva ayuda a identificar conflictos, aprendizajes logrados y grado de avance del logro de las competencias pretendidas.

En la última fase, con el análisis retrospectivo, se realiza una valoración de cada acción formativa implementada contrastando con el análisis a priori, desde las seis facetas que intervienen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (epistémica, cognitiva, afectica, interaccional, mediacional y ecológica), identificando conflictos, fortalezas, limitaciones y posibles mejoras para una futura implementación.

2.2.2 Contexto de la investigación, participantes y recogida de datos

Los ciclos formativos se van a desarrollar con estudiantes del cuarto año del Profesorado de Educación Secundaria en Matemática de un Instituto Superior de Formación Docente de la provincia de Misiones en Argentina. Las sesiones de clases se enmarcan en la cátedra de Seminario de Didáctica de la Matemática, donde los estudiantes se inician en la investigación educativa en matemáticas, según el diseño curricular jurisdiccional de la carrera.

El régimen de cursado del seminario es anual, ubicado según el plan de estudio en el cuarto año y se dispone de 2 horas cátedras de 45 minutos cada uno, esto implica que se realiza el encuentro con los estudiantes una vez a la semana, por lo general, los viernes son los días de encuentro. A modo de organización institucional, el cuarto año del profesorado se desarrolla en el turno noche, lo que implica que las clases comienzan a las 18 horas, esto se debe a que los estudiantes realizan sus residencias o prácticas profesionales durante el turno mañana o tarde las escuelas asociadas a la institución.

En el seminario, FPM se inician en la investigación educativa en matemática con la construcción de un trabajo de investigación, que lo realizan en pequeños grupos de 2 o

3 integrantes, sobre alguna problemática de la enseñanza de la matemática que les interese estudiar. Durante el transcurso del año, los FPM realizan una revisión de antecedentes, seleccionan un marco teórico y formulan su problema, pregunta y objetivos de su investigación. Luego avanzan hacia las definiciones metodológicas con el diseño de un instrumento (actividades, cuestionarios, entrevistas, etc.) y realizan el análisis a priori de las actividades. Luego de este proceso, se implementa la actividad con estudiantes del nivel secundario, que por lo general se aplica en los cursos donde están realizando sus residencias pedagógicas. Posterior a la implementación, realizan un análisis a posteriori y evaluación de la actividad e implementación para establecer las conclusiones de su trabajo de investigación. Cabe destacar que la construcción de este trabajo de investigación se realiza en articulación con la cátedra de EDI IV (Espacio de Definición Institucional) que tiene la intención de apoyar y reforzar las actividades del seminario. Para mayores detalles de la forma de trabajo entre cátedras y para conocer algunos trabajos de los estudiantes, les invitamos a leer los siguientes artículos: Golz et al. (2022), Puczko et al. (2019), y Verón y Clasen (2021).

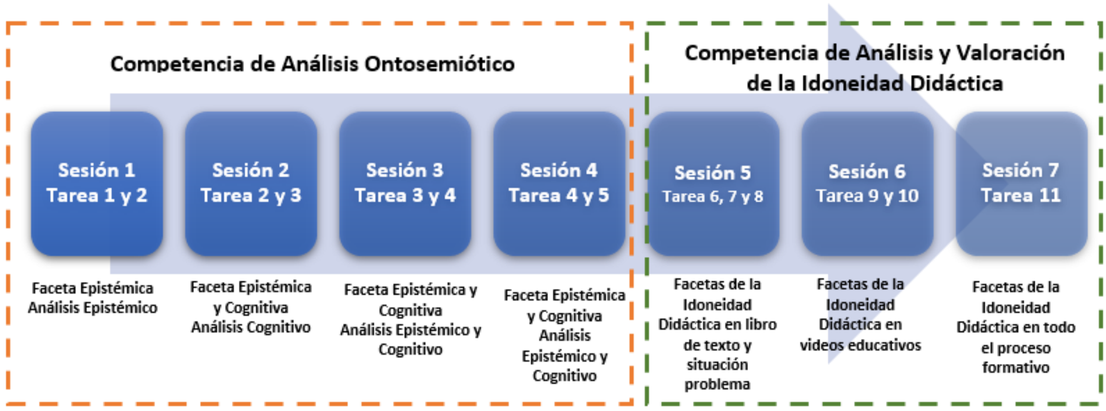
Teniendo en cuenta la forma de trabajo en el seminario y que el profesor responsable es el doctorado de esta tesis, por lo general, los estudiantes utilizan algunas herramientas teóricas y metodológicas del EOS para sus investigaciones, en particular, se emplea la noción de configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos para el análisis a priori y a posteriori. Esto genera que las circunstancias contextuales sean muy adecuadas para abordar con los FPM el desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico y la competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica desde la perspectiva ontosemiótica.

El primer ciclo de formación se desarrolló en cuatro sesiones de clases de 2,5 horas, los viernes a partir de las 18 horas a mediados de septiembre y octubre (ver Figura 2.4). Realizo esta aclaración porque durante la implementación, dos estudiantes por cuestiones religiosas no podían estar presente en las clases, por lo que se realizaron las adaptaciones y acompañamiento necesario para trabajar con estos estudiantes los viernes en el turno tarde a partir de las 13 horas.

El segundo ciclo de formación se desarrolló en tres sesiones de clases de 2,5 horas, los viernes durante los meses octubre y principio de noviembre, inmediatamente después de haber finalizado el primer ciclo, con lo cual, los FPM ya habían abordado los significados parciales de la diferencial y habían resuelto cinco tareas que propician el desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico (ver Figura 2.4). Además, es necesario destacar que los FPM, en el primer cuatrimestre habían participado de un taller de reflexión docente donde se presentó y trabajo sobre las facetas de la idoneidad didáctica, cuyo taller tuvo una duración de 1,5 horas y consistió en relacionar sus valoraciones personales sobre una clase de matemáticas con la idoneidad didáctica. Este taller, forma parte de una serie de actividades formativas que propone la institución para los estudiantes.

Figura 2.4

Ciclos formativos para el desarrollo de competencias profesionales en los FPM



Con estas descripciones queremos dejar en claro las circunstancias contextuales de los FPM, ya que contaban con pequeñas experiencias previas. Aunque, en el seminario, antes de implementar los ciclos de formación, el profesor no trabajo con los FPM el análisis ontosemiótico y ni la idoneidad didáctica.

En las sesiones de clases la cantidad de estudiantes variaba, de 9 a 14, según la asistencia de estos, por tales motivos en el análisis de la implementación de cada una de las tareas encontraran que las cantidades de producciones están sujetas a la presencia del estudiante durante la sesión de clase.

Otro aspecto importante, es la codificación de las producciones de los FPM, ya que en cada tarea se identifica a los estudiantes con el código E1, E2, y así sucesivamente, pero no existe relación entre los códigos entre las tareas, es decir que la producción de E1 en la Tarea 1 no corresponde al mismo FPM que se identificó con E1 en la tarea 2, esto se debe a que las actividades las entregaban de manera anónima, sin ninguna identificación del FPM.

2.3 Síntesis y Conclusiones

La construcción de un modelo de referencia y el análisis de su implementación en un proceso formativo para la formación de profesores de matemáticas revisten gran importancia debido a sus implicaciones en la enseñanza y aprendizaje del concepto de diferencial en cursos de análisis matemático o cálculo, así como en la formación de profesores en la didáctica del análisis matemático.

En estos primeros capítulos se ha puesto en relevancia el problema de cuáles son los conocimientos y competencias que debería desarrollar un profesor en su formación inicial, usando como contexto el estudio del diferencial. La clava está en que no solo se busca diseñar, implementar y valorar un proceso formativo, sino partiendo de la base de delimitar un modelo de significados del diferencial, intervenir en los programas de formación inicial con el objetivo de incentivar el desarrollo de competencias y conocimientos de futuros profesores para el diseño e intervención didáctica. Esto constituye una contribución significativa a la educación matemática y, en particular, a la formación de profesores de matemáticas.

Es esencial considerar que los profesores de matemáticas desempeñarán un papel en una variedad de contextos educativos y disciplinas, no limitados exclusivamente a las matemáticas. Por lo tanto, es fundamental diseñar experiencias formativas que permitan a los profesores comprender los significados de los objetos matemáticos, como el diferencial, en diversos contextos. Esto les proporcionará las habilidades necesarias para abordar preguntas profesionales, como la relevancia de enseñar ciertos conceptos en un contexto particular y la utilidad de dichos conceptos para los estudiantes a quienes están formando.

Para abordar este problema, nos posicionamos bajo la perspectiva del Enfoque Ontosemiótico, cuyos nociones teóricas y herramientas metodológicas vienen siendo utilizadas en bastas investigaciones para abordar este tipo de acciones en contextos matemáticos diversos.

A continuación, se profundizan en las diversas herramientas del EOS que darán luz para el logro de los objetivos planteados.

Capítulo 3: Emergencia del Concepto de Diferencial: Estudio Histórico-Epistemológico

3.1 Introducción

El concepto de diferencial emerge de las situaciones-problemas que involucran a las diferencias, incrementos infinitamente pequeños, infinitesimales, variaciones o cambios muy pequeños, cantidades que pueden considerarse tan pequeña como se quiera, pero nunca cero, aproximación lineal y estimación. Estas situaciones surgen en el contexto de las matemáticas, a partir del planteo del cálculo de la tangente a una curva, la longitud de la curva, el área de una región o el volumen de un sólido de revolución. Pero también surgen en otras ciencias, como la física, la química, biología, economía, etc., donde los diferenciales son utilizados como una excelente herramienta para modelizar o matematizar los cambios pequeños o infinitamente pequeños de los fenómenos de estudio (Arcos, 2004; Gómez, 2019; Oldenburg, 2016).

Teniendo en cuenta que el diferencial es un concepto polisémico (López-Gay et al., 2015), que presenta diferentes significados según las configuraciones de prácticas, objetos y procesos que la caracterizan, creemos necesario realizar en este capítulo, un estudio histórico–epistemológico que permita reconocer, en un primer momento, a lo largo de la evolución histórica del cálculo, los problemas y las prácticas matemáticas que permitieron el surgimiento y evolución del concepto de diferencial junto con los objetos que intervienen en las mismas.

3.2 Origen y Evolución del Concepto de Diferencial

A continuación, realizamos una presentación de los principales aportes del concepto de diferencial a lo largo de los siglos del XVII hasta XX.

3.2.1 Los incrementos pequeños de Fermat

En la década de 1630 Fermat desarrolló un método para encontrar tangentes a cualquier curva polinómica. El procedimiento consistía en, por ejemplo, para encontrar la tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto (x, x^2), en primer lugar, se consideraba el punto $x + e$ sobre el eje x y s a la subtangente de la parábola en el punto (x, x^2), como se puede observar en la Figura 3.1. A partir de la semejanza de triángulos que quedan determinados es posible escribir que $\frac{x^2}{s} = \frac{k}{s+e}$ donde Fermat afirma que k es “adecuado o lo más parecido” a $(x+e)^2$ nos queda que $k \cong (x+e)^2$ y al reemplazarlo obtenemos lo siguiente:

$$\frac{x^2}{s} \cong \frac{(x+e)^2}{s+e}$$

Despejamos s de la ecuación (la numeración es sólo para guiar la lectura del procedimiento)

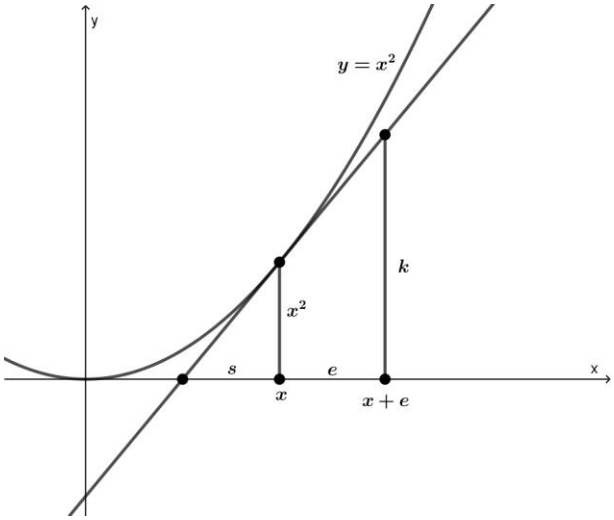
1	$x^2(s+e) \cong s(x+e)^2$	5	$s \cong \frac{x^2e}{(x+e)^2 - x^2}$
2	$x^2s + x^2e \cong s(x+e)^2$	6	$s \cong \frac{x^2e}{x^2 + 2xe + e^2 - x^2}$
3	$x^2e \cong s(x+e)^2 - x^2s$	7	$s \cong \frac{x^2e}{e(2x+e)}$
4	$x^2e \cong s[(x+e)^2 - x^2]$	8	$s \cong \frac{x^2}{2x+e}$

Por lo que resulta que$\frac{x^2}{s} \cong 2x + e$

Donde $\frac{x^2}{s}$ representa la pendiente de la tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto (x, x^2), luego Fermat “elimina” la e obteniendo así la pendiente de la tangente.

Figura 3.1

Método de Fermat para el cálculo de la tangente



El método empleado fue muy criticado por Descartes por la utilización de la e ya que en un principio en el procedimiento se podía dividir por e como si no fuese cero, pero luego se lo eliminaba como cero. Sobre este hecho Kleiner (2012) afirma que "la misteriosa e de Fermat encarnaba una idea crucial: la entrega de un "pequeño" incremento a una variable" (p. 70).

Como se puede observar, en el procedimiento del cálculo de la tangente de Fermat, identificamos un lenguaje geométrico y algebraico con símbolos y términos como la 'e' para expresar un incremento pequeño, '$\cong$' como 'adecuado o lo más parecido'.

Las prácticas matemáticas empleadas para la resolución de este problema siguieron siendo tema de discusión por grandes matemáticos, físicos y filósofos por la utilización de las cantidades pequeñas.

3.2.2 El cálculo de los diferenciales de Leibniz

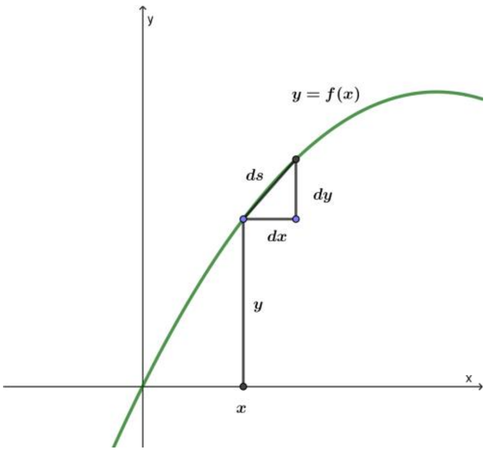
El cálculo de Leibniz fue cambiando a lo largo del tiempo y su concepto central es el diferencial. Leibniz considera que una curva está compuesta por un polígono con infinitos lados, cada uno con longitud infinitesimal, similar a la concepción griega del círculo como un polígono de infinitos lados. En la curva se asocia una secuencia infinita de abscisas x_1 , x_2 , x_3 , ... y una secuencia infinita de ordenadas y_1 , y_2 , y_3 , ... donde cada (x_i , y_i) representan las coordenadas de los puntos de la curva.

El diferencial de x, denotado por dx es la diferencia entre dos valores sucesivos de x, al igual que el diferencial de y como dy. "El diferencial dx es una cantidad fija distinta de cero, infinitamente pequeña en comparación con x – en efecto, un infinitesimal" (Kleiner, 2012, p. 75).

En la curva hay una secuencia de diferencias $x_i - x_{i-1}$ correspondientes a las abscisas $x_1, x_2, x_3, \ldots$ de la curva y cada lado del polígono que constituye la curva se denota con ds, que son infinitos e infinitesimales. A partir de los infinitesimales dx, dy, ds se determina el triángulo característico de Leibniz, como se observa en la Figura 3.2, que satisface la relación $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ donde el lado ds de la curva (lado infinitesimal del polígono) se considera coincidente con la tangente a la curva en el punto (x, y). Sobre este hecho Leibniz afirma: "encontrar una tangente es dibujar una línea recta que une dos puntos de la curva que tienen una distancia infinitamente pequeña, es decir, el lado prolongado del polígono infinitoangular que para nosotros es lo mismo que la curva" (Leibniz, 1684, p. 223, citado en Bos, 1974, p. 19).

Figura 3.2

Triángulo característico de lados infinitesimales dx, dy, ds de Leibniz



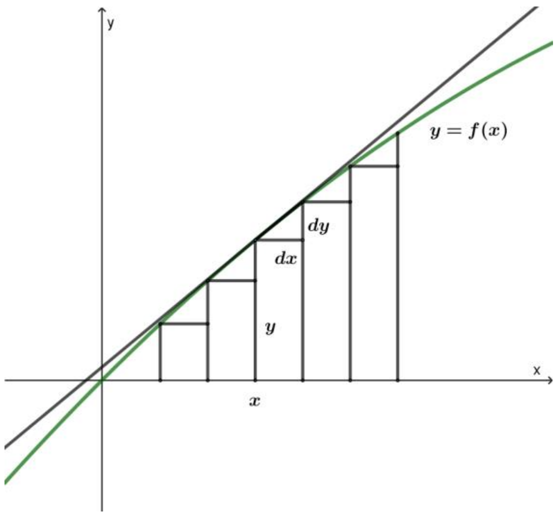
Fuente: Kleiner (2012, p. 76).

A partir del triángulo diferencial obtenemos que la pendiente de la tangente a la curva en un punto (x, y) queda determinada por el cociente de diferenciales $\frac{dy}{dx}$ denominado cociente diferencial.

Leibniz consideraba a la integral como una suma de infinitos rectángulos infinitesimales de base dx y altura y, como se observa en la Figura 3.3. Respecto de los triángulos que quedan determinados entre la curva y los rectángulos Leibniz señala que “son infinitesimales en comparación con dichos rectángulos, [y] pueden omitirse sin riesgo” (Edwards, 1979, p. 257). Los triángulos que sobran son los triángulos característicos de Leibniz y pueden ser vistos como un vínculo entre la diferenciación y la integración. La notación empleada para la integral es $\int xdx$, donde el símbolo $\int$ es una S alargada e indica una suma. Tanto Newton como Leibniz calculan las integrales por antidiferenciación.

Figura 3.3

La integral de Leibniz como una suma infinita de rectángulos infinitesimales



Fuente: Kleiner (2012, p. 76).

Para calcular la tangente en un punto (x, y) a la curva de la cónica $x^2 + 2xy = 5$, en primer lugar, se reemplazaba a x e y por $x + dx$ e $y + dy$, respectivamente, porque el punto $(x + dx, y + dy)$ es un punto de la cónica que se encuentra infinitamente cerca de (x, y). Al reemplazar nos queda:

$x^2 + 2xy = 5$ (1)

$$(x + dx)^2 + 2(x + dx)(y + dy) = 5$$

$x^2 + 2xdx + (dx)^2 + 2xy + 2xdy + 2ydx + 2dxdy = 5$ (2)

En este punto del desarrollo del ejercicio se descartan $(dx)^2$y $2dxdy$ porque se consideran insignificantes en comparación con los otros términos y restamos las ecuaciones (1) y (2), resultando:

$$2xdx + 2xdy + 2ydx = 0$$

Dividimos a ambos miembros por dx para obtener el cociente de diferenciales $\frac{dy}{dx}$

$$2x + 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

$$x + x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x - y}{x}$$

Se obtiene de esta manera un procedimiento que permite encontrar la pendiente de la tangente a cualquier curva por medio del cociente de diferenciales $\frac{dy}{dx}$.

Como podemos observar en el cálculo de Leibniz, el diferencial emerge de las situaciones-problemas donde intervienen las cantidades infinitamente pequeñas, cantidades consideradas desde un contexto y lenguaje geométrico (Arcos, 2004; Bos, 1974).

3.2.3 El cálculo de las fluxiones de Newton

El cálculo de Newton y Leibniz se basa en la noción de infinitesimal, donde se entiende que un infinitesimal era una cantidad infinitamente pequeña, menor que cualquier cantidad finita pero no nula (Martínez-Torregrosa et al., 2002).

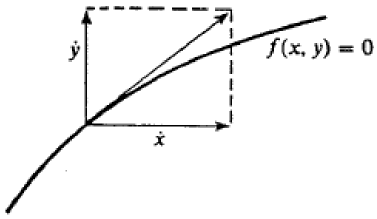
Para Newton las variables eran "fluidos", desde un enfoque geométrico y cinemático, de una cantidad que experimenta un cambio continuo, es decir, que implícitamente consideraba las variables como funciones que dependían del tiempo.

La "fluxión" era la tasa de cambio instantánea (velocidad instantánea) del fluido x, cuya notación es $\dot{x}$, y para calcular $\dot{x}$ se considera el movimiento de un punto en una curva $f(x, y) = 0$

Como la composición de los movimientos horizontales y verticales con velocidades $\dot{x}$ e $\dot{y}$, respectivamente (…), y desde la dirección del movimiento de un punto en la curva es a lo largo de la tangente a la curva, se deduce que la pendiente de la tangente a la curva $f(x, y) = 0$ en un punto (x, y) en la curva es $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ (Kleiner, 2012, p. 73).

Figura 3.4

Descomposición de Newton sobre el movimiento de un punto en una curva



Fuente: Kleiner (2012, p. 73).

En términos de la notación actual $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ y $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ donde la pendiente de la recta tangente, la derivada en el punto queda representado por el cociente de fluxiones $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$. A continuación, desarrollamos un ejemplo de cómo se calculaba la pendiente de la recta tangente a la curva de ecuación $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ en un punto (x, y). Newton considera un intervalo de tiempo infinitamente pequeño denotado por o, donde $\dot{x}o$ e $\dot{y}o$ representan incrementos infinitesimales en x e y, respectivamente, suponiendo que distancia $=$ velocidad x tiempo $= \dot{x}o$ o $\dot{y}o.$ Las velocidades instantáneas $\dot{x}$ e $\dot{y}$ del punto (x, y) permanecen constantes durante todo un intervalo de tiempo infinitamente pequeño o. Newton denomina a $\dot{x}o$ e $\dot{y}o$ como momentos, y un momento de un fluido es la cantidad que aumenta en un período de tiempo infinitesimal.

Entonces el punto $(x + \dot{x}o, y + \dot{y}o)$ es un punto de la curva infinitamente próximo a (x, y). Donde Newton afirma que "de modo que si las líneas descritas [coordenadas] son x e y en un momento, serán $x + \dot{x}o$ e $y + \dot{y}o$ en el próximo" (Kleiner, 2012, p. 73). Luego sustituimos el punto $(x + \dot{x}o, y + \dot{y}o)$ en la ecuación algebraica y resolvemos de la siguiente manera:

$$(x + \dot{x}o)^3 - a(x + \dot{x}o)^2 + a(x + \dot{x}o)(y + \dot{y}o) - (y + \dot{y}o)^3 = 0 \quad (1)$$

$$x^3 + 3x^2\dot{x}o + 3x(\dot{x}o)^2 + (\dot{x}o)^3 - ax^2 - 2ax\dot{x}o - a(\dot{x}o)^2 + axy + ax\dot{y}o + a\dot{x}oy + a\dot{x}o\dot{y}o - y^3 - 3y^2\dot{y}o - 3y(\dot{y}o)^2 - (\dot{y}o)^3 = 0 \quad (2)$$

Restando las ecuaciones (1) y (2) eliminamos los términos $x^3 - ax^2 + axy - y^3$ y dividimos por o, nos queda:

$$3x^2\dot{x} + 3x\dot{x}^2o + \dot{x}^3o^2 - 2ax\dot{x} - a\dot{x}^2o + ax\dot{y} + a\dot{x}y + a\dot{x}\dot{y}o - 3y^2\dot{y} - 3y\dot{y}^2o - \dot{y}^3o^2 = 0$$

Luego se eliminan los términos que contienen a *o* porque se los considera que son "infinitamente menos" que los términos restantes (Kleiner, 2012), resultando una ecuación que relaciona $\dot{x}$ e $\dot{y}$.

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ax\dot{y} + a\dot{x}y - 3y^2\dot{y} = 0$$

A partir de esta ecuación podemos obtener la pendiente de la tangente a la curva en cualquier punto (x, y) por medio de $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$

$$(3x^2 - 2ax + ay)\dot{x} + (ax - 3y^2)\dot{y} = 0$$

$$(3x^2 - 2ax + ay)\dot{x} = (3y^2 - ax)\dot{y}$$

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{3x^2 - 2ax + ay}{3y^2 - ax}$$

Con este procedimiento Newton observa un procedimiento general que permite determinar la pendiente de la tangente de cualquier curva algebraica.

3.2.4 Del cálculo de las curvas al cálculo de las funciones por Euler

En 1696 L'Hospital introduce de manera sistemática el cálculo de Leibniz en su libro de texto *El análisis de lo infinitamente pequeño, para la compresión de las líneas curvas*. Luego a principio del siglo XVII el cálculo siguió desarrollándose con los aportes de los hermanos Jakob y Johann Bernoulli pero como se puede observar en el título del libro de L´Hospital "la principal preocupación contemporánea del cálculo era la geometría de las curvas: tangentes, áreas, volúmenes, longitudes de arcos" (Kleiner, 2012, p. 78). Por más que Newton y Leibniz hayan desarrollado un aparato algebraico y simbólico potente, su motivación y aplicación en los problemas lo realizaban con las curvas desde un enfoque geométrico o físico a partir del cálculo de variables relacionadas por ecuaciones.

A mediados del siglo XVIII, Euler hace un avance fundamental en el cálculo al introducir la noción de función como pieza central del mismo. Euler no fue el primero en trabajar con las funciones, pero fue el primero en considerar el cálculo como una rama de las matemáticas que se ocupa del estudio de las funciones, de esta manera afirma Euler que el cálculo no se ocupa de curvas sino de funciones. Con lo cual permite reconocer que la derivada como cociente diferencial y la integral no son producto de abstracciones de las nociones de velocidad tangencial o instantánea, o bien, área o volumen; sino que son conceptos básicos del cálculo que tienen que investigarse por sí mismos (Kleiner, 2012).

3.2.5 Los infinitesimales y la búsqueda del rigor en matemáticas

Los matemáticos del siglo XVII y XVIII observaban que los desarrollos que se estaban realizando no estaban sentados sobre bases firmes, de hecho, eran conscientes de que los infinitesimales no cumplían el axioma de Arquímedes, muy importante para la teoría griega de la proporción, para el álgebra y la geometría del siglo XVII.

> El axioma de Arquímedes dice que dados dos números reales positivos a y b, existe un número entero positivo n tal que $na > b$. Pero si a es infinitesimal y $b = 1$, entonces $na < 1$ por cada número entero positivo n. (Kleiner, 2012, p. 81)

Newton y Leibniz intentaron dar explicaciones rigurosas a sus métodos de cálculo, pero no lograron dar respaldo lógico a sus procedimientos. Leibniz dijo respecto de sus diferenciales "será suficiente simplemente usarlos como una herramienta que tiene ventajas para el propósito del cálculo, así como los algebristas conservan raíces imaginarias con gran beneficio" (Edwards, 1979, p. 265).

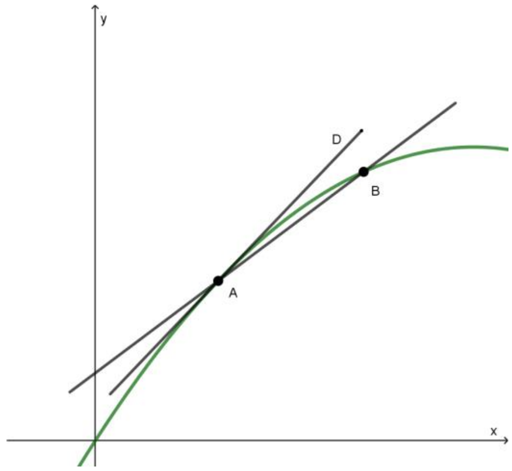
El principal cuestionamiento que se le planteaba al cálculo de Newton y Leibniz era la consideración de las cantidades infinitamente pequeña, ¿son cero?, ¿cómo se puede dividir por eso?, ¿por qué en determinado momento se lo puede ignorar tratándolo como cero? (Martínez-Torregrosa et al., 2002).

Frente a estos planteamientos Newton, en Principia trata de resolver esta dificultad con la *teoría de las razones primeras y últimas*, considerado como un “dispositivo para tratar los límites de proporciones de cantidades geométricas expresadas en el lenguaje de la geometría sintética” (Kleiner, 2012, p. 82). En un intento por definir un límite Newton en el Lema I de los Principia introduce el concepto importante de *igualdad última*: “Las cantidades y las proporciones de cantidades, que en cualquier tiempo finito convergen continuamente a la igualdad, y antes del final de ese tiempo se acercan entre sí por cualquier diferencia dada, en última instancia, se vuelven iguales” (Boyer, 1959, p. 197).

La aplicación de esta noción se observa en el siguiente ejemplo: Dado un acorde del arco AB de una curva y un segmento correspondiente AD de la tangente a la curva en el punto A, como se muestra en la Figura 3.5. Si los puntos A y B se acercan y se encuentran, “la relación última del arco, el acorde y la tangente, de uno a otro, es la relación de igualdad" (Boyer, 1959, p. 197).

Figura 3.5

Relación de Newton entre curva, arco y tangente



Fuente: Kleiner (2012, p. 83).

Luego Newton trabaja sobre las “proporciones finales de cantidades evanescentes” (Kleiner, 2012, p. 82), refiriéndose en términos actuales al límite de la proporción de cantidades cercanas a cero (la derivada).

Por la relación final de cantidades evanescentes se debe entender la relación de las cantidades no antes de que desaparezcan, ni después, sino con la que se desvanecen ... Esas proporciones finales con las que se desvanecen las cantidades no son realmente las proporciones de las cantidades finales, sino límites hacia los cuales las relaciones de cantidades que disminuyen sin límite siempre convergen; y al cual se acercan más que por cualquier diferencia dada, pero nunca van más allá, ni alcanzan, hasta que las cantidades disminuyen en el infinito. (Edwards, 1979, p. 225)

Como ejemplo (Kleiner, 2012) se plantea encontrar la tangente a la curva $y = x^2 + 3x + 2$ que siguiendo el procedimiento de Newton sería: En primer lugar, hay que tener en cuenta que un incremento pequeño o en la variable x, produce un correspondiente incremento en la variable y, el cual es:

$$[(x+o)^2 + 3(x+o) + 2] - [x^2 + 3x + 2]$$

Ahora, por la relación de incrementos, nos queda:

$$\frac{[(x+o)^2+3(x+o)+2]-[x^2+3x+2]}{o}$$

$$\frac{x^2+2xo+o^2+3x+3o+2-x^2-3x-2}{o}$$

$$\frac{2xo+o^2+3o}{o}$$

$$\frac{(2x+o+3)o}{o}$$

$$\frac{2x+3+o}{1}$$

En este punto, se deja que se desvanezca obteniendo la relación última de cantidades evanescentes, cantidades que Newton dice que se acercan a cero, resultando $2x+3$. Con la terminología actual se obtiene $\frac{dy}{dx}=2x+3$.

Por su parte, Leibniz tenía varios enfoques para resolver los problemas de los diferenciales, en algunas oportunidades reconocía su existencia real considerándolas como cantidades infinitamente pequeñas distintas de cero, pero más pequeñas que cualquier cantidad real. En cambio, en otras ocasiones consideraba a los diferenciales como “ficciones útiles para abreviar y hablar universalmente" (Edwards, 1979, p. 264). Pero en otro momento, los diferenciales eran “cantidades finitas que pueden causar errores, pero estos errores pueden ser tan pequeños como se desee” (Kleiner, 2001, p. 83).

Leibniz dice: “Si se prefería rechazar cantidades infinitamente pequeñas, era posible suponer que eran tan pequeñas como se juzga necesario para que ... el error producido no tenga ninguna consecuencia, o sea menor que cualquier magnitud dada.” (Boyer, 1959, p. 215).

3.2.6 Las críticas al uso de los infinitesimales

Durante el siglo XVIII los matemáticos contemporáneos realizaban fuertes críticas al cálculo de Newton como al de Leibniz sobre los fundamentos lógicos de los mismos. El obispo George Berkeley se destaca por sus críticas planteadas en su ensayo titulado The Analyst (1743) con subtítulo, Un discurso dirigido a un matemático infiel, donde intenta desacreditar al cálculo como herramienta fundamental del progreso de la ciencia. La principal crítica realizada por Berkeley era sobre el uso de los infinitesimales en el cálculo como lo mencionan Edwards (1979, p. 294) y Kline (1972, p. 428):

> ¿Y cuáles son estos mismos incrementos evanescentes? No son cantidades finitas, ni cantidades infinitamente pequeñas, ni nada. ¿No podemos llamarlos los Fantasmas de las cantidades difuntas? ... En virtud de un doble error, llegas, aunque no a una ciencia, sino a la verdad.

Una respuesta a las preguntas de Berkeley fue dada por d'Alembert en 1754 en un artículo titulado Différentiel de la Encyclopédie. La concepción de derivada de Newton como razón última fue reemplazada por d'Alember por una concepción de derivada como el límite de un cociente de incrementos, es decir, que: "La diferenciación de ecuaciones consiste simplemente en encontrar el límite de la razón de las diferencias finitas de las dos cantidades contenidas en la ecuación" (Edwards, 1979, p. 295).

D'Alember consideraba que: "Una cantidad es el límite de otra si la segunda puede acercarse a la primera más cerca que por una cantidad dada, de modo que la diferencia entre ellas es absolutamente inasignable" (Boyer, 1959, p. 247). Observamos en la definición que d'Alember hace referencia al límite de una cantidad, no al límite de una función y no se permitía que el límite de la cantidad oscile alrededor de su límite (Kleiner, 2012).

En 1784 la Academia de Berlín ofreció un premio al que pueda explicar cómo se han desarrollados tantos teoremas verdaderos bajo la existencia de los infinitesimales, considerado como suposición contradictoria. La respuesta vino de la mano de Lagrange quien formuló sus ideas en dos libros Théorie des fonctions analytiques (1797) y Leçons sur le calcul des fonctions (1801) (Kleiner, 2012). Lagrange al intentar dar fundamentos rigurosos al cálculo, lo redujo a un enfoque algebraico donde eliminó las referencias entorno a los infinitesimales o límites, y en consecuencia los diferenciales, mencionando que: "los principales teoremas del cálculo diferencial sin el uso de cantidades infinitamente pequeñas o que se desvanecen o límites y fluxiones, y reducidos al arte del análisis algebraico de cantidades finitas" (Kline, 1972, p 430).

La consideración de las series de potencias como polinomios infinitos, utilizadas por Lagrange en su análisis algebraico fue predominante en el siglo XVIII. Pero la principal contribución de Lagrange al cálculo fue su enfoque funcional, es decir, la utilización de notación funcional para las derivadas, con lo cual se reconoce de manera explícita que la derivada de una función es otra función, pasando de esta forma al cálculo de funciones y derivadas en lugar del cálculo de diferenciales y fluxiones (Kleiner, 2012).

Dedekind, Weierstrasss y otros comenzaron a trabajar desde un nuevo enfoque en el cálculo, desde la aritmética, producto de los vacíos de las formulaciones aritméticas-algebraicas y las justificaciones geométricas intuitivas. Es por lo que Dedekind plantea encontrar una base puramente aritmética y rigurosa para los principios del análisis infinitesimal porque menciona que las afirmaciones del cálculo diferencial se basan en magnitudes continuas, pero en ninguna parte se realiza una explicación de esta continuidad. El tiempo de la "aritmetización del análisis" (término utilizado por Felix Klein) se debe al proceso de establecer los teoremas del cálculo desde la aritmética. Este hecho se debe a que desde los inicios del cálculo hasta la época de Cauchy los números reales se consideraban geométricamente y esto llevaba a que los fundamentos de los teoremas del cálculo se basaran en consideraciones geométricas e intuitivas. La perspectiva de Dedekind y Weierstrass permitió reconocer que una definición aritmética rigurosa de los números reales resolvería los problemas de los fundamentos del cálculo infinitesimal (Kleiner, 2012).

Weierstrass desarrolló una definición estática del concepto de límite utilizando desigualdades de ε y δ, a diferencia de Cauchy cuya definición se consideraba que se basaba en una concepción intuitiva y cinemática. Con la formulación del concepto de límite en $\varepsilon - \delta$, Weierstrass logra eliminar a los infinitesimales que fueron utilizados por Cauchy y sus predecesores por más de dos siglos.

3.2.7 El límite y el diferencial de Cauchy

La evolución histórica–epistemológica del objeto diferencial fue cambiando de enfoque a lo largo de los siglos, en el siglo XVII predominó en gran medida un enfoque geométrico, en el siglo XVIII un enfoque algebraico. Pero a partir de 1821 con los aportes de Cauchy, Bolzano, Dedekind y Weierstrass se puede decir que comienza un nuevo enfoque en el cálculo basado en la aritmética, resultado de las siguientes características fundamentales que se dieron en este tiempo y que son descritas por Kleiner (2012):

- La consideración de la noción de límite como concepto subyacente del cálculo.
- El reconocimiento del lugar central que ocupan las desigualdades en las pruebas y definiciones.
- El reconocimiento de que la validez de los resultados en el cálculo depende del dominio de definición de una función.

- La compresión de que para tener una base lógica del cálculo es necesario una compresión de la naturaleza de los números reales, y dicha compresión se tiene que basar en una concepción aritmética más que geométrica de la continuidad de los números reales.

Cauchy trabajó sobre los fundamentos rigurosos del cálculo, producto de ello se observa en su Cours d'analyse de 1821 y los textos de 1823, 1826 y 1829, donde estableció al concepto de límite como el central del cálculo sobre el cual debían basarse los demás conceptos de continuidad, convergencia, derivada e integral. Este cambio condujo a ubicar a los diferenciales en un lugar marginal dentro del cálculo, ocupando su lugar central la derivada y reduciendo al diferencial a una expresión que depende de ella. La definición del concepto de límite de Cauchy es: "Cuando los valores sucesivos atribuidos a una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, que eventualmente difiere de él tan poco como se desea, ese valor fijo se llama límite de todos los demás" (Kitcher, 1984, p. 247).

La diferencia de Cauchy, de Newton y d'Alembert es que en su definición de límite no menciona qué sucede cuando la variable alcanza su límite y no dice que no puede oscilar su límite.

La definición de Bolzano y Cauchy de continuidad es:

> La función $f(x)$ será, entre los dos límites asignados a la variable x, una función continua de esta variable si, para cada valor de x entre estos límites, el valor numérico de la diferencia $f(x+\alpha)-f(x)$ disminuye indefinidamente con α. En otras palabras, la función $f(x)$ permanecerá continua con respecto a x entre los límites dados si, entre estos límites, un incremento infinitamente pequeño de la variable siempre produce un incremento infinitamente pequeño de la función misma. (Edwards, 1979, pp. 310-311)

Como se puede observar en la definición, Cauchy emplea los infinitesimales. Consideraba que "un infinitesimal es una variable cuyo límite es cero, en lugar de una constante, como en el uso común de los siglos XVII y XVIII" (Kleiner, 2012, p. 90). "cuando los valores absolutos sucesivos de una variable disminuyen indefinidamente de tal manera que sea menor que cualquier cantidad dada, esa variable se convierte en lo que se llama infinitesimal. Dicha variable tiene cero para su límite" (Kitcher, 1984, p. 247).

La evolución del concepto de derivada tiene varias etapas, la derivada como tangente fue utilizada por Fermat y otros en el siglo XVII, la derivada como fluxión y diferencial fue utilizada por Newton y Leibniz, respectivamente. El desarrollo de la definición de derivada desde un enfoque algebraico vino de Lagrange en 1790, la definición en términos de límite e infinitesimales fue dada por Cauchy en 1820, la definición en términos de épsilon–delta fue dada por Weierstrasss en 1870 (Kleiner, 2012). La definición de Cauchy es:

> Cuando una función $y = f(x)$ permanece continua entre dos límites dados de la variable x, y cuando se asigna a dicha variable un valor encerrado entre los dos límites en problema, entonces un incremento infinitamente pequeño asignado a la variable produce un incremento infinitamente pequeño en la función misma. En consecuencia, si se pone $\Delta x = i$, los dos términos de la *razón de diferencias*
>
> $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$
>
> serán cantidades infinitamente pequeñas. Pero, aunque estos dos términos se acercarán al límite cero de manera indefinida y simultánea, la relación en sí misma puede converger hacia otro límite, ya sea positivo o negativo. Este límite, cuando existe, tiene un valor definido para cada valor particular de x; pero varía con x .... La forma de la nueva función que sirve como límite de la relación $[f(x+i) - f(x)]/i$ dependerá de la forma de la función propuesta $y = f(x)$. Para indicar esta dependencia, uno le da a la nueva función el nombre derivado de la función y la designa con la ayuda de un acento mediante la notación y' o $f'(x)$. (Edwards, 1979, p. 313)

Como podemos observar en el marco del cálculo de Cauchy, los conceptos que surgen con mayor fuerza dejando a un lado al diferencial son el límite y la derivada, pasando de un lenguaje geométrico, característico de Leibniz, a un lenguaje algebraico y simbólico. Los términos infinitesimales y las cantidades infinitamente pequeñas se siguen utilizando en las prácticas matemáticas operativas y discursivas, pero desde otra perspectiva ya que involucran una trama de objetos (lenguaje, conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos) que permiten construir un nuevo significado parcial del diferencial.

3.2.8 El diferencial de Fréchet

Fréchet considera el diferencial, no solo para funciones reales de varias variables sino también para funcionales. Observa que la definición usual de diferencial tiene serios inconvenientes lógicos y pedagógicos, que se pueden evitar mediante una modificación de la definición. Con la definición usual se refiere a asumir solo la existencia de la primera derivada parcial, mientras que las limitaciones se refieren a los supuestos de continuidad (Taylor, 1974, p. 356).

Fréchet propone una definición geométrica, diciendo que $f(x, y)$ es diferenciable en (x_0, y_0), con diferencial $df = p\Delta x + q\Delta y$ si la superficie $z = f(x, y)$ tiene un plano tangente no paralelo al eje z en dicho punto. La forma analítica de este requisito es que $\Delta f = f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ debe ser expresable como $\Delta f = df + \varepsilon\Delta$. Donde Δ es la distancia, que puede ser la suma de valores absolutos de los incrementos, la distancia euclidiana, o el máximo de los valores absolutos de los incrementos, mientras que ε debe tender a cero cuando la distancia se aproxima a cero.

Geométricamente, el punto de vista diferencial tal como se hace en este marco conduce a una concepción de la tangente a una curva que no es la concepción clásica, esto es, la tangente en M como la posición límite de las secantes que pasan por M. Más bien es la siguiente: La tangente en M a la curva C asociada a la función f es la recta que mejor aproxima localmente a C; de manera más precisa, es la única recta que aproxima a C hasta un primer orden en las proximidades de M; o todavía: la tangente M a la curva C es la recta con la cual tiende a confundirse C cuando se amplía mediante zooms sucesivos en una vecindad de M (Alibert y Legrand, 1989, p. 113).

El diferencial de Fréchet, recupera características del diferencial de Cauchy, formulando una definición rigurosa sin necesitar de las cantidades infinitesimales, pero también presenta características del diferencial de Leibniz, porque recupera la idea de aproximación. De esta manera plantea López-Gay (2001) se lograr conciliar el rigor, que fue muy criticado y buscado por Leibniz y Newton; con una utilidad para resolver problemas físicos y geométricos.

3.2.9 El análisis no estándar de Robinson

Con los aportes de Weierstrass los infinitesimales perdieron su lugar en el cálculo, pero en 1960 volvieron a resurgir como objetos matemáticos y definidos de manera rigurosa en el *análisis no estándar* desarrollado por el lógico matemático Abraham Robinson.

El cálculo desarrollado por Weierstrass y otros se basaba en el campo **R** ordenado y completo de los números reales, pero el análisis no estándar se basa en el campo **R*** ordenado, pero no completo, de los números hiperreales.

> **R*** es un campo de extensión de **R** en el que se pueden definir rigurosamente los infinitesimales: $\varepsilon \in$ **R*** es infinitesimal si $-a < \varepsilon < a$ para todos los positivos $a \in$ **R**. Por lo tanto, el único infinitesimal real es cero. El inverso de un infinitesimal distinto de cero es un número infinito (hiperreal). (Kleiner, 2012, p. 94)

El surgimiento del análisis no estándar fue posible, en parte, por los trabajos de Skolem sobre los modelos no estándar de aritmética y por la teoría de modelos de la lógica matemática, como lo menciona Robinson (1966, p. Vii):

> en el otoño de 1960 se me ocurrió que los conceptos y métodos de la lógica matemática contemporánea son capaces de proporcionar un marco adecuado para el desarrollo de Cálculo diferencial e integral mediante números infinitamente pequeños e infinitamente grandes.

Lo irónico de esta situación dice Kleiner (2012) es que los infinitesimales fueron excluidos del cálculo en el siglo XIX porque no presentaban una fundamentación lógica rigurosa, pero en el siglo XX se hicieron respetar, matemáticamente, gracias a la lógica.

El *teorema de parte estándar* desarrollado por Robinson menciona que "por cada número hiperreal finito a, existe exactamente un número real 'infinitamente cercano', denotado por $st(a)$. (Dos números hiperreales están infinitamente cercanos si su diferencia es infinitesimal)" (Kleiner, 2012, p. 96). Para calcular la derivada de una función $f(x)$ estándar se procede a calcular $f'(x) = st\{[f(x+\varepsilon) - f(x)] / \varepsilon\}$ siendo ε un infinitesimal. En comparación con el procedimiento de Leibniz para el cálculo de la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto (x, y) por $\frac{dy}{dx}$, donde $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}$ que para la función $f(x) = x^2$ llegaría en el último paso a la expresión $2x + dx$ con lo cual la derivada se identificaría con $2x$. En cambio, en el análisis no estándar sería $f'(x) = st\{\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}\}$ y para hallar la derivada de la misma función se llegaría a $st(2x + dx) = 2x$.

3.3 Síntesis y Conclusiones

El concepto diferencial surge con Leibniz con las cantidades infinitamente pequeñas con un gran potencial por su utilización en la resolución de situaciones–problemas matemáticos como el cálculo de la tangente, longitud de arco, cuadraturas, superficies y volúmenes, pero también se presenta como una herramienta por excelencia por su gran desarrollo en el campo de las ciencias experimentales, en especial, en la física (López-Gay et al., 2015; Pulido, 1997).

Se puede observar que en este estudio histórico–epistemológico los lenguajes utilizados para trabajar con los diferenciales fueron: natural, geométrico, algebraico y simbólico ($o, \Delta,\ d, dx, dy$). Los términos y conceptos que permiten identificar al diferencial son: diferencia, incremento pequeño, infinitamente pequeño, aproximación, aproximación lineal, estimación lineal e infinitesimal.

Con el surgimiento y consolidación del concepto de límite y número real, los infinitesimales perdieron su estatus dentro del cálculo en las matemáticas, pero no fueron desterrados porque siempre estuvieron presentes en las aplicaciones en las ciencias experimentales (Pulido, 1997).

Capítulo 4: Modelo Ontosemiótico de Referencia del Concepto Diferencial

El contenido de este capítulo aparece publicado en:

Verón, M. A. y Giacomone, B. (2021). Análise dos significados do conceito de diferencial de uma perspectiva ontosemiótica. *Revemop*, *3*, e202109. https://doi.org/10.33532/revemop.e202109

4.1 Introducción

Diversos estudios revelan que existen dificultades en torno al concepto de diferencial en sus facetas epistémicas, cognitivas e instruccionales. En cuanto a lo epistémico encontramos a investigaciones como las de Artigue y Viennot (1987), Bos (1984), Kleiner (2012), López-Gay (2001), Pulido (1997), Tall (1981), Valdivé y Garbin (2008), entre otros, que analizan la evolución historia del concepto de diferencial y su estrecha relación con nociones como cantidad infinitamente pequeña, infinitesimal, aproximación lineal, aproximación o estimación lineal del incremento, etc.

Por los aspectos cognitivos, Gómez (2019), Martínez-Torregrosa et al. (2002), y López-Gay et al. (2015), plantean que una de las dificultades se produce por la diversidad de significados que se les presenta a los estudiantes, ya que por un lado hay que tener en cuenta las diferentes definiciones que se fueron presentando a lo largo del desarrollo del cálculo y las diferentes representaciones y contextos en los cuales emerge el diferencial.

En los aspectos instruccionales, se muestran las dificultades que genera la complejidad del concepto, por un lado, por las diferentes formas que se presentan en los libros de textos de cálculo, antiguos y actuales, y, por otro lado, por el abordaje del concepto de diferencial que implica una puesta en escena de una sería de conceptos que varían en su generalización y/o complejidad según el significado que se pretenda trabajar con los estudiantes.

En este capítulo se analiza los diversos significados del diferencial de una función aplicando, herramientas teóricas y metodológicas del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos. Se trata de elaborar una reconstrucción de los significados de este concepto, en términos de configuraciones ontosemióticas de prácticas, objetos y procesos empleadas en la resolución de una situación-problema, en las que el concepto diferencial interviene de manera clave. Para ello se tuvieron en cuenta investigaciones previas (López-Gay, 2001; Pulido, 1997), con la finalidad de identificar los tipos de situaciones-problemas, además de las configuraciones de prácticas, objetos y procesos asociados, que permiten reconocer los significados parciales del diferencial.

La finalidad de este estudio es construir un modelo ontosemiótico de referencia, dirigido a cursos preuniversitarios y primeros cursos de cálculo, sobre los significados del diferencial, a partir del cual se podrá realizar diferentes proyecciones e implicancias en la enseñanza y aprendizaje de este concepto, y en la formación de profesores de matemática en la didáctica del análisis matemático. Además, se pretende identificar las interconexiones entre los significados parciales, con la finalidad de establecer niveles de generalización y formalización entre los significados.

En el Capítulo 3 se presentaron los resultados de un estudio histórico epistemológico sobre el origen y evolución del concepto de diferencial, en el cual se establece que el diferencial surge con Leibniz con las cantidades infinitamente pequeñas con un gran potencial por su utilización en la resolución de situaciones–problemas matemáticos como el cálculo de la tangente, longitud de arco, cuadraturas, superficies y volúmenes, pero también se presenta como una herramienta por excelencia por su gran desarrollo en el campo de las ciencias experimentales, en especial, en la física y en la ingeniería (López-Gay et al., 2015; Oldenburg, 2016; Pulido, 1997).

Para mostrar la reconstrucción de los significados del concepto de diferencial, tomamos una situación problema como el cálculo de la recta tangente a una curva para identificar los sistemas de prácticas operativas y discursivas que hacen que emerja el concepto de diferencial en la configuración de prácticas, objetos y procesos.

4.2 Problema específico de investigación y Marco Teórico

Para la reconstrucción de los significados del concepto de diferencial de una función real de variable real partimos de los siguientes interrogantes para poner en cuestionamiento los diferentes significados en conjunto con los objetos matemáticos que intervienen de donde emerge el diferencial. Concretamente nos planteamos las siguientes cuestiones:

1. *¿Cuáles son los diversos significados del diferencial?*

2. *¿Qué elementos permiten distinguir los significados del diferencial?*
3. *¿Cómo se relacionan y articulan entre sí los diversos significados del diferencial?*
4. *¿Es posible definir un modelo para categorizar los significados del diferencial según el grado de generalidad y formalización de los objetos intervinientes?*

Las respuestas a estos interrogantes nos permitirán caracterizar y establecer niveles entre los diversos significados del diferencial, en función de las configuraciones de prácticas, objetos y procesos, que intervienen en la resolución de las situaciones-problemas, donde se pone en juego el concepto de diferencial.

Para lograr la construcción de un modelo de referencia de los significados del diferencial utilizaremos las nociones de significados sistémico-pragmático y configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos del EOS (Godino et al., 2007; Font et al., 2013).

4.3 Metodología

La metodología por emplear es de tipo cualitativo–descriptivo e histórico porque, en primer lugar, hace foco en la reconstrucción de los significados parciales del diferencial a lo largo de la historia del cálculo, el cual se presentó en el Capítulo 3, y luego se realiza un análisis ontosemiótico de las prácticas, objetos y procesos que intervienen en la resolución de situaciones-problemas asociadas a cada tipo de significado.

Con respecto al método a emplear para la recolección de datos, en primer lugar, se realizó un estudio documental histórico-epistemológico sobre el origen y evolución del concepto diferencial para construir un significado de referencia de este. (Godino et al., 2007). Para este estudio se consultaron diferentes fuertes de información, como libros, revistas y páginas especializadas en didáctica de la matemática y en la historia de las matemáticas.

Posteriormente se realizó un análisis ontosemiótico (Godino, 2002) de los significados puestos en juego en la resolución de situaciones-problemas a partir de la identificación de los objetos y procesos que intervienen en las prácticas matemáticas operativas y discusivas.

Para el análisis ontosemiótico, en primer lugar, seleccionamos una situación–problema y sus diferentes formas de resolución. Luego se identificaron los objetos primarios intervinientes en las prácticas matemáticas reconociendo los diferentes grados de generalidad y formalidad, lo que permitió establecer los significados parciales del objeto y definir relaciones jerárquicas entre ellas en función de su complejidad (Burgos y Godino, 2020).

Para la organización y estudio de los datos del análisis ontosemiótico se optó por utilizar la tabla propuesta por Godino et al. (2017) para establecer relaciones entre las prácticas matemáticas, en la primera columna; los usos e intencionalidad de estas, en la segunda columna; y en la tercera columna, los objetos matemáticos que entran en juego en cada práctica.

Luego de cada tabla realizamos una reflexión en torno a cómo entran en juego los objetos y procesos matemáticos identificados, para reconocer el significado del concepto que está asociado a las prácticas matemáticas, operativas y discursivas, de la resolución del problema seleccionado.

Existen diversas investigaciones en el marco del EOS que utilizaron la técnica del análisis ontosemiótico (Godino, 2002) para el estudio de los significados de diferentes contenidos matemáticos, como por ejemplo para el caso de la proporcionalidad (Burgos y Godino, 2020; Godino et al., 2017), para las igualdad de números reales (Wilhelmi et al., 2007), para la derivada (Pino- Fan et al., 2011) y la antiderivada (Gordillo y Pino-Fan, 2016).

4.4 Análisis y Resultados: Significados Parciales del Concepto de Diferencial

En esta sección presentamos el análisis ontosemiótico de las prácticas matemáticas operativas y discursivas, que se utilizan para resolver una situación-problema en la cual intervienen conceptos y técnicas del cálculo diferencial. La configuración de prácticas, objetos y procesos que se ponen en juego en la solución de un tipo de problema, en la que interviene de manera esencial el concepto de diferencial, constituye el significado pragmático parcial de dicho objeto matemático. No obstante, en dichas prácticas intervienen además otros objetos conceptuales, lingüísticos, procedimentales, proposicionales y argumentativos cuyas identificaciones son importantes para reconstruir la trama de funciones semióticas en la que el concepto de diferencial participa.

El análisis de los significados del diferencial y sus relaciones con los conceptos fundamentales del Cálculo, como la derivada y la integral, se realiza fijando la atención en los sistemas de prácticas que se realizan para resolver un problema específico en los marcos conceptuales elaborados por Leibniz, Cauchy, Fréchet y Robinson.

El problema específico que hemos elegido es el siguiente:

Problema: ¿Cómo trazar la tangente a la parábola $y = x^2$ en un punto P de la curva?

4.4.1 Significado del diferencial en Leibniz

En el Cálculo de Leibniz una curva (cerrada) se concibe como un polígono de infinitos ángulos con un número infinito de lados de longitud infinitesimal, cada uno de los cuales coincide con una línea tangente a la curva. La secuencia básica de variables asociadas con la curva son las secuencias de abscisas x y ordenadas y de los infinitos vértices de este polígono.

> La diferencia de dos valores sucesivos de x es la diferencial dx, y similarmente para dy. Se supone que las cantidades dx y dy no son cero sino incomparablemente pequeñas, y por lo tanto despreciables, con respecto a los valores de las variables x e y. Del mismo modo, se supone que un producto de los diferenciales, como $(dx)(dy)$ o $(dx)^2$, es a su vez despreciable en comparación con los diferenciales dx y dy. (Edwards, 1979, p. 261)

Apoyándonos en las descripciones que hacen Bos (1974), Edwards (1979) y Pulido (1997), entre otros autores, de los conceptos y procedimientos que introdujo Leibniz para abordar los problemas del Cálculo, consideramos que la solución del problema de la tangente fue abordada según la siguiente secuencia de prácticas discursivas y operativas:

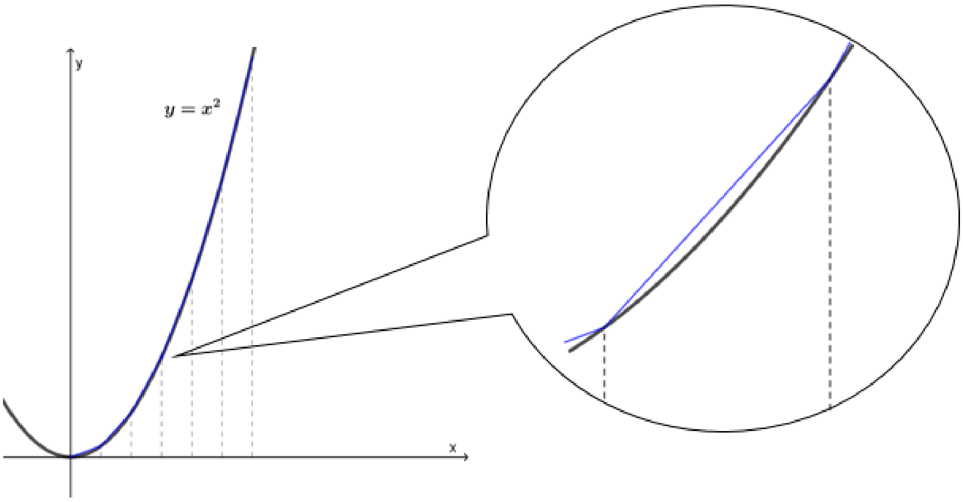
4.4.1.1 Solución geométrica

P1. Se considera a la curva $y = x^2$, junto con el eje de abscisas y la ordenada en $x = 1$, como un *polígono infinitoangular*, es decir, un polígono con un número infinito de lados (Figura 4.1)

La curva como línea infinito-poligonal

Figura 4.1

La curva como línea infinito-poligonal

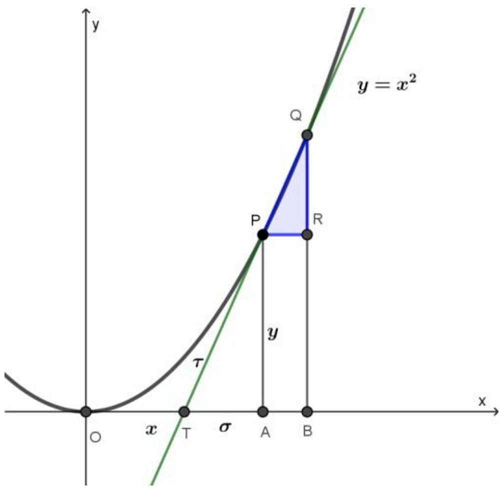


P2. "Encontrar una tangente es dibujar una línea recta que une dos puntos de la curva que tienen una distancia infinitamente pequeña, es decir, el lado prolongado del polígono infinitoangular que para nosotros es lo mismo que la curva" (Leibniz, 1684, p. 223, citado en Bos, 1974, p. 19). (Figura 4.1)

P3. En la curva $y = x^2$ consideramos un lado PQ del polígono infinitoangular, donde P y Q son dos puntos próximos cuya distancia es infinitamente pequeña. Al prolongar el lado PQ se determinan nuevas cantidades geométricas variables como la subtangente $\sigma = AT$ y la tangente $\tau = PT$ (Figura 4.2).

Figura 4.2

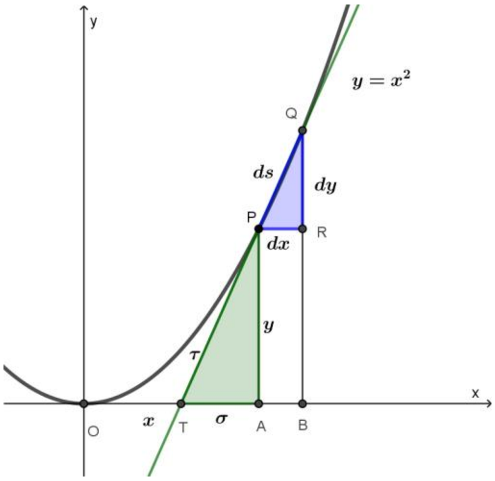
Prolongación del lado PQ para determinar la subtangente τ=TA



P4. En el triángulo PRQ los lados PR, QR y PQ representan los incrementos o diferencias Δx, Δy y Δs, respectivamente. PQ es un lado del polígono infinitoangular cuya longitud es infinitamente pequeña. El triángulo PRQ se denomina *triángulo característico o diferencial* de lados dx, dy y ds (Figura 4.3)

Figura 4.3

Triángulo diferencial de lados dx, dy y ds



P5. Los triángulos PRQ (triángulo diferencial) y el TAP, determinado por la subtangente σ, la tangente τ y la ordenada y, son semejantes porque las hipotenusas están sobre la misma recta, los catetos correspondientes son paralelos y los ángulos correspondientes congruentes (Figura 4.3). Por tanto, las razones de los lados correspondientes son iguales: $dx: dy: ds = \sigma: y: \tau$,

P6. dy es el cuarto proporcional entre la subtangente, la ordenada y dx, es decir

(1) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{AT}$, siendo la subtangente $AT = \sigma$

P7. A partir de la ecuación (1) se obtiene $AT = y\frac{dx}{dy}$. Conocido AT es posible ubicar el punto T.

P8. La tangente a la curva por el punto P se obtiene trazando la recta que pasa por los puntos P y T.

4.4.1.2 Solución algebraica

P9. Para el caso de la curva $y = x^2$, los puntos infinitamente próximos P y Q se relacionan de la siguiente manera $y + dy = (x + dx)^2$; esto es, $y + dy = x^2 + 2xdx + (dx)^2$

P10. Como se observa en la Figura 4.3 la diferencia de las ordenadas de los puntos Q y R viene dada por $dy = (x + dx)^2 - x^2$. Desarrollando el cuadrado del binomio y cancelando los términos x^2 resulta $dy = 2xdx + (dx)^2$. Luego se obtiene (2) $dy = 2xdx$, considerando que $(dx)^2 = 0$.

P11. De la expresión (2) se deduce que $dx = \frac{1}{2x}dy$. Al multiplicar ambos miembros por y, y dividimos por dy, se obtiene: (3) $y\frac{dx}{dy} = \frac{y}{2x} = \frac{x^2}{2x}$

P12. El primer miembro de (3) representa la subtangente AT y el último, la expresión algebraica que permite calcular su valor en términos de cantidades conocidas y ubicar el punto T.

P13. La recta tangente a la curva por el punto P se obtiene trazando la recta que pasa por los puntos P y T.

En la Tabla 4.1 incluimos, para la secuencia de prácticas P1 a P8 indicadas anteriormente, el uso o intencionalidad de cada una de ellas en el proceso de resolución del problema, como así también los objetos matemáticos que se ponen en juego. Esta configuración de prácticas y objetos constituye el significado sistémico-pragmático del concepto de diferencial en el marco del cálculo infinitesimal de Leibniz, para el caso de la solución geométrica. La Tabla 4.2 incluye la configuración correspondiente para la solución algebraica.

Tabla 4.1

Análisis ontosemiótico de la solución geométrica del problema de la tangente (en el marco del cálculo de Leibniz)

Secuencia de prácticas matemáticas para resolver la tarea	Uso e intencionalidad de las prácticas	Objetos referidos en las prácticas (lenguaje, conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos)
P1	Visualizar la curva como un polígono de infinitos lados. Construir el “polígono infinitoangular”	*Lenguajes:* natural, geométrico-cartesiano, simbólico *Conceptos:* curva, ecuación, eje de abscisas y ordenada, polígono infinitoangular. *Procedimientos:* trazar la poligonal sobre la curva considerando puntos sucesivos cuya distancia es infinitamente pequeña.

		Argumentos: la curva como línea infinito-poligonal
P2	Explicitar cuál es el procedimiento para hallar la tangente a la curva en punto.	Lenguaje: natural. *Conceptos:* (...); tangente, línea recta, puntos infinitamente próximos, magnitud longitud (distancia), prolongación. *Procedimientos:* trazar una tangente es unir dos puntos sucesivos de la curva con distancia infinitamente pequeña y prolongar el lado del polígono infinitoangular *Argumentos:* se aplica la definición de recta tangente a la curva.
P3	Determinar los segmentos tangentes τ y subtangente σ a la curva en el punto P	*Lenguajes:* (…); notaciones: σ, τ, 'cantidades geométricas variables'. *Conceptos:* (…); subtangente, cantidad geométrica variable. *Procedimientos:* prolongar el lado PQ del polígono infinitoangular para obtener la subtangente $\sigma = AT$ y al tangente $\tau = PT$. *Argumentos:* se aplica la definición de tangente y subtangente como segmentos determinados por la recta tangente sobre los ejes.
P4	Definir y representar el triángulo característico o diferencial de lados dx, dy y ds	*Lenguajes:* (…); notaciones: $\Delta x, \Delta y, \Delta s, dx, dy, ds$ y 'triángulo característico o diferencial'. *Conceptos:* (…); triángulo diferencial, incrementos o diferencias, diferenciales. *Procedimientos:* Representación del triángulo diferencial.
P5	Establecer la relación de proporcionalidad entre los lados del triángulo diferencial y el triángulo formado por la subtangente, ordenada y tangente.	*Lenguaje:* (…); representación de igualdad de razones: $dx{:}\,dy{:}\,ds = \sigma{:}\,y{:}\,\tau$) *Conceptos:* (…); triángulos semejantes, hipotenusa, catetos, paralela, ángulos correspondientes, congruencia de ángulos, razones y proporción. *Proposiciones:* P1: *"*el triángulo diferencial y el triángulo TAP formado por la subtangente, ordenada y tangente son semejantes"; P2: "las razones entre los lados correspondientes de los triángulos diferencial y TAP son iguales $dx{:}\,dy{:}\,ds = \sigma{:}\,y{:}\,\tau$" *Argumentos:* relación de congruencia de ángulos y paralelismo de lados. Corolario del Teorema de Tales.
P6	Establecer la ecuación proporcional $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{AT}$	Lenguaje: (…). *Conceptos:* (…); cuarto proporcional y ecuación proporcional. *Proposiciones:* "dy es el cuarto proporcional entre la subtangente, la ordenada y dx"

		Procedimientos (conversión lenguaje natural a simbólico)*:* $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{AT}$ *Argumentos:* por la semejanza de triángulos.
P7	Resolver la ecuación $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{AT}$ para hallar la subtangente AT	Lenguaje: (…). Conceptos: (…). Proposiciones: $AT = y\frac{dx}{dy}$ *Procedimientos:* resolución de la ecuación proporcional. *Argumentos:* propiedad fundamental de las proporciones.
P8	Trazar la tangente PT a partir de hallar la subtangente AT	Lenguaje: (…). Conceptos: (…). *Proposiciones: "*por los puntos P y T pasa la recta tangente a la curva en el punto P". *Procedimientos:* trazamos la recta tangente uniendo los puntos P y T. *Argumentos:* definición de tangente; por dos puntos paso una sola recta.

En el sistema de prácticas P1 a P8 se llevan a cabo procesos de interpretación y significación de los diferentes términos y simbolizaciones que se usan, destacando el concepto de "puntos infinitamente pequeños", "cantidades geométricas variables", la curva como "polígono infinitoangular", la tangente a la curva como recta que une dos puntos infinitamente próximos de la curva, empelando un lenguaje natural, geométrico y simbólico.

Como procesos de conceptualización destacan la definición de triángulo diferencial y los correspondientes elementos diferenciales dx, dy y ds como cantidades de longitud infinitamente pequeñas. Los diferenciales intervienen en procesos de algoritmización o cálculo una vez establecido la ecuación proporcional que relaciona las cantidades de magnitud geométrica, en este caso longitudes de segmentos.

Los argumentos que se utilizan provienen de la consideración de la curva como un polígono de infinitos lados, lo que permite determinar el triángulo diferencial y la semejanza con el triángulo formado por la subtangente, la ordenada y la tangente. A partir de establecer la semejanza entre los triángulos se establece las ecuaciones proporcionales que permiten hallar el valor de la subtangente AT y encontrar la tangente PT.

Tabla 4.2

Análisis ontosemiótico de la solución algebraica del problema de la tangente (en el marco del cálculo de Leibniz)

Secuencia de prácticas matemáticas para resolver la tarea	**Uso e intencionalidad de las prácticas**	**Objetos referidos en las prácticas (lenguaje, conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos)**
P9	Establecer la relación entre los puntos P y Q, y la curva $y = x^2$	*Lenguajes:* algebraico, simbólico y expresiones: $x + dx, y + dy, (dx)^2$ *Conceptos:* curva, ecuación, puntos, longitud infinitesimal, diferencial, diferencial de segundo orden. *Proposiciones*: P1: "los puntos infinitamente próximos P y Q se relacionan de la siguiente manera $y + dy = (x + dx)^2$", P2: "la diferencia de la ecuación es $y + dy = x^2 + 2xdx + (dx)^2$" *Procedimientos:* se incrementan las variables x e y en una cantidad infinitamente pequeña dx y dy, respectivamente; desarrollo del binomio. *Argumentos:* correspondencia entre las variables, donde un incremento infinitesimal dx en x produce un incremento infinitesimal dy en y
P10	Determinar el dy como la diferencia de las ordenadas de los puntos Q y R.	Lenguaje: (…). *Conceptos:* (…); diferencia de ordenadas, cuadrado de un binomio, propiedad cancelativa. *Proposiciones*: P1: "la diferencia de las ordenadas de los puntos Q y R es $dy = (x + dx)^2 - x^2$; P2: "los diferenciales de orden superior se reemplazan por cero". *Procedimientos:* plantear que el dy como la diferencia de las ordenadas y luego de resolver el cuadrado del binomio; reemplazar $(dx)^2 = 0$ *Argumentos: "*La diferencia de dos valores sucesivos de x es la diferencial dx, y similarmente para *dy;* $(dx)^2$ es despreciable en comparación con los diferenciales dx y dy" (Edwards, 1979, p. 261)
P11	Manipular algebraicamente la ecuación	Lenguajes: (…); expresiones: $y\frac{dx}{dy}$ *Conceptos:* (…); segmento y subtangente.

	$dy = 2xdx$ para escribirla como $y\frac{dx}{dy}$ (expresión de la subtangente AT)	*Procedimientos:* primero se despeja dx, luego se multiplica por y y se divide por dy para obtener la expresión $y\frac{dx}{dy}$ Por último se reemplaza la ecuación de la curva. *Argumentos:* multiplicación y división a ambos miembros de la ecuación. $y\frac{dx}{dy}$ es la expresión de la subtangente
P12	Reconocer la expresión de la subtangente	*Lenguaje:* natural. Conceptos: (…). *Proposiciones*: "la expresión de la subtangente es $y\frac{dx}{dy}$" *Procedimientos:* calcular el valor de la subtangente AT para ubicar el punto T.
P13	Trazar la recta tangente	*Lenguaje:* geométrico. *Conceptos:* (…); recta y tangente. *Proposiciones*: enunciado de la P13 *Procedimientos:* trazado de la recta que pasa por dos puntos. *Argumentos:* secuencia de prácticas P9 a P12.

En el sistema de prácticas, realizadas en la solución algebraica, se destaca el papel algorítmico desempeñado por el lenguaje algebraico; los elementos diferenciales *dx, dy* intervienen como cantidades infinitesimales como si fueran datos conocidos con los que se puede operar.

Se destaca en P9 el procedimiento de "diferencia de la ecuación" en el cual intervienen una proposición fundamental en el cálculo de Leibniz "un incremento infinitesimal dx en x, produce un incremento infinitesimal dy en y" (Martínez-Torregrosa et al., 2002). En P10 se asume como verdadera otra proposición fundamental, P2: "Las diferencias de orden superior se reemplazan por cero". Estas proposiciones junto con el aparato algebraico desarrollado por Leibniz que se presentan en los procedimientos caracterizan la manera en el cual eran utilizados los diferenciales.

Los procedimientos algebraicos utilizados para hallar la expresión de la subtangente AT como $y\frac{dx}{dy}$ permiten identificar la trama de objetos y procesos que intervienen para determinar la tangente PT a la curva en el punto P.

Observamos en los sistemas de prácticas matemáticas en el marco del cálculo de Leibniz, la utilización de un lenguaje natural, geométrico, algebraico y simbólico. Siendo este último, una de sus principales características por su persistencia en el tiempo. (Bos, 1974; Edwards, 1979; Kleiner, 2012; Martínez-Torregrosa et al., 2002; Pulido, 1997). El lenguaje geométrico se caracteriza por la utilización de los conceptos como cantidades geométricas variables, es decir, considerar a las variables como cantidades o magnitud. La utilización del triángulo diferencial para el cálculo de la subtangente y la tangente a una curva, la cual era considerada como un polígono de infinitos lados infinitamente pequeño.

El lenguaje algebraico se caracteriza por el procedimiento del cálculo de la subtangente y la tangente por medio de la diferencia de la ecuación de la curva, considerando que los diferenciales de orden dos son insignificantes o despreciables en comparación con dx y dy. (Bos, 1974; Edwards, 1979). La simbología introducida para denotar las cantidades infinitamente pequeñas o infinitesimales son dx y dy, para las variables x e y, respectivamente; las cuales continúan siendo utilizadas en la actualidad.

Los sistemas de prácticas de la solución geométrica y algebraica permiten identificar un significado del concepto de diferencial, el diferencial de Leibniz, a partir del análisis ontosemiótico realizado identificando los objetos que intervienen y emergen en la resolución de la situación-problema del cálculo de la tangente a una curva en un punto.

4.4.2 Significado del diferencial en Cauchy

Cauchy definió la diferencial como una expresión construida a partir de la derivada: $df = f'(x) \cdot dx$, siendo dx un incremento arbitrario de la variable y pasó a convertirse así en un simple instrumento formal, necesario para justificar y abreviar ciertas demostraciones. Se desprendió, entonces, a la diferencial de la ambigüedad de los infinitamente pequeños, pero al mismo tiempo quedó desprovista de cualquier significado físico o intuitivo propio: simplemente era el producto de la derivada por el incremento de la variable independiente (Martínez-Torregrosa et al., 2002).

De manera específica incluimos a continuación la definición que aparece en Cauchy (1823, p. 13):

Sea $y=f(x)$ una función de la variable independiente x, i una cantidad infinitamente pequeña, y h una cuantidad finita. Si se plantea que $i = \alpha h$, α será todavía una cantidad infinitamente pequeña, y se tendrá idénticamente

$$\frac{f(x+i)-f(x)}{i} = \frac{f(x+\alpha h)-f(x)}{\alpha h}$$

De donde se concluirá

(1) $\frac{f(x+\alpha h)-f(x)}{\alpha} = \frac{f(x+i)-f(x)}{i} h$

El límite hacia el cual converge el primer miembro de la ecuación (1), cuando la variable α se aproxima indefinidamente a cero y la cantidad h permanece constante, es lo que se llama la diferencial de la función $y = f(x)$. Esta diferencial se indica por la característica d, de donde se sigue: dy o $df(x)$. Es fácil obtener su valor cuando se conoce el de la función derivada y' o $f'(x)$. En efecto, tomando los límites en los dos miembros de la ecuación (1) se encuentra (2) $df(x) = hf'(x)$. En el caso particular donde $f(x) = x$, la ecuación (2) se reduce a

(3) $dx = h.$

Así, la diferencial de la variable independiente x no es otra cosa que la constante finita h. Por tanto, la ecuación (2) viene a ser

(4) $df(x) = f'(x).dx.$

o lo que viene a ser lo mismo,

(5) $dy = y'\,dx.$

El cálculo de Cauchy se caracteriza principalmente por la consideración de las cantidades como variables, a diferencia de Leibniz que consideraba a las cantidades geométricas variables como una cantidad infinitamente pequeña, menor que cualquier cantidad finita pero no nula (Kleiner, 2012). Para Cauchy (1821) “una cantidad variable se vuelve infinitamente pequeña, cuando su valor numérico disminuye indefinidamente para converger hacia el límite cero” (p. 26). Una cantidad infinitamente pequeña, denotada por α o i, es “una variable cuyo valor numérico disminuye indefinidamente” (Cauchy, 1821, p. 27).

En Cauchy (1823, pp. 23-24) encontramos la siguiente explicación del problema de la tangente a una curva, que describe como determinar la inclinación de una curva en un punto. Para hacer un análisis de los tipos de objetos y procesos que pone en juego en la solución del problema dividimos la explicación dada por Cauchy en prácticas elementales:

P1. Consideremos la curva que tiene por ecuación en coordenadas rectangulares $y = f(x)$.

P2. En esta curva, la cuerda trazada desde el punto (x, y) al punto $(x + \Delta x, y + \Delta y)$, forma, con el eje de las x prolongado en el sentido de las x positivas, dos ángulos, uno agudo, el otro obtuso, donde el primero mide la inclinación de la cuerda, con respecto al eje de las x.

P3. Si el segundo punto se aproxima una distancia infinitamente pequeña del primero, la cuerda se confundirá sensiblemente con la tangente trazada a la curva por el primer punto;

P4. y la inclinación de la cuerda, con relación al eje de las x, vendrá a ser la inclinación de la tangente, o lo que se llama *la inclinación de la curva* respecto al mismo eje.

P5. Planteado así, como la inclinación de la cuerda tendrá por tangente trigonométrica el valor numérico de la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, es claro que la inclinación de la curva tendrá por tangente trigonométrica el valor numérico del límite hacia el cual converge esta razón, es decir, de la función derivada $y' = \frac{dy}{dx}$.

P6. Si el valor de y' es nulo o infinito, la tangente a la curva será paralela o perpendicular al eje de las x. Cuando es paralela, la ordenada y viene a ser un máximo o un mínimo.

En la Tabla 4.3 se presenta, la secuencia de prácticas de P1 a P6, el uso e intencionalidad de cada una de ellas en el proceso de resolución del problema, y los objetos matemáticos que entran en escena, para la solución del problema de la tangente. Esta configuración de prácticas y objetos constituye el significado sistémico-pragmático del concepto de diferencial en el marco del Cálculo de Cauchy.

Tabla 4.3

Análisis ontosemiótico de la solución del problema de la tangente (en el marco del cálculo de Cauchy)

Secuencia de prácticas matemáticas para resolver la tarea	**Uso e intencionalidad de las prácticas**	**Objetos referidos en las prácticas (lenguaje, conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos)**

P1	Identificar a la curva por su ecuación $y = f(x)$	*Lenguajes:* natural, geométrico, algebraico y funcional $y = f(x)$. *Conceptos:* curva, ecuación y coordenadas rectangulares.
P2	Identificar el ángulo que mide la inclinación de la cuerda en el punto (x, y)	Lenguajes: (…); simbólico $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ *Conceptos:* (…); cuerda, punto, incrementos, ejes coordenados, sentido positivo del eje, prolongación, ángulos (agudo y obtuso) e inclinación (magnitud amplitud angular). *Proceso de definición de inclinación de una cuerda:* el ángulo agudo formado entre la cuerda y el eje x prolongado mide la inclinación de la cuerda. *Procedimientos:* trazado de la cuerda a partir de dos puntos de la curva.
P3	Identificar la tangente con la cuerda cuando la distancia entre los puntos es infinitamente pequeña	*Lenguajes:* (…); expresiones: 'infinitamente pequeño', 'confundirá sensiblemente'. *Conceptos:* (…); distancia infinitamente pequeña, inclinación de la cuerda y tangente. *Proposiciones*: "si la distancia entre los puntos es infinitamente pequeña, la cuerda se confundirá sensiblemente con la tangente a la curva y la inclinación de la cuerda con la inclinación de la tangente." *Argumentos:* Una cantidad infinitamente pequeña es "una variable cuyo valor numérico disminuye indefinidamente" (Cauchy, 1821, p. 27). Cuando los puntos difieren en un infinitesimal, la cuerda se convierte en la tangente a la curva, de la misma forma que la inclinación de la cuerda con la inclinación de la tangente.
P4	Identificar la inclinación de la cuerda con la inclinación de la tangente	
P5	Identificar a la inclinación de la curva con la función derivada $y' = \frac{dy}{dx}$	Lenguajes: (…); expresiones simbólicas: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{dy}{dx}$, $y' = \frac{dy}{dx}$ *Conceptos:* (…); tangente trigonométrica, razón, valor numérico, límite, convergencia, función derivada, diferenciales y cociente de diferenciales *Proposiciones*: P1: "la inclinación de la cuerda se obtiene por el valor numérico de la tangente trigonométrica $\frac{\Delta y}{\Delta x}$"; P2: "el valor numérico del límite hacia el cual converge la tangente trigonométrica es la inclinación de la cuerda, es decir, la función derivada" *Procedimientos:* se evoca el cálculo del límite de la tangente trigonométrica $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ para determinar la función derivada $y' = \frac{dy}{dx}$

		Argumentos: la tangente trigonométrica se define como la razón de los incrementos, es decir, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. El límite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es la función derivada $y' = \frac{dy}{dx}$
P6	Reconocer un máximo o un mínimo y la posición de la recta tangente por medio del valor que toma función derivada y'	Lenguaje: (…). *Conceptos:* (…); paralela, perpendicular, ordenada, máximo, mínimo, nulo e infinito. *Proposiciones*: P1: "si el valor de y' es nulo, la tangente a la curva es una recta paralela al eje x y es un punto máximo o mínimo"; P2: "si el valor de y' es infinito, la tangente a la curva es perpendicular"

En el sistema de prácticas desarrolladas en el marco del cálculo de Cauchy, se observa que el lenguaje empleado es geométrico, algebraico y funcional, donde se emplean conceptos y términos, como inclinación, cuerda, curva, tangente, infinitamente pequeño, tangente trigonométrica, límite, convergencia, razón de incrementos, diferenciales, cociente de diferenciales y función derivada.

Estos conceptos son utilizados en el proceso de definición de la inclinación de la tangente y de la curva a partir de la inclinación de la cuerda, cuando los puntos que la definen se aproximan infinitamente y la distancia que los separa es una variable que tiene por límite cero.

Como proposición se plantea que la inclinación de la cuerda es medida mediante la razón entre incrementos, denominado tangente trigonométrica; y como procedimiento de cálculo se realiza el proceso de paso al límite que da lugar a la derivada de la función en el punto (x, y). Los diferenciales aparecen como mera representación alternativa de la derivada.

Los argumentos que validan los procedimientos y proposiciones son la definición de inclinación de la curva, la tangente trigonométrica como la razón de los incrementos, el límite y la consideración de las cantidades infinitamente pequeñas como una variable cuyo límite es cero, la función derivada como límite de la razón de incremento, y la igualdad entre la función derivada y el cociente de diferenciales.

El análisis ontosemiótico realizado permite identificar el significado del diferencial de Cauchy a partir de la configuración de prácticas y objetos que intervienen en la resolución del cálculo de la inclinación de la curva. El concepto de diferencial pasa a un segundo plano con Cauchy, debido a que la introducción de los límites permitió el paso de la razón de incrementos a la función derivada, colocando al cociente de diferenciales como expresión equivalente a la derivada. Donde antes eran necesario los diferenciales para hallar la tangente, ahora ya no lo son.

4.4.3 Significado del diferencial en Fréchet

Según Artigue y Viennot (1987), el diferencial fue definido como una función lineal, por primera vez por M. Fréchet en 1911, en el marco del desarrollo del análisis funcional. De hecho, la definición que introduce de diferencial rehabilita la vieja idea de aproximación que había predominado al comienzo del cálculo, pero había sido puesta a un lado después por razones de falta de rigor. La idea de función lineal y aproximación queda patente en la definición de diferencial de Fréchet:

> "Una función $f(x, y, z, t)$ admite una diferencial en el punto (x_0, y_0, z_0, t_0) si existe una función lineal y homogénea de los incrementos, o sea: $A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + D\Delta t$, que no difiere del incremento de la función Δf a partir del valor $f(x_0, y_0, z_0, t_0)$ nada más que en un valor infinitamente pequeño respecto a la distancia Δ de los puntos $(x_0, \dots, t_0)$ y $(x_0 + \Delta x\ \dots, t_0 + \Delta t)$. La diferencial entonces es por definición: $df = A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + D\Delta t$."
>
> Esta definición se expresa por la fórmula $\Delta f = df + \varepsilon\Delta$ donde ε tiende a cero cuando Δ tiende a cero. (Fréchet, 1911, como se citó en Artigue, 1989, p. 34)

La definición de Fréchet no requiere que el diferencial sea infinitamente pequeño, sino que $\Delta f - df$ es infinitamente pequeño respecto Δ; esto no significa que $(\Delta f - df)$ será siempre un número muy pequeño, o incluso menos que Δf o df sean pequeños. El requisito que se plantea es que $(\Delta f - df)$ tienda a cero más rápidamente que Δ, esto es que el límite de $(\Delta f - df)/\Delta$ es cero cuando Δ tiende a cero. Esto quiere decir que df es una función lineal homogénea de los incrementos, y se puede expresar al Δf de la siguiente manera: $df + \varepsilon.\Delta$, donde $\lim_{\Delta \to 0} \varepsilon = 0$ (Martínez-Torregrosa et al., 2006, p. 456).

De esta manera, el diferencial de Fréchet se define como la estimación lineal del incremento respecto al cambio de variable. Se entiende que el diferencial es una función que puede tomar cualquier valor y su expresión diferencial va a estar sujeta a la condición de que $(\Delta f - df)$ sea infinitamente pequeña respecto a Δx. Esto quiere decir que df no es infinitamente pequeño, sino que la diferencia entre el incremento y el diferencial es infinitamente pequeño respecto a Δx (López-Gay, 2001).

Sabiendo que el diferencial se define como una aplicación lineal, resulta necesario destacar que la función diferencial df es una función de dos variables (Martínez-Torregrosa et al., 2002; Rabuffetti, 1987) ya que depende del punto $x = a$ y del diferencial de x, cuya notación es: $df(a, dx) = f'(a)dx$

Problema: Hallar una aplicación lineal homogénea que aproxima a la función $y = x^2$ en el punto a de tal modo que el error que se comete en la estimación, relativo al incremento Δx de la variable x, es infinitamente pequeño respecto de dicho incremento.

Solución:

P1. Dada la función $f: A \rightarrow R$ tal que $f(x) = x^2$, se busca una aplicación lineal y homogénea que aproxime $f(x) = x^2$ en el punto a, de tal manera que el error que se produce con la estimación respecto al incremento Δx de la variable x sea infinitamente pequeño respecto del incremento Δx.

P2. El incremento de la función $f(x) = x^2$ en el punto a respecto del incremento Δx es $\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a) = (a + \Delta x)^2 - a^2$

P3. Luego tenemos que $\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a) = f'(a)dx + \varepsilon dx$ con $f'(a) = 2a$.

P4. Entonces, si ε tiende a cero cuando Δx tiende a cero, el $\Delta f \approx f'(a)dx$, es decir $\Delta f \approx 2adx$ en el punto a.

P5. La aplicación lineal y homogénea que aproxima al incremento de la función en el punto a respecto al incremento Δx es la función $df(a) = 2adx$

En la Tabla 4.4 se presentan, la secuencia de prácticas de P1 a P5, el uso e intencionalidad de cada una de ellas en el proceso de resolución del problema, y los objetos matemáticos primarios que intervienen en la resolución del problema. Esta configuración de prácticas y objetos constituye el significado sistémico-pragmático del concepto de diferencial en el marco de Fréchet.

Tabla 4.4

Análisis ontosemiótico de la solución del problema de la tangente (en el marco del diferencial Fréchet)

Secuencia de prácticas matemáticas para resolver la tarea	**Uso e intencionalidad de las prácticas**	**Objetos referidos en las prácticas (lenguaje, conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos)**
P1	Plantear las condiciones que tiene que cumplir la función que aproxime al incremento de $f(x) = x^2$ en un punto a respecto al incremento de x	*Lenguajes:* natural, geométrico, algebraico, simbólico: $f: A \to R$, $f(x) = x^2$, Δx, y términos: 'aproximación', 'estimación', 'infinitamente pequeño', 'incremento' y 'error' *Conceptos:* función, variable, punto, aplicación lineal y homogénea, aproximación o estimación, incremento, error, infinitamente pequeño.
P2	Identificar el incremento de la función en el punto a respecto al incremento Δx	Lenguajes: (…). Conceptos: (…). *Procedimientos:* planteo del incremento de la función f como $\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)$ *Argumentos:* definición de función
P3	Definir el incremento de la función como la suma de una aplicación lineal y homogénea del incremento de x y un ε que es infinitamente pequeño respecto a Δx	Lenguajes: (…). *Conceptos:* (…); límite, derivada, *Proposiciones:* P1: "$\Delta f = f'(a)dx + \varepsilon dx$"; P2: "$df = f'(a)dx$ es una aplicación lineal y homogénea del incremento de x"; P3: "$\Delta x = dx$" *Procedimientos:* calcular la derivada de f y reemplazar en el Δf. *Argumentos:* definición del diferencial como una aplicación lineal y homogénea del incremento de x; definición del incremento de la función como $\Delta f = df + \varepsilon\Delta$ donde ε tiende a cero cuando Δ tiende a cero (Fréchet, 1911); cálculo de derivada.
P4	Identificar que el incremento de la función es aproximadamente igual al diferencial de la función cuando ε tiende a cero.	*Lenguajes:* (…), símbolo: ≈ 'aproximadamente igual'. *Conceptos:* (…), límite, aproximadamente igual. Proposiciones: P1: "$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon_a(\Delta x) = 0$"; P2: "$\Delta f \approx f'(a)dx$" *Procedimientos:* cálculo de límite *Argumentos:* definición de límite.
P5	Identificación del df con la	Lenguajes: (…). Conceptos: (…).

aplicación lineal y homogénea que aproxima el incremento de la función.	Proposiciones: P1: “$\Delta f \approx df$”; P2: “$df = f'(a)dx$”. *Argumentos:* definición del diferencial

Los sistemas de prácticas matemáticas de P1 a P5 permiten caracterizar el significado del diferencial de Fréchet, donde se utiliza los lenguajes natural, geométrico, algebraico y simbólico. Los conceptos y términos que emergen de las prácticas son: aplicación lineal y homogénea, función, variable, incremento, aproximación, estimación, error, infinitamente pequeño, límite y derivada.

Los enunciados y proposiciones que se realizan sobre los conceptos y definiciones son:

P1: “$\Delta f = f'(a)dx + \varepsilon dx$” (el incremento de la función se puede escribir como una suma de una aplicación lineal y homogénea del incremento de x y una función ε que tiende a cero cuando Δx tiende a cero).

P2: “$df = f'(a)dx$ es una aplicación lineal y homogénea del incremento de x”

Los procedimientos que se emplean para determinar la aplicación lineal y homogénea que aproxime al incremento de la función provienen del cálculo de límites y derivadas. En cuanto a los argumentos que validan los procedimientos y proposiciones se utilizan la definición de función, límite, incremento de la función $\Delta f = df + \varepsilon \Delta$ y el diferencial como una aplicación lineal y homogénea del incremento de x.

El análisis ontosemiótico realizado sobre la configuración prácticas y objetos que intervienen y emergen en la resolución del problema permite identificar un significado del concepto de diferencial, el diferencial de Fréchet, que se caracteriza por las formas en que interaccionan los objetos matemáticos identificados en la solución.

4.4.4 Significado del diferencial en el análisis no estándar

El análisis no-estándar desarrollado por Robinson (1966) mostró que es posible definir los conceptos fundamentales del análisis (continuidad, diferenciación, integración, etc.) en términos de infinitesimales, en lugar de tener que usar necesariamente el concepto de límite, lo cual conecta esta teoría matemática con la aproximación histórica al cálculo infinitesimal de Leibniz.

Una idea central es construir una ampliación del conjunto R de los números reales a *R (conjunto de números hiperreales), que incluye como nuevos elementos números infinitamente pequeños e infinitamente grandes, considerados como números hiperreales. Como estructura algebraica es un cuerpo no arquimediano y métricamente incompleto que contiene al conjunto arquimediano y completo identificable con los números reales.

Robinson (1966 p. 56) define de la siguiente manera los números hiperreales infinitésimos e infinitos:

> Un número a ϵ*R se llamará infinitesimal o infinitamente pequeño si $|a| < m$ para todo número positivo m ϵ R. Según esta definición, 0 es infinitesimal. …Un número r ϵ*R, $r \neq 0$, es infinitesimal si y solo si r^{-1} es infinito. Si $a - b$ es infinitesimal, entonces decimos que b está infinitamente próximo a a, y se escribe $a \simeq b$. Esto es, dos hiperreales x, y ϵ*R son infinitamente cercanos (notación: $x \simeq y$), $x \simeq y \quad \Leftrightarrow \quad (\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1)\ |x - y| < 1/n$

El cuerpo *R proporciona un marco para el desarrollo del cálculo diferencial e integral mediante los números hiperreales infinitamente pequeños e infinitamente grandes.

Obviamente, el uso de los infinitesimales en el análisis no-estándar recuerda al cálculo infinitesimal de Leibniz, y el análisis no-estándar se puede considerar por los matemáticos actuales como una rehabilitación del uso de las cantidades infinitamente pequeñas de Leibniz. Esta visión es fuertemente defendida por Robinson. (Bos, 1974, p. 82)

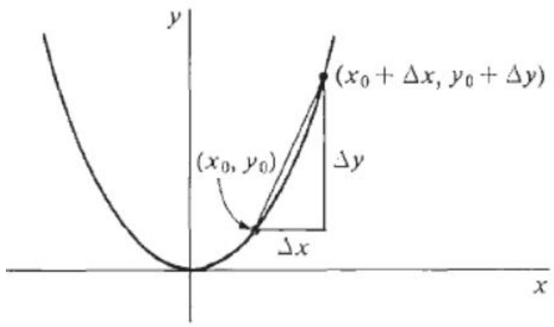
No obstante, Bos (1974) no comparte plenamente la opinión de Robinson. Para probar su valor como una teoría matemática el cálculo de Leibniz no necesita un ajuste a los requisitos de aceptabilidad de las matemáticas del siglo XX mediante una reformulación en términos del análisis no-estándar. Considera, además que ambas teorías difieren sustancialmente. Un aspecto fundamental en que ambas teorías difieren se refiere a la concepción del conjunto de infinitesimales. Leibniz y la mayoría de sus seguidores concibieron que el conjunto de infinitesimales estaba constituido de sucesivos órdenes de pequeñez infinita. Así, si dx era un diferencial de primer orden, entonces todos los diferenciales de primer orden tienen una razón finita con dx; en general todos los diferenciales de orden *n* están en razón finita con dx^n, y el conjunto de los infinitesimales está formado sólo de estas clases de diferenciales.

Otra diferencia entre ambas teorías está en el hecho de que el análisis infinitesimal de Leibniz trata con cantidades geométricas, variables y diferenciales, mientras que el análisis no-estándar, así como el análisis real moderno en general, trata con números reales, funciones y derivadas, a pesar de la aceptación de los diferenciales. Los problemas relacionados con la diferenciación de órdenes superiores de cantidades variables no ocurren en el análisis no estándar.

Keisler (2000) usa el problema de la tangente a la parábola $y = x^2$ para explicar de manera intuitiva las dificultades de usar las cantidades infinitamente pequeñas Δy, Δx para calcular la pendiente a una curva (Figura 4.4). La pendiente promedio para un incremento Δx viene dada por, $\Delta y/\Delta x = 2x_0 + \Delta x$, y por tanto solo se puede calcular cuando Δx es distinto de cero porque de lo contrario el cociente $\Delta y/\Delta x$ está indefinido.

Figura 4.4

Relación entre la pendiente y los incrementos



Fuente: Keisler (2000, p. 26).

El razonamiento en el cálculo de Leibniz es que tomando Δx infinitamente pequeño aunque no nulo entonces el término Δx se puede despreciar y de este modo se tiene que

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0$$

Se necesita establecer una distinción nítida entre los números que son suficientemente pequeños para ser despreciables en los cálculos y los que no lo son. De hecho, ningún número real excepto el cero es suficientemente pequeño como para ser despreciable. El análisis no estándar resuelve este problema al crear los números hiperreales, y dentro de ellos números infinitesimales o infinitamente pequeños.

Definición de diferencial en el análisis no estándar.

Supongamos que y depende de x, $y = f(x)$:

(i) La diferencial de x es la variable independiente $dx = \Delta x$.

(ii) La diferencial de y es la variable dependiente dy dada por $dy = f'(x)dx$.

La relación entre la derivada y el cociente de diferenciales es la igualdad:

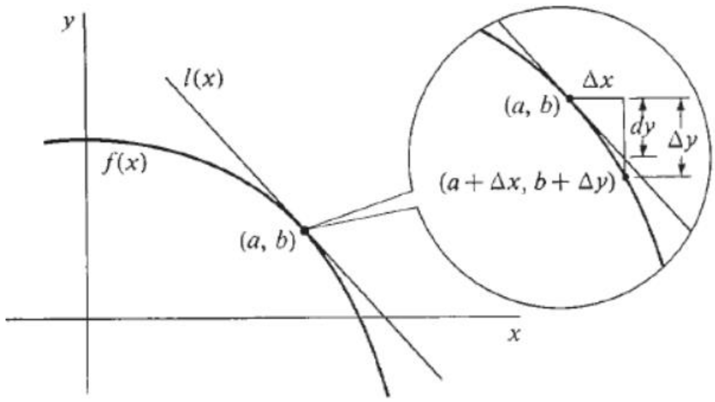
$\frac{dy}{dx} = f'(x)$

Mientras que la derivada y el cociente incremental difieren en un infinitésimo:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x)$$

Figura 4.5

Distinción entre incremento y diferencial



Fuente: Keisler (2000, p. 56).

Veamos cómo se aborda el cálculo de la pendiente a la curva $y = x^2$ en el punto (x_0, y_0) usando los números hiperreales infinitésimos.

Problema de la tangente:

P1. Considera un punto real (x_0, y_0) sobre la curva $y = x^2$. Sea Δx un infinitésimo positivo o negativo (pero no cero), y Δy el cambio correspondiente en y.

P2. La pendiente en (x_0, y_0) se define del siguiente modo:

[pendiente en (x_0, y_0)] = [el número real infinitamente próximo a $\frac{\Delta y}{\Delta x}$]

P3. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se calcula de igual modo que se ha hecho antes

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^{\,2} - x_0^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

P4. Este es un número hiperreal, no uno real. Puesto que Δx es infinitesimal, el número hiperreal $2x_0 + \Delta x$ está infinitamente próximo al número real $2x_0$.

P5. Concluimos que [pendiente en (x_0, y_0)] = $2x_0$

El mismo método se puede aplicar a cualquier otra curva.

En la Tabla 4.5 se presenta la secuencia de prácticas mátemáticas de la solución del problema junto con la identificación del uso e intencionaldiad de cada una de ellas. Además se estudia los objetos matemáticos primarios que entran en juego en cada práctica con el objetivo de construir el significado sistemico–pragmático del diferencial en el análisis no estándar.

Tabla 4.5

Análisis ontosemiótico de la solución del problema de la tangente (en el marco del análisis no estándar)

Secuencias de prácticas matemáticas para resolver la tarea	**Uso e intencionalidad de las prácticas**	**Objetos referidos en las prácticas (lenguaje, conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos)**
P1	Identificar los elementos que entran en juego en el problema de la tangente a una curva en el análisis no estándar	*Lenguaje:* natural (infinitésimo); geométrico, algebraico y simbólico (notación de incrementos). *Conceptos:* curva, punto real, función, variables, ecuación, infinitésimo.
P2	Definir la pendiente a una curva en relación con los números hiperreales	*Lenguaje:* (…); simbólico $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ y términos "infinitamente próximos" *Conceptos:* (…); pendiente a una curva en un punto, números reales e hiperreales, infinitamente próximo, razón de incrementos infinitesimales. *Proposición: "*pendiente en (x_0, y_0) = el número real infinitamente próximo a $\frac{\Delta y}{\Delta x}$"
P3	Calcular la pendiente	Lenguaje: (…). Conceptos: (…). Proposiciones:

		$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$ *Procedimientos:* planteo del $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ y cálculo algebraico con números hiperreales. *Argumentos:* definición de la pendiente como la razón de incrementos infinitesimales y propiedades del álgebra de los números hiperreales.
P4	Interpretar el número hiperreal $2x_0 + \Delta x$	Lenguaje: (…). Conceptos: (...). *Proposiciones*: P1: "el número hiperreal $2x_0 + \Delta x$ no es un número real"; P2: "el número hiperreal $2x_0 + \Delta x$ está infinitamente próximo al número real $2x_0$" *Argumentos:* definición de número hiperreal e infinitamente próximos.
P5	Identificar la pendiente	Lenguaje: (…). Conceptos: (…). *Proposiciones*: enunciado de la P5. *Argumentos:* secuencia de prácticas P1 a P4.

Los objetos primarios que intervienen en los procesos de definición y cálculo de la pendiente a una función $y = f(x)$ en el marco del análisis no estándar se caracterizan por la utilización de los lenguajes natural, geométrico, algebraico y simbólico. Los conceptos que entran en juego en las prácticas son: infinitésimo, número hiperreal, número real, números infinitamente próximos, curva, pendiente, y razón de incrementos infinitesimales. Estos conceptos son empleados para establecer proposiciones como:

P1: "El número hiperreal $2x_0 + \Delta x$ no es un número real";

P2: "El número hiperreal $2x_0 + \Delta x$ está infinitamente próximo al número real $2x_0$"

En cuanto a los procedimientos se observan que se plantea la razón de incrementos infinitesimales y que se resuelve mediante el cálculo algebraico con números hiperreales. Es por ello que los argumentos que validan esta resolución provienen de la definición de números hiperreales y de las propiedades algebraicas de las operaciones con números hiperreales.

En el sistema de prácticas descritas en el marco del análisis no estándar se puede identificar un significado del diferencial, el diferencial de Robinson en el análisis no estándar, el cual se caracteriza por las configuraciones de prácticas y objetos de donde surge el concepto.

4.4.5 Síntesis y estructuración de los significados de la diferencial

En esta sección queremos destacar y distinguir los objetos que intervienen en los sistemas de prácticas matemáticas discursivas y operativas, en la resolución de la situación–problema seleccionado, con el fin de establecer relaciones entre los significados de los diferenciales de Leibniz, Cauchy, Fréchet y del análisis no estándar.

El análisis ontosemiótico realizado en los apartados anteriores nos permite identificar los sistemas de prácticas y objetos que intervienen en las situaciones-problemas con el objetivo de reconocer los significados sistémico-pragmático del diferencial para construir un significado referencia del concepto diferencial (Godino et al., 2007).

En la Tabla 4.6 presentamos las configuraciones de objetos y procesos que caracterizan a cada significado del diferencial, indicando los lenguajes y términos utilizados, los principales conceptos y definición que intervienen en las prácticas. También destacamos las proposiciones sobre los conceptos y las formas de proceder para resolver la situación–problema, que en cada significado adquiere una forma especial. Por último, comparamos los argumentos que validaban las proposiciones y procedimientos empleados para resolver los problemas.

Tabla 4.6

Significados parciales del diferencial

Objetos	Diferencial de Leibniz (Siglo XVII-XVIII)	Diferencial de Cauchy (Siglo XIX)	Diferencial de Fréchet (Siglo XX)	Diferencial en el análisis no estándar (Siglo XX)
Situación Problema	Cálculo de la tangente	Cálculo de la inclinación de la curva	Cálculo de la aplicación lineal y homogénea que aproxima el incremento de la función en un punto respecto del incremento de x	Cálculo de la pendiente
Lenguajes	Natural, geométrico, algebraico y simbólico	Geométrico, algebraico y simbólico.	Natural, geométrico, algebraico, simbólico y funcional.	Natural, geométrico, algebraico y simbólico.
Conceptos	Cantidades infinitamente pequeñas, diferencia, curva, polígono infinitoangular, triángulo diferencial, subtangente, tangente, semejanza, ecuación proporcional	Inclinación, cuerda, curva, infinitamente pequeño, tangente trigonométrica, límite, convergencia, razón de incrementos, diferenciales, cociente de diferenciales y función derivada.	Aplicación lineal y homogénea, función, variable, incremento, aproximación, estimación, error, infinitamente pequeño, límite, diferencial y derivada	Número hiperreal, número real, números infinitamente próximos, curva, pendiente, diferenciales y razón de incrementos infinitesimales
Proposiciones	P1: “el triángulo diferencial y el triángulo formado por la subtangente, ordenada y tangente son semejantes”; P2: “los puntos infinitamente próximos P y Q se relacionan	P1: “si la distancia entre los puntos es infinitamente pequeña, la cuerda se confundirá sensiblemente con la tangente a la curva y la inclinación de la cuerda con la inclinación de la tangente.”; P2: “el valor numérico del	P1: “$\Delta f = f'(a)dx + \varepsilon dx$” (el incremento de la función se puede escribir como una suma de una aplicación lineal y homogénea del incremento de x y una	P1: “pendiente en (x_0, y_0) = el número real infinitamente próximo a $\frac{\Delta y}{\Delta x}$”; P2: “El número hiperreal $2x_0 + \Delta x$ está

	de la siguiente manera $y + dy = (x + dx)^2$	límite hacia el cual converge la tangente trigonométrica $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es la inclinación de la cuerda, es decir, la función derivada"	función ε que tiende a cero cuando Δx tiende a cero).	infinitamente próximo al número real $2x_0$"
Procedimientos	Trazar una tangente es unir dos puntos sucesivos de la curva y prolongar el lado del polígono infinitoangular para obtener la subtangente y la tangente. Incrementar las variables x e y en una cantidad infinitamente pequeña dx y dy, respectivamente (diferencia de la ecuación)	Trazar la cuerda a partir de dos puntos de la curva. Evocar el cálculo del límite de la tangente trigonométrica $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ para determinar la función derivada $y' = \frac{dy}{dx}$	Plantear el incremento de la función $\Delta f = df + \varepsilon\Delta$ Cálculo de límites y derivadas	Platear la razón de incrementos infinitesimales. Cálculo algebraico con números hiperreales
Argumentos	Curva como línea infinito-poligonal, definición de recta, semejanza de triángulos, propiedad fundamental de las proporciones, la diferencia de dos valores sucesivos de x es la diferencial dx, y similarmente para dy.	Una cantidad infinitamente pequeña es una variable cuyo valor numérico disminuye indefinidamente, es decir, tiene límite cero. La cuerda se convierte en la tangente a la curva y la inclinación de la cuerda en la inclinación de la tangente. La tangente trigonométrica se define como la razón de los incrementos $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. El límite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es la función derivada $y' = \frac{dy}{dx}$	Definición de función, límite e infinitésimo, el incremento de la función $\Delta f = df + \varepsilon\Delta$ y el diferencial como una aplicación lineal y homogénea del incremento de x.	Definición de números hiperreales y de las propiedades algebraicas de las operaciones con números hiperreales.

4.5 Síntesis y Conclusiones

En el estudio histórico–epistemológico que hemos realizado sobre el origen y evolución del concepto de diferencial, en el Capítulo 3, se presenta la emergencia del concepto a la largo del desarrollo del cálculo, indicando cuales fueron las necesidades y obstáculos que tuvo que afrontar el diferencial. En el Capítulo 4 comenzamos el análisis ontosemiótico a parir de una situación-problema que involucra el cálculo de la tangente a una curva en un punto e identificamos cuatro configuraciones ontosemióticas asociados a los significados sistémicos-pragmáticos del diferencial.

Las configuraciones ontosemióticas (CO) las hemos denominado de la siguiente manera:

- *CO_1: Diferencial de Leibniz,*
- *CO_2: Diferencial de Cauchy,*
- *CO_3: Diferencial de Fréchet y*
- *CO_4: Diferencial en el análisis no estándar.*

El análisis ontosemiótico realizado sobre cada significado caracterizado por la configuración de prácticas, objetos y procesos, permiten establecer interconexiones entre los significados parciales y configurar un significado de referencia (Godino et al., 2017).

Resulta interesante realizar diferentes observaciones respecto a la Tabla 4.6, identificando algunas interconexiones entre las configuraciones. En primer lugar, podemos destacar que a lo largo de la evolución histórica del concepto diferencial, la situación-problema que hemos seleccionado se mantiene en gran parte, comenzando en Leibniz con el cálculo de la tangente, luego pasando al cálculo de la inclinación de la curva con Cauchy, cálculo de la aplicación lineal que aproxima al incremento de la función con Fréchet y finalmente el cálculo de la pendiente en el análisis no estándar, esto quiere decir, que la problematización de la tarea en esencia es la misma, pero los objetos que intervienen van cambiando.

Esta última característica que hemos mencionado responde al propio desarrollo histórico de las matemáticas, y es una particularidad de la historia del cálculo, ya que como se hizo mención en el estudio histórico-epistemológico y en los antecedentes del trabajo, el avance del cálculo tuvo varias etapas: ingenuo, formal y crítico (Kleiner, 2012).

En la resolución del problema emerge un primer objeto a estudiar, que son los conceptos-definiciones que en la Tabla 4.6 observamos que el diferencial se Leibniz se caracteriza principalmente por el uso de las cantidades infinitamente pequeñas, los infinitesimales, para obtener la subtangente y la tangente. Con el diferencial de Cauchy, los infinitesimales se reconfiguran y pasan a ser considerados como variables que tienen límite cero cuando el incremento de *x* tiende a cero. A partir de los conceptos de límite, convergencia, tangente trigonométrica y derivada, el diferencial pasa de ocupar un lugar central en el cálculo (Edwards, 1979; Kleiner, 2012), a un lugar marginal definiéndose como una expresión que depende de la derivada. (Martínez-Torregrosa et al., 2002).

Luego en el diferencial de Fréchet, los infinitesimales siguen apareciendo como un objeto necesario para el surgimiento de los nuevos conceptos que emergen de las prácticas matemáticas, como la aplicación lineal y homogénea, aproximación lineal y la estimación. Finalmente, los infinitesimales que surgieron con Leibniz, en el siglo XX son definidos formalmente en el análisis no estándar con Robinson (1966), donde entran en juego nuevos conceptos entorno a la CO_4, como números hiperreales y números infinitamente próximos, pero muchos otros se siguen manteniendo como pendiente, razón de incrementos infinitesimales, etc. Los conceptos que intervienen en la CO_4 en el marco del análisis no estándar permiten identificar un cierto nivel de generalización y formalización, producto del propio avance de las matemáticas.

En la evolución de los lenguajes, observamos en un principio, que el diferencial está íntimamente relacionado al geométrico y natural, aunque también se destacan los lenguajes algebraicos y simbólicos con la introducción de dx, dy en la CO_1. A medida que fueron surgiendo las otras CO, adquirieron relevancia otros como, por ejemplo, en la CO_2 con Cauchy, se destaca el algebraico y simbólico, principalmente por la expresión $df = f'(x)dx$. En la CO_3 con Fréchet resalta el lenguaje algebraico, funcional y simbólico al trabajar con las aplicaciones lineales y la aproximación lineal del incremento de f. En el análisis no estándar se destaca el lenguaje geométrico, algebraico y simbólico con la formalización de los infinitesimales.

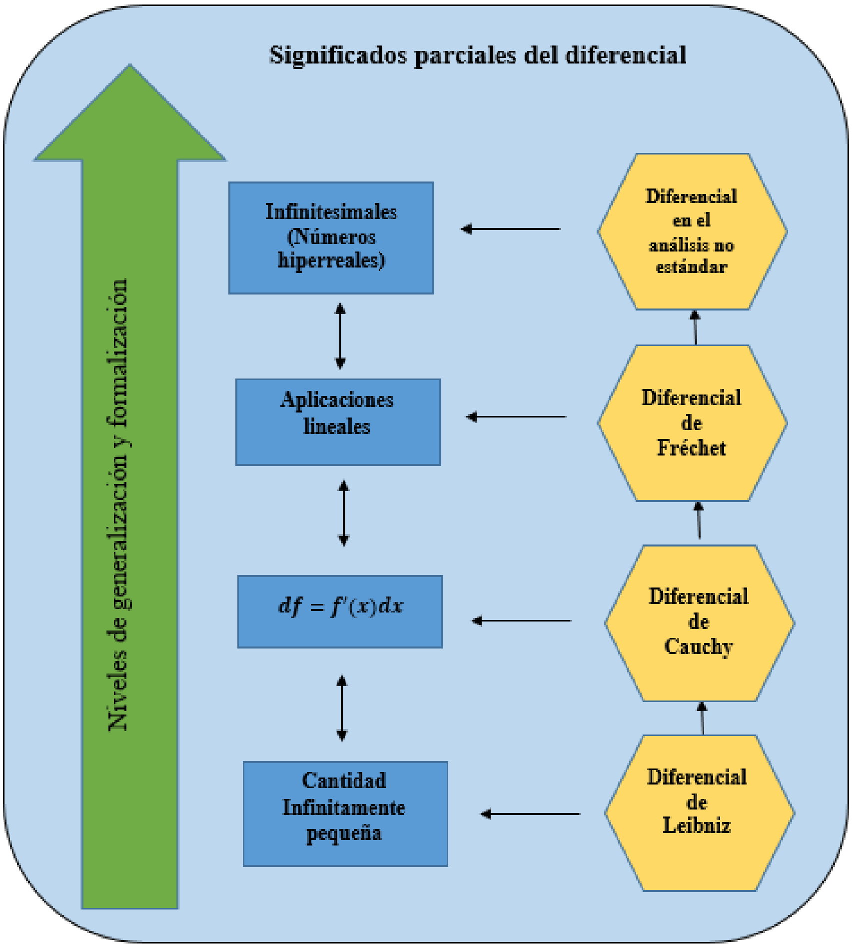
En cuanto a las proposiciones, es interesante observar en la Tabla 4.6 cómo se enuncian y relacionan los conceptos de cada CO para enunciar diferentes afirmaciones sobre el diferencial, donde algunas tienen puntos en común y otras no.

Los procedimientos en cada CO tienen puntos de encuentro, por ejemplo, en el planteo de la tangente trigonométrica en la CO_2 con Cauchy y la razón de incrementos infinitesimales en el análisis no estándar (CO_4), aunque cada procedimiento tiene asociado una CO que permite construir un significado sistémico–pragmático parcial del diferencial. Los argumentos que se emplean para validar los enunciados y razonamientos están en estrecha relación con los conceptos-definiciones involucrados en cada CO.

En general, observamos que las CO asociadas al diferencial presentan varias interconexiones las cuales permiten establecer niveles de generalización y formalización entre ellas, a partir de las prácticas matemáticas (operativas y discursivas) y los objetos que intervienen y emergen de las mismas, como se presentan en la Figura 4.6.

Figura 4.6

Modelo ontosemiótico de los significados del diferencial



Fuente: Verón y Giacomone (2021, p. 23)

Como primer nivel colocamos a la CO_1: diferencial de Leibniz ya que se considera el origen del diferencial asociado principalmente al concepto-definición de las "cantidades infinitamente pequeñas". En el segundo nivel, colocamos a la CO_2: diferencial de Cauchy porque hay una evolución en los objetos que intervienen y destacamos la expresión simbólica $df = f'(x).dx$, la cual es utiliza, en cierta medida, por todas las demás CO.

En el tercer nivel de generalización y formalización ponemos a la CO_3: diferencial de Fréchet, el cual lo identificamos con la aplicación lineal; y en el cuarto nivel se encuentra la CO_4: diferencial en el análisis no estándar donde resaltamos a los “infinitesimales”. Cabe aclarar que en la CO_4 el concepto de aplicación lineal y aproximación de la CO_3 son utilizados en el teorema del incremento del análisis no estándar.

Las CO_1, CO_2 y la CO_3 están contemplados en la CO_4 porque es posible pensarlos como casos particulares estableciendo ciertas condiciones en la utilización de los objetos matemáticos primarios. Esta característica la podemos observar en la Figura 4.6 por medio de las dobles implicaciones entre los objetos que destacamos en cada CO. El conjunto de las CO_1, CO_2, CO_3 y la CO_4 forman los significados parciales del concepto diferencial.

Capítulo 5: Conocimientos Didáctico-Matemáticos de los Procesos de Estudio del Diferencial

El contenido de este capítulo aparece publicado en:

Verón, M. A., Giacomone, B. y Pino-Fan, L. R. (2023). Guía de valoración de la idoneidad didáctica de un proceso de estudio del diferencial. Revista Uniciencia. En prensa.

5.1 Introducción

El diferencial es uno de los conceptos fundamentales en el estudio del cálculo, tanto en el bachillerato como en diversas carreras universitarias. Los docentes y futuros docentes deben afrontar complejos desafíos para abordar los problemas didácticos asociados a este concepto e intentar cubrir las demandas que reclama la comunidad científica. Sin bien existe una gran cantidad de investigaciones sobre las dificultades que presentan los estudiantes al abordar este concepto (Gómez, 2019; López-Gay y Martínez Torregrosa, 2005), no son tantas las que abordan cuáles son los conocimientos didáctico-matemáticos que debería tener en cuenta el profesor para su enseñanza (Castro y Pino-Fan, 2021).

Las investigaciones realizadas en relación con la diferencial han reportado diferentes inconvenientes y dificultades que presenta el estudio de este concepto para los estudiantes de bachillerato y universitarios en los primeros cursos de cálculo. Pero estas dificultades no son exclusivas de los estudiantes, sino que también están presentes en los profesores, lo que genera conflictos semióticos instruccionales en su enseñanza (Martínez-Torregrosa et al., 2002; Tall, 1981). A partir de esta situación, se produce disparidad de interpretaciones, sentidos y contextos de uso del diferencial que genera varios problemas para las carreras de matemáticas, física, ingeniería y ciencias experimentales donde se aborda su estudio (Arcos, 2004; Artigue et al., 1990; Hu y Rebello, 2013; López-Gay et al., 2015; Oldenburg, 2016)

Las dificultades documentadas por la literatura científica están en relación con la dimensión epistémica, cognitiva, ecológica e instruccional en el proceso de estudio del diferencial. Desde la dimensión epistémica, autores como Artigue et al. (1990), Bos (1974), Kleiner (2012), López-Gay (2001), Pulido (1997), Tall (1981), Taylor (1974), Valdivé y Garbin (2008) y Verón (2020) estudiaron la evolución histórica y epistemológica del diferencial y sus conexiones con nociones como cantidad infinitamente pequeña, infinitesimal, variación infinitesimal, aproximación lineal, aproximación o estimación lineal del incremento, entre otros. Estos estudios permitieron realizar una descripción detalla de la complejidad epistémica del diferencial como lo muestran Verón y Giacomone (2021).

Desde la dimensión cognitiva, autores como Gómez (2019), Martínez-Torregrosa et al. (2002) y López-Gay et al. (2015) plantean que una de las dificultades para la comprensión del diferencial está presente en la diversidad de significados, producto de su evolución histórica. Por otro lado, los diversos contextos de uso y los sentidos que van construyendo los estudiantes en cada situación problema del campo de las matemáticas, física, ingeniería o las ciencias experimentales, hace que surjan diferentes conflictos cognitivos. Esto situación se agrava en el momento en que se les solicita que expliquen expresiones que se encuentran vinculadas al diferencial, la diversidad de nociones (definiciones, términos, expresiones) relacionadas hace que no quede claro qué es el diferencial y para qué se lo utilizan (Ely, 2021).

Uno de los principales usos del diferencial se encuentra en la modelización, ya que permite realizar un estudio de los fenómenos de cambio en diferentes disciplinas, destacando de esta manera la importancia de un aspecto de la dimensión ecológica. Pero como consecuencia de este uso interdisciplinario se producen disparidades de significados, como lo evidencian los estudios de Dray y Monogue (2010) y Hu y Rebello (2013).

En relación con la dimensión instruccional, las investigaciones mencionadas señalas que existen varias dificultades, una de ellas se produce por la forma en que se presenta el estudio del diferencial en los libros de textos, tanto los antiguos como los actuales, generan conflictos instruccionales, principalmente debido al uso de diferentes definiciones en distintas partes del texto sin explicar los cambios considerados. Esto es reportado por Gómez (2019), Oldenburg (2016), Pulido (1997), entre otros.

Teniendo en cuenta que el libro de texto es utilizado por muchos profesores como una guía del proceso de instrucción a implementar (Castillo et al., 2022a; Frank y Thompson, 2021), se generan conflictos instruccionales en la gestión de la generalización y/o complejidad del concepto según el significado que se pretenda estudiar con los estudiantes. Además, es importante comprender los significados de los conceptos del cálculo, y en particular del diferencial, que tienen los profesores, ya que esto proporciona información sobre las posibilidades y oportunidades que tendrán los estudiantes para construir aprendizajes significativos (Frank y Thompson, 2021).

Diversos autores han elaborado modelos parciales o clasificaciones de los significados del diferencial según los usos y aplicaciones que hacen los estudiantes, en un intento de comprender y afrontar las distintas dificultades educativas asociadas a este concepto (Dray y Manogue, 2010; Ely, 2021; Hu y Rebello, 2013; López-Gay et al., 2015; Oldenburg, 2016; Pulido, 2010, Valdivé y Garbin, 2008). En esta misma línea, Verón y Giacomone (2021) han realizado una descripción detallada de los significados parciales del diferencial a partir de un estudio histórico epistemológico donde abordan la complejidad ontosemiótica del concepto (Font et al., 2020).

En busca de la mejora y la optimización de los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto de diferencial, desde la perspectiva del EOS se ha propuesta la noción de idoneidad didáctica (Godino, 2013) como una herramienta teórica-metodológica que brinda principios, criterios e indicadores globales, sobre los cuales existe un cierto consenso en la comunidad educativa, de cada una de las dimensiones que intervienen en este proceso, cuya aplicación constituye una guía que podría ser fundamental para apoyar el diseño de tareas significativas, su implementación y gestión de los conocimientos y la valoración justificada de todo el proceso de estudio.

Desde la investigación en didáctica de la matemáticas, se busca particularizar y sintetizar los conocimientos didáctico-matemático necesarios para la enseñanza efectiva de un determinado contenido en criterios e indicadores (Godino, 2021), algunos trabajos en esta línea encontramos en Araya et al. (2021) quienes proponen criterios de idoneidad útiles para diseñar tareas que promuevan diversos significados de la noción límite; Beltrán-Pellicer et al., (2018) presentan la elaboración de indicadores específicos de idoneidad didáctica en probabilidad; Pino-Fan y Parra-Urrea (2021) elaboran criterios para orientar el diseño y la reflexión de clases en relación al estudio de las funciones; Ruz et al. (2019) proponen una guía para valorar procesos de instrucción en Didáctica de la Estadística.

El objetivo de este capítulo es describir la elaboración de una Guía de Valoración de la Idoneidad Didáctica de un proceso de estudio del diferencial para que constituya un instrumento de reflexión, para el profesor, sobre un proceso de enseñanza y aprendizaje del diferencial y debe ser de utilidad para la toma de decisiones fundamentadas en el aula.

A continuación, en la sección 5.2, se presenta el marco teórico y el problema específico de investigación. En la sección 5.3, se describe la metodología empleada. En la sección 5.4, se sintetizan los resultados de las investigaciones en el área y se presenta, como resultado, el sistema de indicadores de idoneidad didáctica. Finalmente, se presentan algunas conclusiones y líneas de investigación.

5.2 Marco Teórico y Problema Específico de Investigación

Desde la perspectiva del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino et al., 2007; 2020), se consideran seis dimensiones o facetas que determinan los focos de atención del análisis didáctico: epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica. Para clasificar un proceso de instrucción como adecuado, en este marco se desarrolló el constructo de Idoneidad Didáctica que aporta componentes y criterios generales para valorar cada una de las mencionadas dimensiones (Figura 5.1).

Figura 5.1

Facetas y componentes del proceso instruccional que pueden ser focos de la investigación

Fuente: Extraído de Godino, Batanero, Brugos y Gea (2021, p. 10).

La noción de idoneidad didáctica se considera como un criterio sistémico de optimización de un proceso de enseñanza de las matemáticas y se define como:

> el grado en que dicho proceso (o una parte del mismo) reúne ciertas características que permiten calificarlo como óptimo o adecuado para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados

institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno). (Godino et al., 2020, p. 11)

Así, la idoneidad didáctica supone la articulación coherente de las seis facetas (epistémica, cognitiva, afectiva, internacional, mediacional y ecológica) relacionadas con las correspondientes del proceso instruccional, las cuales se encuentran descriptas en el Capítulo 2, apartado 2.1.5.

Los criterios de cada componente permiten valorar cada faceta se definen como “norma de corrección que establece cómo debería realizarse un proceso de enseñanza y aprendizaje” (Breda et al., 2018, p. 264).

Por medio de la elaboración de la Guía de Valoración de la Idoneidad Didáctica (GVID), se trata de introducir una metodología para realizar la reconstrucción de un significado de referencia para el estudio del diferencial, en las diversas facetas: epistémica, cognitiva, ecológica, afectiva, mediacional e interaccional. Por tales motivos, se considera a la GVID como una herramienta conceptual para la reflexión sistemática y detallada de los procesos de enseñanza y aprendizaje en sus fases de diseño, implementación y evaluación (Beltrán-Pellicer et al., 2018).

Teniendo en cuenta los resultados de las investigaciones en torno al estudio del diferencial y al uso de la idoneidad didáctica, en este artículo abordamos la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué aspectos y criterios deberían tener en cuenta un profesor para optimizar los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto de diferencial?

En este artículo nos limitamos a presentar la construcción de los indicadores de idoneidad didáctica para el estudio del diferencial.

5.3 Metodología

Se sigue una metodología basada en el análisis de contenido (Cohen et al., 2007) que permite establecer, procesar y revisar dimensiones o categorías cualitativas, describir tendencias, características del contenido y realizar inferencias válidas a partir de los datos.

El análisis de contenido busca identificar y sistematizar criterios específicos de idoneidad didáctica a partir de los resultados de las investigaciones claves en torno al estudio del concepto de diferencial, considerando las facetas epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica. Las unidades de análisis se determinan a partir de las facetas, componentes, subcomponentes y criterios de la Idoneidad Didáctica para el análisis de contenido de las investigaciones referidas a la enseñanza y aprendizaje del diferencial.

De esta manera se logra la construcción de una guía de criterios de idoneidad didáctica para el estudio del diferencial, cuyo proceso introduce una metodología para realizar la reconstrucción del significado de referencia para el estudio de un concepto en sus diversas facetas (Beltrán-Pellicer et al., 2018).

5.4 Criterios de Idoneidad Didáctica de un Proceso de Estudio del Diferencial

5.4.1 Faceta epistémica

La faceta epistémica se refiere al contenido matemático que se estudia, entendido desde una perspectiva institucional, y apoyado en una epistemología matemática centrada en las situaciones-problemas, en las prácticas realizadas para su resolución, así como en las configuraciones de objetos y procesos matemáticos que intervienen y emergen en las tales prácticas (Godino, Batanero, Rivas y Arteaga, 2013, pp. 52-53).

Es importante tener en cuenta que el diferencial es un concepto polisémico (López-Gay et al., 2015) porque tiene varios significados, funciones y usos diferentes en matemáticas, física, ingeniería y en las ciencias experimentales (Arcos, 2004; Oldenburg, 2016, Verón, 2020). A continuación, describimos los objetos y procesos que caracterizan a cada significado del diferencial y conforman las configuraciones epistémicas del concepto a partir del estudio realizado por Verón y Giacomone (2021).

5.4.1.1 Significado de la Diferencial de Leibniz

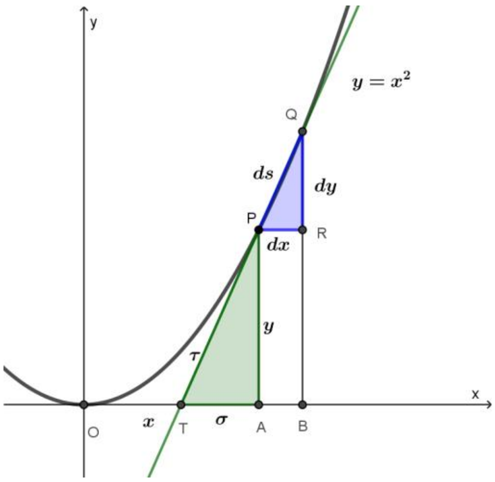
El significado del diferencial en el marco del cálculo de Leibniz se puede caracterizar a partir de la configuración ontosemiótica de prácticas objetos y procesos que intervienen y emergen en las situaciones-problemas dentro de este marco.

Situaciones-problemas: Las situaciones en las que surge de manera clave el diferencial están relacionadas con las cantidades infinitamente pequeñas con el cálculo de la tangente a una curva (Araya et al., 2021; Pino-Fan, Godino y Font, 2011; Verón y Giacomone, 2021), la longitud de la curva, el área de una región o el volumen de un sólido de revolución (Edwards, 1979). Además, Badillo et al. (2005) plantean que el diferencial como un incremento infinitesimal fue de gran ayuda para la resolución de problemas no solo matemáticos, sino también de la física.

Lenguajes: En primer lugar, se utiliza un lenguaje natural y geométrico, caracterizado por la consideración de los conceptos como cantidades geométricas variables, es decir, considerar a las variables como cantidades o magnitud (Bos, 1974; Pulido, 1997). La utilización del triángulo diferencial para el cálculo de la subtangente y la tangente a una curva, la cual era considerada como un polígono de infinitos lados infinitamente pequeño (Kleiner, 2012), como se observa en la Figura 5.2.

Figura 5.2

Triángulo diferencial de lados dx, dy y ds



Fuente: Extraído de Verón y Giacomone (2021, p. 8)

El lenguaje algebraico y simbólico es una de las principales características del diferencial de Leibniz, por su persistencia en el tiempo con el surgimiento de las expresiones como $\Delta x, \Delta y, dx, dy,\ x + dx, y + dy, (dx)^2$ (Bos, 1974; Edwards, 1979; Kleiner, 2012; Martínez-Torregrosa et al., 2002; Pulido, 1997).

Conceptos y definiciones: Los principales conceptos utilizados en esta configuración son: cantidades infinitamente pequeñas y la diferencia, al definir al diferencial como

> La diferencia de dos valores sucesivos de x es la diferencial dx, y similarmente para dy. Se supone que las cantidades dx y dy no son cero sino incomparablemente pequeñas, y por lo tanto despreciables, con respecto a los valores de las variables x e y. (Edwards, 1979, p. 261)

Además, la curva definida como un polígono infinitoangular, triángulo diferencial de lados infinitesimales *dx, dy, ds*. También se emplean conceptos característicos del marco geométrico-algebraico de Leibniz como la subtangente, tangente, semejanza, ecuación proporcional.

Proposiciones y propiedades:

- P1: "un incremento infinitesimal dx en x, produce un incremento infinitesimal *dy* en *y*" (Martínez-Torregrosa et al., 2002).
- P2: "los puntos infinitamente próximos P y Q se relacionan de la siguiente manera $y + dy = (x + dx)^2$
- P3: los diferenciales de orden dos son insignificantes o despreciables en comparación con *dx* y *dy* (Bos, 1974; Edwards, 1979).

Procedimientos: Se destaca el procedimiento "diferencia de la ecuación" que consiste en incrementar las variables x e y en una cantidad infinitamente pequeña *dx* y *dy*, respectivamente $y + dy = (x + dx)^2$. Además, Leibniz en 1964 (p. 223) plantea que para encontrar la tangente a una curva hay que "dibujar una línea recta que une dos puntos de la curva que tienen una distancia infinitamente pequeña, es decir, el lado prolongado del polígono infinitoangular que para nosotros es lo mismo que la curva" (Bos, 1974, p. 19).

Argumentos: Los argumentos que se utilizan provienen de la consideración de la curva como un polígono de infinitos lados, lo que permite determinar el triángulo diferencial y la semejanza con el triángulo formado por la subtangente, la ordenada y la tangente. A partir de establecer la semejanza entre los triángulos se establece las ecuaciones proporcionales que permiten hallar el valor de la subtangente AT y encontrar la tangente PT.

Procesos: se destacan los procesos de conceptualización y representación del diferencial, de triángulo diferencial y los correspondientes elementos diferenciales *dx*, *dy* y *ds* como cantidades de longitud infinitamente pequeñas. Los diferenciales intervienen en procesos de algoritmización o cálculo una vez establecido la ecuación proporcional que relaciona las cantidades de magnitud geométrica, en este caso longitudes de segmentos. Otro proceso que caracteriza a este significado es la modelización, ya que el diferencial es utilizado para matematizar cambios pequeños o infinitamente pequeños de diversos fenómenos de estudio provenientes de las matemáticas, la física, química, biología, economía y las ingenierías (López-Gay et al., 2015).

5.4.1.2 Significado de la Diferencial de Cauchy

Situaciones-problemas: Las situaciones en las que emergen los diferenciales están relacionados con la consideración de las cantidades como variables o incrementos arbitrarios que son infinitesimales cuando su límite tiende a cero. Una situación la analizan Verón y Giacomone (2021) con el cálculo de la inclinación de la curva, pero también es posible encontrar diferenciales de Cauchy en situaciones-problemas de geometría, física y economía que involucran el trabajo con límite (Araya et al., 2021) y también, en situaciones que involucra la derivada como cociente de diferenciales relacionado con las ideas de límite en el cálculo de puntos máximos, mínimos e inflexión (Pino-Fan et al., 2011). Además, el significado del diferencial de Cuachy surge en el contexto de situaciones que involucra el límite y la integral, como puede observarse en Burgos et al. (2021).

Lenguajes: se caracteriza por el lenguaje geométrico porque en el marco del cálculo de Cauchy se abordan varias situaciones-problemas desde el punto de vista de la geometría como el cálculo de la inclinación de una curva. Además, se destaca el lenguaje simbólico, algebraico y funcional con el empleo de los símbolos como dy, $df(x), y', f'(x)$, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{dy}{dx}$ y las relaciones funcionales entre el diferencial y la derivada, en expresiones como $df(x) = f'(x).dx$, $dy = y'\,dx$, $y' = \frac{dy}{dx}$. Como lo presenta Cauchy en 1823 (p. 13) el "diferencial se indica por la característica d, de donde se sigue: dy o $df(x)$. Es fácil obtener su valor cuando se conoce el de la función derivada y' o $f'(x)$".

Conceptos y definiciones: los principales conceptos involucrados en el marco del cálculo de Cauchy son inclinación, cuerda, curva, tangente, infinitamente pequeño, tangente trigonométrica, límite, convergencia, razón de incrementos, diferenciales, cociente de diferenciales y función derivada. Se define al dx como "la diferencial de la variable independiente x no es otra cosa que la constante finita h. Por tanto, la ecuación $df(x) = hf'(x)$ viene a ser $df(x) = f'(x).dx$ o lo que viene a ser lo mismo, $dy = y'\,dx$" (Cauchy, 1823, p. 13).

Para Cauchy (1821), "una cantidad variable se vuelve infinitamente pequeña, cuando su valor numérico disminuye indefinidamente para converger hacia el límite cero" (p. 26). Cauchy definió la diferencial como una expresión construida a partir de la derivada: $df = f'(x) \cdot dx$, siendo dx un incremento arbitrario de la variable y el df es simplemente era el producto de la derivada por el incremento de la variable independiente (Martínez-Torregrosa et al., 2002).

Proposiciones y propiedades:

— P1: Una cantidad infinitamente pequeña, denotada por α o i, es "una variable cuyo valor numérico disminuye indefinidamente" (Cauchy, 1821, p. 27).

— P2: si la distancia entre los puntos es infinitamente pequeña, la cuerda se confundirá sensiblemente con la tangente a la curva y la inclinación de la cuerda con la inclinación de la tangente (Cauchy, 1823, pp. 23-24)

— P3: "la inclinación de la cuerda se obtiene por el valor numérico de la tangente trigonométrica $\frac{\Delta y}{\Delta x}$" (Cauchy, 1823, pp. 23-24).

— P4: "el valor numérico del límite hacia el cual converge la tangente trigonométrica es la inclinación de la cuerda, es decir, la función derivada $y' = \frac{dy}{dx}$ " (Cauchy, 1823, pp. 23-24).

— P5: "si el valor de y' es nulo, la tangente a la curva es una recta paralela al eje x y es un punto máximo o mínimo" (Cauchy, 1823, pp. 23-24)

— P6: "si el valor de y' es infinito, la tangente a la curva es perpendicular" (Cauchy, 1823, pp. 23-24).

Procedimientos: como procedimiento de cálculo se realiza el proceso de paso al límite que da lugar a la derivada de la función en el punto (x, y). En primer lugar, se plantea, por ejemplo, para el cálculo de la inclinación de una curva el trazado de una cuerda a partir de dos puntos de la curva, para luego plantear la razón de incrementos $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ denominada tangente trigonométrica y con el paso al límite se puede determinar la función derivada como el cociente de diferenciales $y' = \frac{dy}{dx}$

Argumentos y justificaciones: los argumentos que validan los procedimientos y proposiciones son la definición de inclinación de la curva, la tangente trigonométrica como la razón de los incrementos $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, el límite y la consideración de las cantidades infinitamente pequeñas como "una variable cuyo valor numérico disminuye indefinidamente" (Cauchy, 1821, p. 27) y que "un infinitesimal es una variable cuyo límite es cero" (Kleiner, 2012, p. 90).

La función derivada como límite de la razón de incremento, y la igualdad entre la función derivada y el cociente de diferenciales.

Procesos: en el proceso de conceptualización de la inclinación de la cuerda como el ángulo agudo formado entre la cuerda y el eje x prolongado, surge el proceso de conceptualización del diferencial como una variable que tiene límite cero, como lo refleja Kitcher (1984, p. 247) al mencionar que "cuando los valores absolutos sucesivos de una variable disminuyen indefinidamente de tal manera que sea menor que cualquier cantidad dada, esa variable se convierte en lo que se llama infinitesimal. Dicha variable tiene cero para su límite". Además, se puede destacar el proceso de modelización e identificación de los infinitesimales en el procedimiento de cálculo donde la inclinación de la cuerda tiende a la inclinación de la curva, cuando los puntos que definen a la cuerda se aproximan infinitamente y la distancia que los separa es una variable que tiene por límite cero.

5.4.1.3 Significado de la Diferencial de Fréchet

Situaciones-problemas: En las situaciones en la que se requiere realizar una aproximación local de la curva, una estimación lineal o tangencial, para describir el comportamiento de un determinado fenómeno físico, químico, biológico o geométrico, se utilizan aproximaciones y funciones lineales, que caracterizan al diferencial de Fréchet (p.e. López-Gay et al., 2018). En Verón y Giacomone (2021), se plantea el cálculo de la aplicación lineal y homogénea que aproxima el incremento de la función en un punto respecto al incremento de x. En estas situaciones-problemas no se requiere que el diferencial sea infinitamente pequeño, sino que $\Delta f - df$ es infinitamente pequeño respecto de Δx (Martínez-Torregrosa et al., 2006).

Lenguajes: se caracteriza por emplear un lenguaje natural y geométrico, al trabajar con la aproximación lineal como la recta tangente a la curva, y el lenguaje algebraico, simbólico y funcional se presenta en expresiones como $f: A \to R$, Δx, df, $df = f'(a)dx$, $df(a, dx) = f'(a)dx$ y $\approx$ para indicar que $\Delta f \approx df$. Además, se utilizan términos como 'aproximación', 'estimación', 'infinitamente pequeño', 'incremento' y 'error' 'aproximadamente igual'.

Conceptos y definiciones: Los principales conceptos que emergen de las prácticas son: aplicación lineal y homogénea, función, variable, incremento, aproximación, estimación, error, infinitamente pequeño, límite y derivada, como se observa en la definición de Fréchet en 1911 sobre el diferencial:

"Una función $f(x, y, z, t)$ admite una diferencial en el punto (x_0, y_0, z_0, t_0) si existe una función lineal y homogénea de los incrementos, o sea: $A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + D\Delta t$, que no difiere del incremento de la función Δf a partir del valor $f(x_0, y_0, z_0, t_0)$ nada más que en un valor infinitamente pequeño respecto a la distancia Δ de los puntos $(x_0, \dots, t_0)$ y $(x_0 + \Delta x \ \dots, t_0 + \Delta t)$. La diferencial entonces es por definición: $df = A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + D\Delta t$." Esta definición se expresa por la fórmula $\Delta f \ = \ df + \ \varepsilon\Delta$ donde ε tiende a cero cuando Δ tiende a cero. (como se citó en Artigue, 1989, p. 34)

De esta manera el diferencial de Fréchet se define como la estimación lineal del incremento respecto al cambio de variable. Se entiende que el diferencial es una función que puede tomar cualquier valor y su expresión diferencial va a estar sujeta a la condición de que $(\Delta f - df)$ sea infinitamente pequeña respecto a Δx. Esto quiere decir que df no es infinitamente pequeño, sino que la diferencia entre el incremento y el diferencial es infinitamente pequeño respecto a Δx (López-Gay, 2001). Además, es necesario destacar que la función diferencial df es una función de dos variables (Martínez-Torregrosa et al., 2002) ya que depende del punto $x = a$ y del diferencial de x, cuya notación es: $df(a, dx) = f'(a)dx$ (Rabuffetti, 1987).

Proposiciones y propiedades: Los enunciados y proposiciones que se realizan sobre los conceptos y definiciones son:

— P1*:* "$\Delta f = f'(a)dx + \varepsilon dx$" (el incremento de la función se puede escribir como una suma de una aplicación lineal y homogénea del incremento de x y una función ε que tiende a cero cuando Δx tiende a cero) (Martínez-Torregrosa et al., 2006);

— P2: "$df = f'(a)dx$ es una aplicación lineal y homogénea de los incrementos" (Martínez-Torregrosa et al., 2006);

— P3: "$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon_a(\Delta x) = 0$"

— P4: *"*$\Delta f \approx f'(a)dx$*", "*$\Delta f \approx df$*"* (el incremento de la función es aproximadamente igual al diferencial de la función).

Procedimientos: en primer lugar, se destaca que los procedimientos que se utilizan para determinar una función lineal y homogénea que aproxime al incremento de la función provienen del cálculo de los límites y las derivadas. Se plantea el incremento de la función f como $\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)$. Luego, siguiendo la definición de diferencial de Fréchet, se considera que $\Delta f = f'(a)dx + \varepsilon dx$ y que ε tiende a cero cuando Δx tiende a cero, entonces el $\Delta f \approx f'(a)dx$

Argumentos: la validación de los procedimientos y proposiciones se debe a la utilización de la definición de función, límite, incremento de la función $\Delta f = df + \varepsilon\Delta$ donde ε tiende a cero cuando Δ tiende a cero (Fréchet, 1911) y el diferencial como una aplicación lineal y homogénea del incremento de x. Además de las definiciones y propiedades del cálculo de límites y derivadas.

Procesos: se destaca la conceptualización del diferencial como una aplicación lineal y homogénea que no necesariamente es infinitamente pequeño, sino que su expresión está sujeta a que $\Delta f - df$ sea infinitamente pequeño respecto de Δx (Martínez-Torregrosa et al., 2006). Otro proceso importante es el de modelización ya que el comportamiento de la función en un punto es aproximadamente igual al del diferencial de la función considerándola como mejor aproximación local de la curva (Alibert y Legrand, 1989).

5.4.1.4 Significado del diferencial de Robinson

Situaciones-problemas: Las situaciones en las cuales surge el diferencial de Robinson se caracterizan por considerar a los infinitesimales como números hiperreales en el campo del análisis no estándar (Kleiner, 2012). Como lo plantean Keisler (2000) y Verón y Giacomone (2021) para el cálculo de la pendiente a una función. También se emplean para problemas de velocidad, tasa de cambios y funciones de acumulación considerando al diferencial como un incremento infinitesimal de x, en el marco del análisis no estándar (Ely, 2021).

Lenguajes: se caracteriza por presentar un lenguaje natural y geométrico, como se puede apreciar con el cálculo de la pendiente en Verón (2020); un lenguaje algebraico y simbólico con las expresiones $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, $dx = \Delta x, dy = f'(x)dx$

Conceptos y definiciones: los conceptos que entran en juego en las prácticas son: infinitésimo, número hiperreal, número real y números infinitamente próximos como se puede observar en la definición dada por Robinson en 1966 de los números hiperreales infinitésimos e infinitos:

> Un número $a \in {}^*\mathrm{R}$ se llamará infinitesimal o infinitamente pequeño si $|a| < m$ para todo número positivo $m \in \mathrm{R}$. Según esta definición, 0 es infinitesimal. …Un número $r \in {}^*\mathrm{R}$, $r \neq 0$, es infinitesimal si y solo si r^{-1} es infinito. Si $a - b$ es infinitesimal, entonces decimos que b está infinitamente próximo a a, y se escribe $a \simeq b$. Esto es, dos

hiperreales x, y ϵ^*R son infinitamente cercanos (notación: $x \simeq y$), $x \simeq y \quad \Leftrightarrow$ $(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1)\ |x-y| < 1/n$. (p. 56)

En cuanto al diferencial, en el marco del análisis no estándar, se define la diferencial de x es la variable independiente $dx = \Delta x$ y el diferencial de y es la variable dependiente dy dada por $dy = f'(x)dx$ (Keisler, 2000). En relación con los conceptos de curva, pendiente, y razón de incrementos infinitesimales, se plantea que la relación entre la derivada y el cociente de diferenciales es la igualdad: $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ mientras que la derivada y el cociente incremental difieren en un infinitésimo: $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x)$

Proposiciones y propiedades: en el cálculo de la pendiente de recta tangente a la función se plantea que la razón de incrementos infinitesimales es $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$, en donde surgen las proposiciones como:

— P1: “pendiente en (x_0, y_0) = el número real infinitamente próximo a $\frac{\Delta y}{\Delta x}$”

— P2: “El número hiperreal $2x_0 + \Delta x$ no es un número real”;

— P3: “El número hiperreal $2x_0 + \Delta x$ está infinitamente próximo al número real $2x_0$”

Procedimientos: se observan que se plantea la razón de incrementos infinitesimales y que se resuelve mediante el cálculo algebraico con números hiperreales.

Argumentos: los argumentos que validan los procedimientos y proposiciones provienen de la definición de números hiperreales y de las propiedades algebraicas de las operaciones con números hiperreales.

Procesos: se caracteriza por el proceso de conceptualización del diferencial como un número hiperreal (infinitesimal) y el proceso de algoritmización en el cálculo de pendiente al establecer relaciones entre la derivada, cociente de diferenciales, cociente de incrementos infinitesimales y que el número hiperreal $2x_0 + \Delta x$ está infinitamente próximo al número real $2x_0$ (Keisler, 2000).

5.4.1.5 Relaciones entre significados

Se considera relevante para el estudio del concepto de diferencial establecer relaciones entre los significados parciales y, en consecuencia, entre las prácticas, objetos y procesos que emergen en la resolución de las situaciones-problemas con el propósito de trabajar con una muestra representativa de los significados institucionales del concepto.

Las relaciones entre los significados del diferencial deben tener presente las interconexiones entre las configuraciones ontosemióticas caracterizadas por Verón y Giacomone (2021) según el grado de generalidad y formalización de los objetos intervinientes.

El concepto de diferencial se relaciona de manera directa con otros conceptos, donde interviene su representación simbólica (*dx, dy, df*) y su utilización en relación con los conceptos de derivada, integral y ecuaciones diferenciales (Ely, 2021; Gómez, 2019); tasa de cambio (Frank y Thompson, 2021), utilizando de esta manera uno o varios de los significados parciales del diferencial.

Además, los autores Harel (2021); Martínez-Planell y Trigueros (2021); Thompson y Harel (2021), destacan la importancia del estudio de la linealización o aproximación lineal, cuyas prácticas están asociadas al significado parcial del diferencial, para establecer relaciones entre el cálculo de funciones reales y el cálculo multivariable.

5.4.1.6 Conflictos epistémicos

Varias investigaciones plantean la necesidad de realizar un estudio histórico epistemológico del concepto de diferencial por la complejidad del concepto y por los diferentes significados con los cuales se presenta, resaltando el problema epistemológico de los significados del diferencial (Artigue, 1995; Cordero-Orosio, 1991; García Jiménez, 2018; Gómez, 2019; Hu y Rebello, 2013; Pulido, 1997).

Las dificultades que presentan los estudiantes sobre el diferencial son del tipo estructural, relacionado con el cálculo algebraico por una presentación donde predomina los algoritmos, pero también conceptual, relacionado con la comprensión del objeto (Orton, 1983). Por otro lado, se plantea que las dificultades están estrechamente relacionadas con la forma en las cuales se presenta a los estudiantes, es decir, desde qué significado (Gómez, 2019), lo que implica de manera directa los conceptos que son empleados para definir al diferencial. En particular, se menciona que la presentación por medio del concepto de límite, como aparece en la mayoría de los textos actuales del cálculo, genera mayores dificultades por la complejidad del objeto matemático límite (Arcos, 2004; Oldenburg, 2016; Pulido, 1997).

A pesar de su gran utilidad en matemáticas y en las ciencias experimentales, suele suceder que no es claro la finalidad con los cuales se emplean procedimientos que involucran diferenciales en la resolución de situaciones-problemas como lo evidencian las investigaciones de Artigue et al. (1990), Ely (2021), Hu y Rebello (2013), Martínez-Torregrosa et al., (2002), entre otros. También plantean López-Gay et al. (2015) y Martínez Uribe et al. (2017), que se presentan conflictos en el uso y la representación del diferencial en las diferentes asignaturas que abordan el tema, principalmente entre cálculo y física.

Además, las investigaciones de Artigue et al. (1990), López-Gay (2001), Oldenburg (2016) y Pulido (1997), muestran como conviven y generan diferentes conflictos en estudiantes y profesores, en matemáticas y las ciencias experimentales, los diversos significados del concepto de diferencial que se presentan de forma explícita o implícita en los diferentes libros de textos de cálculo, física, química, ingeniería, etc.

Un aspecto importante del concepto de diferencial que destaca Gómez (2019) es la representación simbólica y su utilización en relación con los conceptos de derivada, integral y ecuaciones diferenciales, porque el diferencial aparece en las expresiones $dy = f'(x).dx$; $\frac{dy}{dx} = f'(x)$; $f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0$; $\int f(x)dx$, generando de esta forma diferentes conflictos en el aprendizaje y la enseñanza del concepto de diferencial. Por ejemplo, Ely (2021) plantea que, en los libros de textos actuales, un diferencial no se puede escribir de manera significativa por sí mismo, sino que solo adquiere significado cuando se lo fusiona con otras notaciones, como $\frac{dy}{dx}$ donde simboliza un lenguaje de código para representar $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ más que un cociente de cantidades. En relación con los conflictos semióticos que presenta el diferencial en los significados de la integral definida, algunas discusiones y ejemplos se presentan en Burgos et al. (2021) y Ely (2017).

A continuación, en la Tabla 5.1, se especifican los componentes, subcomponentes e indicadores de idoneidad epistémica para el estudio del diferencial.

Tabla 5.1

Indicadores específicos para la idoneidad epistémica para el estudio del diferencial

Compo-nentes	**Sub compo-nentes**	**Indicadores**

Significados	Situaciones-problemas	Se plantean situaciones-problemas que muestren y relacionen los diversos significados del diferencial involucrando las cantidades infinitesimales, variables cuyos límites son infinitésimos y aproximaciones o estimaciones lineales.
		Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación.
		Se propone una muestra representativa de contextos donde ejercitar y aplicar los significados del diferencial, ya sean en matemáticas o en otras ciencias, como la física, química, ingeniería, economía, etc.
		Se proponen situaciones de generación de problemas en matemáticas y en las ciencias experimentales (problematización) para el estudio de cambios infinitesimales por los propios estudiantes.
		Se plantean situaciones que propician la utilización del diferencial para la modelización y representación de las variaciones o cambios de diversos fenómenos de matemáticas, física, ingeniería y de las ciencias experimentales.
	Lenguajes	Se emplean diferentes registros y representaciones para describir al diferencial (natural, algebraico, simbólico, gráfico, funcional, etc.), señalando las relaciones entre las mismas. Por ejemplo, se emplea el registro tabular para representar el cambio infinitesimal del tiempo o la variación infinitesimal de la masa en función del radio. También se utiliza el registro gráfico para representar y conceptualizar la "porción infinitesimal" de área o para estudiar la estimación lineal tangencial a una curva.
		Se utiliza un nivel de lenguaje adecuado a los alumnos que se dirige.
		Se emplean términos precisos, como cantidades pequeñas, cantidades infinitamente pequeñas, incremento infinitesimal, tangente, inclinación, aproximación lineal, pendiente, derivada, etc.
		Se proponen situaciones de expresión matemática e interpretación, en los diferentes registros mencionados. Por ejemplo: $dy = f'(x).dx$; $\frac{dy}{dx} = f'(x)$; $f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0$; $\int f(x)dx$; $\int df$
	Conceptos	Se presentan los conceptos fundamentales del diferencial en forma clara y se adaptan al nivel educativo al que se dirigen.
		Se presentan las definiciones del dx, dy, incremento de la función, derivada, cantidad infinitesimal, variación infinitesimal, cociente diferencial, incremento infinitesimal, pendiente, estimación lineal tangencial, aproximación, error, etc.
		Se proponen situaciones donde los estudiantes tengan que generar o negociar definiciones que intervienen y emergen en el estudio del diferencial.

	Proposiciones	Se presentan las proposiciones fundamentales del diferencial en forma clara y se adaptan al nivel educativo al que se dirigen. Por ejemplo: "un incremento infinitesimal dx en x, produce un incremento infinitesimal dy en y" (Martínez-Torregrosa et al., 2002). Una proposición fundamental con relación al diferencial es que cantidad infinitamente pequeña "una variable cuyo valor numérico disminuye indefinidamente" (Cauchy, 1821, p. 27). Se proponen situaciones donde los estudiantes tengan que generar o negociar proposiciones sobre las interpretaciones y sentidos que atribuyen al diferencial, según el contexto de uso. Por ejemplo, cuando se dice que la diferencial son "esos trocitos cada vez más pequeños" es importante abordar la validez de esta afirmación.
	Procedimientos	Se presentan los procedimientos fundamentales del diferencial en forma clara y se adaptan al nivel educativo al que se dirigen. Por ejemplo: "diferencia de la ecuación" que consiste en incrementar las variables x e y en una cantidad infinitamente pequeña dx y dy, respectivamente (asociado al diferencial de Leibniz), el proceso de paso al límite para plantear la derivada como el cociente de diferenciales (asociado al diferencial de Cauchy) o el incremento de la función se puede escribir como una suma de una aplicación lineal y homogénea del incremento de x y una función ε que tiende a cero cuando Δx tiende a cero) (asociado al diferencial de Fréchet). Se proponen situaciones donde los estudiantes tengan que generar o negociar procedimientos.
	Argumentos	Las proposiciones y procedimientos se explican y argumentan (se justifican y demuestran) de forma adecuadas según el nivel educativo a que se dirigen. Se usan representaciones geométricas para apoyar y reforzar las argumentaciones Se promueven situaciones donde el estudiante tenga que argumentar.
Relaciones		Se identifican y articulan los diversos significados del diferencial según los objetos matemáticos (problemas, definiciones, proposiciones etc.) el nivel de generalización y formalización de los objetos intervinientes. Se proponen situaciones para establecer relaciones entre el diferencial con otros conceptos, como derivada $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, integral $\int dy$ y ecuaciones diferenciales.
Procesos	Comunicación argumentación	Se debería tener en cuenta la diversidad de procesos (secuencias de prácticas) de los cuales emergen los objetos que intervienen en las prácticas matemáticas (problematización, representación, definición, generalización, modelización, …). Por ejemplo: el proceso de modelización, donde el diferencial es utilizado para matematizar cambios pequeños o infinitamente pequeños de diversos fenómenos de estudio provenientes de las matemáticas, la física, química, biología, economía y las ingenierías (López-Gay et al., 2015). El proceso de representación de los diferenciales mediante expresiones simbólicas como *dx, dy, df* y mediante gráficos como la linealización de una curva.

	Modelización	Se plantean situaciones que permitan al estudiante utilizar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones donde interviene el diferencial (identificar, seleccionar características de una situación, representarlas simbólicamente, analizar y razonar el modelo, reconocer las características de la situación, la precisión y limitaciones del modelo). Por ejemplo, problemas de velocidad instantánea, desintegración radiactiva, etc. (López-Gay et al., 2018). Se plantean situaciones en las que la modelización es utilizada para comprender y establecer relaciones en el estudio de diversos fenómenos que involucran cambios infinitamente pequeños (Leibniz), o cambios considerados como variables que tiene límite cero (Cuachy), o al buscar la mejor aproximación local o estimación lineal de una curva en un punto (Fréchet).
	Conceptualización	Se promueven situaciones donde los estudiantes tengan oportunidad de describir, explicar y hacer generalizaciones y conjeturas sobre el diferencial como cantidades de magnitudes infinitamente pequeñas (Diferencial de Leibniz), como una variable que tiene límite cero (Diferencial de Cauchy), como la mejor aproximación local de la curva (Diferencial de Fréchet).
Conflictos epistémicos		Se debería evitar discordancias entre los significados del diferencial con los correspondientes a la institución de referencia, por ejemplo, en las carreras de matemática, física, ingeniería y ciencias experimentales. Los contenidos, situaciones-problemas y sus soluciones, conceptos, proposiciones, lenguaje etc. se presentan de forma correcta sin errores, contradicciones, ambigüedades. Se debería tener en cuenta que los símbolos y expresiones que involucran al diferencial varían su significado según los contextos de uso y al estar relacionados con otros conceptos como derivada, integral y ecuaciones diferenciales, es importante dejar en claro cuál es el sentido de su uso. Por ejemplo: $\mathrm{dy} = \mathrm{f}'(\mathrm{x}).\mathrm{dx}$; $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \mathrm{f}'(\mathrm{x})$; $\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})\mathrm{dx} + \mathrm{g}(\mathrm{x},\mathrm{y})\mathrm{dy} = 0$; $\int \mathrm{f}(\mathrm{x})\mathrm{dx}$; $\int \mathrm{df}$ Se debería tener en cuenta los conflictos que se pueden generar al momento de considerar que las cantidades infinitesimales en un determinado momento de la resolución son reemplazadas por cero según las conveniencias del problema. Se considera necesario generar instancias de reflexión sobre la diferencia en la consideración de los diferenciales como cantidad infinitamente pequeñas o como variables cuyo límite tiende a cero. Se considera oportuno propiciar espacios para que los estudiantes compartan sus interpretaciones y sentidos en relación con para qué se usan los diferenciales en la resolución de las situaciones-problemas.

Nota: Fuente propia de la investigación elaborada a partir de Godino (2013)

5.4.2 Faceta cognitiva

La faceta cognitiva involucra el conocimiento didáctico-matemático de cómo lo estudiantes aprenden, razonan y entienden las matemáticas y como progresan en su aprendizaje (Pino-Fan y Godino, 2015; Godino et al., 2017).

El aprendizaje es considerado desde el EOS como las prácticas personales que presentan los estudiantes al resolver una tarea, en ellas el profesor puede observar la configuración de prácticas, objetos y procesos que utiliza el estudiante. Se entiende, en la medida en que estas prácticas personales se correspondan con las prácticas institucionales identificadas en los significados parciales del diferencial descriptos Verón y Giacomone (2021), que el aprendizaje tendrá mayor grado de idoneidad cognitiva.

Desde la perspectiva del EOS, la faceta cognitiva está inspirada en el concepto de zona de desarrollo potencial de Vigotsky, donde los objetivos de aprendizaje implican desarrollo de conocimientos y competencias matemáticas que conllevan un esfuerzo alcanzable para el estudiante, con el apoyo del profesor, los compañeros, los conocimientos previos y las capacidades individuales. Es por ello, que se asume un aprendizaje relacional y con compresión de los significados institucionales (Godino, 2021)

Relaciones: sabiendo que los significados parciales no están aislados entre sí, es importante, para la compresión global del concepto de diferencial, que los estudiantes puedan establecer conexiones entre los diferentes significados; como lo plantean Castillo et al. (2022b) se pretende "valorar si el alumno establece conexiones entre los diferentes objetos matemáticos y entre sus correspondientes significados" (p. 12).

Procesos: teniendo en cuenta que el concepto de diferencial emerge de diversas situaciones-problemas del campo de las matemáticas y las ciencias experimentales, con el propósito de modelizar fenómenos de cambios, se considera importante que el estudiante pueda desarrollar la competencia matemática que le permita implementar el proceso de modelización para la descripción del fenómeno en estudio.

Conocimientos previos: esta componente valora si se especifican los conceptos y competencias que se consideran necesarios para el estudio del diferencial, con el propósito de que los estudiantes puedan establecer relaciones adecuadas entre los distintos contenidos y realizar un uso competente de los mismos. Por ejemplo, Frank y Thompson (2021) plantean que los estudiantes en sus estudios de bachillerato o precálculo, necesitan estudiar los significados de los conceptos de cambios y variaciones de cambios en los valores de una función, para tener mayores oportunidades de comprender, en los primeros cursos de cálculo, los significados de tasa de cambio y sus aplicaciones.

Conflictos cognitivos: Varias investigaciones han reportado que los estudiantes y profesores presentan diversas dificultades en relación con la utilización de los diferenciales.

Hu y Rebello (2013) plantean que el uso de los símbolos matemáticos, como el diferencial *dx*, *dy*, genera muchas dificultades para los estudiantes de física, porque en matemáticas la utilización de las notaciones esta prescripto, pero en física depende del contexto de la situación, ya que los diferenciales pueden representar una cantidad o un cambio infinitesimales de una cantidad física, según el contexto. Además, la utilización del diferencial en relación con otros conceptos plantea dificultades en los significados que entran en juego en la resolución de las situaciones-problemas (García Jiménez, 2018). Como se presenta en López-Gay y Martínez-Torregrosa (2005), en el discurso de estudiantes y profesores en formación entran en conflicto los significados del diferencial y de la derivada, principalmente por las interpretaciones y ambigüedades que se generan en la utilización del símbolo diferencial. En los procesos de significación e interpretación del concepto-definición de la integral definida se genera un conflicto cognitivo cuando el estudiante tiene que comprender al dx en la expresión $\int_a^b f(x)dx$ como lo estudia Burgos et al. (2021).

A continuación, en la Tabla 5.2, se especifican los componentes e indicadores de idoneidad cognitiva para el estudio del diferencial.

Tabla 5.2

Indicadores específicos para la idoneidad cognitiva para el estudio del diferencial

Componentes	Indicadores
Significados personales (Aprendizajes)	Se debería lograr que los significados personales construidos por los estudiantes se correspondan con los significados institucionales pretendidos, implementados y evaluados (ver, por ejemplo, Ramírez, Ibarra, y Pino-Fan, 2020). La evaluación de los aprendizajes logrados debería tener en cuenta las características personales de los estudiantes y los distintos niveles de comprensión y competencia que pueden alcanzar. La evaluación debería servir para mejorar el proceso instruccional.
Relaciones (conexiones)	El aprendizaje debería ser de tipo relacional, de modo que los estudiantes sean capaces de comprender y relacionar los distintos significados y contextos de uso del diferencial. Las experiencias (situaciones, ejemplos, explicaciones…) propuestas permiten valorar si el estudiante establece relaciones o conexiones entre los objetos matemáticos y entre los significados del diferencial. Se plantean situaciones que permiten diferenciar y relacionar el diferencial con la derivada, el límite, la integral y las ecuaciones diferenciales. Por ejemplo: velocidad instantánea, cálculo de la masa de una lámina, cambio total de la masa.
Procesos	Se debe tener en cuenta la competencia del estudiante para implementar procesos matemáticos en relación con la diferencial

	(modelización, generalización, conceptualización, resolución o planteamiento de problemas, prueba, representación, etc.) y metacognitivos (reflexión sobre los propios procesos de pensamiento matemático).
Conocimientos previos (se tienen en cuenta los mismos elementos que para la idoneidad epistémica)	Se analiza que los estudiantes tienen los conocimientos previos y necesarios para abordar el estudio del diferencial, entre ellos: cantidad, variable, función, entre otros que dependen de la complejidad ontosemiótica del significado parcial del diferencial que se pretende estudiar. Se vinculan y se relacionan los conocimientos previos con los significados del diferencial. El profesor planifica situaciones-problemas (p.e. aproximación o estimación lineal, pronóstico lineal, razón de cambio, tasas, velocidad, desintegración radiactiva, cálculo del área de un círculo, variación, cambio y acumulación total de la masa, optimización, etc.) que promueven la modelización en diversos contextos y permiten comprender la riqueza de procesos que emergen en el estudio del diferencial. Se utilizan diferentes registros apropiados para la representación de información, como gráficos, tablas, ecuaciones, expresiones simbólicas, etc.
Diferencias individuales	El proceso de instrucción debería apoyar a los estudiantes según sus diferencias individuales en conocimientos previos y estilos de aprendizaje en el proceso de estudio del contenido pretendido o implementado. Se incluyen actividades de ampliación, refuerzo, contraejemplos y analogías. Por ejemplo, plantear la discusión sobre el uso de los términos: cantidad pequeña, cantidad o cambio infinitamente pequeño, infinitesimal, variación infinitesimal, porción infinitesimal, aproximación, estimación lineal, error, entre otros, en relación con los significados del diferencial. Se promueve el acceso, el logro y apoyo de todos los estudiantes.
Conflictos cognitivos	El proceso de instrucción debería abordar y clarificar los diferentes significados del diferencial teniendo en cuenta las dificultades que se presentan según el contexto de uso, las expresiones simbólicas utilizadas y las interconexiones con otros conceptos como límite, derivada, integrales y ecuaciones diferenciales. Se valora el error y la confusión en relación con las interpretaciones o sentidos del diferencial como fuente de aprendizaje.

Nota: Fuente propia de la investigación elaborada a partir de Godino (2013)

5.4.3 Faceta afectiva

En esta faceta se valora la situación afectiva del sujeto que esta frente a la resolución de cualquier problema matemático, ya que no solo pone en juego prácticas operativas y discursivas para dar una respuesta al problema, sino que también moviliza actitudes, creencias, emociones y valores que condicionan, en mayor o menor grado, la respuesta cognitiva requerida (Godino, 2013).

Beltrán-Pellicer y Godino (2020) y Grootenboer y Marshman (2016) plantean que existe un cierto consenso en la comunidad científica respecto a las componentes del dominio afectivo en la educación matemática, donde se destaca a las emociones, actitudes, creencias y valores. Por tales motivos, consideramos que es necesario tener en cuenta estas componentes para la valoración de la faceta afectiva para el estudio del diferencial de una función.

Las componentes del dominio afectivo están presenten en todo el proceso de estudio (antes, durante y después) como lo plantean Grootenboer y Marshman (2016) al mencionar que el afecto influye en el aprendizaje de las matemáticas, pero también los estudiantes desarrollan creencias, actitudes y emociones a medida que participan de las experiencias del aula.

Emociones: se entiende que son los cambios que se producen rápidamente y que son experimentados de manera consciente o que ocurren preconsciente o inconscientemente durante el momento de resolver una tarea y pueden variar de leves a intensas. Cabe destacar que las emociones, como una práctica afectiva, se manifiestan de manera local y contextual (Beltrán-Pellicer y Godino, 2020). En esta componente se valorará que los contenidos estén vinculados con los problemas sociales o la vida social de los estudiantes, como así también que incluyan aspectos motivacionales y que se generen espacios para potenciar la autoestima evitando el rechazo hacia las matemáticas (Castillo et al., 2022b).

Actitudes: se considera que "describen orientaciones o predisposiciones hacia ciertos conjuntos de sensaciones emocionales (positivas o negativas), en contextos particulares (matemáticos)" (Beltrán-Pellicer y Godino, 2020, p. 6). Será importante valorar si se plantean situaciones que motivan a los estudiantes en la participación de las actividades, en favorecer la argumentación en situaciones de igualdad y fomentar una actitud de flexibilidad hacia la exploración de ideas y caminos de resolución de problemas.

Montes y Ursini (2014) plantean que la actitud de autoconfianza es un punto clave para obtener mejoras en el aprendizaje de las matemáticas. Lograr que el estudiante se siente seguro al resolver una situación problema, genera que lo enfrente de una manera diferente, con confianza, sin miedo.

Creencias: implican la asignación de algún tipo de validez externa al sistema de configuraciones cognitivas; son muy estables y en gran parte son cognitivas y estructurales (Beltrán-Pellicer y Godino, 2020). En esta componente se valora las creencias sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, como así también las creencias en torno a la formación profesores, físicos e ingenieros con relación al cálculo, y en particular, al estudio diferencial.

Valores: incluyen componentes éticos y morales, y se entienden como "verdades personales y aspectos apreciados por los individuos" (Castillo et al., 2022b, p. 15). En esta componente se valorará los sistemas de valores que ayudan a motivar las decisiones.

Por ejemplo, en la investigación de Moreno y Azcárate (2003) estudian cómo influyen las creencias de los profesores sobre la enseñanza y el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales, donde plantean que las creencias, actitudes y los sistemas de valores entran en juego en la toma de decisiones en relación a las estrategias didácticas, gestión de la clase, concepciones sobre la enseñanza, competencia matemática de los estudiantes, entre otras; donde mencionan que los profesores "ninguno de ellos valora suficientemente a los estudiantes más allá de las creencias, muy asentadas" (Moreno y Azcarate, 2003, p. 278).

En la Tabla 5.3 se especifican los componentes e indicadores de idoneidad afectiva para el estudio del diferencial.

Tabla 5.3

Indicadores específicos para la idoneidad afectiva para el estudio del diferencial

Componentes	Indicadores
Intereses y necesidades	Las tareas tienen interés para los estudiantes. Se presenta el estudio de la diferencial como una herramienta útil en la resolución de diversos problemas de matemáticas, física, ingeniería y las ciencias experimentales. Se proponen situaciones que permitan valorar la utilidad del diferencial en la resolución de situaciones problemáticas de la vida cotidiana y profesional.
Emociones	Las tareas y el contenido correspondiente tienen interés para los estudiantes. Existen elementos motivadores: ilustraciones, humor, etc. Se fomentan y potencian los razonamientos lógicos, las ideas originales o el trabajo útil, práctico o realista. Se programan momentos específicos a lo largo de las sesiones para que los estudiantes puedan expresar sus emociones hacia las situaciones propuestas. Se promueve la autoestima, evitando el rechazo, la fobia, el miedo a las matemáticas. Se resaltan las cualidades de precisión y rigurosidad de las matemáticas.
Actitudes	Se promueve la participación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, etc.

	Se favorece la argumentación en situaciones de igualdad; el argumento se valora en sí mismo y no por quién lo dice. Se fomenta la flexibilidad para explorar ideas matemáticas y métodos alternativos, para la resolución de problemas.
Creencias	Se analizan y se consideran las creencias sobre las matemáticas, sobre la metacognición de los estudiantes, sobre la enseñanza del cálculo y sobre el contexto social en el que desarrollan el aprendizaje.
Valores	Se tienen en cuenta las apreciaciones personales de los profesores y estudiantes en relación con las posibilidades de estudio del diferencial. Se identifican y se trabajan las "verdades personales y aspectos apreciados por las personas" sobre el estudio del diferencial para la organización de las clases.

Fuente: elaborado por los autores a partir de Godino (2013)

5.4.4 Faceta interaccional

Esta faceta se caracteriza por la valoración de la negociación de los significados que se deberían generar en un proceso instruccional, es decir, se estudia el grado en que los modos de interacción entre docente y alumnos y entre los mismos alumnos, permiten identificar y resolver conflictos semióticos potenciales, favorecer el aprendizaje autónomo y el desarrollo de competencias comunicativo-argumentativas (Godino, 2013).

Interacción docente – estudiante: en esta componente se valora si las configuraciones didácticas planificadas posibilitan una presentación clara, ordenada y adecuada de los conceptos claves en relación con la diferencial. Además, si se propicia situaciones-problemas que permitan establecer relaciones con los otros conceptos del cálculo, como el límite, deriva e integral, de manera que se empleen recursos retóricos y argumentativos para reconocer y resolver potenciales conflictos de significados del diferencial. Cabe destacar que desde el EOS se propone que la optimización de los aprendizajes en matemáticas y en las ciencias experimentales, puede desarrollarse localmente mediante un modelo instruccional mixto que articule la transmisión de conocimientos, la indagación y la colaboración, gestionado por los criterios de idoneidad didáctica (Godino, 2021; Godino y Burgos, 2020).

Interacciones entre estudiantes: es importante que las configuraciones didácticas planificadas contemplen momentos de diálogo, comunicación y debate entre los estudiantes, y que se generen situaciones donde los estudiantes tengan que convencer a sus pares sobre la validez de sus afirmaciones y conjeturas empleando argumentos matemáticos.

Autonomía: en esta componente se valora si las situaciones-problemas contemplan momentos donde los estudiantes tengan que asumir la responsabilidad del estudio desarrollando una autonomía intelectual para enfrentarse a problemas y situaciones nuevas.

Evaluación formativa: se considera la evaluación continua a lo largo de todo el desarrollo de la trayectoria didáctica y no únicamente al final, de tal manera que utilizando varios instrumentos en diferentes momentos sirvan de feedback a los estudiantes (Castillo et al., 2022b). Teniendo en cuenta que la progresión en el aprendizaje tiene lugar en la medida que el estudiante se apropia de los diversos significados, reconoce y comprende la trama de objetos matemáticos implicados en ellos (Godino y Burgos, 2020), esto se evidencia en las prácticas personales donde muestran las relaciones entre los objetos matemáticos. Por tales motivos, se considera que estas prácticas constituyen indicadores explícitos para que el profesor pueda valorar las relaciones de los estudiantes con los objetos, los cuales tendrán potencialmente mayor idoneidad interaccional si se consideran formatos de interacción de tipo dialógica y colaborativas, sobre las de tipo magistral e individual (Godino et al., 2009). Además, a partir de esta valoración es posible determinar intervenciones más adecuadas durante el proceso de enseñanza y aprendizaje para mejorar la apropiación de los significados del concepto de diferencial.

En la Tabla 5.4 se especifican los componentes e indicadores de idoneidad interaccional para el estudio del diferencial

Tabla 5.4

Indicadores específicos para la idoneidad interaccional para el estudio del diferencial

Componentes	Indicadores
Interacción docente-estudiante	El profesor hace una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien organizada, enfatiza los conceptos claves del tema, establece relaciones y diferencias entre los conceptos relacionados con el diferencial, etc.) Reconoce y resuelve los conflictos de los estudiantes, principalmente en las interpretaciones y sentidos del diferencial y su relación con los otros conceptos del cálculo. Se usan diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los estudiantes. Se facilita la inclusión de los estudiantes en la dinámica de la clase Se promueven situaciones donde se busque llegar a consensos con base al mejor argumento.
Interacción entre estudiantes	Se favorece el diálogo, comunicación y debate entre los estudiantes.

	Se platean situaciones en las que los estudiantes deban convencerse a sí mismos y a los demás de la validez de sus afirmaciones, conjeturas y respuestas, apoyándose en argumentos matemáticos. Se favorece la inclusión en el grupo y se evita la exclusión.
Autonomía	Se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (plantean cuestiones y presentan soluciones; exploran ejemplos y contraejemplos para investigar y conjeturar; usan una variedad de herramientas para razonar, hacer conexiones, resolver problemas y comunicarlos).
Evaluación formativa	Se incluyen formas de evaluación que permita la observación sistemática y continua del progreso cognitivo de los estudiantes. La evaluación es vista como un proceso al servicio de la enseñanza y el aprendizaje (sirve de feedback a los estudiantes). Se contemplan el uso de diversas técnicas de evaluación (resolución de problemas, tareas prácticas, …) La evaluación es coherente con las metas de aprendizaje (se incluyen tareas similares a las situaciones de aprendizaje).

Fuente: elaborado por los autores a partir de Godino (2013)

5.4.5 Faceta mediacional

Esta faceta valora en grado de disponibilidad y adecuación de los recursos tecnológicos, materiales y temporales para el desarrollo óptimo del proceso de enseñanza y aprendizaje (Godino et al., 2021).

Recursos materiales: esta componente valora el uso de diferentes tipos de recursos manipulativos, audiovisuales e informáticos que permitan generar buenas situaciones-problemas y que potencien el desarrollo de la competencia matemática de los estudiantes. En relación con los recursos tecnológicos como las calculadoras, sistemas de cálculo algebraico simbólico, software de geometría dinámica, graficadores, hojas de cálculo, applets y dispositivos de presentación interactiva, son vitales para una educación matemática de alta calidad (Godino, 2013). La utilización de estos recursos tiene un gran peso en la enseñanza del cálculo diferencial y en la valoración que realizan los profesores sobre sus clases (Garcés-Córdova y Font, 2022) ya que permiten, entre otras cuestiones, estudiar modelos concretos y potencia la visualización. Una advertencia que nos marca Hitt (2014) es no reducir el uso de las herramientas tecnológicas exclusivamente a graficar funciones, dejando de lado la riqueza que proporciona la tecnología en los procesos de modelación matemática. Por otro lado, el mismo autor destaca la importancia y el impacto que tiene el diseño de tareas con la manipulación de objetos físicos; como así también la articulación de momentos de trabajos entre lápiz y papel y entornos tecnológicos.

El uso de los recursos tendrá mayor o menor grado de idoneidad mediacional en la medida en que se valore si las condiciones del aula y la distribución de los estudiantes son adecuadas para el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje planificado. Por tales motivos, estos indicadores constituyen la componente de *número de alumnos y condiciones del aula*.

Con relación a la componente *tiempo de enseñanza y aprendizaje* se valorará si la distribución del tiempo es óptima con relación a la organización de los momentos de enseñanza, las experiencias de aprendizajes, los momentos de trabajo presencial y no presencial, y la dedicación a los contenidos que presentan mayor dificultad para los estudiantes. Un punto importante que plantea Hitt (2014) es dedicar más tiempo de reflexión por parte de los estudiantes con relación al fenómeno físico en estudio mediante la modelización matemática, ya que se suele dedicar más tiempo al estudio matemático sin muchas discusiones en relación con el fenómeno físico en estudio.

A continuación, en la Tabla 5.5 se especifican los componentes e indicadores de idoneidad mediacional para el estudio del diferencial.

Tabla 5.5

Indicadores específicos para la idoneidad mediacional para el estudio del diferencial

Componentes	Indicadores
Recursos materiales	Se utilizan diferentes situaciones y modelos concretos (velocidad, desintegración radiactiva, costo marginal, estimación lineal) para la enseñanza del diferencial. Se presenta una diversidad de tareas, representaciones, procedimientos, explicaciones y argumentos vinculados al contexto y al significado pretendido. Se utilizan materiales audiovisuales y graficadores dinámicos para potenciar las representaciones, la visualización y la modelización del diferencial en situaciones intra y extra disciplinares
Número de alumnos y condiciones del aula	El número y la distribución de los estudiantes permite llevar a cabo la enseñanza pretendida sobre el diferencial. El horario del curso es apropiado (por ejemplo, no se imparten todas las sesiones a última hora) El aula y la distribución de los estudiantes es adecuada para el desarrollo del proceso instruccional pretendido sobre el diferencial.
Tiempo de enseñanza y aprendizaje	El tiempo (presencial y no presencial) es suficiente para la enseñanza pretendida sobre el diferencial. Se identifican errores frecuentes y se anticipan potenciales conflictos semióticos que pueden emerger en las diferentes situaciones-problemas. Esto permite organizar las tareas, los momentos de reflexión y los instrumentos de evaluación para estimar la distribución del tiempo

	según el nivel de dificultad que presentan las actividades para la compresión de los estudiantes.

Fuente: elaborado por los autores a partir de Godino (2013)

5.4.6 Faceta ecológica

Esta faceta valora el grado en que una propuesta, un plan o una acción formativa es adecuado dentro del entorno en que el que se realiza. Por entorno se entiende a todo lo que está fuera del aula, pero condiciona la actividad (y, además, es condicionado por ella) que se desarrolla en la misma. Condiciones que provienen de la sociedad, la escuela, la pedagogía, la didáctica de las matemáticas, la investigación, etc. (Godino, 2013).

Adaptación al currículo: Esta componente valora el grado de adecuación de todos los elementos de la configuración didáctica con las directrices curriculares. Es decir, es importante estudiar en qué medida la propuesta de enseñanza se corresponde con los diseños curriculares, ya sean profesores de matemáticas o física, licenciados en matemáticas, ingenieros, economistas, etc. Cada profesión presenta características particulares que deben ser tenidas en cuenta al momento de la planificación del proceso de enseñanza y aprendizaje del diferencial.

En relación con la componente *apertura hacia la innovación didáctica* se valora en si se tienen en cuenta los resultados de las investigaciones en didáctica del cálculo y en el uso de las nuevas tecnologías. Como lo plantea Hitt (2017) existe una tendencia actual en la enseñanza del cálculo donde los recursos tecnológicos ocupan un lugar importante en la clase de matemáticas, estos pueden ser los softwares específicos de matemáticas o videos que simulan los fenómenos en estudio, estos usos de las herramientas tecnológicas permiten abordar la modelización matemática, el tratamiento y la conversión entre los diferentes registros de representación semiótica y la integración de varias disciplinas. Por ejemplo, Thompson y Harel (2021) proponen el uso de animaciones para estudiar las variaciones, sus cambios y acumulación.

Ely (2021) plantea la discusión en relación a la enseñanza del cálculo mencionando que existen dos tendencias, el cálculo basado en límites y el cálculo basado en diferenciales, siendo el primero que predomina en la mayoría de los cursos y libros de textos actuales, aunque existen algunas experiencias del desarrollo de cursos completos o temas en particular basados en los infinitesimales y diferenciales, por ejemplo Dray y Monague (2003; 2010), Ely (2017), Jones (2013; 2015), Jones et al. (2017), entre otros.

Por otro lado, varias investigaciones destacan los cambios o tendencias en la enseñanza del cálculo (Artigue, 1995; Hitt, 2017) y su impacto en los libros de textos (Hitt, 2014; Pulido, 1997), lo cual se considera importante para promover la mejora continua de los procesos de estudio en torno al diferencial, teniendo en cuenta los resultados de las investigaciones en relación con la presentación y tratamiento del diferencial en los textos de cálculo (Pulido, 1997)

La componente *adaptación socio-profesional y cultural* valora si la propuesta de estudio del diferencial contribuye a la formación socio-profesional de los estudiantes. Es decir, se analizan si las propuestas didácticas están orientadas hacia el estudio del diferencial en el contexto de la ingeniería, para los estudiantes de ingeniería. Como así también, en qué medida la configuración didáctica se adapta al campo profesional de un futuro profesor de matemáticas o física.

Para promover una *educación en valores* se valora que la propuesta de enseñanza evite la trasmisión de estereotipos, elementos racistas, sexistas, discriminatorios, etc., y que fomente los valores democráticos como el respecto por la diversidad, la tolerancia, la cooperación, el respecto por las ideas de sus pares, y el pensamiento crítico.

Por último, la componente *conexiones intra e interdisciplinares* valora si la propuesta didáctica permite establecer relaciones entre el diferencial con los conceptos de cantidad, variable, función, límite, derivada, integrales y ecuaciones diferencial. Además, se volará las conexiones del diferencial con los conceptos de razón de cambio, tasa de variación, velocidad, aceleración, densidad variable, cambio total de un variable, costo marginal, entre otros temas de las ingenierías y las ciencias experimentales.

Hitt y Dufour (2021) plantean la importancia e influencia en la enseñanza actual del cálculo, como se puede apreciar en la mayoría de los textos, sobre el uso de situaciones-problemas de física como modelos de cinemática (velocidad, tasa de cambios, aceleración, etc.) para abordar el estudio de la derivada. Pero advierte que es necesario tener presente las dificultades de los estudiantes para comprender no solo los conceptos matemáticos sino también las nociones propias de la física y sus interpretaciones en los diferentes registros de representación.

En la Tabla 5.6 se especifican los componentes e indicadores de idoneidad afectiva para el estudio del diferencial.

Tabla 5.6

Indicadores específicos para la idoneidad ecológica para el estudio del diferencial

Componentes	Indicadores
Adaptación al currículo	Se presenta al diferencial como un concepto articulador de los conceptos de límite, derivada, integrales y ecuaciones diferenciales, según las directrices curriculares de cada carrera. El estudio del diferencial gira en torno a la modelización matemática de diferentes fenómenos en situaciones-problemas de las matemáticas (p.e. linealización), de física (p.e. velocidad instantánea, desintegración radiactiva, etc.).
Apertura hacia la innovación didáctica	El proceso de instrucción contempla los resultados de las investigaciones en didáctica del cálculo, y en particular, sobre el diferencial. Las actividades propician momentos de reflexión sobre el significado del diferencial y el contexto de uso. Se promueve la integración de nuevas tecnologías (calculadoras, ordenadores, TIC, etc.) en el proyecto educativo para abordar las diferentes representaciones vinculadas al diferencial
Adaptación socio-profesional y cultural	En el proceso de instrucción prioriza el significado parcial del diferencial que más se relaciona con el contexto socio-profesional de los estudiantes. Se presenta al diferencial como una herramienta práctica y adecuada para la modelización de situaciones de matemáticas, física, ingeniería y las ciencias experimentales.
Educación en valores	Se contempla la formación en valores democráticos (respeto a la diversidad, tolerancia, integración, cooperación, conciencia ecologista, pacifista, otros valores y prejuicios) y promueve pensamiento crítico con oportunidades para que los estudiantes realicen cuestionamientos.
Conexiones intra e interdisciplinares	Se vincula el diferencial con otros objetos matemáticos como las funciones, limites, derivadas, integrales, ecuaciones diferenciales, etc. Se establecen relaciones entre los significados del diferencial y los fenómenos físicos, químicos y otros de ingeniería y ciencias experimentales.

Fuente: elaborado por los autores a partir de Godino (2013)

Hasta el momento se han presentado las componentes e indicadores de cada una de las idoneidades que conforman la guía de valoración de la idoneidad didáctica para el estudio del diferencial. Es importante tener en cuenta que estos criterios no son aislados y que existen interacciones entre ellas. El desafío se encuentra en lograr un equilibrio entre el grado de adecuación de cada una de las idoneidades (Godino, 2013; 2021) para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje del diferencial.

5.5 Síntesis y Conclusiones

En este artículo, se ha descrito la elaboración de una Guía de Valoración de la Idoneidad Didáctica para un proceso de estudio del concepto de diferencial, fundamentada tanto en las sugerencias de la literatura científica como en la noción de idoneidad didáctica propuesta por el EOS. Los indicadores de las facetas epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica han sido particularizados para el estudio del diferencial a partir del análisis de los resultados de diversas investigaciones didácticas sobre los distintos significados, sobre qué matemáticas se deberían enseñar y aprender, sobre los contextos de aplicación, circunstancias y recursos disponibles.

La guía debe entenderse como una herramienta que oriente la reflexión del profesor en el diseño, implementación, evaluación de un proceso de estudio para lograr la optimización de los procesos de enseñanza y aprendizaje en torno al diferencial (Godino, 2021; Pino-Fan y Parra-Urrea, 2021). En este sentido, Malet et al. (2021), quienes realizan un estudio bibliográfico desde el 2005 hasta el 2020 sobre el constructo idoneidad didáctica, resaltan la importancia que tiene la elaboración de guías específicas de valoración como herramienta de reflexión sobre la propia práctica docente. Además, reclaman la necesidad de seguir con esta línea cubriendo diversos contenidos matemáticos.

Es importante destacar que esta guía de valoración puede ser utilizada no solo para las clases de matemáticas, sino también para clases que estén en estrecha relación con el concepto de diferencial, como clases de física, ingeniería y las ciencias experimentales.

Capítulo 6: Conocimientos Didáctico-Matemáticos en una Lección de un Libro de Texto

El contenido de este capítulo aparece publicado en:

Verón, M. A. y Giacomone, B. (2022). Análisis de la idoneidad didáctica de un libro de texto para el estudio del diferencial. En *Primer Congreso Internacional de Didáctica de la Matemática - CIDIDMAT 2022 (Virtual)*. Chile: Universidad de los Lagos. Aceptado.

Verón, M. A., Giacomone, B. y Benítez, M. del C. (2022). Usos de la diferencial en una lección de la integral (Reporte de investigación). En *actas de las XXVI Jornadas Nacionales de Educación Matemática de la Sociedad Chilena de Educación Matemática (SOCHIEM)*. Chile: Universidad de los Lagos. Aceptado. https://drive.google.com/file/d/1OQXIlksut8Kt4Epye7rsR0llMOTGgIAI/view

Verón, M.A., Giacomone, B., Benítez, M., Operuk, R., Pereyra, V., Kramer, F., Nacimento, G. y Verón, H. (2022). Análisis de una lección de un libro de texto de cálculo sobre el estudio del diferencial. *En VII Encuentro Provincial de Investigación Educativa REDINE.* Universidad Nacional de Misiones. Aceptado.

6.1 Introducción

La diferencial es uno de los conceptos fundamentales en el estudio del cálculo, tanto en el bachillerato como en diversas carreras universitarias en matemáticas, física, ingeniería y las ciencias experimentales Los docentes y futuros docentes deben afrontar complejos desafíos para abordar los problemas didácticas asociados a este concepto e intentar cubrir las demandas que reclama la comunidad científica. Sin bien existe una gran cantidad de investigaciones sobre las dificultades que presentan los estudiantes al abordar este concepto (Gómez, 2019; López-Gay y Martínez Torregrosa, 2005), no son tantas las que abordan cuáles son los conocimientos didáctico-matemáticos que debería tener en cuenta el profesor para su enseñanza (Castro y Pino-Fan, 2021). Esta problemática se intensifica aún más cuando el docente utiliza, en sus prácticas de enseñanza, libros de textos, los cuales abordan el estudio del diferencial, muchas veces en forma compleja, generando potenciales conflictos de diversa naturaleza.

Investigaciones como las de Gómez (2019), Oldenburg (2016), López-Gay et al. (2015), Pulido (1997), entre otros, mencionan que existen varias dificultades, principalmente en la forma en que se presenta el estudio del diferencial en los libros de textos, tanto antiguos como los actuales. Estos autores reportan que se genera un conflicto instruccional debido al uso de diferentes definiciones del diferencial en varias secciones del libro sin explicar los cambios considerados. Además, Frank y Thompson (2021) plantean que se generan conflictos instruccionales en la gestión de la generalización y/o complejidad del concepto según el significado que se pretenda estudiar con los estudiantes.

Es así como el análisis del libro de texto ocupa un lugar importante en la agenda de investigación internacional en educación matemática; éstos constituyen un plan de acción, una guía, una planificación de un proceso de enseñanza y aprendizaje (Frank y Thompson, 2021) y su análisis y valoración de la idoneidad didáctica permite al docente decidir críticamente qué libro usar y en qué momento del proceso instruccional que debe afrontar.

Desde la perspectiva del Enfoque Ontosemiótico (EOS) se están llevando a cabo varias investigaciones sobre el estudio de lecciones de libros de textos de diferentes temas de estudio matemático, utilizando el sistema de facetas, componentes e indicadores de idoneidad didáctica de un proceso de instrucción.

Siguiendo esta línea de investigación, el objetivo de este trabajo es analizar y valorar la idoneidad epistémica de una secuencia de actividades de un libro de texto de cálculo para el estudio de la diferencial, teniendo en cuenta los conocimientos didáctico-matemáticos en relación con la diferencial de una función los cuales permiten la reconstrucción de los significados parciales del concepto (Verón y Giacomone, 2021) y la GVID-Diferencial (Verón, Giacomone y Pino-Fan, 2023).

La valoración de la idoneidad de una lección de un libro de texto sirve de apoyo para el diseño de tareas idóneas para abordar el estudio de la diferencial, en este sentido, se considera que los resultados de este estudio constituyen una fuente de información para la selección y secuenciación de las situaciones-problemas en las que interviene la diferencial.

A continuación, en la sección 6.2, se presenta el marco teórico y el problema específico de investigación. En la sección 6.3, se describe la metodología empleada. En la sección 6.4, se presentan la valoración de la idoneidad didáctica de una lección de un libro de texto de cálculo para el estudio de la diferencial. Finalmente, se presentan algunas conclusiones y líneas de investigación.

6.2 Marco Teórico y Problema de Investigación

Al considerar que las lecciones de los libros de textos son un plan de acción o una guía del proceso de enseñanza y aprendizaje (potencial o planificado) (Frank y Thompson, 2021), es posible aplicar las herramientas teóricas y metodológicas del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS) (Godino et al., 2007; 2020) para realizar una análisis didáctico en términos de caracterizar la idoneidad didáctica e identificar limitaciones, potenciales conflictos semióticos e instruccionales y posibles mejoras en función de los aprendizajes pretendidos en las propuestas de la lección.

En el EOS se aborda la noción de conflicto semiótico cuando se genera “una disparidad entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos – personas o instituciones” (Godino, 2002, p. 258). Si la diferencia se genera entre los significados institucionales, se produce un conflicto epistémico. Por ejemplo, cuando se produce una disparidad entre el significado de referencia y el implementado en una lección de un libro de texto (p.e. Verón y Giacomone, 2022). Si la diferencia se produce entre el significado de referencia y el manifestado por un sujeto, entonces se genera un conflicto cognitivo. En cambio, si la discordancia surge por los modos y la gestión de las interacciones o los usos de los recursos, se produce un conflicto del tipo instruccional (Burgos y Castillo, 2022).

Desde la perspectiva del EOS, la idoneidad didáctica se considera como un criterio sistémico de optimización de un proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, cuyas facetas se han presentado en el Capítulo 2, sección 2.1.5.

Para realizar el análisis sistémico de la lección del libro de texto se utilizará la Teoría de la Idoneidad Didáctica (Godino, 2013; 2021; Godino, Batanero y Burgos, 2023), cuyas facetas epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica, junto con su desglose en componentes e indicadores de idoneidad sirven de guía para que los profesores puedan realizar un análisis y valoración de las propuestas de los libros de textos en busca de potenciales mejoras.

La noción de Configuración Didáctica (CD) permite descomponer el proceso de instrucción en unidades de análisis, en las cuales se identifican hechos didácticos significativos (Godino, Rivas, Arteaga, Lasa y Wilhelmi, 2014) en relación con las facetas, componentes e indicadores de idoneidad. La noción de CD fue ampliando su foco de análisis, en Godino, Contreras y Font (2006) se asocia a una situación problema, donde se tiene en cuenta los conocimientos implicados, el uso de los recursos y las acciones de los docentes y estudiantes.

Pero en Burgos, Castillo, Beltrán-Pellicer, Giacomone y Godino (2020) se considera que las CD pueden ser de diferentes tipos de objetos primarios, por ejemplo, la introducción de un concepto, un procedimiento, entre otros.

Para el análisis y valoración de una lección de un libro de texto para el estudio de la diferencial, resulta necesario tener presente la complejidad ontológica y semiótica de este concepto. Con lo cual es fundamental que se pueda analizar el/los significados que intervienen y emergen de la lección teniendo en cuenta los significados parciales de la diferencial caracterizados por Verón y Giacomone (2021) (ver Capítulo 4).

La valoración de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la diferencial se enriquece en la medida en que se tengan en cuenta los conocimientos didáctico-matemáticos necesarios para realizar una enseñanza idónea para el estudio de la diferencial. En esta dirección, Verón, Giacomone y Pino-Fan (2023) han particularizado los criterios y se ha elaborado una guía de valoración de la idoneidad didáctica para analizar y valorar procesos de enseñanza y aprendizaje para el estudio de la diferencial, denominada GVID-Diferencial (ver Capítulo 5). La guía constituye una herramienta que posibilita realizar una reflexión sistemática y detalla de las propuestas de estudio de la diferencial, como puede ser la reflexión sobre una lección de un libro de texto (Beltrán-Pellicer, Godino y Giacomone, 2018).

Se espera que el profesor de matemáticas pueda analizar y valorar la actividad matemática al resolver los problemas, identificando prácticas, objetos y procesos puestos en juego, y problemas didácticos que se presentan en la enseñanza, donde también intervienen objetos matemáticos y didácticos específicos que el profesor debe conocer y gestionarlos de manera competente. Desde la perspectiva del EOS, se considera que una competencia es “una acción eficaz realizada en un determinado contexto con una determinada finalidad” (Font, 2011, p. 18).

Realizar la valoración de la idoneidad epistémica de lecciones de un libro de texto, propicia un espacio para la reflexión del profesor de matemáticas sobre el uso y la gestión del libro de texto en los cursos de cálculo. De esta manera se posibilita el desarrollo de conocimientos y competencias profesionales del profesor de matemáticas (Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017)

Teniendo en cuenta que el propósito de este estudio es valorar la idoneidad didáctica de una lección de un libro de texto de cálculo para el estudio de la diferencial, se utilizará el modelo ontosemiótico de los significados parciales de la diferencial y la GVID-Diferencial para analizar y valorar una propuesta del libro de cálculo aplicado de Salinas et al. (2012) destinado al estudio de la diferencial.

6.3 Metodología

Se emplea una metodología cualitativa porque se describe, caracteriza y valora la idoneidad didáctica de una lección de un libro de texto de cálculo para el estudio de al diferencial. Para realizar esta valoración se utiliza la técnica de análisis de contenido (Cohen et al., 2007) basada en los criterios de idoneidad didáctica (Godino, 2013), cuyas facetas, componentes e indicadores permiten realizar una reflexión sistemática en relación con las potencialidades y limitaciones de la lección, potenciales conflictos epistémicos, cognitivos e instruccionales, y potenciales mejoras.

Además, se ha utilizado la guía de valoración de la idoneidad didáctica para el estudio del diferencial, la GVID-Diferencial como una herramienta que orienta la reflexión sobre las facetas epistémica, cognitiva, afectiva, mediacional, interaccional y ecológica que intervienen en toda propuesta didáctica, como una lección del libro de texto de cálculo para el estudio de la diferencial.

La selección del libro de texto de cálculo fue intencional y forma parte del libro de Cálculo aplicado: competencias matemáticas a través de contextos de Salinas et al. (2012). En particular, se analizará la presentación y desarrollo de una situación problema que abarca desde las páginas 142 a 146, cuya sección 3.1 se titula “La masa de una lámina circular con densidad de masa dependiendo del radio”.

La razón de ser de la selección del libro radica en la forma en que se presentan los diferentes temas del cálculo, en particular la diferencial. Las lecciones o configuraciones didácticas de la diferencial parten de situaciones-problemas contextualizadas en el campo de la física y la ingeniería, con lo cual se considera oportuno analizar la idoneidad de estas propuestas planificadas para la enseñanza de la diferencial. Además, la situación problema que se analiza forma parte del primer ciclo de formación de los futuros profesores de matemática que se presenta en el Capítulo 7.

6.4 Resultados del Análisis de una Lección de un Libro de Texto

6.4.1 Faceta epistémica

Significados institucionales

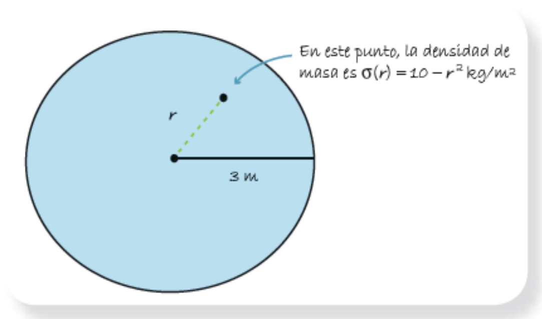
6.4.1.1 Situaciones-problemas

Se presenta una situación que involucra el cálculo de la masa de una lámina circular que depende de la densidad de la masa que varía con respecto al radio (Figura 6.1).

Figura 6.1

Problema de cálculo de la masa de una lámina circular

Consideremos una lámina circular de 3 metros de radio, cuya masa se distribuye de tal manera que la densidad en todo punto es $\sigma(r) = 10 - r^2$ (kilogramos por metro cuadrado), donde r es la distancia del punto al centro de la lámina.



Fuente: Salinas et al. (2012, p. 142)

Este problema propone una situación de problematización para el estudio de cambios infinitesimales y se encuentra en el contexto de la física.

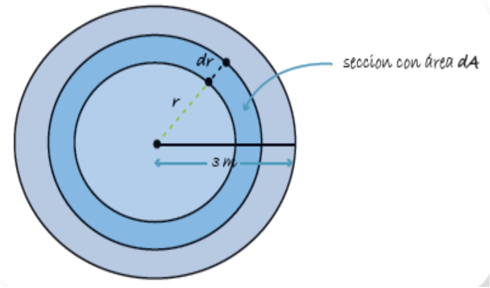
En la situación se destaca la utilización de la diferencial para la modelización y representación de las variaciones, cambios y acumulaciones de la masa, del área y radio.

6.4.1.2 Lenguaje

Se emplean diferentes registros y representaciones para describir al diferencial, desde lo natural, con términos como diferencia, ancho infinitesimal, anillo infinitesimal, intervalo infinitesimal, porción infinitesimal, infinitamente pequeño, etc.; lo simbólico, con dr, dA, dM, $\frac{dA}{dr}$, $\int dM$, etc.; lo algebraico, en expresiones como $dM = \sigma(r)dA$, $dA = 2\pi r dr$, $dA = A(r + dr) - A(r)$, $M = \int dM$, etc. Las representaciones gráficas como se muestran en las Figura 6.2y Figura 6.3.

Figura 6.2

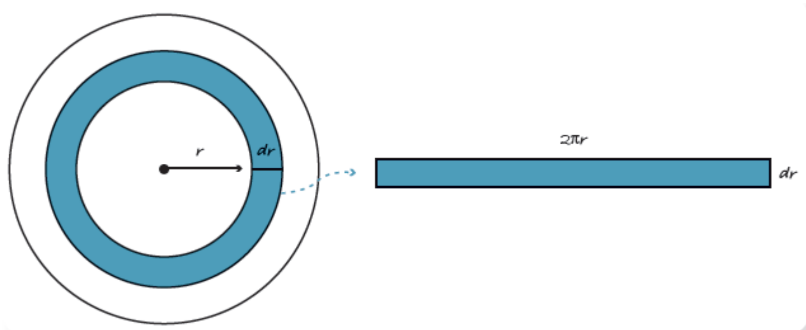
Representación gráfica de dr y dA



Fuente: Salinas et al., (2012, p. 144)

Figura 6.3

Representación gráfica de dr



Fuente: Salinas et al., (2012, p. 145)

Además, cabe destacar que en la explicación del autor del libro se observa que plantea momentos dentro de la lección destinados a la expresión matemática e interpretación en relaciones que involucra a la diferencial (ver Figura 6.4).

Figura 6.4

Situaciones de expresión matemática en la lección del libro de texto

Si a partir de un valor de r avanzamos un diferencial dr, tendremos que el valor de la masa cambia de $M(r)$ a $M(r+dr)$. La diferencia de estos valores es

$$dM = M(r+dr) - M(r)$$

Fuente: Salinas et al., (2012, p. 144)

Se destaca en la lección del libro de texto que se plantean situaciones donde surge la necesidad de expresar determinas relaciones y/o interpretaciones mediante expresiones matemáticas que involucra a la diferencial (ver Figura 6.4).

6.4.1.3 Conceptos

- Magnitud física: densidad, masa, masa total, densidad superficial, unidades de longitud (metros), unidad de masa $\left(\frac{kg}{m^2}\right)$;
- Geométricos: círculo, disco, circunferencia, radio, punto, centro, distancia, superficie, área, anillos o coronas circulares concéntricos, ancho de un anillo, región del disco, región de la lámina, región anular;
- Aritméticos: valores, colección de números, partición, intervalo, diferencia de valores, producto, cantidad, suma, valor aproximado, división, error;
- Algebraicos y/o funcionales: variables, función, variación, relación de dependencia entre la densidad y el radio, constante, inversamente proporcional;
- Cálculo: infinito, infinitesimal, infinitamente pequeño, diferencial, diferencial radio, diferencial área, diferencial masa, integral definida, función integrando, extremos de integración, cambio total, acumulación, razón de cambio, derivada, teorema fundamental del cálculo.

6.4.1.4 Proposiciones

A continuación, mencionamos las principales proposiciones (**Pp**):

Pp1: "la masa se distribuye de tal manera que la densidad en todo punto es $\sigma(r) = 10 - r^2$ (kg/m^2)" (Salinas et al., 2012, p. 142).

Pp2: "la densidad de masa depende de la distancia del punto al centro de la lámina" (Salinas et al., 2012, p. 142).

Pp3: "puntos a la misma distancia al centro tienen la misma densidad de masa" (Salinas et al., 2012, p. 142).

Pp4: "cada valor de r (…) se corresponde con una circunferencia del mismo radio" (Salinas et al., 2012, p. 142).

Pp5: "en todos los puntos de esa circunferencia el valor de la densidad es el mismo: $\sigma(r)$" (Salinas et al., 2012, p. 142).

Pp6: "Asumir que $\sigma(0)$ es el valor de la densidad para todos los puntos de la lámina que van del centro a la circunferencia de radio 1 y que $\sigma(1)$ es el valor de la densidad para todos los puntos de la lámina que forman el anillo que va de la circunferencia de radio 1 a la de radio 2” (Salinas et al., 2012, p. 143).

Pp7: Se asume que la densidad es constante en cada anillo. (Salinas et al., 2012, p. 143).

Pp8: “A_0 es el área del círculo de radio 1”, “A_1 es el área de la región anular del círculo correspondiente a los puntos con r entre 1 y 2”. (Salinas et al., 2012, p. 143).

Pp9: “En cada uno de los anillos la densidad es constante e igual a la densidad correspondiente al radio menor” (Salinas et al., 2012, p. 143).

Pp10: “al aumentar el número de divisiones en anillos, el ancho de los mismos disminuye” (Salinas et al., 2012, p. 143).

Pp11: “el ancho del anillo es inversamente proporcional al número de anillos en que se halla dividido la lámina ya que todos deben ser del mismo ancho” (Salinas et al., 2012, p. 143).

Pp12: “Asumir que la densidad es constante en uno de estos anillos y calcular la masa con este supuesto, acarrea un error que puede desvanecerse conforme el ancho de los anillos disminuya o, equivalentemente, que el número de divisiones aumente” (Salinas et al., 2012, p. 143).

Pp13: “Designamos con $M(r)$ la masa de la lámina correspondiente al círculo de radio r” (Salinas et al., 2012, p. 144).

Pp14: “dM es el diferencial masa y corresponde a la masa de un anillo de ancho infinitesimal dr” (Salinas et al., 2012, p. 144).

Pp15: dA es el diferencial área y representa el área de un anillo infinitesimal (Salinas et al., 2012, p. 144).

Pp16: “la razón de cambio del área con respecto al radio, su derivada, es $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$” (Salinas et al., 2012, p. 144).

Pp17: “el diferencial área se obtiene también, multiplicando la derivada (…) por dr” (Salinas et al., 2012, p. 144).

Pp18: “El diferencial de área equivale al área de un rectángulo de dimensiones $2\pi r$ y r” (Salinas et al., 2012, p. 145).

Pp19: "Siendo $2\pi r$ la razón de cambio del área con respecto a r (…), esta razón debe mantenerse constante (y por lo tanto r debe ser constante) en el intervalo infinitesimal dr" (Salinas et al., 2012, p. 145).

Pp20: "en el anillo de ancho infinitesimal dr, cuya área es $dA = 2\pi r dr$, el valor de la densidad permanece constante e igual a $\sigma(r)$" (Salinas et al., 2012, p. 145).

Pp21: dM es la masa de una porción infinitesimal. (Salinas et al., 2012, p. 145).

Pp22: "de nuevo se reproduce en lo infinitamente pequeño lo que se sabe para la constante: la masa es la densidad por el área cuando la densidad es constante. (Salinas et al., 2012, p. 145).

6.4.1.5 Procedimientos

Los principales procedimientos (Pc) son:

Pc1: Para obtener la expresión del diferencial masa en términos de la variable r, una manera conveniente es dividir la lámina que nos permita calcular de manera aproximada la masa de la lámina y que al aumentar el número de divisiones las aproximaciones sean mejores. (Salinas et al., 2012, p. 142).

Pc2: "un valor aproximado para la masa M de la lámina se consigue, primero, multiplicando cada uno de estos valores de la densidad por el área de la región de la lámina donde ese valor se asumió constante y luego, sumando estos productos:

$M \approx \sigma(0)A_0 + \sigma(1)A_1 + \sigma(2)A_2$ (Salinas et al., 2012, p. 143).

Pc3: para lograr mejores aproximaciones de la masa hay que aumentar el número de divisiones en el anillo donde el ancho de estos disminuye. (Salinas et al., 2012, p. 143).

Pc4: "Si partimos de un valor de r y avanzamos un diferencial dr, tendremos que el valor de masa cambia de $M(r)$ a $M(r + dr)$. La diferencia de estos valores es $dM = M(r + dr) - M(r)$". (Salinas et al., 2012, p. 144).

Pc5: "Si designamos por $A(r)$ el área del círculo de radio r, entonces el área de este anillo infinitesimal es $dA = A(r + dr) - A(r)$" (Salinas et al., 2012, p. 144)

Pc6: En $dA = 2\pi r dr + \pi(dr)^2$ "Al eliminar el término con el diferencial de grado dos, frente al de grado uno, se tiene que $dA = 2\pi r dr$" (Salinas et al., 2012, p. 144)

Pc7: “La razón de cambio del área con respecto al radio, su derivada, es $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$ Entonces, el diferencial de área se obtiene también, multiplicando la derivada (…) por dr”

Pc8: Como $dA = 2\pi r dr$, se tiene que el área del círculo de radio 3 es

$A = \int dA = \int_{r=0}^{r=3} 2\pi r dr = \pi r^2 \Big|_0^3 = 9\pi$ (Salinas et al., 2012, p. 145)

Pc9: “podemos asumir que en el anillo de ancho infinitesimal dr, cuya área es $dA = 2\pi r dr$, el valor de la densidad permanece constante e igual a $\sigma(r)$. Tenemos por tanto que la masa de esa porción infinitesimal es simplemente la densidad por el área $dM = \sigma(r)dA$ o sea $dM = \sigma(r)2\pi r dr$” (Salinas et al., 2012, p. 145)

Pc10: “la masa de la lámina se consigue con la integral

$M = \int dM = \int_{r=0}^{r=3} 2\pi r(10 - r^2)dr$ (Salinas et al., 2012, p. 145)

6.4.1.6 Argumentos

A1: Cálculo de la masa como el producto de la densidad superficial por área $M = \sigma(r)A$

A2: La función de correspondencia entre la densidad y el radio, mediante la expresión $\sigma(r) = 10 - r^2$ (kilogramo por metro cuadrado).

A3: definición de variable del radio y dominio de la función $r \in [0, 3]$

A4: Definición de circunferencia, círculos y anillos (corona circular) como lugares geométricos.

A5: Fórmula para calcular el área del círculo.

A6: Relación de proporcionalidad inversa entre el número de anillos y el ancho de estos.

A7: Definición de la función de densidad constante por tramos o intervalos de valores de radio.

A8: Consideración de la diferencial de radio dr como una cantidad infinitesimal, ancho infinitesimal, intervalo infinitesimal

A9: Consideración de la diferencial de área dA como el área de un anillo infinitesimal.

A10: Consideración de la diferencial de área dM como la masa de una porción infinitesimal.

A11: eliminación del diferencial radio de grado dos

La diferencia de dos valores sucesivos de x es la diferencial dx, y similarmente para dy. Se supone que las cantidades dx y dy no son cero sino incomparablemente pequeñas, y por lo tanto despreciables, con respecto a los valores de las variables x e y. Del mismo modo, se supone que un producto de los diferenciales, como $(dx)(dy)$ o $(dx)^2$, es a su vez despreciable en comparación con los diferenciales dx y dy. (Edwards, 1979, p. 261)

A14: la diferencia de valores como operación para calcular la dr, dA, dM

A15: la derivada del área con respecto al radio como el cociente entre los diferenciales dA y dr, como $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$

A16: Consideración de la integral como suma de diferenciales, ya que se plantea que el área del círculo se obtiene haciendo $A = \int dA$ y que la masa de la lámina se calcula haciendo $M = \int dM$ (Burgos, Bueno, Pérez y Godino, 2021).

A17: Utiliza el Teorema fundamental del cálculo, en particular la Regal de Barrow, y propiedades algebraicas de la integral definida para determinar la masa total de la lámina.

En la lección del libro de texto se destaca la utilización de las representaciones geométricas para apoyar y reforzar las argumentaciones con relación a las proposiciones y procedimientos mencionados. En este sentido, es posible afirmar que en la lección del libro de texto intervienen prácticas, objetos y procesos matemáticos asociados al significado parcial de la Diferencial de Leibniz (Verón y Giacomone, 2021)

6.4.1.7 Relaciones

En la lección del libro de texto se establece relaciones entre la diferencial con la derivada, al plantear que "la razón de cambio del área con respecto al radio, su derivada, es $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$" (Salinas et al., 2012, p. 144). Esta conclusión se llega luego de determinar la diferencial área como $dA = 2\pi r dr$.

Además, se destaca la notación que se emplea utilizando el cociente de diferenciales para expresar la derivada, mencionando que representa la razón de cambio del área respecto del radio.

Por otro lado, menciona que se puede obtener dA multiplicando la derivada por dr, es decir:

$$\frac{dA}{dr}dr = 2\pi r dr \text{ para obtener } dA = 2\pi r dr$$

Por otro lado, se establece relaciones de la diferencial con la integral, al plantear que la masa total de la lámina circular se obtendrá sumando las masas de las infinitas porciones infinitesimales de dM, es decir:

$$M = \int dM$$

También, en la lección se establece una relación entre la diferencial área como equivalente al área de un rectángulo, como se puede apreciar en la Figura 6.3. De esta manera se refuerza de manera implícita la consideración de la diferencial como una cantidad infinitesimal.

6.4.1.8 Procesos

En la sección de análisis del libro de texto se logra identificar que emergen ciertos procesos con la intención de conceptualizar a la diferencial, como, por ejemplo:

Proceso de conceptualización/definición: en las prácticas matemáticas se establece que dr representa una cantidad infinitesimal de radio; dA representa una cantidad infinitesimal de área; y dM representa una porción infinitesimal de masa.

Además, se plantea que la masa total será igual a la integral definida de dM, es decir considerando a la integral como cambio total acumulado, es decir:

$$M_{total} = \int_{r=0}^{r=3} dM$$

Otro tipo de procesos, entendidos como sistemas de prácticas, tienen la intención de establecer una forma de hacer una determinada acción o cálculo, es por ello que también tenemos el proceso de algoritmización que busca establecer un algoritmo, una técnica de cálculo o una descripción de un procedimiento, como se muestra a continuación:

Proceso de algoritmización: se establece la diferencia entre valores muy próximos entre sí de la misma magnitud para el cálculo de la diferencial radio y diferencial área, es decir:

$$dr = r_2 - r_1 \text{ y } dA = A(r + dr) - A(r)$$

También se identifica el procedimiento para construir los diferenciales para calcular el valor de la masa total de la lámina, en primer lugar, se plantea la necesidad de dividir la lámina para considerar la variación del radio y la densidad. Luego es necesario aumentar el número de divisiones de tal manera que el radio de las coronas circulares sea cada vez más pequeño para calcular la masa en cada punto de la corona, y luego se plantea la suma de las infinitas porciones infinitesimales de masa por medio de la integral para obtener la masa total.

La estrategia de la división de la lámina circular y la toma de coronas circulares, son fundamentales para la resolución de la situación problema.

El proceso de algoritmización, surge al establecer la ecuación proporcional que relaciona las cantidades de magnitud geométrica, en este caso longitudes de segmentos (Verón, 2020).

Proceso de modelización: en la explicación de los autores del libro de texto hacen referencia a la necesidad de hallar una expresión para determinar la diferencial de masa y así poder aproximar el valor de la masa de la lámina, pero en el desarrollo emerge la necesidad de definir a una cantidad infinitamente pequeña de radio con la diferencial radio para poder avanzar con la resolución, luego surge la diferencial área que nos permite avanzar en la consideración de las áreas infinitesimales de los anillos circulares que son infinitos en la lámina, y todo esto, para obtener la diferencial masa, representando esa porción infinitesimal de masa.

Es importante destacar que en el párrafo anterior estamos haciendo referencia al uso que tiene la diferencial en la resolución de la situación problema que presenta el libro de texto, y en este caso podemos decir que los diferenciales buscan cuantificar o matematizar cambios infinitamente pequeños donde interviene el proceso de modelización (López-Gay et al., 2015; Verón, Giacomone y Pino-Fan, 2023)

6.4.1.9 Potenciales conflictos epistémicos

En esta sección mencionaremos los principales conflictos epistémicos potenciales que intervienen en la lección del libro de texto en relación con los objetos matemáticos:

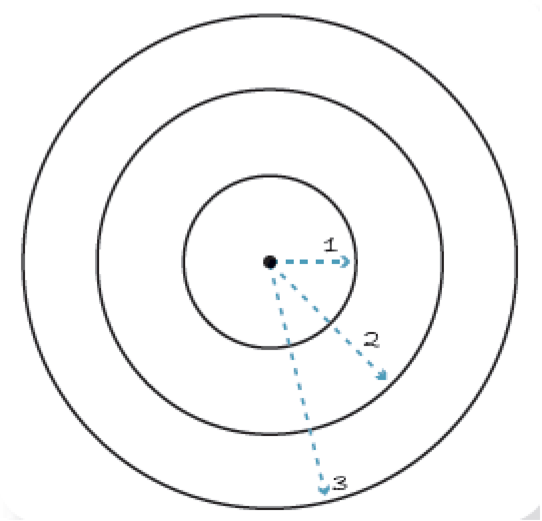
Potenciales conflictos del lenguaje 1: se emplean diferentes tipos de lenguajes para identificar a la diferencial, como se han mencionado anteriormente, pero no se advierte al lector (profesor y/o estudiante) las relaciones entre ellos de forma explícita. Por ejemplo, desde el lenguaje natural se utilizan los términos ancho infinitesimal e intervalo infinitesimal al hacer referencia al dr, siendo que la primera expresión se lo utiliza en un contexto geométrico (ver Figura 6.2 y Figura 6.3), pero la segunda expresión en puede relacionar al momento de considerar las particiones o divisiones del intervalo de valores que puede tomar el radio en el marco de un contexto aritmético.

Potenciales conflictos del lenguaje 2: En la lección del libro de texto se explica paso a paso como se tiene que considerar los radios en la lámina circular, los diferentes valores del radio que determinan circunferencias de radios 1, 2 y 3 (como se muestra en la Figura 6.5). Pero luego, en lugar de trabajar con círculos concéntricos, a medida que avanza el discurso se comienza a considerar coronas circulares o anillos circulares para calcular el área y la densidad, sin aclarar porque es necesario este cambio.

Se considera, que resulta oportuno realizar una explicación de por qué es necesario realizar el cambio de la consideración de los círculos a anillos circulares, ya que los argumentos de este cambio no están explícitos en la lección. Además, la representación gráfica de las circunferencias en la Figura 6.5, se considera insuficiente o incompleta ya no representa el proceso que está realizando el autor y puede llegar a generar conflictos semióticos en el lector, debido a que las flechas de los radios dibujados llevan a considerar circunferencias y círculos, y no anillos como lo plantea el texto.

Figura 6.5

Potencial conflicto epistémico en la representación gráfica



Fuente: Salinas et al., (2012, p. 143)

Potenciales conflictos del lenguaje 3: Otro potencial conflicto está relacionado con las expresiones simbólicas que relaciona la integral con la diferencial, pero en este caso particular, se plantea una igualdad entre la integral indefinida y la integral definida, aspecto que no es correcto ya que la integral indefinida representa a una familia de funciones, y la integral definida representa a un valor numérico.

$$M = \int dM = \int_{r=0}^{r=3} 2\pi r(10 - r^2)dr \text{ (Salinas et al., 2012, p. 145)}$$

Potenciales conflictos del lenguaje 4: en la lección se intenta establecer relaciones entre la derivada como la razón de cambio del área con respecto al radio, la diferencial área y la diferencial radio. Si bien desde el lenguaje simbólico se escribe como un cociente de diferenciales como $\frac{dA}{dr}$, en el discurso de los autores no lo mencionan así. Este hecho, es didácticamente significativo, ya que las representaciones simbólicas de la diferencial y la derivada, y las interpretaciones de estos, pueden llegar a generar un potencial conflicto epistémico, cuestión que ha sido reportado por diversas investigaciones Gómez (2019), Ely (2021), Verón, Giacomone y Benítez (2022)

Potenciales conflictos procedimentales: en la lección del libro de texto se plantea para el cálculo de la diferencial masa de dos maneras, por un lado, como la diferencia de las masas $dM = M(r + dr) - M(r)$, y como el producto $dM = \sigma(r)dA$. Si bien, en el texto se aclara las consideraciones en relación con la función densidad, no se presentan de manera explícita las relaciones entre una expresión y la otra, dejando a cargo del lector la elección de una expresión o de la equivalencia entre ellas, siendo que cada expresión plantea una forma diferente de calcular la diferencial y que están relacionadas, ejemplos de esta y otras situaciones se presentan en Hu y Rebello (2013) y Von Korff y Rebello (2014). Cabe destacar que los autores muestran las relaciones y la equivalencia entre las siguientes expresiones que relacionan a la diferencial área: $dA = A(r + dr) - A(r)$ y $dA = 2\pi r dr$.

6.4.1.10 Potenciales mejoras de la faceta epistémica

En relación con el lenguaje empleado, se utilizan diferentes registros y representaciones para describir a la diferencial, pero se podría destinar unos párrafos para establecer las conexiones e interpretaciones entre las expresiones de la diferencial.

Por otro lado, no se observa en la lección que se propongan situaciones en las que el lector (profesores y/o estudiantes) tengan que generar o negociar definiciones que intervienen y emergen del abordaje de la diferencial

Con respecto a los procedimientos, se considera que se podría ampliar la explicación en relación con las equivalencias entre las expresiones de la diferencial, mostrando como se pasa de una fórmula a otra.

Por último, se considera oportuno destinar al comienzo de la lección unos párrafos para discutir la necesidad de considerar diferentes radios para determinar la masa de la lámina, ya que directamente se parte de explicar el procedimiento sin exponer los argumentos que los validan. También, resulta de interés agregar una sección donde se plantee la discusión con relación a porque resulta necesario y deseable, para determinar la masa de una lámina circular, considerar anillos circulares en lugar de círculos concéntricos, con el objetivo de generar situaciones donde la diferencial interviene y emerja de manera clave para resolver el problema (Verón y Giacomone, 2021).

6.4.2 Faceta cognitiva

En la lección seleccionada del libro de texto de Salinas et al. (2012) se plantea una situación problema que permite al lector establecer *relaciones o conexiones* entre diferentes tipos de diferenciales, como la diferencial masa, la diferencial área y diferencial radio, empleando diferentes lenguajes o representaciones natural, geométricas, algebraicas y simbólicas.

Además, en una sección de la lección se plantea la relación de la derivada con la diferencial, en un intento para diferenciar ambos conceptos que están íntimamente relacionados por medio de la representación simbólica.

En relación con los *procesos*, se puede apreciar que en la explicación que realizan los autores, existen indicaciones que permiten que el lector pueda seguir la estrategia empleada para la modelización y generalización de los procesos de variación y acumulación del radio, área, densidad y la masa. Además, se observan elementos que metacognitivos que propician la reflexión sobre los procesos de pensamiento matemático, por ejemplo, cuando se plantea la necesidad de mejorar las aproximaciones de la masa de la lámina y para ello se amplía el número de divisiones que se considera de la lámina circular.

Con respecto a los *conocimientos previos* en primer lugar, se puede mencionar que en la lección no se retoman o presentan diferentes saberes previos que se utilizan como el área del círculo, área de un anillo circular, área de un rectángulo, diferencia entre círculo y circunferencia, perímetro de la circunferencia, propiedades de la integral, diferencia entre la integral indefinida y definida. Además, no se definen los conceptos físicos involucrados, como la masa y la densidad superficial. Aspecto que consideramos fundamental para que las reflexiones con relación al problema no se limiten solamente a cuestiones de las matemáticas, sino que también de los aspectos físicos, como lo plantea Hitt (2014).

Cabe destacar que en la lección se utilizan diferentes registros semióticos para representar la información como gráficos, ecuaciones, representaciones simbólicas y representación diagramática de la transformación de una corona circular en un rectángulo (ver Figura 6.3) (Godino, Giacomone et al., 2016). La utilización de diferentes representaciones permite incrementar el grado de idoneidad cognitiva en la medida que se establezcan relaciones entre las prácticas discursivas, operativas y normativas empleando diferentes registros semióticos (funciones semióticas) (Godino, Wilhelmi et al., 2016).

Por otro lado, debido al uso de diferentes términos o expresiones en relación con la diferencial, resulta necesario plantear la discusión sobre las interpretaciones que el lector podría hacer de infinitamente pequeña, cantidad infinitesimal, porción infinitesimal, entre otros que se han mencionado en la faceta anterior, ya que esta discusión es necesario por lo potenciales conflictos cognitivos que pueden surgir.

Otro potencial conflicto cognitivo tiene relación con el uso de las expresiones simbólicas que, si bien se establecen relaciones entre la derivada y la diferencial, no son suficientes ya que no se plantea una sección para generar la discusión en relación con las interpretaciones y/o sentidos que adquieren cada uno de estos conceptos en relación con la situación problema planteado. En el mismo sentido, no se aprecia en la lección que se haga referencia al paso que se realiza de la integral indefinida a la definida, las consideraciones quedan a cargo del lector. Además, no se observa en la lección un lugar destinado a la valorización del error o confusiones que se pueden presentar en la resolución de la tarea propuesta como fuente de aprendizaje.

6.4.3 Faceta afectiva

Teniendo en cuenta que se está analizando una lección de un libro de texto, no es posible identificar aspectos de la lección que den cuenta de las prácticas afectivas de los sujetos involucrados. No obstante, se pueden realizar ciertas observaciones con la intención de mejorar la propuesta teniendo en cuenta los aportes de Castillo et al., (2022a; 2022b) y la GVID-Diferencial.

La situación problema que se presenta, si bien no se corresponde directamente con los problemas sociales o la vida social de los estudiantes, presenta una situación contextualizada en el campo de la física e ingeniería, siendo esta una característica que puede evitar el rechazo de los estudiantes (lectores) hacia las matemáticas. Además, se destaca que, en la explicación de la resolución del problema, esta se va presentando de modo que habilita un cierto grado de flexibilidad hacia la exploración de ideas y conjeturas, ya que no dice desde el principio que se debe hacer para resolver, sino que va construyendo la resolución paso a paso.

6.4.4 Faceta interaccional

La lección del libro de texto seleccionado para este estudio presenta un formato de interacción de tipo dialógico y comunicativo, en el sentido de que comienza planteando la situación problema, luego va comunicando las proposiciones y procedimientos que va empleando para avanzar en la resolución. La presentación de los procedimientos se va realizando de manera progresiva, avanzando hacia la mejora de la aproximación de la masa total de la lámina circular.

En la organización de las configuraciones didácticas, se observa un orden en el surgimiento de los diferenciales dr, dA y dM, de tal manera que se propicia el planteo de las relaciones entre los diferenciales, la cual se potencia por las conexiones (conversiones) que se presentan entre las representaciones (lenguajes) natural, simbólico, algebraico y geométrico. Además, se destaca en la lección se emplean algunos recursos retóricos y argumentativos para presentar y explicar con claridad y sencilles cada uno de los diferenciales involucrados.

Por otro lado, no se observa en la lección evidencias que den cuenta de las interacciones entre estudiantes, ya que no se presentan espacios en la lección para la discusión o el intercambio de ideas. Además, el trabajo que proponen los autores al lector tiene un carácter individual ya que no se plantean explícitamente trabajos grupales.

Por último, un potencial conflicto instruccional que se puede advertir en la lección tiene que ver con lo que se solicita y/o declara que se va a realizar. Es decir, en el encunado de la situación-problema no se especifica que se debe encontrar la masa total de la lámina circular.

6.4.5 Faceta mediacional

En la lección del libro se emplean recursos gráficos geométricos que acompañan la explicación de la resolución de la situación problema propuesta, pero no se aprecia que se propicie el uso de otros tipos de recursos audiovisuales e informáticos que permiten potenciar el estudio físico del fenómeno, la visualización y los procesos implicados en la modelización matemática.

Con respecto a la organización del espacio temporal, se puede apreciar que se destina un importante tiempo para la explicación de la estrategia utilizada para la resolución de la tarea, destacando las proposiciones y procedimientos que intervienen para definir los diferenciales y relacionarlos con la derivada y la integral. Si bien, en este último aspecto, no se destina mucho tiempo para discutir estas relaciones entre los conceptos, se considera que existe una distribución adecuada para el tratamiento de los diferenciales.

6.4.6 Faceta ecológica

Una componente importante de la faceta ecológica es la adaptación al currículo, y en el caso particular de la lección del libro de texto de Salinas et al. (2012) se puede mencionar que la situación problema seleccionada se encuentra en correspondencia con los diseños curriculares de carreras de matemática, ingeniería, física y ciencias experimentales ya que la propuesta de enseñanza utiliza la modelización de fenómenos de cambio y acumulación en las cuales surge la necesidad de definir a la diferencial para obtener la masa total de la lámina circular. Cabe destacar que la presentación que se realiza de la diferencial va más allá de considerarse como un simple instrumento necesario para definir la derivada o la integral, sino que se establece la importancia y la necesidad de trabajar con diferenciales para modelizar y resolver situaciones-problemas contextualizadas en la física y la ingeniería, indicando de esta manera que la propuesta del libro de texto se encuentra contextualizada para las carreras de un estudiante de ingeniería o física.

En la lección existen elementos que permiten afirmar que se tienen en cuenta los avances de las investigaciones en didáctica del cálculo, como por ejemplo la utilización de diversos lenguajes o representaciones para potenciar la visualización y competencia matemática de los estudiantes. Pero se considera oportuno incluir otros tipos de recursos tecnológicos, como por ejemplo el uso de las animaciones o videos para estudiar las variaciones, cambios o acumulaciones de los fenómenos físicos como lo proponen Thompson y Harel (2021), ya que estos permiten profundizar en la discusión del fenómeno físico en estudio y no limitarlo solo a aspectos algebraicos (Hitt, 2014).

Por último, se resalta que la lección del libro plantea una situación problema en un contexto interdisciplinario ya que permite relacionar la diferencial con conceptos propios de la física y la ingeniería como masa de una lámina y la densidad superficial.

6.5 Síntesis y Conclusiones

En este capítulo se propuso analizar y valorar la idoneidad didáctica de una lección de un libro de texto de cálculo para el estudio de la diferencial utilizando los conocimientos didáctico-matemáticos de la GVID-Diferencial.

A partir del estudio realizado, es posible reconocer las potencialidades y limitaciones de la lección de libro de texto en cada una de las facetas epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica. Por ejemplo, en la faceta epistémica y cognitiva se ha logrado identificar varios potenciales conflictos semióticos, cuya información es un insumo muy importante para la planificación y diseño de tareas para el estudio de la diferencial. Además, la organización de los momentos de enseñanza que se valoran en la faceta interaccional nos brinda información sustancial para la implementación de este tipo de situación con los estudiantes.

Los conocimientos didáctico-matemáticos que se han sintetizados en la GVID-Diferencial conforman una herramienta teórica y metodológica potente con muchas aplicaciones, como el análisis y valoración de lecciones de libros de textos, cuyo uso competente por parte del profesor de matemáticas posibilita la reflexión global sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de la diferencial.

Capítulo 7: Desarrollo de la Competencia de Análisis Ontosemiótico en Futuros Profesores de Matemáticas

Una parte del contenido de este capítulo aparece publicado en:

Verón, M. A. y Giacomone, B. (2023). Valoración de la idoneidad interaccional de una discusión sobre la resolución de un problema en torno al estudio de la diferencial. *En Actas del Congreso SOMIDEM*. México. Aceptado.

Giacomone, B. y Verón, M. A. (2023). Competencia de futuros profesores de matemática para identificar prácticas, objetos y procesos en la resolución de un problema del diferencial. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, E. y P. Ivars (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXVI (pp. 267-274). SEIEM.

7.1 Introducción

De acuerdo con la literatura, el diseño de tareas, el análisis a priori detallado de las posibles soluciones y el análisis de la actividad matemática manifestada por los estudiantes, son considerados competencias didácticas específicas del profesor de matemáticas. Esto implica que el futuro profesor de matemáticas tenga la oportunidad de abordar, desde su formación, acciones formativas que le permitan avanzar hacia el conocimiento y uso competente de herramientas específicas, eficaces para: diseñar y comprender la complejidad matemática de las situaciones-problemas que proponen a sus estudiantes, comprender y gestionar los conflictos de aprendizaje, gestionar la institucionalización de los conocimientos y evaluar todo el proceso de enseñanza y aprendizaje impartido.

En el marco del Enfoque Ontosemiótico se propone el modelo de Competencias y Conocimientos Didáctico-Matemáticos (CCDM) del profesor de matemáticas, desarrollado por Godino, Giacomone, Batanero y Font (2017), en el cual los conocimientos y competencias mencionados forman una parte esencial de la competencia general de análisis e intervención didáctica y conocimientos didácticos.

En este trabajo se presenta el tipo de análisis que estamos experimentando con futuros profesores de matemática centrado en el desarrollo de la competencia para identificar y describir las prácticas, objetos y procesos matemáticos implicados en tareas matemáticas escolares (Giacomone, Godino, Beltrán-Pellicer, 2018). Se utiliza como contexto matemático situaciones-problemas donde interviene el concepto diferencial.

Dada la complejidad de la enseñanza del diferencial (López-Gay et al., 2015) resulta fundamental incluir en la formación de profesores de matemáticas iniciativas formativas que permitan el desarrollo de competencias específicas para afrontar los complejos desafíos didácticos asociados a este concepto. Así, en este trabajo abordamos el desarrollo de competencias del profesor de matemáticas desde la perspectiva del EOS usando como contexto matemático el estudio del diferencial.

En este capítulo se describe, analiza y valora el diseño, implementación y valoración del primer ciclo de formación orientado al desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico en futuros profesores de matemática (FPM), y para lograrlo, nos planteamos la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué tipo de acciones formativas sería necesario y posible implementar en un programa de formación para iniciar a los futuros profesores en el conocimiento y la competencia para el análisis ontosemiótico?

7.2 Modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticos del Profesor

En Godino et al. (2017), se plantea el modelo de Competencias y Conocimientos Didáctico-Matemáticos del profesor de matemáticas a partir de la organización de las dimensiones, componentes e indicadores que caracterizan el conocimiento necesario para la enseñanza de las matemáticas, considerando los aportes teóricos de diversos modelos.

A partir de las concepciones ontológico semióticas del EOS, se desglosa la competencia general de diseño e intervención didáctica, propia del profesor de matemáticas, en cinco sub-competencias: competencia de análisis significados globales; competencia de análisis ontosemiótico de prácticas matemáticas; competencia de análisis y gestión de configuraciones didácticas; competencia de análisis normativo; competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica. Esta distinción es posible gracias al desarrollo de determinadas herramientas teóricas y metodológicas que han evolucionado al interno de dicho enfoque.

En este trabajo focalizamos la atención en la competencia de análisis ontosemiótico de prácticas matemáticas. La noción de configuración ontosemiótica responde a la necesidad de identificar, por parte del profesor, los objetos y procesos intervinientes en las prácticas matemáticas. Es decir, el conocimiento didáctico-matemático sobre el propio contenido (la diferencial) en la cual se tiene en cuenta el conocimiento de la pluralidad de los significados institucionales de cualquier objeto matemático, dependiendo de los diferentes contextos de uso, y el reconocimiento del sistema de prácticas, objetos y procesos implicados en cada significado parcial (Giacomone, Godino y Beltrán-Pellicer, 2018).

En la realización de las prácticas matemáticas intervienen y emergen objetos de diversos tipos, de acuerdo con la función que desempeñan en dichas prácticas (elementos lingüísticos, situaciones-problemas o tareas, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos). Y también, intervienen y emergen procesos matemáticos (particularización, generalización, representación, …) (Godino et al., 2007). El reconocimiento explícito de tales objetos y procesos permite prever conflictos potenciales y efectivos de aprendizaje, evaluar las competencias matemáticas de los estudiantes e identificar objetos que deben ser recordados e institucionalizados en los momentos oportunos de los procesos de estudio (Godino et al., 2011).

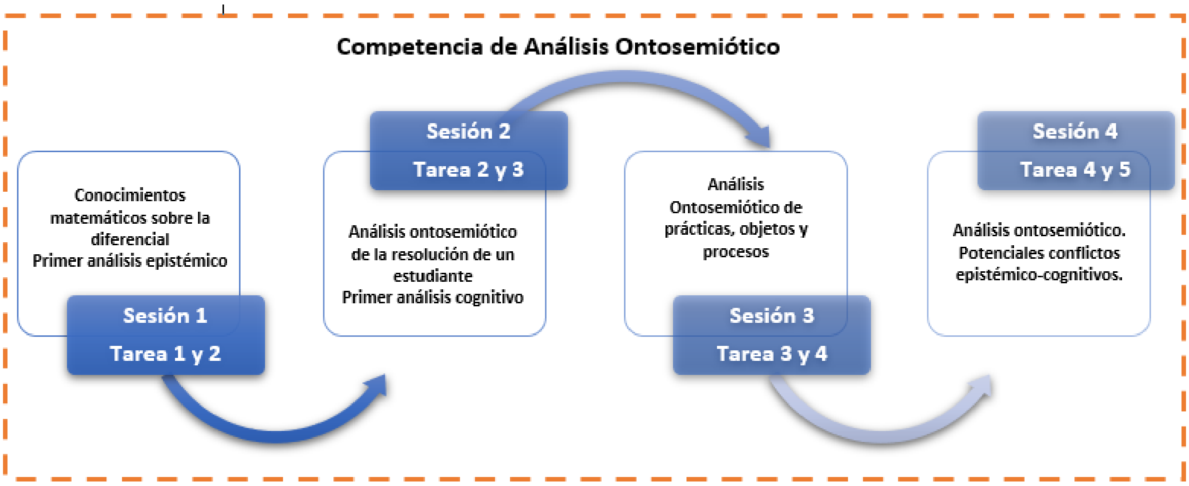
7.3 Características Generales del Ciclo Formativo

El ciclo formativo se implementó durante el año 2022, durante cuatro sesiones de dos horas y media cada una, en el ámbito del curso Seminario de Didáctica de la Matemática. Participaron 12 estudiantes, futuros profesores, que estaban cursando el cuarto año de la carrera de Profesorado de Educación Secundaria en Matemática de un Instituto Superior de Formación Docente de Argentina. Si bien la mayoría de los futuros profesores de matemática nunca habían utilizado las herramientas del EOS para el análisis de la actividad matemática, tenían conocimientos teóricos previos sobre las nociones básicas del enfoque que caracterizan a una configuración ontosemiótica.

A modo de síntesis, se presenta la trayectoria didáctica propuestas para el primer ciclo de formación desarrollado en los FPM, como se puede apreciar en la Figura 7.1.

Figura 7.1

Trayectoria didáctica para del primer ciclo de formación en los FPM



7.3.1 Cronograma del proceso formativo

En la siguiente Tabla 7.1 se muestra el cronograma de la experiencia formativa.

Tabla 7.1

Distribución de los encuentros del primer ciclo de formación

Encuentro	Fecha	Tiempo
1er	16 de septiembre de 2022	2,5 horas
2do	23 de septiembre de 2022	2,5 horas
3er	29 de septiembre de 2022	2,5 horas
4to	14 de octubre de 2022	2,5 horas

7.3.2 Organización de las actividades por encuentro

7.3.2.1 Primer encuentro

Tarea 1: Se plantea una situación-problema del cálculo de la masa total de una lámina circular. El objetivo de la tarea es explorar los conocimientos matemáticos sobre la diferencial de los FPM.

Puesta en común de la Tarea 1: se retoman las producciones de los estudiantes y se abordan los conflictos semióticos que dificultan el avance en la resolución de la situación problema. El objetivo es discutir sobre cada una de las resoluciones que surgieron de los grupos, superar los conflictos epistémicos y cognitivos, y establecer la estrategia de resolución óptima de la situación problema.

Tarea 2: Primer análisis ontosemiótico (epistémico). Mediante preguntas que apuntan al análisis didáctico, se lleva al FPM a reflexionar e identificar los objetos y procesos matemáticos que intervinieron y emergieron de la situación problema que ellos mismos resolvieron con la Tarea 1. El objetivo es realizar identificar los objetos matemáticos (situación-problema, lenguajes, conceptos-definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos) y procesos en sus propias resoluciones.

7.3.2.2 Segundo encuentro

Discusión de la Tarea 2: El objetivo es discutir sobre los significados personales de los estudiantes sobre cada uno de los objetos matemáticos implicados en la Tarea 2, de tal manera que se amplía el análisis ontosemiótico.

Luego de la discusión, se realiza la institucionalización de algunas nociones del Enfoque Ontosemiótico, en particular se presenta el origen del EOS, la noción de objeto matemático, significado, prácticas matemáticas, configuración de prácticas, objetos y procesos, y la técnica de análisis ontosemiótico de una actividad (Godino, 2002), retomando las producciones de los FPM de las Tarea 1 y Tarea 2, y proponiendo otros ejemplos. Este proceso se amplía con la lectura complementaria de un texto específico preparado por el grupo de investigadores que se adapta del texto de Godino, Beltrán-Pellicer, Burgos y Giacomone (2017).

Tarea 3: Introducción al análisis ontosemiótico (cognitivo). EL objetivo de esta tarea es que los FPM realicen su primer análisis cognitivo de una resolución de un estudiante real del problema de cálculo de la masa a partir de 1) reconocer y dividir la resolución en prácticas matemáticas elementales (personales), 2) identificar el uso e intencionalidad de cada una de las prácticas, 3) reconocer los objetos matemáticos (lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) de cada una de las prácticas, 4) identificar potenciales conflictos epistémicos y cognitivos.

7.3.2.3 Tercer encuentro

Discusión de la Tarea 3: se pone en discusión y diálogo con todo el grupo clase la división de la resolución en prácticas matemáticas y se discuten en detalle los objetos matemáticos implicados en cada práctica.

Luego de la discusión, se institucionaliza el análisis cognitivo desde la perspectiva del EOS. Además, se establecen relaciones entre los tipos de análisis Ontosemióticos realizados en las Tarea 2 y Tarea 3.

Tarea 4: Se plantea una nueva situación problema que implica obtener la distancia total recorrida por un auto en un intervalo de tiempo y se solicita realizar el análisis ontosemiótico (epistémico) completo identificando la secuencia de prácticas matemáticas, intencionalidad de cada práctica y los objetos matemáticos que intervienen y emergen de las mismas. Además, se plantea la realización de una primera lectura del modelo ontosemiótico de los significados parciales de la diferencial en el texto de Verón y Giacomone (2021).

7.3.2.4 Cuarto encuentro

Discusiones de la Tarea 4: se retoman algunas producciones de los estudiantes y las dudas, preguntas y dificultades que hayan tenido para resolver la tarea.

Luego se realiza la institucionalización del origen y evolución del concepto diferencial y del modelo ontosemiótico de los significados parciales de la diferencial.

Tarea 5: Se propone a los FPM realizar un análisis ontosemiótico a una lección de un libro de texto de cálculo de Stewart (2012) de tal manera que puedan identificar prácticas, objetos y procesos matemáticos, potenciales conflictos epistémicos y cognitivos, relaciones con otros conceptos y establecer conexiones con los significados parciales de la diferencial.

Discusión de la Tarea 5: se socializan y discuten las respuestas de los FPM junto con sus dudas y dificultades.

Cierre del ciclo formativo: se presentan y se relacionan todas las tareas del ciclo vinculando con las herramientas del EOS, los significados parciales de la diferencial y los tipos de análisis ontosemiótico (epistémico y cognitivo) solicitados.

7.3.3 Recogida y análisis de los datos

Como instrumentos de recogida de información se dispone de los siguientes elementos:

- respuestas escritas de las actividades grupales e individuales realizadas en clase;
- grabación en audio de todas las sesiones del curso (favoreciendo la interpretación de las observaciones registradas y el desarrollo del curso en la etapa de análisis retrospectivo);
- registro fotográfico de las producciones de los FPM en el pizarrón

Encuesta de opinión

Con la finalidad de recoger información adicional para este análisis, los estudiantes tenían que cumplimentar una encuesta de opinión anónima sobre los siguientes aspectos, para cada tarea:

Consigna

Realice una valoración de cada uno de los siguientes puntos referido a las tareas realizadas

1) Claridad de la tarea y de las consignas.

2) Adecuación de la metodología seguida (forma de trabajo, explicaciones del profesor).

3) Grado de motivación e interés suscitado por las actividades.

4) Nivel de aprendizaje logrado.

5) Grado de pertinencia global del taller para tu formación como profesor de matemáticas.

Cada ítem debía ser valorado según una escala de [1-5], siendo 1: valor mínimo y 5: valor máximo. Además, los estudiantes podían añadir cualquier comentario que considerasen pertinente.

7.4 Fases y Metodología de Implementación

7.4.1 Fase 1. Exploración inicial de los significados personales de la diferencial

En la primera fase los FPM resolvieron una primera tarea matemática, Tarea 1, sobre un problema del cálculo de la masa total de una lámina circular, adaptado de Salinas et al. (2012), que tiene la intención de realizar una exploración inicial de los significados personales de los FPM sobre la diferencial.

7.4.2 Fase 2. Introducción al análisis ontosemiótico (epistémico)

Luego de la socialización y discusión de las resoluciones empleadas por los FPM, se avanzó con la segunda fase de implementación ‘Introducción al análisis epistémico’ utilizando la Tarea 2 (Figura 7.2). Esta tarea tiene el objetivo de introducir un posible método para la identificación y reconocimiento de los distintos objetos matemáticos, como la situación problema, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, que caracterizan a las configuraciones epistémicas.

7.4.3 Fase 3. Introducción al análisis ontosemiótico (cognitivo)

Con la tercera fase de implementación 'Introducción al análisis cognitivo' se involucra a los participantes a realizar un primer análisis cognitivo, basado en la identificación de los objetos matemáticos, de las prácticas matemáticas personales que realiza un estudiante cuando resuelve el problema (Tarea 3).

7.4.4 Fase 4. Puesta en práctica de la técnica de análisis ontosemiótico.

La cuarta fase 'Puesta en práctica de la técnica de análisis ontosemiótico' avanza hacia la consolidación en el uso de herramientas de análisis. Se proponen dos tareas, 4 y 5, en las cuales se plantearon sobre las siguientes consignas: (1) Resuelve la tarea matemática; (2) Identifica las distintas prácticas matemáticas que se deben realizar; (3) Identifica los conocimientos que se ponen en juego (objetos y procesos matemáticos referidos en las prácticas). Para la Tarea 4 se utiliza como contexto un problema de aceleración basado en el cálculo de la distancia total recorrida de un auto.

7.4.5 Fase 5. Aplicación del análisis ontosemiótico a una lección de un libro de texto de cálculo.

En la quinta fase, con la Tarea 5, se propone realizar un análisis ontosemiótico sobre una lección de un libro de texto de cálculo de Stewart (2012), en particular se les brinda una parte de una lección donde se presenta la definición y explicación del diferencial.

Si bien, cada etapa tiene un momento de intercambio de ideas, discusión grupal, puesta en común por parte del docente y discusión de resultados parciales al interior del grupo de investigación, en la quinta etapa del ciclo formativo se crea un espacio didáctico específico para ilustrar los avances que han logrado los estudiantes, para discutir sobre la importancia de los conocimientos didáctico-matemáticos de los distintos significados de la diferencial para el diseño de tareas, y reflexionar sobre la importancia de las tareas realizadas en la futura práctica profesional.

7.4.6 Fase 6. Evaluación

Cada una de las tareas implementadas se analizaron a priori con el objetivo de gestionar la clase, la puesta en común y los potenciales conflictos de aprendizaje. Al final de toda la implementación, se realizó un análisis retrospectivo de todo el ciclo formativo con el objetivo de identificar puntos de mejora y tomar decisiones para futuras implementaciones.

7.5 Diseño de Tareas. Análisis a priori

7.5.1 Introducción

En esta sección se presenta el análisis a priori de cada una de las tareas del ciclo formativo teniendo en cuenta los tipos de conocimientos didáctico-matemático involucrado, la intencionalidad y las competencias profesionales de los FPM que intervienen en las mismas. A modo de síntesis se presenta esta organización en la Tabla 7.2.

Tabla 7.2

Conocimientos y competencias didáctico-matemáticos implicados en las tareas del primer ciclo de formación

Tarea	Consigna	Tipos de conocimientos didáctico-matemáticos	Intencionalidad	Competencias profesionales del FPM
1	Resolver de dos maneras diferentes el siguiente problema y escribir los pasos realizados.	Epistémico	Identificar las practicas matemáticas involucradas en la resolución	Competencia de análisis epistémico de prácticas, objetos y procesos matemáticos
2	1) ¿Qué es para ti un concepto matemático? Identifica los conceptos matemáticos que intervienen en la resolución de la tarea.	Epistémico	Identificar los conceptos-definiciones que intervienen en las prácticas	
	2) ¿Qué lenguajes se utiliza en la resolución de la tarea? (Lenguaje: natural, geométrico, simbólico, algebraico, etc.)	Epistémico	Identificar los tipos de lenguajes que intervienen en las prácticas	
	3) ¿Qué es para ti una proposición matemática? Identifica las proposiciones matemáticas en la resolución de la tarea.	Epistémico	Reconocer las proposiciones que intervienen en las prácticas	
	4) ¿Qué es para ti un procedimiento matemático? Describe los procedimientos matemáticos utilizados en la resolución de la tarea.	Epistémico	Identificar los procedimientos que intervienen en las prácticas	
	5) ¿Qué argumentos/explicaciones validan las proposiciones y procedimientos utilizados?	Epistémico	Reconocer los argumentos que justifican las proposiciones y procedimientos	
	6) ¿Qué conceptualizaciones se pueden identificar en la resolución de la tarea?	Epistémico	Reconocer los procesos matemáticos implicados en el sistema de	

			prácticas matemáticas	
3	Analiza la resolución del problema de cálculo de la masa 1) Describe el procedimiento seguido indicando la secuencia de prácticas elementales que se ha realizado para resolver la tarea	Cognitivo	Reconocer la estrategia de resolución y las prácticas matemáticas personales en la solución de un estudiante	Competencia de análisis cognitivo de prácticas, objetos y procesos matemáticos personales de un estudiante
	2) Completa la tabla identificando los conocimientos que se ponen en juego en el enunciado y en cada una de las prácticas elementales	Cognitivo	Identificar en cada práctica personal la intencionalidad y los objetos matemáticos implicados	
	3) ¿Consideras que el procedimiento es correcto?	Epistémico Cognitivo	Contrastar el análisis epistémico y el análisis cognitivo Identificar potenciales conflictos epistémicos y cognitivos	Competencia para identificar potenciales conflictos epistémicos y cognitivos
	4) ¿Qué retroalimentación harías?	Epistémico Cognitivo	Valorar la resolución del estudiante y ofrecer una retroalimentación formativa	Competencia de valoración de la idoneidad epistémica y cognitiva. Competencias comunicativas y argumentativas
4	1) Resolver problema (velocidad del auto)	Epistémico	Reconocer las estrategias de resolución del problema	Competencia de análisis epistémico de prácticas, objetos y procesos matemáticos
	2) Describe el procedimiento seguido indicando la secuencia de prácticas elementales que se ha realizado para resolver la tarea	Epistémico	Identificar las practicas matemáticas involucradas en la resolución	
	3) Completa la tabla identificando los conocimientos que se ponen en juego en el enunciado y en cada una de las prácticas elementales	Epistémico	Identificar en cada práctica elemental la intencionalidad y los objetos matemáticos implicados	

	4) ¿Qué significado parcial del diferencial se puede relacionar con la tarea?	Epistémico	Establecer conexiones entre la configuración epistémica y los significados parciales de la diferencial	Competencia de análisis epistémico
5	1) Intención didáctica de la lección del libro de texto	Epistémico, Cognitivo e Interaccional	Reconocer la intencionalidad didáctica	Competencia de análisis epistémico y cognitivo
	2) Identificar prácticas matemáticas de la lección del libro de texto	Epistémica	Dividir la lección en práctica matemáticas elementales	
	3) Reconocer los objetos matemáticos intervienen y emergen en de la lección del libro de texto	Epistémica	Identificar los objetos matemáticos	
	4) Reconocer procesos intervienen en la lección del libro de texto	Epistémica	Reconocer los procesos matemáticos	
	5) ¿Qué significado parcial del diferencial se pretende trabajar en la lección del libro de texto?	Epistémica	Relacionar la configuración epistémica con los significados parciales de la diferencial	
	6) Identificar potenciales conflictivos para los estudiantes	Epistémica-cognitiva	Identificar potenciales conflictos epistémicos y cognitivos	
	7) Para hacer un análisis de una lección de un libro de texto, qué otros aspectos consideras que se debería tener en cuenta	Epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva y ecológica	Reconocer e incorporar indicadores de las facetas de la idoneidad didáctica	Iniciación en la competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica

7.5.2 Tarea 1. Situación problema del cálculo de la masa

Figura 7.2

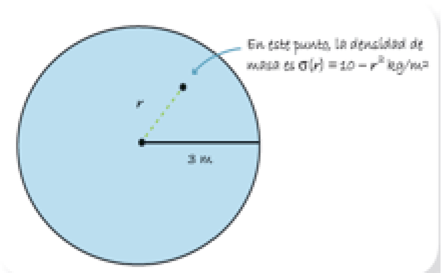
Enunciado de la consigna de la Tarea 1

Consigna

Resolver de dos maneras diferentes el siguiente problema y escribir los pasos realizados.

Considerando una lámina circular de 3 metros de radio, cuya masa se distribuye de tal manera que la densidad en todo punto es $\sigma(r) = 10 - r^2$ (kg/m^2), donde r es la distancia del punto al centro de la lámina. Se pide:

Determinar la masa M total de la lámina circular con la densidad de masa dependiendo de radio.



Masa=densidad x área

Posibles Resoluciones

En esta sección se describen brevemente las posibles resoluciones de la situación-problema y los potenciales conflictos epistémicos que emergen de las mismas, donde se hace énfasis en las principales dificultades, discordancias y/o errores que intervienen y que propician el surgimiento del conflicto.

A continuación, se presentan las prácticas matemáticas elementales de cinco resoluciones de la situación-problema.

7.5.2.1 Resolución 1

P1. Lectura e interpretación del problema. Se considera una disco circular de 3m de radio, una función densidad que depende del radio $\sigma(r) = 10 - r^2$ (kg/m^2). La fórmula para calcular la masa superficial es $Masa = densidad \times área$

P2. Se considera que el área y la densidad es constante en toda la superficie de la lámina y se calcula área del círculo y la densidad para el radio $r = 3m$. De esta manera se obtiene un área de $A = \pi(3m)^2 = 9\pi\ m^2$ con la fórmula $A = \pi r^2$ y una densidad de

$\sigma(3) = 10 - (3m)^2 = 1\ (kg/m^2)$

P3. Se calcula la masa haciendo el producto entre la densidad y el área, obteniendo:

$M = 1(kg/m^2)\,.9\pi\, m^2 = 9\pi\, kg$

7.5.2.1.1 Potencial conflicto epistémico 1

La resolución es incorrecta ya que se genera un conflicto epistémico al considerar que la función densidad es constante en todos los puntos de la lámina circular. Además, se está suponiendo que la masa no varía en toda la superficie del círculo, ya que se trabaja con toda el área del círculo de radio 3m. Estas cuestiones son didácticamente significativas ya que no se logra reconocer la variación de la función densidad, del área de la lámina circular y, en consecuencia, la variación de la masa.

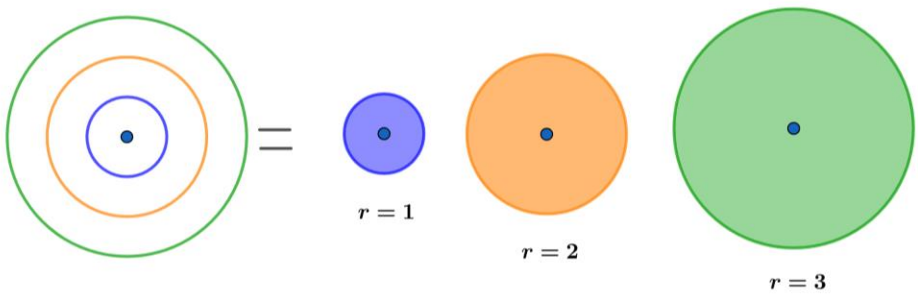
7.5.2.2 Resolución 2

P1. Se repite

P2. Se considera que el radio r varía y que puede tomar solamente los valores naturales 0, 1, 2 y 3, formándose círculos concéntricos como se muestra en la Figura 7.3.

Figura 7.3

Representación gráfica de círculos concéntricos



P3. Se considera que el área y la densidad varían, por tal motivo se calcula el área y la densidad para varios radios, considerando que r puede tomar los valores 0, 1, 2 y 3. Se representan los datos en la siguiente tabla (Tabla 7.3).

Tabla 7.3

Cálculo de la masa para valores de radio 0, 1, 2 y 3

$\boldsymbol{r}$		$\boldsymbol{\sigma(r) = 10 - r^2\ (kg/m^2)}$	$\boldsymbol{A = \pi r^2\ (m^2)}$	$\boldsymbol{Masa = densidad \times \text{á}rea\ (kg)}$
0	0	$\sigma(0) = 10$	$A(0) = 0$	$M(0) = 0$
1	$(0, 1]$	$\sigma(1) = 9$	$A(1) = \pi$	$M(1) = 9\pi$

2	$(0,2]$	$\sigma(2) = 6$	$A(2) = 4\pi$	$M(2) = 24\pi$
3	$(0,3]$	$\sigma(3) = 1$	$A(3) = 9\pi$	$M(3) = 9\pi$

Cabe aclarar que se considera que la densidad y el área varía en intervalos constantes, es decir que, por ejemplo, para los valores de $(0,1]$ se toma a $r = 1\,m$, obteniendo una densidad de $\sigma(1) = 9\ kg/m^2$ esto quiere decir que todos los puntos del círculo de radio 1m, tiene una densidad constante de 9 kg/m^2

P4. Se suman los valores de las masas que se obtuvieron para los diferentes radios para aproximar el valor de la masa total de la lámina circular.

$$M_{total} \approx M(0) + M(1) + M(2) + M(3) = 42\pi\ kg$$

7.5.2.2.1 Potencial conflicto epistémico 2

Si bien con la segunda resolución, supera el conflicto epistémico 1 ya que se logra reconocer la variación de la función densidad, del área y de la masa según el radio que se considere, pero surge un nuevo conflicto epistémico debido a la consideración de los círculos concéntricos ya que se está superponiendo los valores de las masas que se están calculando para los radios 1, 2 y 3 metros. Como se puede apreciar en la Figura 7.3, se consideran tres círculos concéntricos de radios 1, 2 y 3 m, pero no se advierte que el área del círculo de *r=1m* está o incluido en los otros dos círculos, lo que genera que se está obteniendo un valor de masa mayor al real ya que se superponen las superficies de los círculos considerados.

Además, se considera que el radio varía, pero solo toma valores naturales de su dominio de definición. Este hecho genera que se tome solo tres círculos y que en cada uno de ellos se plantea que la densidad es constante en cada punto de los círculos, en síntesis, se está planteando que la densidad es constante por tramos o intervalos de valores de radio.

7.5.2.3 Resolución 3

Resolución alternativa: Si se consideran más valores de radio el valor de la masa total aumenta cada vez más, porque aumenta considerablemente los valores de las áreas de los círculos.

A modo de síntesis, se presentan los datos en la siguiente Tabla 7.4

Tabla 7.4

Cálculo de la masa para valores de radio de 0,5m

$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{\sigma(r) = 10 - r^2\ (kg/m^2)}$	$\boldsymbol{A = \pi r^2\ (m^2)}$	$\boldsymbol{Masa = densidad \times área\ (kg)}$

0	$\boldsymbol{\sigma(0) = 10}$	$\boldsymbol{A(0) = 0}$	$\boldsymbol{M(0) = 0}$
0,5	$\boldsymbol{\sigma(0,5) = 9,75}$	$\boldsymbol{A(0,5) = 0,25\pi}$	$\boldsymbol{M(0,5) = 2,4375\pi}$
1	$\boldsymbol{\sigma(1) = 9}$	$\boldsymbol{A(1) = \pi}$	$\boldsymbol{M(1) = 9\pi}$
1,5	$\boldsymbol{\sigma(1,5) = 7,75}$	$\boldsymbol{A(1,5) = 2,25\pi}$	$\boldsymbol{M(1,5) = 17,4375\pi}$
2	$\boldsymbol{\sigma(2) = 6}$	$\boldsymbol{A(2) = 4\pi}$	$\boldsymbol{M(2) = 24\pi}$
2,5	$\boldsymbol{\sigma(2,5) = 3,75}$	$\boldsymbol{A(2,5) = 6,25\pi}$	$\boldsymbol{M(2,5) = 23,4375\pi}$
3	$\boldsymbol{\sigma(3) = 1}$	$\boldsymbol{A(3) = 9\pi}$	$\boldsymbol{M(3) = 9\pi}$

De esta manera, la masa total será: $M_{total} \approx 85{,}3135\pi\ kg$

7.5.2.3.1 Potencial conflicto epistémico 3

La resolución 3 mejora la resolución 2 ya que se logra reconocer que el radio puede tomar más valores del intervalo [0,3]. En este sentido, se logra resolver el conflicto en relación con la consideración del radio, pero también, hay un gran salto cualitativo en la resolución ya que se logra avanzar en la conceptualización de la variación de la masa, de la densidad y del área, ya que se consideran cada vez más círculos concéntricos.

El hecho de considerar más valores de radio constituye un indicador del progreso en la resolución del problema, pero todavía persiste el conflicto de la superposición de superficies de los círculos concéntricos.

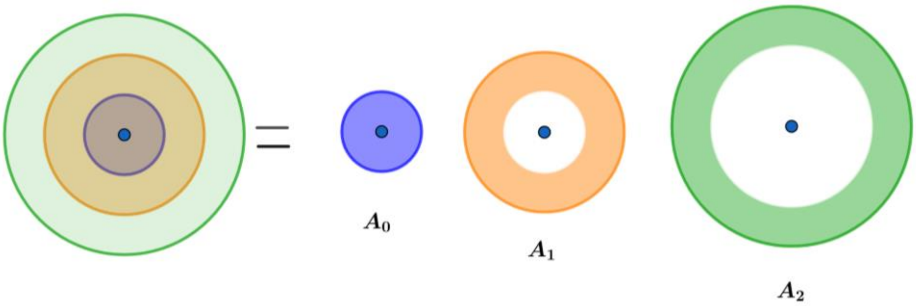
7.5.2.4 Resolución 4

P1. Se repite

P2. Se considera que el radio r varía y que puede tomar solamente los valores naturales 0, 1, 2 y 3, formándose anillos concéntricos o coronas circulares como se muestra en la Figura 7.4.

Figura 7.4

Representación gráfica de coronas circulares de radio 1, 2 y 3



P3. Se considera que el área varia y se calcula el área de cada corona circular reemplazando en la fórmula $A = \pi(R^2 - r^2)$, siendo R: radio mayor y r: radio menor.

$A_0 = \pi(1^2 - 0^2) = \pi$

$A_1 = \pi(2^2 - 1^2) = \pi(4 - 1) = 3\pi$

$A_2 = \pi(3^2 - 2^2) = \pi(9 - 4) = 5\pi$

P4. Se considera que la densidad es constante en cada corona circular y se organizan los datos en una tabla para realizar los distintos cálculos de la masa (Tabla 7.5).

Tabla 7.5

Cálculo de la masa para las coranas circulares

$\boldsymbol{r}$	Intervalo	$\boldsymbol{\sigma(r) = 10 - r^2\ (kg/m^2)}$	Área de la corona circular $(\boldsymbol{m^2})$	$\boldsymbol{Masa = densidad \times}$ á$\boldsymbol{rea\ (kg)}$
0	$(\boldsymbol{0,1}]$	$\boldsymbol{\sigma(0) = 10}$	$\boldsymbol{A_0 = \pi}$	$\boldsymbol{M(0) = 10\pi}$
1	$(\boldsymbol{1,2}]$	$\boldsymbol{\sigma(1) = 9}$	$\boldsymbol{A_1 = 3\pi}$	$\boldsymbol{M(1) = 27\pi}$
2	$(\boldsymbol{2,3}]$	$\boldsymbol{\sigma(2) = 6}$	$\boldsymbol{A_2 = 5\pi}$	$\boldsymbol{M(2) = 30\pi}$

P5. Se suman los valores de las masas que se obtuvieron en cada anillo para aproximar el valor de la masa total de la lámina circular.

$$M_{total} \approx M(0) + M(1) + M(2) = 67\pi$$

7.5.2.4.1 Potencial conflicto epistémico 4

En esta nueva resolución, se advierte la superposición de superficies y, por lo tanto, para resolver ese conflicto epistémico, se consideran anillos o coronas circulares concéntricas en lugar de trabajar con círculos. Este hecho es didácticamente significativo ya que implica un importante salto cualitativo en la compresión del problema y en la conceptualización de la variación de la masa ya que, en esta resolución, se está suponiendo que la densidad y la masa es constante en cada uno de los anillos. Si bien, estas suposiciones constituyen un conflicto epistémico que es necesario resolverlo para poder avanzar en la resolución del problema, resulta necesario estudiar la consideración del ancho del anillo, es decir, la cantidad o porción del radio de la corona circular.

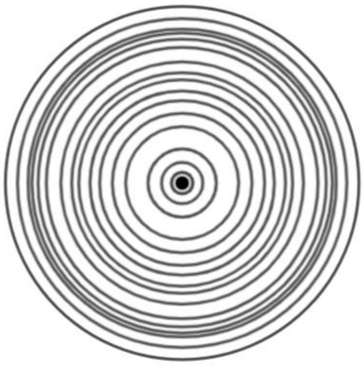
7.5.2.5 Resolución 5

P1. Se repite

P2. Considerando que el radio r varía y que puede tomar cualquier valor entre 0 y 3, se puede tomar distancias de radio muy pequeñas (infinitesimales) para formar infinitos anillos concéntricos o coronas circulares, como se muestra en la Figura 7.5.

Figura 7.5

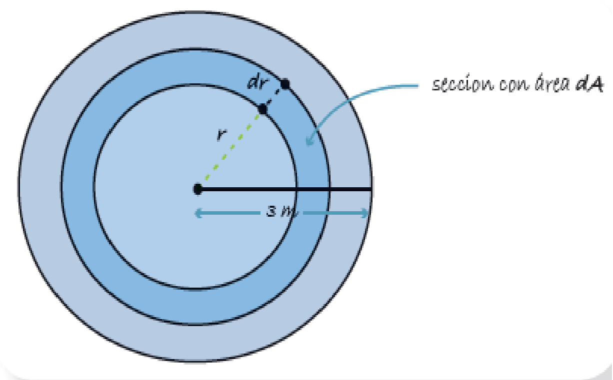
Representación gráfica de infinitas coronas circulares



P3. Se considera que el ancho de un anillo estará dado por la diferencia entre dos valores de radio muy próximos entre sí, esta distancia se denota con dr y se denomina diferencial radio. Se calcula haciendo la diferencia $dr = r_2 - r_1$ y representa una cantidad infinitesimal de radio (ver Figura 7.6).

Figura 7.6

Representación gráfica de la diferencial área dA



Fuente: Salinas et al. (2012, p. 144)

P4. Para calcular el área de corona circular de radio dr se hace la diferencia entre las áreas de los círculos $A(r + dr)$ y $A(r)$, mayor y menor respectivamente, de esta manera se obtiene una expresión que llamaremos diferencial área, se denota con dA y representa el área infinitesimal de radio infinitesimal (ver Figura 7.7).

$A(r) = \pi r^2$ y $A(r + dr) = \pi(r + dr)^2$

$dA = A(r + dr) - A(r)$

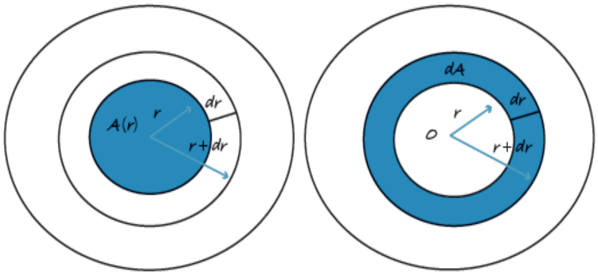
$dA = \pi(r + dr)^2 - \pi r^2$

$dA = \pi r^2 + 2\pi r dr + \pi dr^2 - \pi r^2$

$dA = 2\pi r dr$

Figura 7.7

Representaciones para el cálculo de dA



Fuente: Salinas et al. (2012, p. 107)

> La diferencia de dos valores sucesivos de x es la diferencial dx, y similarmente para dy. Se supone que las cantidades dx y dy no son cero sino incomparablemente pequeñas, y por lo tanto despreciables, con respecto a los valores de las variables x e y. Del mismo modo, se supone que un producto de los diferenciales, como $(dx)(dy)$ o (dx)^2, es a su vez despreciable en comparación con los diferenciales dx y dy. (Edwards, 1979, p. 261)

P5. Se considera la densidad es constante en cada anillo infinitesimal de radio infinitesimal. Por tal motivo, para calcular la masa en cada anillo infinitesimal se realiza el producto entre la función densidad y la diferencial área, obteniendo de esta manera una porción infinitesimal de masa que lo denotaremos con dM y se denomina diferencial masa.

$$dM = \sigma(r)dA$$

$$dM = (10 - r^2)(2\pi r dr)$$

$$dM = 2\pi(10r - r^3)dr$$

P6. Sabiendo que la diferencial masa nos permite calcular la masa de una porción infinitesimal de la lámina circular, surge la necesidad de sumar todas las porciones infinitesimales de masa, para obtener la masa total de la lámina, es decir:

$$M_{total} = dM_1 + dM_2 + dM_3 + \cdots dM_n, \text{ con } n \text{ tendiendo al infinito.}$$

P7. Para sumar todas las porciones infinitesimales de masa dM_n, se plantea la integral definida desde $r = 0\ m$ hasta $r = 3\ m$ cuya función integrando es dM. Es decir:

$$M_{total} = \int_{r=0}^{r=3} dM = \int_{r=0}^{r=3} 2\pi(10r - r^3)dr = \left[2\pi\left(5r^2 - \frac{r^4}{4}\right)\right]_{r=0}^{r=3} = 49{,}5\pi\ kg$$

P8. El valor $49{,}5\pi\ kg$ representa el cambio total acumulado de la masa de la lámina circular cuando el radio pasa de $r = 0\ m$ a $r = 3\ m$.

7.5.2.6 Análisis ontosemiótico a priori de la Tarea 1

En la Tabla 7.6 se presenta el análisis ontosemiótico de la resolución 5 de la tarea 1 identificando para cada práctica matemática su uso e intencionalidad y los objetos matemáticos implicados.

Tabla 7.6

Análisis ontosemiótico de la resolución 5 de la Tarea 1

Secuencia de prácticas matemáticas para resolver la tarea	**Uso e intencionalidad de las prácticas**	**Objetos referidos en las prácticas (lenguaje, conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos)**
P1	Interpretación y reconocimiento de los datos de la situación problema	***Lenguajes:*** natural, simbólico, algebraico, geométrico ***Conceptos:*** geométricos (círculo, radio, punto, centro, distancia, superficie, área); algebraicos (función, variación, relación de dependencia entre la densidad y el radio); magnitudes físicas (densidad superficial, unidades de longitud (metros), unidad de masa (kg/m^2)) ***Proposiciones:*** P1: “la masa se distribuye de tal manera que la densidad en todo punto es $\sigma(r) = 10 - r^2\ (kg/m^2)$”; P2: “la densidad de masa dependiendo de radio”

P2	Visualizar los infinitos anillos que se pueden formar al considerar valores de radio	***Lenguajes:*** natural (infinitos, muy pequeño, infinitesimal), geométrico y simbólico (r). ***Conceptos:*** infinito, anillos o coronas circulares concéntricos, valores, infinitesimal. ***Proposiciones:*** P3: "r puede tomar cualquier valor entre 0 y 3"; P4: "se forman infinitos anillos concéntricos de radio muy pequeño" **Procedimientos:** tomar distancias de r cada vez más pequeñas.
P3	Determinar el ancho de un anillo de radio infinitesimal definiendo la diferencial radio	**Lenguajes:** natural (diferencia, diferencial), geométrico, simbólico (dr) ***Conceptos:*** ancho de un anillo, diferencia de valores, cantidad ***Proposiciones:*** P5: "dr representa una cantidad infinitesimal de radio" **Procedimientos:** dr=$r2$−$r1$, dr se calcula haciendo la diferencia entre dos valores muy próximos entre sí. ***Argumentos:*** definición del diferencial como una cantidad infinitesimal; Uso del término infinitesimal para referirse a una cantidad muy pequeña
P4	Determinar el área de un anillo de radio infinitesimal definiendo la diferencial área	**Lenguajes:** natural (diferencial área, área infinitesimal), geométrico y simbólico (Ar+dr, dA=$2\pi rdr$) ***Conceptos:*** área, diferencial radio, diferencial área. ***Proposiciones:*** P6: "dA representa un área infinitesimal de radio infinitesimal" **Procedimientos:** dA=Ar+dr−$A(r)$, dA se calcula haciendo la diferencia de áreas. dA=$2\pi rdr$ ***Argumentos:*** cálculo de área un círculo y corona circular.
P5	Definición de la diferencial masa para un anillo de área infinitesimal	**Lenguajes:** natural (porción infinitesimal), algebraico, simbólico (dM, σr) ***Conceptos:*** producto, función, densidad, masa, diferencial masa, producto, constante. ***Proposiciones:*** P7: "densidad constante en cada anillo infinitesimal", P8: "dM representa una porción infinitesimal de masa" Procedimientos: dM=σrdA ***Argumentos:*** definición de masa

P6	Establecer que la masa total se obtiene a partir de la suma de las infinitas porciones infinitesimales de masa	**Lenguajes:** natural (infinito), simbólico (dMn) ***Conceptos:*** suma, masa total, infinito. ***Procedimientos:*** $Mtotal$=dM1+⋯dMn, con n tendiendo al infinito. ***Argumentos:*** proceso de acumulación, suma
P7	Establecer que la suma de los infinitos dM se obtendrá haciendo la integral definida de la dM	**Lenguajes:** natural, algebraico y simbólico $M_{total} = \int_{r=0}^{r=3} dM$ ***Conceptos:*** integral definida, función integrando, extremos de integración. **Procedimientos:** $M_{total} = \int_{r=0}^{r=3} dM$ ***Argumentos:*** definición y propiedades de la integral definida.
P8	Interpretación de $\int_{r=0}^{r=3} dM$	***Lenguajes:*** natural y simbólico ***Conceptos:*** cambio total, acumulación ***Proposiciones:*** P9: “$49{,}5\pi\ kg$ representa el cambio total acumulado de la masa” ***Argumentos:*** interpretación de la integral definida como cambio total

7.5.2.7 Procesos

Conceptualización/definición: en las prácticas matemáticas se establece que dr representa una cantidad infinitesimal de radio; dA representa una cantidad infinitesimal de área; y dM representa una porción infinitesimal de masa.

Además, se plantea que la masa total será igual al cambio total acumulado, es decir:

$$M_{total} = \int_{r=0}^{r=3} dM$$

Algoritmización: se establece la diferencia entre valores muy próximos entre sí de la misma magnitud para el cálculo de la diferencial radio y diferencial área, es decir:

$$dr = r_2 - r_1 \ \text{ y } \ dA = A(r + dr) - A(r)$$

Interpretación/representación: en la resolución se establece que dM es un elemento genérico que cumple la función de ser un representante de las infinitas porciones infinitesimales de masa.

7.5.2.8 Relaciones

Se plantea que la diferencial área se calcula mediante la siguiente expresión:

$$dA = 2\pi r dr$$

Cabe destacar que, en esta expresión, que proviene de la función área de círculo $A(r) = \pi r^2$, su derivada es $A'(r) = 2\pi r$, que representa los primeros tres factores de la expresión de la diferencial área.

En síntesis, trabajando algebraicamente la expresión de dA, se obtiene la función derivada del área del círculo respecto del radio:

$$dA = 2\pi r dr$$

$$\frac{dA}{dr} = \frac{2\pi r dr}{dr}$$

$$\frac{dA}{dr} = 2\pi r$$

Donde $\frac{dA}{dr}$ representa la derivada, es decir: $A'(r) = \frac{dA}{dr}$

También, se establece una relación entre la integral y la diferencial, donde se considera a la integral definida como la suma de las infinitas dM para obtener el cambio total o acumulado de la masa.

$$M_{total} = \int_{r=0}^{r=3} dM$$

Una posible interpretación de la expresión es $dA = 2\pi r dr$ es el producto de la longitud de radio de una circunferencia por la diferencial de radio, como se puede apreciar en la Figura 6.3, aspecto a considerar como una posible resolución.

7.5.3 Tarea 2. Introducción al análisis ontosemiótico. Primeras preguntas sobre los objetos matemáticos

Consigna

A partir de la resolución del problema, responde las siguientes preguntas:

1) ¿Qué es para ti un concepto matemático? Identifica los conceptos matemáticos que intervienen en la resolución de la tarea.

2) ¿Qué lenguajes se utiliza en la resolución de la tarea? (Lenguaje: natural, geométrico, simbólico, algebraico, etc) Menciona algunos ejemplos.

3) ¿Qué es para ti una proposición matemática? Identifica las proposiciones matemáticas en la resolución de la tarea.

4) ¿Qué es para ti un procedimiento matemático? Describe los procedimientos matemáticos utilizados en la resolución de la tarea.

5) ¿Qué argumentos/explicaciones validan las proposiciones y procedimientos utilizados? Menciona algunos ejemplos.

6) ¿Qué conceptualizaciones se pueden identificar en la resolución de la tarea?

7.5.3.1 Análisis a priori de la Tarea 2

Las preguntas de la Tarea 2 tienen la intención de discutir sobre las concepciones e interpretaciones que realizan los futuros profesores de matemática sobre los objetos matemáticos que caracterizan y describen los significados de un concepto.

Dos preguntas que orientan la tarea 2 son: ¿Qué es un objeto matemático? y ¿Qué tipos de objetos intervienen en la actividad matemática? Generando de esta manera un planteo del tipo ontológico donde se estudia la naturaleza y funciones de los objetos matemáticos (Godino, Batanero y Font, 2020)

Para iniciarlos en el análisis epistémico de la actividad matemática, en primer lugar, resulta necesario comprender los elementos o componentes que caracterizan al significado de un concepto mediante la herramienta teórica y metodológica de la configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos que permite realizar un análisis microscópico de la actividad (Godino, 2017).

En esta tarea, se debaten sobre los objetos matemáticos primarios, los cuales son: situaciones-problemas, lenguajes, concepto-definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos.

Teniendo en cuenta que esta situación problema se ha analizado y valorado su idoneidad didáctica en el Capítulo 6, y se ha realizado el análisis ontosemiótico en la sección 7.4.2 de este capítulo, aquí solo se expondrán las cuestiones más importantes en relación con la intención didáctica de las preguntas.

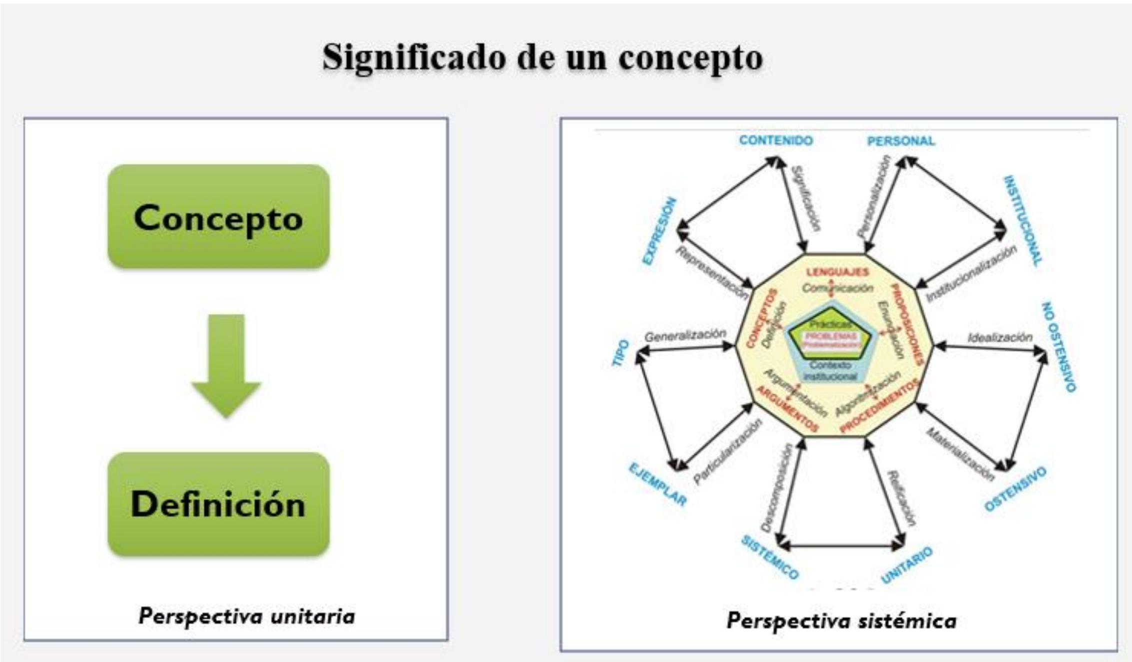
Pregunta 1. *¿Qué es para ti un concepto matemático? Identifica los conceptos matemáticos que intervienen en la resolución de la tarea.*

Con esta pregunta se espera generar la discusión sobre la concepción que tienen los futuros profesores de matemática sobre un concepto. Teniendo en cuenta las dualidades, una de ellas es el sistema dual unitario-sistémico, de esta manera un concepto puede estudiarse desde una perspectiva unitaria, donde se asocia a cada concepto con su definición. Pero, desde la perspectiva del EOS, un concepto también se los puede estudiar desde una perspectiva sistémica, donde un concepto se describe y caracteriza por un conjunto de elementos, denominados objetos matemáticos que se diferencian según su naturaleza y función (ver Figura 7.8).

Entonces un concepto no se reduce a una definición, sino que se caracteriza por un sistema de prácticas matemáticas, los objetos matemáticos (situación problema, lenguajes, concepto-definición, proposiciones, procedimientos y argumentos) y los procesos que intervienen y emergen de las prácticas (Burgos y Godino, 2020; Godino, 2017).

Figura 7.8

Significado de un concepto desde la perspectiva del EOS



Fuente: adaptado de Godino (2017)

Algunos conceptos que se esperan que surjan de la resolución de la tarea son:

Geométricos: círculo, radio, punto, centro, distancia, superficie, área, anillos o coronas circulares concéntricos, ancho de un anillo;

Magnitudes físicas: densidad, masa, masa total, densidad superficial, unidades de longitud (metros), unidad de masa (kg/m^2));

Aritméticos: valores, diferencia de valores, producto, cantidad, suma;

Algebraicos - funcionales: función, variación, relación de dependencia entre la densidad y el radio, constante;

Cálculo: infinito, infinitesimal, diferencial, diferencial radio, diferencial área, diferencial masa, integral definida, función integrando, extremos de integración, cambio total, acumulación.

Pregunta 2. *¿Qué lenguajes se utiliza en la resolución de la tarea? (Lenguaje: natural, geométrico, simbólico, algebraico, etc) Menciona algunos ejemplos.*

Desde la perspectiva del EOS, existen diferentes tipos de lenguajes que se emplean en la resolución de una actividad matemática, estos tipos de lenguaje dependen de su naturaleza y tienen la función de comunicar algo. Es por ello, que los lenguajes pueden ser: términos, expresiones, notaciones, gráficos en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, etc.).

En la resolución de la tarea se observa el uso de una diversidad de tipos de lenguajes, como se muestra a continuación:

Lenguaje natural: infinitos, muy pequeño, infinitesimal, porción infinitesimal, diferencia, diferencial, diferencial área, área infinitesimal

Lenguaje geométrico: como se ha mostrado en las Figura 6.2 y Figura 6.3 del Capítulo 6, sección 6.4.1.2 y en la resolución 5 de este capítulo.

Lenguaje algebraico – simbólico: r, dr, Ar+dr, dA=2πrdr, dM, σr, dMn, $M_{total} = \int_{r=0}^{r=3} dM$

Pregunta 3*. ¿Qué es para ti una proposición matemática? Identifica las proposiciones matemáticas en la resolución de la tarea*

Una proposición matemática, se considera desde el EOS que una proposición cumple la función de enunciación, es decir, es una afirmación que relaciona y/o establece relaciones entre los conceptos-definiciones para obtener nuevas proposiciones como propiedades, teoremas del concepto en estudio.

Algunas proposiciones (Pp) surgen de la resolución del problema de cálculo de la masa son:

Pp1: "la masa se distribuye de tal manera que la densidad en todo punto es $\sigma(r) = 10 - r^2\ (kg/m^2)$"

Pp2: "la densidad de masa dependiendo de radio"

Pp3: "r puede tomar cualquier valor entre 0 y 3"

Pp4: "se forman infinitos anillos concéntricos de radio muy pequeño"

Pp5: "dr representa una cantidad infinitesimal de radio"

Pp6: "dA representa un área infinitesimal de radio infinitesimal"

Pp7: "densidad constante en cada anillo infinitesimal",

Pp8: "dM representa una porción infinitesimal de masa"

Pp9: "$49{,}5\pi\ kg$ representa el cambio total acumulado de la masa"

Pregunta 4. *¿Qué es para ti un procedimiento matemático? Describe los procedimientos matemáticos utilizados en la resolución de la tarea*

Un procedimiento matemático, se asocia a algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo que cumplen la función la descripción para la obtención de los resultados.

En la resolución de la tarea, se describen los siguientes procedimientos (Pc):

Pc1: tomar distancias de r cada vez más pequeñas.

Pc12: dr=r2−r1, dr se calcula haciendo la diferencia entre dos valores muy próximos entre sí.

Pc3: dA=Ar+dr−A(r), dA se calcula haciendo la diferencia de áreas. dA=2πrdr

Pc4: dM=σrdA

Pc5: $Mtotal$=dM1+⋯dMn, con n tendiendo al infinito.

Pc1: $M_{total} = \int_{r=0}^{r=3} dM$

Pregunta 5. *¿Qué argumentos/explicaciones validan las proposiciones y procedimientos utilizados? Menciona algunos ejemplos.*

Los argumentos son enunciados que cumplen la función de justificar las proposiciones y procedimiento deductivos o de otro tipo que se emplean en la resolución de una actividad.

A continuación, presentamos algunos argumentos (A) de la resolución de la tarea

A1: definición del diferencial como una cantidad infinitesimal;

A2: Uso del término infinitesimal para referirse a una cantidad muy pequeña

A3: cálculo de área un círculo y corona circular.

A4: definición de masa

A5: proceso de acumulación, suma

A6: definición y propiedades de la integral definida.

A7: interpretación de la integral definida como cambio total

Pregunta 6. *¿Qué conceptualizaciones se pueden identificar en la resolución de la tarea?*

En el análisis de la actividad matemática, es posible describir y caracterizar los procesos matemáticos que emergen e intervienen en los sistemas de prácticas matemáticas, las cuales cumplen diversas funciones, algunos procesos tienen la intención de conceptualizar o establecer una definición sobre un objeto, otros procesos establecen las técnicas de cálculo o procedimientos, y otros plantan las representaciones del objeto matemático.

En la sección 7.4.2.7, del presente capítulo, se han mencionado algunos procesos que intervienen y emergen de la resolución de la Tarea 1.

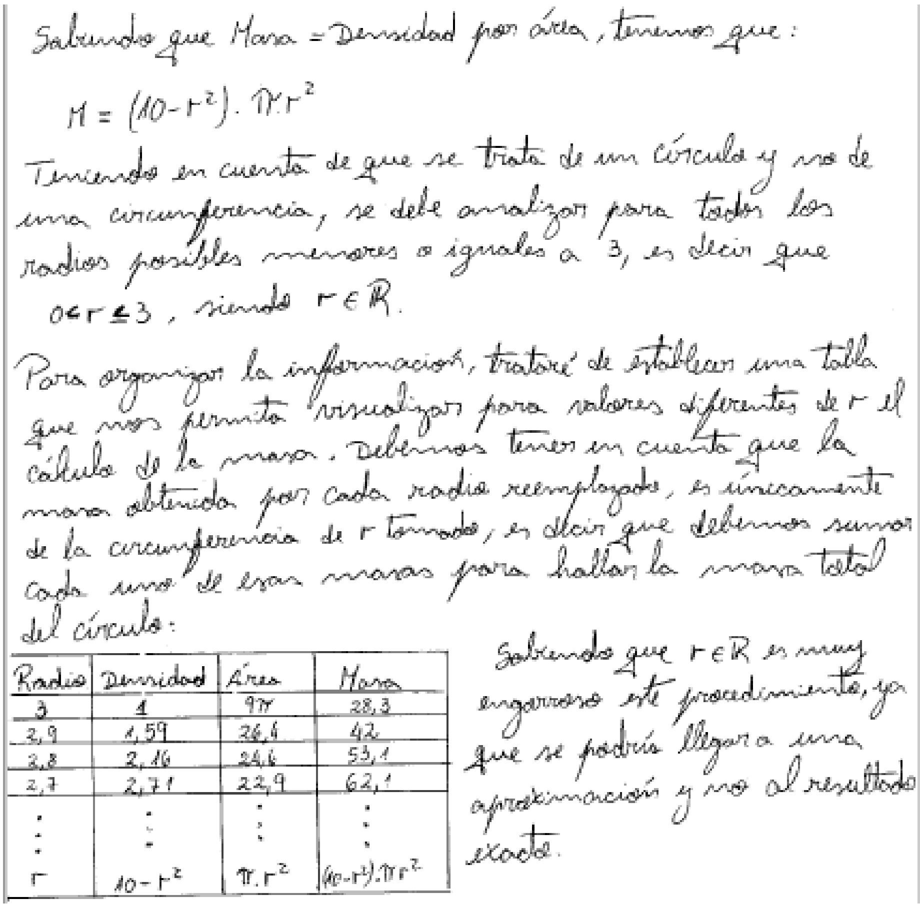
7.5.4 Tarea 3. Análisis de una resolución de un estudiante del problema cálculo de la masa

Consignas

Analiza la resolución del problema de cálculo de la masa y responde a las siguientes preguntas.

Figura 7.9

Resolución del problema de cálculo de la masa por un estudiante



Sabiendo que Masa = Densidad por área, tenemos que:

$M = (10-r^2) \cdot \pi \cdot r^2$

Teniendo en cuenta de que se trata de un círculo y no de una circunferencia, se debe analizar para todos los radios posibles menores o iguales a 3, es decir que $0 < r \leq 3$, siendo $r \in \mathbb{R}$.

Para organizar la información, trataré de establecer una tabla que nos permita visualizar para valores diferentes de r el cálculo de la masa. Debemos tener en cuenta que la masa obtenida por cada radio reemplazado, es únicamente de la circunferencia de r tomado, es decir que debemos sumar cada uno de esas masas para hallar la masa total del círculo:

Radio	Densidad	Área	Masa
3	1	9π	28,3
2,9	1,59	26,4	42
2,8	2,16	24,6	53,1
2,7	2,71	22,9	62,1
⋮	⋮	⋮	⋮
r	$10-r^2$	$\pi \cdot r^2$	$(10-r^2) \cdot \pi r^2$

Sabiendo que $r \in \mathbb{R}$ es muy engorroso este procedimiento, ya que se podría llegar a una aproximación y no al resultado exacto.

1) Describe el procedimiento seguido indicando la secuencia de prácticas elementales que se ha realizado para resolver la tarea; añade las explicaciones necesarias para justificar las respuestas.

2) Completa la tabla incluida a continuación en la que se identifican los conocimientos que se ponen en juego en el enunciado y en cada una de las prácticas elementales, (añade las filas necesarias):

Secuencia de prácticas matemáticas para resolver la tarea	**Uso e intencionalidad de las prácticas**	**Objetos referidos en las prácticas (lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos)**
P1	….	…
P2	….	…
P3	….	…

3) ¿Consideras que el procedimiento es correcto? Argumenta tu respuesta.

4) ¿Qué retroalimentación harías?

7.5.4.1 Análisis ontosemiótico a priori de la Tarea 3

Descomponemos la resolución en las siguientes prácticas matemáticas:

P1

Sabiendo que Masa = Densidad por área, tenemos que:

$M = (10-r^2).\pi r^2$

P2

Teniendo en cuenta de que se trata de un círculo y no de una circunferencia, se debe analizar para todos los radios posibles menores o iguales a 3, es decir que $0<r\leq 3$, siendo $r\in\mathbb{R}$.

P3

Para organizar la información, trataré de establecer una tabla que nos permita visualizar para valores diferentes de r el cálculo de la masa. Debemos tener en cuenta que la masa obtenida por cada radio reemplazado, es únicamente de la circunferencia de r tomado,.

P4

, es decir que debemos sumar cada una de esas masas para hallar la masa total del círculo:

P5

Radio	Densidad	Área	Masa
3	1	9π	28,3
2,9	1,59	26,4	42
2,8	2,16	24,6	53,1
2,7	2,71	22,9	62,1
⋮	⋮	⋮	⋮
r	$10-r^2$	$\pi.r^2$	$(10-r^2).\pi r^2$

P6	Sabiendo que $r \in \mathbb{R}$ es muy engorroso este procedimiento, ya que se podría llegar a una aproximación y no al resultado exacto.

A continuación, se presenta la configuración cognitiva de la resolución de la actividad en la Tabla 7.7.

Tabla 7.7

Análisis cognitivo de los objetos primarios de la resolución del estudiante de la Tarea 3

Secuencia de prácticas matemáticas para resolver la tarea	**Uso e intencionalidad de las prácticas**	**Objetos referidos en las prácticas (lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos)**
P1	Establecer la fórmula para calcular la masa conociendo la densidad y el radio	*Lenguajes:* natural, algebraico $[M = (10 - r^2)\pi r^2]$ y simbólico (M, r, π). *Conceptos:* masa, densidad, área, radio, fórmula Procedimientos: $M = (10 - r^2)\pi r^2$ Argumentos: definición de densidad superficial y masa de una superficie.
P2	Reconocer la existencia de infinitos puntos que puede tomar el radio entre 0 y 3 m	*Lenguajes:* natural, geométrico, algebraico $(0 < r \leq 3)$, simbólico $(r \in \mathbb{R})$ *Conceptos:* círculo, circunferencia, puntos, círculo como un lugar geométrico, recta como un lugar geométrico, densidad de los números reales, distancia, desigualdad, relaciones de orden, conjunto de los números reales, relación de pertenencia. Proposiciones: P1: existen infinitos valores de r; P2: $0 < r \leq 3$; P3: $r \in \mathbb{R}$ Argumentos: círculo y recta como lugares geométricos, densidad de los números reales
P3	Establecer una relación de correspondencia entre los	*Lenguajes:* natural, geométrico y funcional

	diferentes valores de radio y su respectiva masa. Interpretar que los valores de masa corresponden a los puntos de la circunferencia de radio que se está considerando	*Conceptos:* fórmula de la masa, diferentes valores, función, relación de correspondencia entre el radio y la masa Proposiciones: P4: “visualizar para valores diferentes de r el cálculo de la masa”, P5: “la masa obtenida por cada radio reemplazado es únicamente de la circunferencia de r tomado” Procedimientos: Para cada r hay un valor de masa. Argumentos: Función como una relación de correspondencia
P4	Establecer que la masa total se obtiene haciendo la suma de todas las masas de cada radio	Lenguajes: natural *Conceptos:* suma, sumatoria, masa total. *Proposiciones:* P6: “sumar cada esas masas para hallar la masa total” *Procedimientos:* sumatoria de todas las masas es igual a masa total. *Argumentos:* definición de sumatoria
P5	Visualizar por medio de una tabla que para cada radio hay un correspondiente valor de densidad, área y masa Generalizar las expresiones involucradas en el cálculo del radio, densidad, área y masa	*Lenguajes:* aritmético, algebraico $(10 - r^2)$, simbólico $(\cdots)$ y gráfico (tabla de valores) *Conceptos:* variación de las magnitudes, relación de correspondencia entre el radio y densidad, entre el radio y área, y entre densidad, área y masa. Procedimientos: $Densidad = 10 - r^2$, $área = \pi r^2$, $Masa = (10 - r^2)\pi r^2$ *Argumentos:* fórmula de cálculo de la masa y el área, definición de función como correspondencia.
P6	Establecer que existe infinitos valores que puede tomar r. Reconocer que al sumar las masas de todos los valores de r que se consideren se obtiene una aproximación y no el valor exacto de la masa total	*Lenguajes:* natural y simbólico $(\in, \mathbb{R})$ *Conceptos:* relación de pertenencia, aproximación, exactitud, densidad de los números reales. Proposiciones: P7: al sumar las masas se obtiene una aproximación de la masa total; P8: el procedimiento de P6 es engorroso”; P8: sumar las masas no es exacto Procedimientos: suma de masas para aproximar el valor de la masa total *Argumentos:* densidad de los números reales.

Pregunta 3. *¿Consideras que el procedimiento es correcto? Argumenta tu respuesta.*

El procedimiento que se presenta no es correcto porque se está superponiendo la misma superficie del círculo al momento de calcular el área para diferentes valores de radio, como se menciona en la resolución 3 de la Tarea 1.

A partir del análisis cognitivo realizado se advierte que existen conflictos semióticos, en este caso particular, conflictos cognitivos que están en relación con la consideración del área del círculo, ya que menciona el hecho de considerar circunferencias en lugar del círculo, pero utiliza el área del círculo para obtener la masa, en este sentido, se puede afirmar que el estudiante no logro superar este conflicto lo que no le permite avanzar en la resolución del problema. Para poder avanzar, resulta necesario que emerja de la situación la consideración de un radio infinitesimal, la diferencial radio, lo que permite avanzar de las circunferencias y círculos a coronas circulares.

Pregunta 4. *¿Qué retroalimentación darías al estudiante?*

La retroalimentación debería estar enfocada en orientar al estudiante a identificar el conflicto semiótico que no le permite avanzar en la resolución para lograr obtener la mata total, para ello, es posible emplear recursos retóricos y argumentativos que busquen poner en discusión las suposiciones detrás de la resolución, de esta manera se invita al estudiante a emplear nuestras estrategias de resolución que intenten resolver los problemas en relación con la superposición de áreas.

Una de las posibles intervenciones del profesor puede estar orientado a solicitar al estudiante que realice la representación gráfica de los círculos que se están considerando y que los compare, de tal manera que se propicie el uso del lenguaje geométrico para apoyar y reforzar las argumentaciones como se ha planteado en la Figura 7.3 (Verón, Giacomone y Pino-Fan, 2023).

7.5.5 Tarea 4. Análisis ontosemiótico de una actividad (desplazamiento de un auto)

Situación problema

Un auto pasa de 8.33 m/s a 33.33 m/s en 9 s con aceleración constante. Calcular el desplazamiento durante esos 9 s.

Consignas

1) *Resolver la siguiente situación problema.*

2) *Describe el procedimiento seguido indicando la secuencia de prácticas elementales que has realizado para resolver la tarea; añade las explicaciones necesarias para justificar las respuestas.*

3) *Completa la tabla incluida a continuación en la que se identifican los conocimientos que se ponen en juego en el enunciado y en cada una de las prácticas elementales, (añade las filas necesarias):*

Secuencia de prácticas matemáticas para resolver la tarea	Uso e intencionalidad de las prácticas	Objetos referidos en las prácticas (lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos)
P1	….	…
P2	….	…
P3	….	…

4) *¿Qué significado parcial del diferencial se puede relacionar con la tarea? Argumente su respuesta*

Posibles resoluciones

En esta sección se presentan las posibles resoluciones y sus potenciales conflictos epistémicos a las consignas 1 y 2 de la Tarea 4.

7.5.6 Resolución 1

Prácticas matemáticas

P1. Lectura e interpretación de la situación-problema. Se considera un auto que cambia de una velocidad inicial $v_i = 8{,}33\, m/s$ a una velocidad final $v_f = 33{,}33\, m/s$ en $9s$ con aceleración constante. Se pide determinar el desplazamiento del auto durante los $9s$.

P2. Se considera la fórmula para calcular la velocidad promedio o velocidad media, que se obtiene mediante el cociente entre el incremento del espacio o desplazamiento Δe y el incremento del tiempo Δt:

$$v = \frac{\Delta e}{\Delta t}$$

Se despeja Δe de la ecuación y se obtiene que $\Delta e = v \cdot \Delta t$

P3. Se obtiene el desplazamiento o el incremento del desplazamiento haciendo el producto de la velocidad promedio por el incremento del tiempo, para ello se reemplazan los valores considerando que la velocidad promedio coincide con la velocidad final $v = v_f = 33{,}33\, m/s$ y $\Delta t = 9s$ en la ecuación $\Delta e = v \cdot \Delta t$, obteniendo:

$$\Delta e = 33{,}33 \frac{m}{s} \cdot 9s = 299{,}97m$$

P4. $299{,}97m$ representa el desplazamiento del auto en los $9s$.

7.5.6.1 Potencial conflicto epistémico 1

La resolución es incorrecta porque se genera un conflicto en la consideración de la velocidad promedio. Al plantar que la velocidad media coincide con la velocidad final se está suponiendo implícitamente que la velocidad del auto es constante durante los 9s y que la aceleración es nula, dejando de lado la velocidad inicial y que la aceleración es constante.

7.5.7 Resolución 2

P1. Se repite.

P2. Se repite.

P3. Se obtiene el desplazamiento haciendo el producto de la velocidad promedio por el incremento del tiempo. Pero se considera el incremento de la velocidad haciendo la diferencia de las velocidades dadas como:

$$\Delta v = v_f - v_i = 33{,}33\, m/s - 8{,}33\, m/s = 25\, m/s$$

P4. Se reemplazan los valores en la ecuación $\Delta e = v \cdot \Delta t$ y resulta:

$$\Delta e = 25 \frac{m}{s} \cdot 9s = 225m$$

P4. $225m$ representa el desplazamiento del auto en los $9s$.

7.5.7.1 Potencial conflicto epistémico 2

La resolución es incorrecta porque se genera un conflicto en la consideración de la velocidad promedio, en este caso al plantear que la velocidad media es igual al incremento de la velocidad en los 9s, es decir que, con el producto se está considerando que la velocidad del auto aumenta $25\, m/s$ por cada segundo, lo cual no es posible ya que la velocidad final del auto es de $33{,}33\, m/s$.

7.5.8 Resolución 3

P1. Se repite.

P2. Se repite.

P3. Se obtiene el desplazamiento o el incremento del desplazamiento haciendo el producto de la velocidad promedio por el incremento del tiempo, para ello se reemplazan los valores considerando que la velocidad promedio coincide con la velocidad inicial $v = v_i = 8{,}33\, m/s$ y $\Delta t = 9s$ en la ecuación $\Delta e = v \cdot \Delta t$, obteniendo:

$$\Delta e = 8{,}33\frac{m}{s} \cdot 9s = 74{,}97m$$

P4. $74{,}97m$ representa el desplazamiento del auto en los $9s$.

7.5.8.1 Potencial conflicto epistémico 3

La resolución es incorrecta porque se genera un conflicto en la consideración de la velocidad promedio, en este caso al considerar que la velocidad media coincide con la velocidad inicial se está suponiendo que la velocidad del auto es constante durante los 9s y que la aceleración es nula, dejando de lado la velocidad final y que la aceleración es constante.

7.5.9 Resolución 4

P1. Se repite.

P2. Se repite.

P3. Se considera que la velocidad del auto cambia según su aceleración, por lo tanto, se procede a calcular la aceleración media o promedio reemplazando la velocidad inicial $v_i = 8{,}33\, m/s$, velocidad final $v_f = 33{,}33\, m/s$ y el tiempo de $9s$ en la ecuación

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i}$$

Obteniendo:

$$a = \frac{33{,}33\, m/s - 8{,}33\, m/s}{9s} = \frac{25\, m/s}{9s} \cong 2{,}78\, m/s^2$$

Donde $2{,}78\, m/s^2$ se interpreta que por cada segundo aumenta $2{,}78\, m/s$ la velocidad del auto.

P4. Como la velocidad cambia cada segundo por la aceleración, se arma la siguiente tabla (Tabla 7.8) para calcular el desplazamiento del auto en cada intervalo de $1s$ de tiempo mediante la ecuación $\Delta e = v \cdot \Delta t$.

Tabla 7.8

Cálculo de los desplazamientos en intervalos de tiempo de 1s

Tiempo (t) [s]	$\Delta t\ [s]$	$v\ [m/s]$	$\Delta e = v \cdot \Delta t\ [m]$
$[0, 1)$	$1s$	$8{,}33\, m/s$	$8{,}33\, m/s \cdot 1s = 8{,}33m$
$[1, 2)$	$1s$	$8{,}33\, m/s + 2{,}78\, m/s = 11{,}11\, m/s$	$11{,}11\, m/s \cdot 1s = 11{,}11m$
$[2, 3)$	$1s$	$11{,}11\, m/s + 2{,}78\, m/s = 13{,}89\, m/s$	$13{,}89\, m/s \cdot 1s = 13{,}89m$
$[3, 4)$	$1s$	$13{,}89\, m/s + 2{,}78\, m/s = 16{,}67\, m/s$	$16{,}67\, m/s \cdot 1s = 16{,}67m$
$[4, 5)$	$1s$	$16{,}67\, m/s + 2{,}78\, m/s = 19{,}45\, m/s$	$19{,}45\, m/s \cdot 1s = 19{,}45m$
$[5, 6)$	$1s$	$19{,}45\, m/s + 2{,}78\, m/s = 22{,}23\, m/s$	$22{,}23\, m/s \cdot 1s = 22{,}23m$
$[6, 7)$	$1s$	$22{,}23\, m/s + 2{,}78\, m/s = 25{,}01\, m/s$	$25{,}01\, m/s \cdot 1s = 25{,}01m$
$[7, 8)$	$1s$	$25{,}01\, m/s + 2{,}78\, m/s = 27{,}79\, m/s$	$27{,}79\, m/s \cdot 1s = 27{,}79m$
$[8, 9)$	$1s$	$27{,}79\, m/s + 2{,}78\, m/s = 30{,}57\, m/s$	$30{,}57\, m/s \cdot 1s = 30{,}57m$

Aclaración: en cada intervalo de tiempo se toma como velocidad promedio la velocidad inicial del intervalo. Pero es posible realizar el mismo procedimiento considerando la velocidad final.

P5. Se suman los valores de los desplazamientos Δe de cada intervalo de tiempo para obtener el valor aproximado del desplazamiento total del auto.

$$\begin{aligned}\Delta e_{total} &\approx \Delta e(0) + \Delta e(1) + \Delta e(2) + \Delta e(3) + \Delta e(4) + \Delta e(5) + \Delta e(6) + \Delta e(7) + \Delta e(8) \\ &= 8{,}33m + 11{,}11m + 13{,}89m + 16{,}67m + 19{,}45m + 22{,}23m + 25{,}01m \\ &+ 27{,}79m + 30{,}57m = 175{,}05m\end{aligned}$$

P6. $175{,}05m$ representa el desplazamiento total del auto en los $9s$.

7.5.9.1 Potencial conflicto epistémico 4

La resolución es incorrecta porque se genera un conflicto semiótico en la consideración de la velocidad promedio en cada intervalo de tiempo, ya que se está suponiendo que la velocidad es constante en cada intervalo de $1s$ de tiempo, es decir, el aumento de la velocidad, producto de la aceleración, se produce en el tiempo final del intervalo considerado. Además, se está suponiendo que la velocidad promedio en cada intervalo coincide con la velocidad inicial.

7.5.10 Resolución 5

P1. Se repite.

P2. Se repite.

P3. Se considera que la velocidad del auto cambia según su aceleración, por lo tanto, se procede a calcular la aceleración media o promedio reemplazando la velocidad inicial $v_i = 8{,}33\, m/s$, velocidad final $v_f = 33{,}33\, m/s$ y el tiempo de $9s$ en la ecuación

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i}$$

Obteniendo:

$$a = \frac{33{,}33\, m/s - 8{,}33\, m/s}{9s} = \frac{25\, m/s}{9s} \cong 2{,}78\, m/s^2$$

Donde $2{,}78\, m/s^2$ se interpreta que por cada segundo aumenta $2{,}78\, m/s$ la velocidad del auto.

P4. Considerando que la velocidad cambia en cada intervalo de tiempo, se divide por dos al valor de la aceleración para obtener $\frac{a}{2} = \frac{2{,}78 m/s^2}{2} = 1{,}39\, m/s^2$ cuyo resultado se interpreta que la velocidad aumenta $1{,}39\, m/s$ en cada medio segundo $(0{,}5s)$.

P5. Como la velocidad cambia en cada medio segundo por la aceleración, se arma la siguiente Tabla 7.9 para calcular el desplazamiento del auto en cada intervalo de $0{,}5s$ de tiempo mediante la ecuación $\Delta e = v \cdot \Delta t$.

Tabla 7.9

Cálculo de los desplazamientos con intervalos de intervalos de tiempo de 0,5s

Tiempo (t) $[s]$	Δt $[s]$	v $[m/s]$	$\Delta e = v \cdot \Delta t$ $[m]$
$(0;\ 0{,}5]$	$0{,}5s$	$8{,}33\, m/s + 1{,}39\, m/s = 9{,}72\, m/s$	$9{,}72\, m/s \cdot 0{,}5s = 4{,}86m$
$(0{,}5;\ 1]$	$0{,}5s$	$9{,}72\, m/s + 1{,}39\, m/s = 11{,}11\, m/s$	$11{,}11\, m/s \cdot 0{,}5s = 5{,}555m$
$(1;\ 1{,}5]$	$0{,}5s$	$11{,}11\, m/s + 1{,}39\, m/s = 12{,}5\, m/s$	$12{,}5\, m/s \cdot 0{,}5s = 6{,}25m$
$(1{,}5;\ 2]$	$0{,}5s$	$12{,}5\, m/s + 1{,}39\, m/s = 13{,}89\, m/s$	$13{,}89\, m/s \cdot 0{,}5s = 6{,}945m$
$(2;\ 2{,}5]$	$0{,}5s$	$13{,}89\, m/s + 1{,}39\, m/s = 15{,}28\, m/s$	$15{,}28\, m/s \cdot 0{,}5s = 7{,}64m$
$(2{,}5;\ 3]$	$0{,}5s$	$15{,}28\, m/s + 1{,}39\, m/s = 16{,}67\, m/s$	$16{,}67\, m/s \cdot 0{,}5s = 8{,}335m$
$(3;\ 3{,}5]$	$0{,}5s$	$16{,}67\, m/s + 1{,}39\, m/s = 18{,}06\, m/s$	$18{,}06\, m/s \cdot 0{,}5s = 9{,}03m$
$(3{,}5;\ 4]$	$0{,}5s$	$18{,}06\, m/s + 1{,}39\, m/s = 19{,}45\, m/s$	$19{,}45\, m/s \cdot 0{,}5s = 9{,}725m$
$(4;\ 4{,}5]$	$0{,}5s$	$19{,}45\, m/s + 1{,}39\, m/s = 20{,}84\, m/s$	$20{,}84\, m/s \cdot 0{,}5s = 10{,}42m$
$(4{,}5;\ 5]$	$0{,}5s$	$20{,}84\, m/s + 1{,}39\, m/s = 22{,}23\, m/s$	$22{,}23\, m/s \cdot 0{,}5s = 11{,}115m$
$(5;\ 5{,}5]$	$0{,}5s$	$22{,}23\, m/s + 1{,}39\, m/s = 23{,}62\, m/s$	$23{,}62\, m/s \cdot 0{,}5s = 11{,}81m$
$(5{,}5;\ 6]$	$0{,}5s$	$23{,}62\, m/s + 1{,}39\, m/s = 25{,}01\, m/s$	$25{,}01\, m/s \cdot 0{,}5s = 12{,}505m$
$(6;\ 6{,}5]$	$0{,}5s$	$25{,}01\, m/s + 1{,}39\, m/s = 26{,}4\, m/s$	$26{,}4\, m/s \cdot 0{,}5s = 13{,}2m$

(6,5; 7]	$0,5s$	$26,4\,m/s + 1,39\,m/s = 27,79\,m/s$	$27,79\,m/s \cdot 0,5s = 13,895m$
(7; 3,5]	$0,5s$	$27,79\,m/s + 1,39\,m/s = 29,18\,m/s$	$29,18\,m/s \cdot 0,5s = 14,59m$
(7,5; 8]	$0,5s$	$29,18\,m/s + 1,39\,m/s = 30,57\,m/s$	$30,57\,m/s \cdot 0,5s = 15,285m$
(8; 3,5]	$0,5s$	$30,57\,m/s + 1,39\,m/s = 31,96\,m/s$	$31,96\,m/s \cdot 0,5s = 15,98m$
(8,5; 9]	$0,5s$	$31,96\,m/s + 1,39\,m/s = 33,35\,m/s$	$33,35\,m/s \cdot 0,5s = 16,675m$

Aclaración: en cada intervalo de tiempo se toma como velocidad promedio la velocidad final del intervalo. Pero es posible realizar el mismo procedimiento considerando la velocidad inicial.

P5. Se suman los valores de los desplazamientos Δe de cada intervalo de tiempo para obtener el valor aproximado del desplazamiento total del auto.

$$\Delta e_{total} \approx \Delta e(0,5) + \Delta e(1) + \cdots + \Delta e(9) = 193,815m$$

P6. $193,815m$ representa el desplazamiento total del auto en los $9s$.

7.5.10.1 Potencial conflicto epistémico 5

La resolución es incorrecta porque se genera un conflicto semiótico en la consideración de la velocidad promedio en cada intervalo de tiempo, ya que se está suponiendo que la velocidad es constante en cada intervalo de $0,5s$ de tiempo, es decir, el aumento de la velocidad, producto de la aceleración, se produce en el tiempo final del intervalo considerado. Además, se está suponiendo que la velocidad promedio en cada intervalo coincide con la velocidad final.

Resulta importante destacar que, si se considera la velocidad final como velocidad promedio, como en la resolución 5, se obtiene un resultado por exceso; en cambio, si se considera la velocidad promedio como la inicial, se obtiene un resultado por defecto, es decir inferior al exacto. Estas consideraciones están en estrecha relación con el significado de acumulación de la integral (Burgos, Bueno et al., 2021; Bueno et al., 2022; Jones y Ely, 2023).

Otro potencial conflicto que puede surgir en la resolución tiene que ver con la interpretación de la práctica matemática 4 (P4) porque al dividir por dos el valor de la aceleración se obtiene que la aceleración es $\frac{a}{2} = \frac{2,78m/s^2}{2} = 1,39\,m/s^2$ donde se interpreta que, por cada medio segundo, la velocidad del auto aumenta en $1,39\,m/s$. Esta interpretación puede resultar conflictiva en la lectura de las unidades de medida de la aceleración m/s^2 ya que se puede considerar que velocidad del auto aumenta en $1,39\,m/s$ en cada segundo, lo que sería incorrecto en el contexto de la situación-problema.

7.5.11 Resolución 6

P1. Se repite.

P2. Se repite.

P3. Se considera que la velocidad del auto cambia según su aceleración, por lo tanto, se procede a calcular la aceleración media o promedio reemplazando la velocidad inicial $v_i = 8{,}33\, m/s$, velocidad final $v_f = 33{,}33\, m/s$ y el tiempo de $9s$ en la ecuación

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i}$$

Obteniendo:

$$a = \frac{33{,}33\, m/s - 8{,}33\, m/s}{9s} = \frac{25\, m/s}{9s} \cong 2{,}78\, m/s^2$$

Donde $2{,}78\, m/s^2$ se interpreta que por cada segundo aumenta $2{,}78\, m/s$ la velocidad del auto.

P4. Se considera la fórmula para calcular la aceleración promedio o aceleración media, que se obtiene mediante el cociente entre el incremento de la velocidad Δv y el incremento del tiempo Δt:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{\Delta t}$$

Se despeja v_f de la ecuación y se obtiene:

$$v_f - v_i = a\Delta t$$

$$v_f = v_i + a\Delta t$$

Donde se reemplaza la aceleración de $a = 2{,}78\, m/s^2$

La ecuación $v_f = v_i + 2{,}78\, m/s^2 \cdot \Delta t$ permite calcular la velocidad final en cada intervalo de tiempo que se considera teniendo en cuenta que la aceleración del auto es constante.

P5. A partir de la ecuación $v_f = v_i + a\Delta t$, se obtiene el valor de la velocidad que se reemplaza en la ecuación $\Delta e = v_f \cdot \Delta t$ para calcular el desplazamiento del auto en cada intervalo de tiempo que se considere. Los cálculos se muestran en la Tabla 7.10 considerando intervalos de tiempo de $\Delta t = 0{,}5s$

Tabla 7.10

Cálculo de las velocidades y los desplazamientos con intervalos de intervalos de tiempo de 0,5s

Tiempo $(\boldsymbol{t})$ $[\boldsymbol{s}]$	$\Delta \boldsymbol{t}$ $[\boldsymbol{s}]$	$\boldsymbol{v_f = v_i + 2,78\, m/s^2 \cdot \Delta t}$ $[\boldsymbol{m/s}]$	$\Delta \boldsymbol{e} = \boldsymbol{v} \cdot \Delta \boldsymbol{t}$ $[\boldsymbol{m}]$
$(0;\ 0,5]$	$0,5s$	$8,33\, m/s + 2,78\, m/s^2 \cdot 0,5s = 9,72\, m/s$	$9,72\, m/s \cdot 0,5s = 4,86m$
$(0,5;\ 1]$	$0,5s$	$9,72\, m/s + 2,78\, m/s^2 \cdot 0,5s = 11,11\, m/s$	$11,11\, m/s \cdot 0,5s = 5,555m$
$(1;\ 1,5]$	$0,5s$	$11,11\, m/s + 2,78\, m/s^2 \cdot 0,5s = 12,5\, m/s$	$12,5\, m/s \cdot 0,5s = 6,25m$
$(1,5;\ 2]$	$0,5s$	$12,5\, m/s + 2,78\, m/s^2 \cdot 0,5s = 13,89\, m/s$	$13,89\, m/s \cdot 0,5s = 6,945m$
$(2;\ 2,5]$	$0,5s$	$13,89\, m/s + 2,78\, m/s^2 \cdot 0,5s = 15,28\, m/s$	$15,28\, m/s \cdot 0,5s = 7,64m$
$(2,5;\ 3]$	$0,5s$	$15,28\, m/s + 2,78\, m/s^2 \cdot 0,5s = 16,67\, m/s$	$16,67\, m/s \cdot 0,5s = 8,335m$
$(3;\ 3,5]$	$0,5s$	$16,67\, m/s + 2,78\, m/s^2 \cdot 0,5s = 18,06\, m/s$	$18,06\, m/s \cdot 0,5s = 9,03m$
$(3,5;\ 4]$	$0,5s$	$18,06\, m/s + 2,78\, m/s^2 \cdot 0,5s = 19,45\, m/s$	$19,45\, m/s \cdot 0,5s = 9,725m$
$(4;\ 4,5]$	$0,5s$	$19,45\, m/s + 2,78\, m/s^2 \cdot 0,5s = 20,84\, m/s$	$20,84\, m/s \cdot 0,5s = 10,42m$
$(4,5;\ 5]$	$0,5s$	$20,84\, m/s + 2,78\, m/s^2 \cdot 0,5s = 22,23\, m/s$	$22,23\, m/s \cdot 0,5s = 11,115m$
$(5;\ 5,5]$	$0,5s$	$22,23\, m/s + 2,78\, m/s^2 \cdot 0,5s = 23,62\, m/s$	$23,62\, m/s \cdot 0,5s = 11,81m$
$(5,5;\ 6]$	$0,5s$	$23,62\, m/s + 2,78\, m/s^2 \cdot 0,5s = 25,01\, m/s$	$25,01\, m/s \cdot 0,5s = 12,505m$
$(6;\ 6,5]$	$0,5s$	$25,01\, m/s + 2,78\, m/s^2 \cdot 0,5s = 26,4\, m/s$	$26,4\, m/s \cdot 0,5s = 13,2m$
$(6,5;\ 7]$	$0,5s$	$26,4\, m/s + 2,78\, m/s^2 \cdot 0,5s = 27,79\, m/s$	$27,79\, m/s \cdot 0,5s = 13,895m$
$(7;\ 3,5]$	$0,5s$	$27,79\, m/s + 2,78\, m/s^2 \cdot 0,5s = 29,18\, m/s$	$29,18\, m/s \cdot 0,5s = 14,59m$
$(7,5;\ 8]$	$0,5s$	$29,18\, m/s + 2,78\, m/s^2 \cdot 0,5s = 30,57\, m/s$	$30,57\, m/s \cdot 0,5s = 15,285m$
$(8;\ 3,5]$	$0,5s$	$30,57\, m/s + 2,78\, m/s^2 \cdot 0,5s = 31,96\, m/s$	$31,96\, m/s \cdot 0,5s = 15,98m$
$(8,5;\ 9]$	$0,5s$	$31,96\, m/s + 2,78\, m/s^2 \cdot 0,5s = 33,35\, m/s$	$33,35\, m/s \cdot 0,5s = 16,675m$

Aclaración: en cada intervalo de tiempo se toma como velocidad promedio la velocidad final del intervalo.

P5. Se suman los valores de los desplazamientos Δe de cada intervalo de tiempo para obtener el valor aproximado del desplazamiento total del auto.

$$\Delta e_{total} \approx \Delta e(0,5) + \Delta e(1) + \cdots + \Delta e(9) = 193,815m$$

P6. $193,815m$ representa el desplazamiento total del auto en los $9s$.

7.5.12 Resolución 7

P1. Se repite.

P2. Se considera la fórmula para calcular la velocidad promedio o velocidad media, que se obtiene mediante el cociente entre el incremento del espacio o desplazamiento Δe y el incremento del tiempo Δt:

$$v = \frac{\Delta e}{\Delta t}$$

Se despeja Δe de la ecuación y se obtiene que $\Delta e = v \cdot \Delta t$

P3. Se considera que la velocidad del auto cambia según su aceleración, por lo tanto, se procede a calcular la aceleración media o promedio reemplazando la velocidad inicial $v_i = 8,33\, m/s$, velocidad final $v_f = 33,33\, m/s$ y el tiempo de $9s$ en la ecuación

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i}$$

Obteniendo:

$$a = \frac{33,33\, m/s - 8,33\, m/s}{9s} = \frac{25\, m/s}{9s} \cong 2,78\, m/s^2$$

Donde $2,78\, m/s^2$ se interpreta que por cada segundo aumenta $2,78\, m/s$ la velocidad del auto.

P4. Se considera la fórmula para calcular la aceleración promedio o aceleración media, que se obtiene mediante el cociente entre el incremento de la velocidad Δv y el incremento del tiempo Δt:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{\Delta t}$$

Se despeja v_f de la ecuación y se obtiene:

$$v_f - v_i = a\Delta t$$

$$v_f = v_i + a\Delta t$$

Donde se reemplaza la aceleración de $a = 2{,}78\, m/s^2$

La ecuación $v_f = 8{,}33\, m/s + 2{,}78\, m/s^2 \cdot \Delta t$ permite calcular la velocidad final en cada intervalo de tiempo que se considera teniendo en cuenta que la aceleración del auto es constante.

P5. Se consideran intervalos de tiempo cada vez más pequeños $\Delta t \to 0$, con lo cual la cantidad de subintervalos de tiempo tiende al infinito, y para calcular el desplazamiento total surge la necesidad de sumar los infinitos desplazamientos de cada intervalo de tiempo, el cual se puede expresar mediante sumatoria de la siguiente manera:

$$e_{total} \cong \sum_{n=1}^{n=\infty} \Delta e_n = \sum_{t=0}^{t=9} v\Delta t$$

P6. Al considerar intervalos de tiempo cada vez más pequeños, se define un diferencial tiempo dt como una cantidad infinitesimal de tiempo para calcular el correspondiente desplazamiento del auto para el tiempo infinitesimal considerado.

P7. Al considerar un dt se produce que la cantidad de subintervalos de tiempo tiende al infinito y, por lo tanto, en cada subintervalo se determina un desplazamiento infinitesimal de (diferencial desplazamiento), el cual se calcula mediante la ecuación que expresa que cada desplazamiento infinitesimal estará dado por el producto entre la velocidad y la cantidad infinitesimal de tiempo:

$$de = vdt$$

P8. Al definir un dt (diferencial tiempo), se supone que en la velocidad del auto es constante en un tiempo infinitesimal, con lo cual la velocidad del auto en cada intervalo infinitesimal de tiempo estará dada por: $v_f = v_i + a\mathrm{t}$

P9. Se reemplaza la ecuación de la velocidad $v_f = v_i + a\mathrm{t}$ en la ecuación $de = vdt$ para obtener la expresión $de = (8{,}33\, m/s + 2{,}78\, m/s^2 \cdot t)dt$

P10. Sabiendo que la diferencial distancia de nos permite calcular una porción infinitesimal de distancia del auto, surge la necesidad de sumar todas las porciones infinitesimales de distancia, para obtener la distancia total, es decir:

$e_{total} = de_1 + de_2 + de_3 + \cdots de_n$, con n tendiendo al infinito.

P11. Para sumar todas las porciones infinitesimales de distancia de_n, se plantea la integral definida desde $t = 0s$ hasta $t = 9s$ cuya función integrando es de. Es decir:

$$e_{total} = \int_{t=0}^{t=9} de = \int_{t=0}^{t=9} (8{,}33\, m/s + 2{,}78\, m/s^2 \cdot t)dt =$$

$$= \int_{t=0}^{t=9} 8{,}33\, m/s \cdot dt + \int_{t=0}^{t=9} 2{,}78\, m/s^2 \cdot t \cdot dt =$$

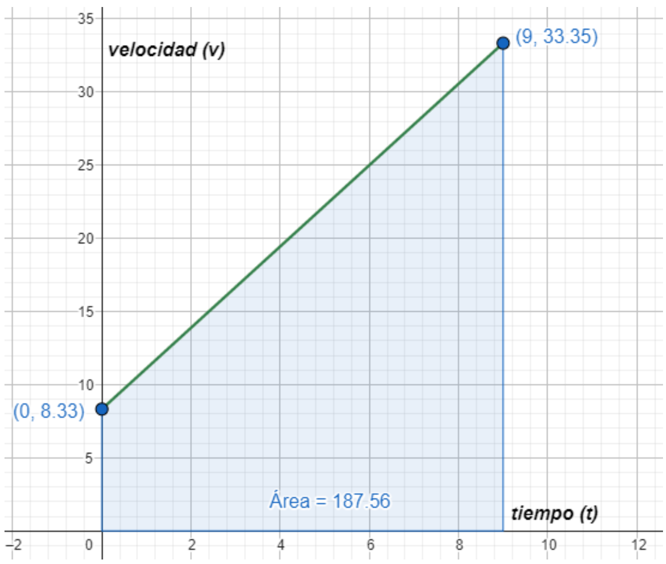
$$\left[8{,}33\, m/s \cdot t + \frac{2{,}78}{2} m/s^2 \cdot t^2\right]_{t=0}^{t=9} = 187{,}56m$$

P12. El valor $187{,}56m$ representa el cambio total acumulado de la distancia del auto en un intervalo de tiempo de $9s$.

Posible interpretación geométrica de la ecuación $de = (8{,}33\, m/s + 2{,}78\, m/s^2 \cdot t)dt$(ver Figura 7.10)

Figura 7.10

Interpretación geométrica de (de)



7.5.13 Análisis ontosemiótico a priori de la Tarea 4

A continuación, se presenta en el análisis ontosemiótico de la Tarea 4 en la Tabla 7.11 y posibles respuestas la pregunta 4 de la consigna.

Tabla 7.11

Análisis ontosemiótico de los objetos primarios de la resolución 5 de la Tarea 4

Secuencia de prácticas matemáticas para resolver la tarea	Uso e intencionalidad de las prácticas	Objetos referidos en las prácticas (lenguaje, conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos)
P1	Interpretación y reconocimiento de los datos de la situación problema	***Lenguajes:*** natural, simbólico $(m/s\,;\ v_f)$ y numérico. ***Conceptos:*** números decimales y enteros, velocidad, tiempo, aceleración unidad de medida de la velocidad y del tiempo $(m/s; s)$, cambio o incremento de la velocidad y del tiempo, desplazamiento. ***Proposiciones:*** P1: “la velocidad del auto pasa de $v_i = 8{,}33\,m/s$ a $v_f = 33{,}33\,m/s$ en $9s$”; P2: “la aceleración del auto es constante”
P2	Establecer una expresión para calcular Δe la distancia o desplazamiento del auto en función de la velocidad y el tiempo	***Lenguajes:*** natural, simbólico $(\Delta e, \Delta t)$, algebraico $(\Delta e = v \cdot \Delta t)$ ***Conceptos:*** (…), ecuación, incremento, velocidad promedio, cociente o razón, función como correspondencia **Proposiciones:** P3: $\Delta e = v \cdot \Delta t$ ***Argumentos:*** fórmula para calcular la velocidad promedio $v = \frac{\Delta e}{\Delta t}$
P3	Calcular el valor de la aceleración constante del auto.	***Lenguajes:*** natural, simbólico $(a, m/s^2)$, numérico. ***Conceptos:*** (…), aceleración media o promedio, aceleración constante, variación de la velocidad, incremento de la velocidad. ***Proposiciones:*** P4: “la velocidad del auto cambia según su aceleración”; P4: “$2{,}78\,m/s^2$ se interpreta que por cada segundo aumenta $2{,}78\,m/s$ la velocidad del auto” ***Argumentos:*** Definición de aceleración como variación o razón de cambio de la velocidad en un intervalo de tiempo; fórmula para calcular la aceleración promedio $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i}$
P4	Establecer una expresión para calcular la velocidad final teniendo en cuenta la	***Lenguajes:*** natural, simbólico, algebraico.

	aceleración constante y la velocidad inicial	***Conceptos:*** relación entre la aceleración y la velocidad, función como correspondencia. **Proposiciones:** P5: "$v_f = 8{,}33\, m/s + 2{,}78\, m/s^2 \cdot \Delta t$" ***Procedimientos:*** La ecuación $v_f = 8{,}33\, m/s + 2{,}78\, m/s^2 \cdot \Delta t$ permite calcular la velocidad final en cada intervalo de tiempo que se considera teniendo en cuenta que la aceleración del auto es constante. ***Argumentos:*** Definición de aceleración como variación o razón de cambio de la velocidad en un intervalo de tiempo.
P5	Plantear que al considerar intervalos de tiempo cada vez más pequeños se obtiene una mejor aproximación del desplazamiento total del auto. Establecer que la distancia total se obtiene a partir de sumar los infinitos desplazamiento en cada intervalo de tiempo	**Lenguajes:** (…), simbólico ($\sum_{t=0}^{t=9} v\Delta t\, ;\ \Delta t \to 0$) ***Conceptos:*** (…), intervalos, subintervalos, aproximación, tendencia, infinito, suma, sumatoria función de acumulación (Burgos, Bueno et al., 2022) ***Proposiciones:*** P6: "Cuando $\Delta t \to 0$, la cantidad de subintervalos tiende al infinito"; P7: "en cada subintervalo de tiempo el auto recorre una distancia"; P8: "la distancia total será aproximadamente igual a la suma de las infinitas distancias de los infinitos subintervalos de tiempo" ***Procedimientos:*** Para calcula la distancia total hay que sumar las infinitas distancias ***Argumentos:*** Definición de partición de un intervalo. Definición de sumatoria como una suma de infinitos términos de una serie. Función de acumulación para obtener el cambio total de la distancia
P6	Definir el diferencial tiempo dt como una cantidad infinitesimal de tiempo. Establecer que para cada dt le corresponde una distancia recorrida por el auto.	***Lenguajes:*** natural (cada vez más pequeño, infinitesimal, diferencial) simbólico (dt). ***Conceptos:*** Cantidad infinitesimal, tiempo infinitesimal diferencial tiempo, función como relación de correspondencia (Pino-Fan y Parra-Urrea, 2019) ***Proposiciones:*** P8: "dt es el diferencial tiempo", P9: "dt representa una cantidad infinitesimal de tiempo"

		Argumentos: Significado de la función como relación de correspondencia.
P7	Definir el diferencial desplazamiento de como una cantidad infinitesimal de distancia. Establecer que para cada dt le corresponde un de y que se calcula mediante la ecuación $de = vdt$	***Lenguajes:*** natural (diferencial, desplazamiento infinitesimal), simbólico (de), algebraico $(de = vdt)$ ***Conceptos:*** (…), desplazamiento infinitesimal, diferencial desplazamiento, función como relación de correspondencia entre dt y de ***Proposiciones:*** P10: “de es el diferencial desplazamiento”, P12: “de representa una cantidad infinitesimal de desplazamiento”, P13: “para cada dt le corresponde un de” Procedimientos: $de = vdt$ ***Argumentos:*** Ecuación lineal. Significado de la función como relación de correspondencia
P8	Suponer que la velocidad del auto es constante en un cada dt y que se calcula mediante la ecuación $v_f = v_i + a\mathrm{t}$	***Lenguajes:*** (…), simbólico-algebraico $\left(v_f = v_i + a\mathrm{t}\right)$ ***Conceptos:*** (…), constante, aceleración, ***Proposiciones:*** P14: “en cada dt la velocidad del auto es constante” **Procedimientos:** $v_f = v_i + a\mathrm{t}$ ***Argumentos:*** Ecuación de la velocidad final en función del tiempo con aceleración constante $v_f = v_i + a\mathrm{t}$
P9	Obtener una ecuación para de en función del tiempo y del dt	Lenguajes: (…) Conceptos: (…) ***Proposiciones:*** P15: “la ecuación de de permite calcular la distancia infinitesimal del auto en cualquier tiempo considerando un dt” **Procedimientos:** $de = (8{,}33\, m/s + 2{,}78\, m/s^2 \cdot t)dt$
P10	Establecer que la distancia total se obtiene a partir de la suma de las infinitas porciones infinitesimales de distancia	***Lenguajes:*** (…), simbólico (de_n) ***Conceptos:*** (…), suma, distancia total. ***Proposiciones:*** P16: “la distancia total será igual a la suma de las infinitas de” ***Procedimientos:*** $e_{total} = de_1 + de_2 + de_3 + \cdots de_n$, con n tendiendo al infinito. ***Argumentos:*** Suma como un proceso de acumulación (idea de la integral Bueno, Burgos…)
P11	Establecer que la suma de los infinitos de se obtendrá	***Lenguajes:*** natural, algebraico y simbólico $e_{total} = \int_{t=0}^{t=9} de$

	haciendo la integral definida de la de	***Conceptos:*** (…), integral definida como función de cambio total, función integrando, extremos de integración. **Procedimientos:** $e_{total} = \int_{t=0}^{t=9} de$ ***Argumentos:*** Significado de la integral definida como función de acumulación o cambio total (Burgos, Bueno et al., 2021), propiedades de la integral definida, Regla de Barrow.
P12	Interpretación del resultado de la integral $\int_{t=0}^{t=9} de$	Lenguajes: (…). ***Conceptos:*** (…), cambio total, acumulación ***Proposiciones:*** P17: "$187{,}56m$ representa el cambio total acumulado de la distancia" ***Argumentos:*** interpretación de la integral definida como cambio total

Pregunta 4: *¿Qué significado parcial del diferencial se puede relacionar con la tarea? Argumente su respuesta*

Teniendo en cuenta las prácticas, objetos y procesos implicados en el análisis ontosemiótico que se ha realizado, es posible afirmar que en el sistema de prácticas matemáticas interviene y emerge objetos asociados al significado parcial de la Diferencial de Leibniz (Verón y Giacomone, 2021). Esto se debe, principalmente al proceso de conceptualización de la diferencial como un cambio infinitesimal o infinitamente pequeño, que en el caso particular de la situación problema, se establece la diferencial desplazamiento de y la diferencial tiempo dt. Además, se observa en el análisis que intervienen proposiciones y procedimientos que se han vinculado al significado parcial de la diferencial en el marco del análisis de Leibniz, como se ha estudiado en el Capítulo 4, sección 4.4.1.

7.5.14 Tarea 5. Análisis de una lección de un libro de texto sobre la diferencial

Consigna

A partir de la siguiente lección de un libro de texto responde las preguntas:

Figura 7.11

Fragmento de una lección del libro de Cálculo de Stewart (2012)

Diferenciales

Las ideas detrás de las aproximaciones lineales se formulan en ocasiones en la terminología y la notación de *diferenciales*. Si $y = f(x)$, donde f es una función derivable, entonces la **diferencial** dx es una variable independiente; esto es, dx es cualquier número real. La **diferencial** dy es entonces definida en términos de dx mediante la ecuación

$$\boxed{3} \qquad dy = f'(x)dx$$

Así que dy es una variable dependiente: depende de los valores de x y dx. Si a dx se le da un valor específico, y x se considera como algún número específico en el dominio de f, entonces se determina el valor numérico de dy.

Si $dx \neq 0$, podemos dividir ambos lados de la ecuación 3 entre dx para obtener

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Antes hemos visto ecuaciones similares, pero ahora el lado izquierdo puede interpretarse en forma genuina como una razón de diferenciales.

Fuente: Stewart (2012, p. 253)

1) ¿Cuál la intención didáctica de la lección del libro de texto?

2) ¿Qué prácticas matemáticas se pueden identificar en la lección del libro de texto?

3) ¿Qué objetos matemáticos intervienen y emergen en las prácticas matemáticas de la lección del libro de texto?

4) ¿Qué procesos intervienen en la lección del libro de texto?

5) ¿Qué significado parcial del diferencial se pretende trabajar en la lección del libro de texto? Argumente su respuesta

6) Destaca entre las prácticas, objetos y procesos identificados cuáles consideras potencialmente conflictivos para los estudiantes.

7) Para hacer un análisis de una lección de un libro de texto, que otros aspectos consideras que se debería tener en cuenta

7.5.14.1 Análisis ontosemiótico a priori de la Tarea 5

Pregunta 1: *¿Cuál la intención didáctica de la lección del libro de texto?*

La principal intención didáctica del autor del libro de texto es presentar y explicar qué es la diferencial de una función. Asimismo, es posible observar que se plantea la discusión con relación al conflicto epistémico y cognitivo de la expresión simbólica de la derivada como una razón de diferenciales, aspecto muy importante para el estudio de la diferencial (Ely, 2021). En este sentido, es posible afirmar que, en cierto grado, la intención de la lección es establecer relaciones entre la derivada y la diferencial, así como también con la función, ya que define a los diferenciales dx y dy como variables independiente y dependiente, respectivamente, conectadas mediante una relación funcional expresada por la ecuación $dy = f'(x)dx$

Pregunta 2: *¿Qué prácticas matemáticas se pueden identificar en la lección del libro de texto?*

Prácticas

— P1: La diferencial dx es una variable independiente.

— P2: dx es cualquier número real

— P3: La diferencial dy se define en términos de dx mediante la ecuación $dy = f'(x)dx$

— P4: la diferencial dy es una variable dependiente, depende de los valores de x y dx.

— P5: Si $dx \neq 0$ se puede dividir a ambos miembros de la ecuación $dy = f'(x)dx$ para obtener $\frac{dy}{dx} = f'(x)$

— P6: El símbolo $\frac{dy}{dx}$ se puede interpretar como una razón de diferenciales.

Pregunta 3: *¿Qué objetos matemáticos intervienen y emergen en las prácticas matemáticas de la lección del libro de texto?*

Objetos matemáticos

Lenguajes: se destaca el lenguaje simbólico, algebraico, funcional y uso del término "diferencial"

Conceptos-definiciones: Derivada, aproximación lineal, diferencial, número real, variable independiente y dependiente, ecuación, función de dos variables, razón de diferenciales

Proposiciones: P1, P2, P4 y P6

Procedimientos: La ecuación $dy = f'(x)dx$ relaciona el dy con x y dx. Para obtener dy/dx hay que dividir a ambos miembros de la ecuación anterior por $dx \neq 0$.

Argumentos: Definición de función, variables independiente y dependiente. Ecuación y la propiedad uniforme de la multiplicación.

Relaciones

En la configuración didáctica se observa que se establecen dos relaciones con la derivada mediante ecuaciones, $dy = f'(x)dx$ y $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, donde la primera corresponde a la definición que se presenta para dy, y la segunda corresponde a la representación de la derivada como un cociente de diferenciales.

También se plantea que los diferenciales dx y dy son variables, independiente y dependiente respectivamente, estableciendo a su vez que dy es una variable que depende de los valores que tome x y dx, con lo cual se está haciendo referencia a dy como una función de dos variables.

Pregunta 4: *¿Qué procesos intervienen en la lección del libro de texto?*

Procesos matemáticos

Definición/Conceptualización: La lección del libro de texto tiene por objetivo conceptualizar varias cuestiones, primero que los diferenciales son variables, el dx es una variable independiente que puede tomar cualquier número real, de esta manera se determina el dominio. El dy es una variable dependiente que depende de los valores de x y dx, de esta manera se define como una función de dos variables independientes.

El diferencial dx y dy se relacionan por la ecuación $dy = f'(x)dx$

Representación/interpretación: Se reconoce al diferencial como un concepto matemático con notación dx o dy. La representación de la derivada como $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ ahora es reconocida como un cociente de diferenciales.

Pregunta 5: *¿Qué significado parcial del diferencial se pretende trabajar en la lección del libro de texto? Argumente su respuesta*

Teniendo en cuenta las prácticas, objetos y procesos matemáticos de la lección del libro de texto que se ha identificado en las preguntas anteriores, es posible afirmar que en el sistema de prácticas matemáticas interviene y emerge objetos asociados al significado parcial de la Diferencial de Cauchy (Verón y Giacomone, 2021). Esto se debe, principalmente al proceso de conceptualización de la diferencial como variables y que se relacionan mediante la ecuación $dy = f'(x)dx$. Además, se observa en el análisis que intervienen proposiciones y procedimientos que se han vinculado al significado parcial de la diferencial en el marco del análisis de Cauchy, como se ha estudiado en el Capítulo 4, sección 4.4.2.

Pregunta 6: *Destaca entre las prácticas, objetos y procesos identificados cuáles consideras potencialmente conflictivos para los estudiantes.*

Potenciales conflictos epistémicos y cognitivos

Previamente, en lecciones anteriores del libro de texto se planteaba que una representación alternativa de la derivada es el símbolo dy/dx, pero a partir de esta nueva lección, esta expresión simbólica adquiere nuevas interpretaciones; la primera, es que se considera como una razón de diferenciales; la segunda, es que dx y dy son variables y existe una relación funcional entre ellos por medio de la ecuación $dy = f'(x)dx$. Las nuevas conceptualizaciones e interpretaciones que presenta el libro de texto sobre el diferencial y sus relaciones con la derivada pueden generar conflictos epistémicos en relación a los significados parciales del diferencial, ya que antes se consideraban como un símbolo alternativo de la derivada y ahora son variables.

Además, se considera que este hecho constituye un potencial conflicto cognitivo ya que las interpretaciones que realiza el estudiante con relación al uso del diferencial van cambiando, ya que en el texto se menciona que ahora se puede considerar como una razón de diferenciales. De esta manera no queda claro cuando dy/dx es un símbolo para la derivada o una razón de diferenciales.

Pregunta 7: *Para hacer un análisis de una lección de un libro de texto, que otros aspectos consideras que se debería tener en cuenta*

La intención de esta pregunta es avanzar y profundizar el análisis y valoración de la lección del libro de texto, teniendo en cuenta los conocimientos previos en relación con las facetas epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica.

7.6 Descripción General de la Implementación y Discusión de los Resultados

7.6.1 Análisis de la implementación de la Fase 1

La siguiente sección de divide en dos partes; en la primera, se realiza una breve descripción de las prácticas matemáticas personales destacando los aspectos más relevantes que emergieron en la resolución de la Tarea 1. En la segunda parte, se identifican y se analizan los conflicto epistémico-cognitivos y la gestión de las interacciones, por parte del profesor (doctorando) a modo de reflexionar sobre las competencias profesionales del profesor de matemática en la clase desarrollada.

7.6.1.1 Resoluciones de la Tarea 1

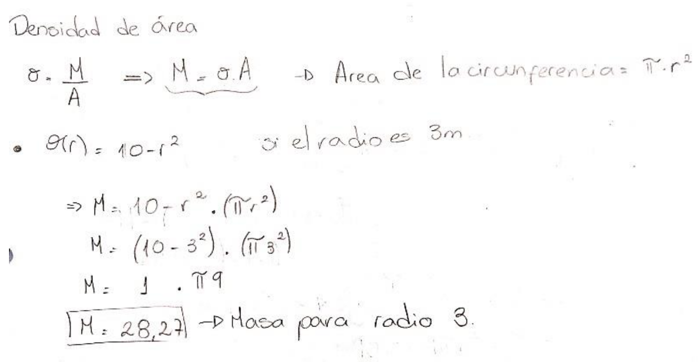
Con la implementación de la Tarea 1 se ha logrado identificar siete resoluciones diferentes las cuales se describen brevemente a continuación.

7.6.1.1.1 Resolución 1

Una de las primeras resoluciones que interviene es la Resolución 1 que se presentó en la sección anterior donde los estudiantes reemplazan en la fórmula para el cálculo de la masa los datos brindados por el problema. Cabe recordar que por detrás de estas prácticas matemáticas personales se está considerando que el la densidad y la masa son constante en todos los puntos de la lámina circular. A modo de ejemplo, se muestra en la Figura 7.12 una resolución presentada por un estudiante (E2).

Figura 7.12

Resolución 1 de la Tarea 1 del E2

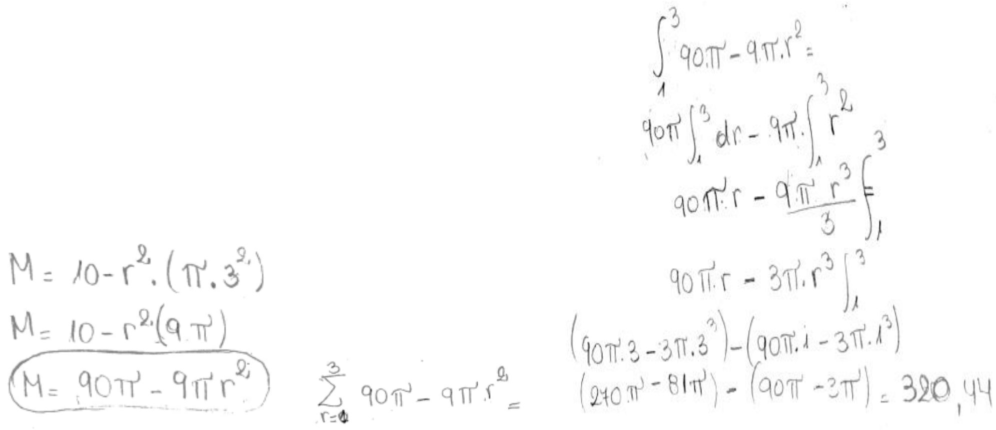


7.6.1.1.2 Resolución 2

En la siguiente resolución se identifican tres partes; en la primera, reemplaza en la fórmula para el cálculo de la masa (Masa=densidad x área) el radio por 3m en la fórmula para el cálculo del área del círculo. De esta manera se aprecia como los estudiantes consideran que el símbolo "*r*" (que actúa como variable) en la expresión de la densidad y en el área del círculo son diferentes. Además, como se mencionó en la sección anterior, al realizar este procedimiento, se está considerando implícitamente que la masa varia solo en función de la densidad y no del área, ya que ésta última es constante. En consecuencia, se obtiene la ecuación que se muestra en la Figura 7.13.a.

Figura 7.13

Resolución de la Tarea 1 del E5



(a) (b) (c)

En la segunda parte, se plantea la sumatoria de 1 a 3 de la expresión obtenida en la Figura 7.13.a para calcular la masa total de la lámina (ver Figura 7.13.b). Luego, en la tercera parte (Figura 7.13.c) se puede observar que se plantea la integral definida de la expresión obtenida anteriormente para hallar la masa total.

En las prácticas matemáticas presentadas en la Figura 7.13.c se observa en la segunda línea que aparece la diferencial de radio dr, pero solo en la primera integral definida, lo que nos lleva a reflexionar que teniendo en cuenta que al resolver la integral del primer término, al ser una constante, el estudiante utiliza la propiedad de la integral de un producto de una cosntante, pero advierte que no le queda nada o que le falta la expresión del diferencial para terminar de resolver la integral, por tales motivos consideramos que agrega la expresión dr solo en la primera integral y no en la segunda. De esta manera, se está haciendo uso instrumental de la diferencial y de manera que es necesario para terminar de resolver una integral, como lo han reportado varias investigaciones (Hu y Rebello, 2013; López-Gay et al, 2015,Verón y Giacomone, 2021)

7.6.1.1.3 Resolución 3

Se puede apreciar que luego de reemplazar y operar en la fórmula para el cálculo de la masa las expresiones de la densidad y el área, obtiene una ecuación equivalente para la masa (Figura 7.14.a). Posteriormente, para obtener la masa total plantea la integral definida de 0 a 3 de la expresión obtenida anteriormente y agregando al diferencial radio dr (Figura 7.14.b)

Aplica propiedades y la regla de Barrow para resolver la integral llegando al resultado de 130,06.

Figura 7.14

Resolución de la Tarea 1 del E6

$$M = \sigma . A$$
$$= (10 - r^2).(\pi r^2)$$
$$= 10\pi r^2 - \pi r^4$$

$$\int_0^3 10\pi r^2 - \pi r^4 \, dr = 10\pi \int r^2 \, dr - \pi \int r^4 \, dr =$$
$$= 10\pi \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^3 - \pi \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^3$$
$$= 10\pi (9) - \pi (48,6)$$
$$= 90\pi - (48,6 . \pi) = 130,06 \text{ ¿?}$$

(a) (b)

En la discusión de la resolución con el grupo clase, se identifica un conflicto epistémico-cognitivo que proviene de las suposiciones que están realizando los estudiantes de manera implícita para calcular la masa total a partir de la integral definida planteada de esta manera, donde se reconoce que hay superposición de masas, cuestión que lo expresa claramente la E2 (Figura 7.15).

Figura 7.15

Resolución de la Tarea 1 del E2

$$\int_0^3 10\pi r^2 - \pi r^4 dr = 10\pi \int_0^3 r^2 dr - \pi \int_0^3 r^4 dr = 10\pi \left(\frac{r^3}{3}\right)\Big|_0^3 - \pi \left(\frac{r^5}{5}\right)\Big|_0 =$$
$$= [10\pi . (9 - 0)] - [\pi (48,6 - 0)] =$$
$$= [10\pi . (9)] - [\pi . (48,6)] =$$
$$= 282,74 - (152,68) = 130,06$$

Intentando calcular la suma de las masas para los radios desde 0 a 3.

↳ En este caso se suman masas de más.

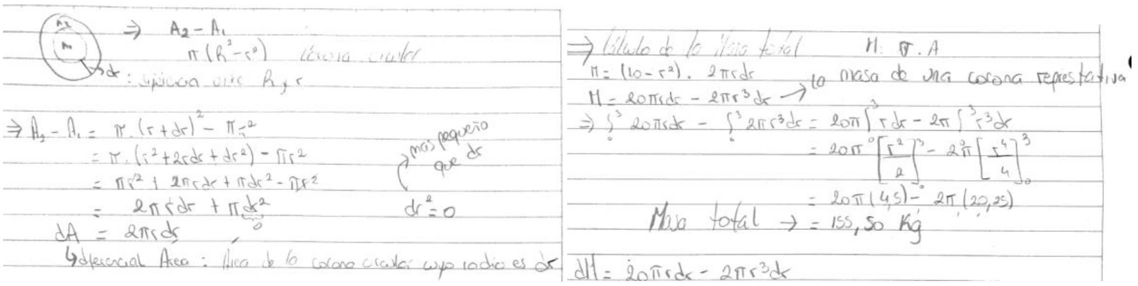
7.6.1.1.4 Resolución 4

Luego de la discusión de la resolución 3, y ante el desafió de poder calcular la masa total de la lámina de tal manera que no se superpongan las masas que se están calculando, surgió de un grupo de estudiantes utilizar la estrategia denominada “método de la arandela”, que recuperan de sus conocimientos previos de la asignatura Análisis Matemático III, donde avanzan con la consideración de coronas circulares concéntricas en lugar de trabajar con circunferencias. Mediante las intervenciones del profesor con el grupo clase, los estudiantes logran identificar y establecer el diferencial de radio (*dr*), diferencial área (*dA*) y diferencial masa (*dM*), para luego emplear la integral definida como suma de diferencias para obtener el cambio total, en este caso, la masa total.

Se logran los procesos de representación de los diferenciales y la conceptualización del diferencial radio como diferencia entre dos valores de radio muy próximos entre sí y que es una cantidad que tiende a cero (ver Figura 7.16.a y Figura 7.17). Con respecto a la diferencial área, se establece que su cálculo (procedimiento) se realiza mediante la diferencia de áreas y que depende del diferencial radio, como lo escribe el estudiante E6 “área de una corona circular cuyo radio es *dr*” (Figura 7.16.a y Figura 7.17). La diferencial masa se conceptualiza como “la masa de una corona circular representativa” (E6) (Figura 7.16.b).

Figura 7.16

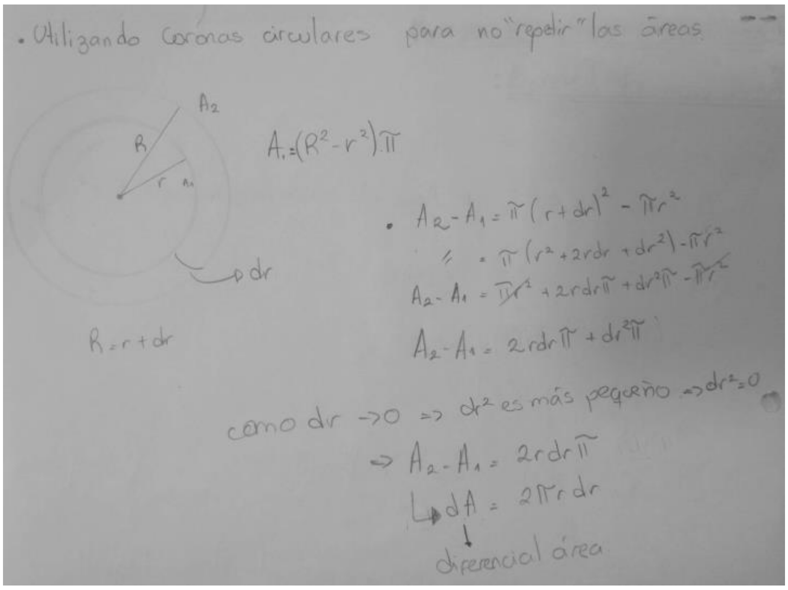
Resolución de la Tarea 1 del E6



(a) (b)

Figura 7.17

Resolución de la Tarea 1 del E2

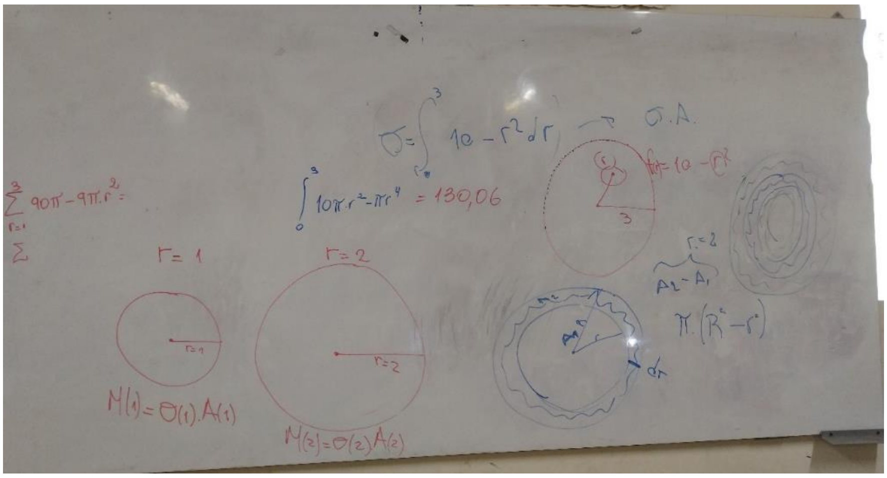


7.6.1.2 Discusiones sobre el abordaje de los conflictos epistémico-cognitivos

En la implementación han surgido la mayoría de los conflictos que se han advertido en el análisis a priori, los cuales se discutieron con los estudiantes para superar los conflictos y progresar en la resolución de la situación problema. Todos los conflictos epistémicos que se han mencionado surgieron en la sesión de clases, lo que requirió la intervención didáctica del profesor utilizando recursos retóricos, argumentativos e interrogantes, para resolver l situación. Por ejemplo, frente al conflicto epistémico de la superposición de áreas del círculo, el profesor propone a los FPM realizar las representaciones geométricas de los círculos, uno al lado del otro, de tal manera que haciendo uso del lenguaje geométrico y visual de los círculos permita reconocer el conflicto y buscar nuevas estrategias para superarlo, como se puede apreciar en la Figura 7.18.

Figura 7.18

Puesta en común de las producciones de los FPM de la Tarea 1



Emerge un nuevo conflicto epistémico

Luego unos 10 minutos de haber comenzado la implementación de la Tarea 1, en un recorrido que realiza el profesor por los grupos para observar sus avances, advierte que varios FPM tenían dificultades con la interpretación y lectura de la información de la representación geométrica de la situación problema donde se presenta información respecto de la lámina circular y los radios. Frente a esta situación, el profesor decide poner en discusión con el grupo clase los inconvenientes y dudas que les impedía avanzar a algunos FPM. Luego una serie de intercambio de comentarios entre los estudiantes, donde el profesor asumió el rol de orientador de la discusión, sin imponer su punto de vista, se logró superar la dificultad.

Se recupera este hecho que sucedió al comienzo de la implementación de la Tarea 1 porque la representación geométrica de la situación problema genera un potencial conflicto epistémico en algunos FPM que, a simple vista, parece una confusión de los estudiantes, pero en realidad emerge un nuevo conflicto epistémico asociado a la naturaleza y función del radio que tiene varias causas producto de la complejidad ontológica y semiótica que implica la lectura de la representación geométrica, cuestión que no se ha anticipado en el análisis a priori.

En primer lugar, en el lenguaje geométrico utilizado en el enunciado de la situación-problema, se observa que se indican dos radios (ver Figura 7.2), el radio de la lámina circular de 3m y el radio de un punto 'genérico' interior donde se muestra la función densidad. En segundo lugar, el radio cumple la función de variable para la densidad y para el área, lo que en un principio no es advertido por los estudiantes, ya que consideran que solo varia la densidad o que cada función (densidad y/o área) pueden tomar valores diferentes de radio al mismo tiempo.

Por tales motivos, se plantea que el potencial conflicto epistémico se encuentra en la representación ostensiva e intensiva del radio; para comprender es necesario identificar las facetas duales que están en juego en esta hecho didáctico, en este caso particular, la representación ostensiva del radio tiene a su vez dos representaciones, una extensiva al indicar que el radio es de 3m y una intensiva al indicar el elemento genérico que el radio "r" dibujado con líneas de puntos discontinuas con punto extremo remarcado, es un elemento representante de todos los posibles radios (elemento genérico).

Si bien, este conflicto epistémico se relaciona con los otros, es uno de los primeros obstáculos que surge en las resoluciones en algunos FPM y no les permite avanzar en la resolución del problema debido a la complejidad ontosemiótica que conlleva la representación ostensiva del radio como un elemento genérico e intensivo y su representación extensiva.

Además, resulta importante destacar que superar un conflicto epistémico no es sencillo e inmediato, ya que se necesitaron diferentes momentos de la clase para volver a discutir con los FPM sobre la consideración del radio y sus relaciones con la función densidad y área.

7.6.1.3 Reflexiones sobre la gestión de las interacciones

En esta sección se centra en la valoración de la idoneidad interaccional de la implementación de la Tarea 1. Se considera que un proceso de enseñanza y aprendizaje tendrá mayor idoneidad desde el punto de vista interaccional si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten identificar conflictos semióticos potenciales a priori y resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción. En este sentido, se trata de estudiar en qué medida la gestión de las configuraciones didácticas permiten la negociación de los significados del concepto diferencial. Para ello se estudian los modos de interacción entre docente, estudiantes y entre los mismos estudiantes, los cuales permiten identificar y resolver potenciales conflictos semióticos, favorecer el aprendizaje autónomo y el desarrollo de competencias comunicativo-argumentativas (Godino, 2013). Este análisis permitirá al profesor valorar que tan adecuada ha sido la gestión de las interacciones en la clase y si ha permitido resolver las dificultades de los alumnos.

Para la valoración de la idoneidad interaccional se emplea una metodología cualitativa (McMillan y Schumacher, 2001), basada en la transcripción de tres fragmentos de diálogos entre un profesor (doctorando) y dos estudiantes sobre la resolución de un problema en torno al estudio de la diferencial de una función. Luego se aplica la técnica de análisis de contenido (Cohen et al., 2007) a partir de los criterios de idoneidad didáctica (Godino, 2013), cuyas facetas, componentes e indicadores permiten al profesor realizar una reflexión sistemática sobre la gestión de las interacciones en la medida que se potencie el aprendizaje, se identifiquen y resuelvan potenciales conflictos semióticos y se planteen mejoras.

Un proceso de enseñanza y aprendizaje se podrá valorar con una alta idoneidad interaccional en la medida en que las intervenciones y la gestión de las interacciones por parte del profesor permitan reconocer, potenciar y/o advertir sobre cuestiones como:

- Reconocer los significados parciales personales que manifiestan los estudiantes en sus discursos y/o resoluciones.
- Potenciar las relaciones entre los objetos matemáticos que manifiestan los estudiantes.
- Advertir el surgimiento de potenciales conflictos epistémicos y/o cognitivos.
- Resolver las dudas o conflictos presentados por los estudiantes.
- Generar espacios de discusión del tipo dialógica y colaborativa entre los estudiantes.
- Favorecer el desarrollo de competencias argumentativas y comunicativas.
- Favorecer la autonomía y el desarrollo progresivo en los aprendizajes de los estudiantes.

Estos criterios básicos, que dependen de interacciones entre docente-discente y entre estudiantes, también implican interacciones personales (o bien momentos de estudio en autonomía) y de evaluación formativa, dedicada a la observación del seguimiento cognitivo de los estudiantes. Estos criterios pueden guiar la reflexión global de los procesos instruccionales por parte de los profesores para mejorar sus prácticas de enseñanza y el aprendizaje de los estudiantes (Giacomone, Godino, Wilhelmi y Blanco, 2018; Godino et al., 2023).

Teniendo en cuenta estos criterios, a continuación, recuperamos tres fragmentos de diálogos del profesor con los estudiantes (E1 y E2) de la clase para analizar el grado de idoneidad interaccional.

Diálogo 1

Profesor: Es decir, vos me estás señalando que el radio va a ir ...

Estudiante 1: Aumentando.

Profesor: ¿va a ir aumentando o tiende a cero? o ¿cómo es el tema?

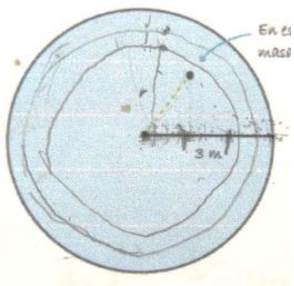
Estudiante 1: Tiende a cero. Digamos, ... la distancia entre cada punto que tomemos ... porque, por ejemplo, si tomamos entre 1 y 2, el radio puede variar muchas veces, o sea, en cada punto que hay en este segmento el radio va a cambiar y va a cambiar el área.

En las interacciones del diálogo analizado, se puede observar cómo el profesor propicia la búsqueda de explicaciones y la validación de las interpretaciones de los estudiantes. Las preguntas que plantea están diseñadas para hacer que los estudiantes se responsabilicen por la resolución del problema y para potenciar sus capacidades comunicativas y argumentativas. De esta manera, el docente promueve un ambiente de aprendizaje colaborativo donde se les exige a los estudiantes que justifiquen sus respuestas y se involucren en la construcción de conocimiento de manera activa y reflexiva. En general, la actuación del profesor en este diálogo refleja una idónea gestión de las interacciones en términos de promover el pensamiento crítico y la participación activa de los estudiantes en la construcción de conocimiento matemático.

Por otro lado, las preguntas pretenden poner en discusión con los estudiantes un potencial conflicto epistémico-cognitivo, ya que reconocer la variación del radio y su dominio de definición (en este caso puede tomar todos los números reales entre 0 y 3) implica un salto importante en la conceptualización, al considerar infinitos valores de radio y, en consecuencia, infinitas circunferencias concéntricas, como se puede apreciar en la resolución del estudiante E1 en la Figura 7.19.

Figura 7.19

Representación gráfica del E1



Diálogo 2

Estudiante 1: Como que va a ser una circunferencia dentro de esta, otra y otra …

Profesor: ¡Interesante eso!, ¿cómo sería? ¿cómo sería una circunferencia dentro de otra?

Estudiante 1: Como coronas.

Profesor: ¿Cómo?

Estudiante 1: Coronas, una dentro de la otra corona y ahí le vuelvo ...

Profesor: Haber, ¿cómo sería el gráfico, más o menos, de esas coronas que vos me estás diciendo?

……

Profesor: Y ahí, ¿dónde estaría ese radio que estás mencionado?, ¿qué tendía a cero?

Estudiante 1: O sea, la distancia entre una circunferencia y la otra, no es el radio, no va a tender a cero el radio, sino que va a tender a cero la distancia entre el radio de la primera, y el radio de la segunda, digamos que la distancia entre los dos radios tendería a cero, no el radio en sí.

Nuevamente, las intervenciones del profesor buscan que los estudiantes amplíen sus explicaciones y desarrollen y justifiquen sus afirmaciones. Además, se destaca la actuación del profesor al motivar a los estudiantes por su resolución y por incentivar la utilización de otras representaciones (lenguajes), como gráficos, para mejorar la comunicación de las ideas matemáticas de los estudiantes.

La consideración de coronas circulares concéntricas en lugar de circunferencias implica un gran salto cualitativo, en el sentido de la complejidad de las prácticas, objetos y procesos que están interviniendo y emergiendo para buscar una solución al problema. Este hecho es didácticamente significativo, ya que implica un cambio importante en la consideración del radio, en lugar de trabajar con circunferencias con diferentes radios, se pasa a trabajar con coronas circulares, cuyo radio está formado por la diferencia entre dos radios. De esta manera, surge un nuevo proceso de conceptualización que se encuentra en dirección con la consideración del diferencial radio como una cantidad infinitamente pequeña que se obtiene por la diferencia de dos valores muy próximos entre sí (Verón y Giacomone, 2021).

Diálogo 3

Profesor: Entonces, la distancia que hay desde este punto hasta esta circunferencia es el radio, ¿no? (Ver Figura 7.20)

Estudiante 1: Es el radio.

Profesor: Pero la distancia que hay desde el centro hasta la otra circunferencia …

Estudiante 1: Es radio más diferencial radio. (Ver Figura 7.20)

Profesor: Es el radio más el diferencial radio, entonces teniendo estos dos valores, ahí podríamos plantear lo que estás diciendo sobre la diferencia de área.

Profesor: Mediante la fórmula del cálculo del área del círculo donde un radio va a ser r que es el que ya conocemos, pi por radio cuadrado, ¿no?

Estudiante 1: Menos.

Profesor: Y el otro es ...

Estudiante 1: r más diferencial r al cuadrado.

Profesor: ¡Si!

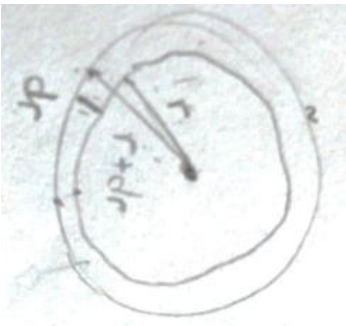
Profesor: Bueno, plantéalo para ver cómo quedaría. Entonces, la idea es hallar la expresión del área de esa corona circular con estas condiciones.

En las interacciones del tercer diálogo, las intervenciones del profesor contribuyen a que los estudiantes organicen la información y exploren posibles expresiones para calcular la diferencial área. Para lograr este proceso de conceptualización, resulta necesario que los estudiantes puedan manifestar un conjunto de prácticas y objetos matemáticos para establecer a la diferencial área.

Si bien, la gestión del profesor se podría mejorar ya que resulta muy guiada para los estudiantes, se considera que las decisiones que ha tomado a partir de las prácticas personales de los estudiantes permitieron avanzar hacia la definición del diferencial área, revolver potenciales conflictos epistémico-cognitivos y, en consecuencia, continuar con la resolución del problema.

Figura 7.20

Representación gráfica del E1



A modo de conclusión, el análisis muestra que el profesor genera interacciones con el objetivo de poner en discusión potenciales conflictos epistémico-cognitivos para trabajarlos y resolverlos, para seguir avanzado en la comprensión y resolución del problema. Aun así, de acuerdo con Planas y Iranzo (2009)

> para tener un mejor conocimiento sobre las condiciones de la comunicación, sería necesario un análisis longitudinal que mostrara cómo se gestionan los conflictos entre significados, a medida que los participantes comparten más tiempo en el aula y aprenden a intercambiar referentes y prácticas. (Planas y Iranzo, 2009, p. 210)

Se destaca que la gestión de las intervenciones propicia el desarrollo de competencias comunicativa-argumentativas por parte de los estudiantes, ya que constantemente se les solicita que amplíen sus explicaciones, empleen otros recursos para mejorar la comunicación de sus ideas y puedan emprender caminos de validación de sus afirmaciones. En este caso, se puede observar que las intervenciones específicas del profesor tienen un impacto positivo en la capacidad de los estudiantes para expresar y comunicar las relaciones entre los objetos matemáticos implicados en el problema. La estrategia didáctica es dirigir la atención de los estudiantes hacia el significado parcial del Diferencial de Leibniz y el concepto de cantidad infinitesimal; de hecho, las interacciones resultan positivas para generar momentos en los que emerjan procesos de conceptualización que conducen a establecer al diferencial radio como una cantidad infinitesimal, siendo un aspecto principal para la consolidación de los distintos significados de la diferencial (Verón y Giacomone, 2021).

En general, se observa en los tres fragmentos de diálogos que los formatos de interacción que predominan son del tipo dialógico y de trabajo colaborativo. Esta forma de gestionar las configuraciones didácticas permite que los estudiantes puedan mostrar un conjunto de prácticas, objetos y procesos personales, generándose de esta manera indicadores explícitos de la relación que están construyendo los estudiantes con los objetos matemáticos. Estos indicadores pueden ser utilizados por el profesor para valorar las relaciones, el proceso, y oportunamente, tomar decisiones en relación con las intervenciones para mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Si bien en este trabajo se han recuperado solo tres fragmentos de diálogo para valorar su idoneidad interaccional, consideramos que es necesario proponer este tipo de actividades en la formación de profesores de matemáticas con consignas que propicien la reflexión sobre la gestión de las interacciones, siendo una competencia profesional del profesor.

A modo de síntesis de la fase 1, se ha logrado reconocer los conocimientos de los FPM en relación con la diferencial, propiciando espacios de discusión en relación con los conflictos epistémicos y cognitivos que han surgido en la implementación de la Tarea 1. A partir de la socialización y discusión de las resoluciones propuestas por los FPM se ha logrado definir y utilizar la diferencial para modelizar la situación y establecer una solución para la situación planteada.

7.6.2 Análisis de la implementación de la Fase 2

En este trabajo de investigación centramos nuestra atención en la evaluación de los conocimientos y competencias de los FPM en el análisis epistémico de una situación-problema en la que interviene el diferencial de una función, para ello se analizan las respuestas de los FPM de la Tarea 2 y las discusiones generadas ha permito establecer conclusiones sobre los logros alcanzados.

En relación con la primera pregunta, se pueden observar respuestas vinculadas a una visión sobre las matemáticas como un *producto terminado* (Figura 7.21), generando un conflicto con la perspectiva antropológica y pragmatista de la actividad matemática que postula el EOS (Giacomone et al., 2016). Otros estudiantes, en cambio, responden desde perspectiva personal (Figura 7.22).

Figura 7.21

Respuesta del E4 de la Tarea 2

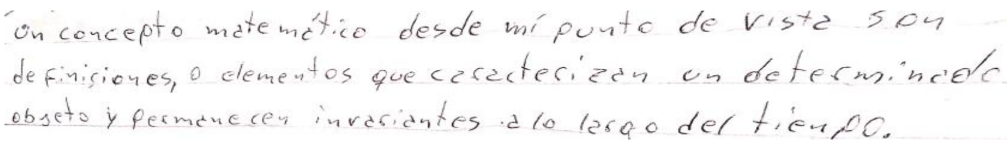
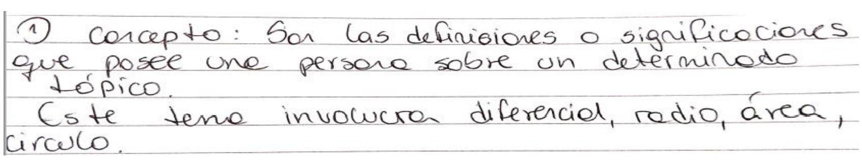

Un concepto matemático desde mi punto de vista son definiciones, o elementos que caracterizan un determinado objeto y permanecen invariantes a lo largo del tiempo.

Figura 7.22

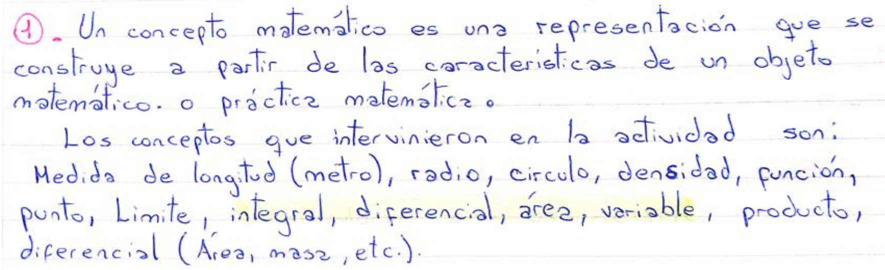
Respuesta del E2 de la Tarea 2


① Concepto: Son las definiciones o significaciones que posee una persona sobre un determinado tópico.
Este tema involucra diferencial, radio, área, circulo.

Resulta interesante notar el esfuerzo que hacen otros estudiantes para caracterizar los conceptos matemáticos desde la perspectiva sistémica que plantea el EOS, por ejemplo, E8 (Figura 7.23). En cuanto a la identificación de los conceptos involucrados, la mayoría de las estudiantes pudo reconocer correctamente varios de los conceptos-definiciones involucradas.

Figura 7.23

Respuesta del E8 de la Tarea 2


1. Un concepto matemático es una representación que se construye a partir de las características de un objeto matemático. o práctica matemática.

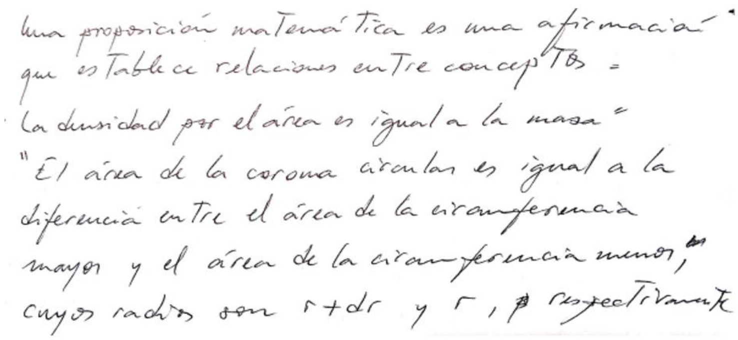
Los conceptos que intervinieron en la actividad son:
Medida de longitud (metro), radio, circulo, densidad, función, punto, Limite, integral, diferencial, área, variable, producto, diferencial (Área, masa, etc.).

Los 12 estudiantes han identificado en forma idónea los diferentes tipos de lenguajes (natural, geométrico, algebraico y simbólico) implicados en la resolución.

Respecto a las proposiciones matemáticas, la mayoría menciona que una proposición es una afirmación, una idea, un enunciado, una frase que se realiza sobre un concepto matemático y que puede ser verdadero o falso (ver Figura 7.24). Sin embargo, manifiestan varias dificultades en la identificación, de su propia resolución, de algunas proposiciones.

Figura 7.24

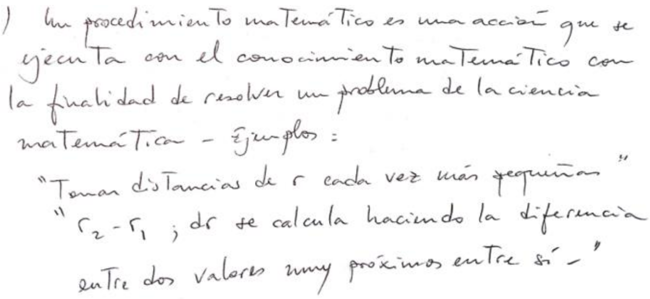
Respuesta pregunta 3 del E10 de la Tarea 2


Una proposición matemática es una afirmación que establece relaciones entre conceptos.
"La densidad por el área es igual a la masa"
"El área de la corona circular es igual a la diferencia entre el área de la circunferencia mayor y el área de la circunferencia menor," cuyos radios son $r+dr$ y r, respectivamente

En relación con la pregunta 4, sobre los procedimientos matemáticos, la mayoría de los estudiantes responde que los procedimientos son los pasos, secuencias de tareas o acciones que se realiza para resolver un problema. Un estudiante (E10) agrega que en los procedimientos se utiliza el conocimiento matemático para resolver la tarea (Figura 7.25).

Figura 7.25

Respuesta pregunta 4 del E10 de la Tarea 2



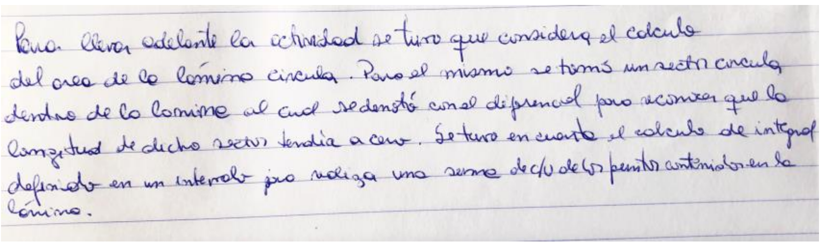
) Un procedimiento matemático es una acción que se ejecuta con el conocimiento matemático con la finalidad de resolver un problema de la ciencia matemática - Ejemplos:
"Tomar distancias de r cada vez más pequeñas"
"$r_2 - r_1$; dr se calcula haciendo la diferencia entre dos valores muy próximos entre sí -"

Respecto a la pregunta 5, la mayoría de los estudiantes logra identificar los argumentos. Las dificultades detectadas refieren a que algunos confunden las explicaciones que validan las proposiciones y procedimientos con las descripciones de los pasos realizados.

Por último, se aprecia que la mayoría de los estudiantes no logró comprender la pregunta 6 ya que cuatro no respondieron, cuatro dieron una respuesta incompleta porque mencionan al diferencial en forma general y no particularizan sobre qué tipo de diferencial. Por otro lado, otras dos respuestas evidencian un cierto nivel de conceptualización de la diferencial (ver Figura 7.26), aunque confunden la noción de argumento con la descripción de las prácticas (Burgos et al., 2019).

Figura 7.26

Respuesta pregunta 6 del E2 de la Tarea 2



Para llevar adelante la actividad se tuvo que considerar el calculo del area de la lámina circular. Para el mismo se tomó un sector circular dentro de la lamina al cual se denotó con el diferencial para reconocer que la longitud de dicho sector tendía a cero. Se tuvo en cuenta el calculo de integral definida en un intervalo pero realiza una suma de c/u de los puntos contenidos en la lámina.

También la estudiante E10 (Figura 7.25) logra reconocer y conceptualizar el proceso de algoritmización que permite calcular el diferencial radio dr.

Los resultados reflejan imprecisiones en la caracterización y descripción de los significados parciales del diferencial. No obstante, los conocimientos previos de los participantes sobre el EOS posibilitaron momentos de discusiones más ricos respecto a resultados reportados en investigaciones previas.

7.6.3 Discusiones de la Tarea 2

En esta fase se ha puesto énfasis en el diseño e implementación de una tarea formativa para desarrollar conocimientos y competencias para el análisis ontosemiótico de futuros profesores de matemática sobre una situación problema del diferencial. Los resultados nos permiten plantear que este tipo de actividades formativas constituyen un desafío para la formación de profesores de matemática, resultando conflictivo el reconocimiento y la discriminación de los tipos de objetos y significados implicados en la resolución de una tarea matemática.

7.6.4 Análisis de la implementación de la Fase 3

7.6.4.1 Introducción

En este trabajo de investigación centramos nuestra atención principalmente en la evaluación de los futuros docentes sobre la competencia de análisis cognitivo, que permite a los docentes comprender las formas de pensar y reconocer significados personales, conceptos erróneos, conflictos y errores que surgen del proceso de resolución de problemas. La competencia de análisis cognitivo implica:

- atender las estrategias de solución de los estudiantes en un problema, analizando si los procedimientos y argumentos son correctos;
- dividir las resoluciones de los estudiantes en prácticas elementales;
- identificar los objetos: lenguajes (natural, icónico, diagramático, simbólico...), conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, que intervienen en esas prácticas (Burgos y Godino, 2022a, p. 351)

En particular, abordamos las siguientes preguntas de investigación:

- *¿Cómo analizan y justifican los futuros profesores el grado de corrección de la resolución del estudiante al problema que interviene el diferencial de una función?*
- *¿Qué objetos matemáticos (lenguajes, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos) identifican los futuros profesores en la resolución propuestas por un estudiante? (Burgos y Godino, 2022a, p. 351)*

A modo de organización los resultados obtenidos del análisis de las producciones de los FPM sobre la resolución del problema del estudiante, en primer lugar, abordaremos el reconocimiento (o identificación) de las prácticas matemáticas; luego, avanzaremos con el reconocimiento de la intencionalidad de tales prácticas; y, por último, se hará foco en la identificación de los objetos matemáticos (lenguajes, concepto-definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos).

7.6.4.2 Reconocimiento de las prácticas matemáticas elementales

La descomposición (o división) de una resolución en una secuencia de prácticas matemáticas elementales resulta pertinente (o necesario) para emprender un análisis microscópico de la actividad matemática porque permite identificar hechos didácticos significativos o bien, momentos claves en los que participan conceptos claves o emergen conceptos pretendidos.

En el contexto de la presente investigación, una práctica elemental se puede considerar como didácticamente significativo en la medida en que el futuro profesor pueda advertir el surgimiento de un potencial conflicto semiótico e identificar el uso de los objetos matemáticos primarios y sus relaciones que le permiten avanzar en la resolución de la tarea.

Para el análisis de las producciones de los futuros profesores de matemáticas se cuenta con ocho resoluciones. En ellas, se puede observar que la mayoría dividió en cinco prácticas matemáticas la resolución del estudiante.

La primera práctica (P1) que todos identifican de manera correcta tiene es cuando en la resolución se plantea y expresa la fórmula para calcular la masa que se obtuvo al reemplazar los datos del problema.

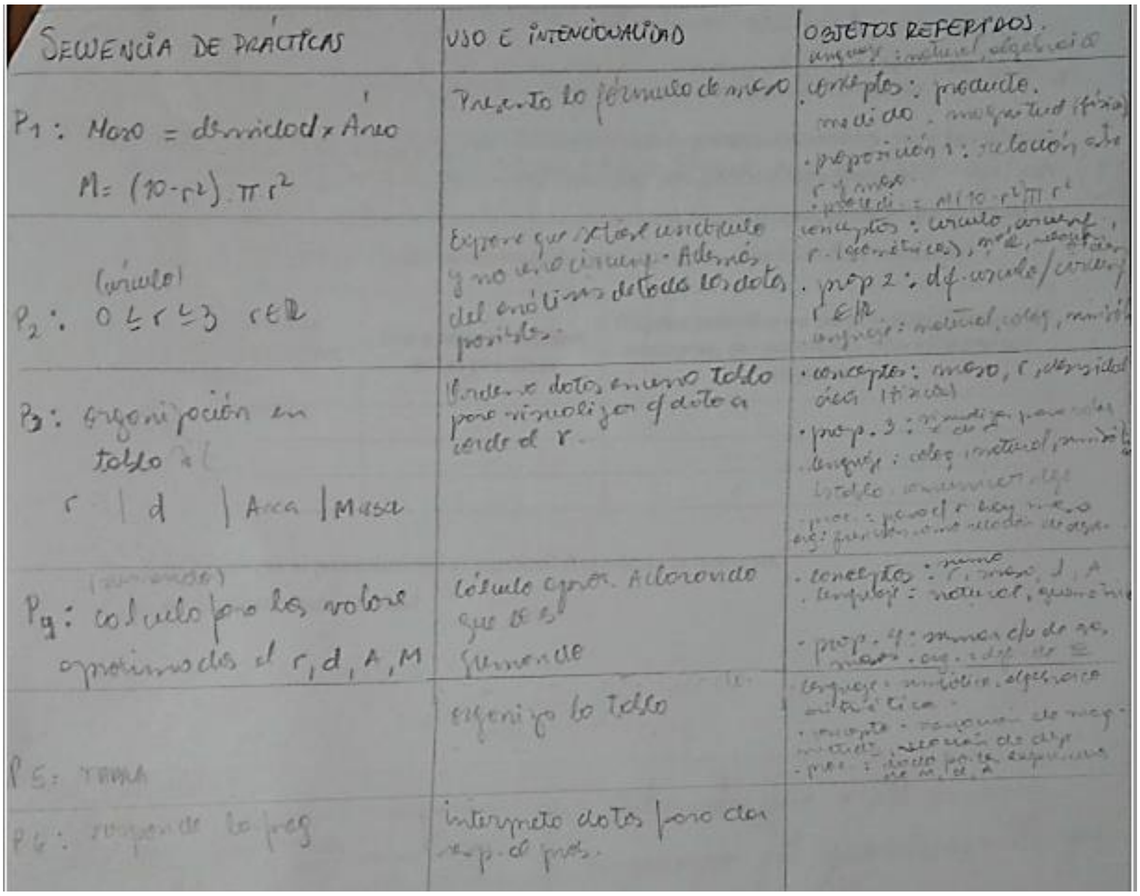
La segunda práctica (P2), es señalada por los futuros profesores como el segundo párrafo de la explicación de la resolución del estudiante, pero solo tres de los ocho análisis logran identificar un conflicto emergente que tiene relación con la consideración de círculos en lugar de circunferencias, ya que en la resolución se dice que se va a trabajar con círculos y no con circunferencia. Además, en la P2 reconocen como el estudiante identifica que el radio puedo tomar infinitos valores comprendidos entre 0 y 3.

La P3, la mayoría de los estudiantes la relaciona con la tabla, ya que en la resolución dice explícitamente que va a establecer una tabla para organizar la información y visualizar los valores de la masa que se van obteniendo al considerar diferentes valores de radio. Pero solo dos estudiantes advierten que en la resolución menciona que los valores del radio son de las circunferencias. Este reconocimiento por parte de los futuros profesores es parcial ya que no logran identificar que se ha generado un conflicto cognitivo con la consideración de las circunferencias, ya que se produjo una contradicción en la resolución.

La P4 es asociada por los futuros profesores con la acción de sumar cada una de las masas para obtener la masa total. La P5 la relacionan con la tabla y la P6 con la respuesta al problema o la interpretación que se realiza en la resolución de los resultados que obtuvo, indicando que es una aproximación y que el resultado no es exacto. A modo de ejemplo, se muestra en la Figura 7.27 la resolución del estudiante E5.

Figura 7.27

Desarrollo de la Tarea 3 por E5



SECUENCIA DE PRÁCTICAS	USO E INTENCIONALIDAD	OBJETOS REFERIDOS
P1: Masa = densidad x Área $M = (10 - r^2) \cdot \pi r^2$	Presenta la fórmula de masa	conceptos: producto, medida, magnitud (física) proposición 1: relación [illegible] [illegible]
P2: (círculo) $0 \leq r \leq 3$ $r \in \mathbb{R}$	Expresa que se trata de un círculo y no una circunf. Además del análisis de todos los datos posibles.	conceptos: círculo, circunf., r (geométricos), [illegible] prop 2: def. círculo/circunf. $r \in \mathbb{R}$ lenguaje: natural, [illegible]
P3: organización en tabla r | d | Área | Masa	Ordena datos en una tabla para visualizar el dato a través de r.	conceptos: masa, r, densidad, área (física) prop. 3: [illegible] lenguaje: [illegible] [illegible]
P4: cálculo para los valores aproximados de r, d, A, M	Cálculo aprox. Aclarando que es sumando	conceptos: [illegible] lenguaje: natural, [illegible] prop. 4: [illegible]
P5: TABLA	organiza la tabla	lenguaje: [illegible] [illegible]
P6: responde la preg	interpreta datos para dar resp. de preg.	

Un hecho didáctico significativo que surgió de la discusión de la división de la secuencia de prácticas fue reflexionar si se puede considerar a la tabla, de la resolución del estudiante, como parte de P3 o es una nueva práctica.

En general, consideramos que la actividad de reconocer los sistemas de prácticas matemáticas de una resolución de un estudiante es el primer paso para emprender un análisis cognitivo ya que les permitió a los futuros profesores identificar la secuencia de acciones, decisiones e ideas matemáticas que van empleando y construyendo el estudiante para resolver la situación. Además, les permitió realizar un análisis microscópico de las relaciones que se fueron estableciendo en cada práctica, lo que permitió identificar las contradicciones en la consideración del círculo y la circunferencia.

De esta manera, se puede afirmar que actividades formativas de este tipo son necesarias que se implementen en la formación de profesores de matemática ya que propicia el desarrollo de competencias profesionales, como por ejemplo reconocer las ideas y/o relaciones matemáticas que proponen los estudiantes, identificar potenciales conflictos cognitivos, errores o contradicciones que dificultan avanzar con la resolución.

Además, es importante destacar que, para realizar el análisis cognitivo, los FPM contaban con la resolución real de un estudiante, lo que se considera fundamental para comenzar a identificar prácticas, objetos y procesos. En términos de Rodríguez-Nieto et al., (2022) plantea como procedimiento metodológico para el análisis ontosemiótico comenzar con una narrativa matemática de la resolución para luego realizar la descripción de las prácticas matemáticas, y así avanzar en la identificación de los objetos matemáticos. Estas consideraciones metodológicas también se han tenido en cuenta en diferentes investigaciones orientadas al desarrollo de competencias profesionales de los profesores de matemáticas, como los estudios de Burgos (2020) y Giacomone (2018). Por tales motivos, se ha considerado incluir este tipo de actividades formativas para abordar la competencia de análisis cognitivo en los FPM.

7.6.4.3 Uso e intencionalidad de las prácticas matemáticas

En relación con el reconocimiento del uso e intencionalidad de las prácticas matemáticas, podemos afirmar que los futuros profesores no tuvieron inconvenientes para establecer la intención de cada práctica. Consideramos que esta parte de la actividad se resolvió correctamente ya que los estudiantes conocían la situación problema y la resolución planteada porque ellos ya habían realizado en la Tarea 2 un primer análisis ontosemiótico y la discusión de las resoluciones del problema con la Tarea 1, por tales motivos, pudieron identificar de manera correcta los usos e intenciones de cada una de las prácticas.

7.6.4.4 Reconocimiento de objetos matemáticos

En esta sección se analizará un aspecto más de la competencia de análisis cognitivo que han logrado los FPM en la identificación de los de los objetos matemáticos, como los lenguajes (natural, icónico, diagramático, simbólico, etc.), conceptos-definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos, que intervienen en la secuencia de prácticas matemáticas.

Cabe aclarar que no solo se describirán los objetos matemáticos que han logrado reconocer en el sistema de prácticas de la resolución del estudiante, sino que se avanzará en analizar las relaciones que los FPM lograron establecer y/o identificar en relación con las funciones y la naturaleza de los objetos matemáticos.

7.6.4.4.1 Lenguajes

Con relación a la identificación de los lenguajes, se puede apreciar en las resoluciones de los FPM que han logrado identificar en cada una de las prácticas matemáticas los lenguajes involucrados sin inconvenientes, como se puede observar, como ejemplo en las Figuras 7.28 y 7.29.

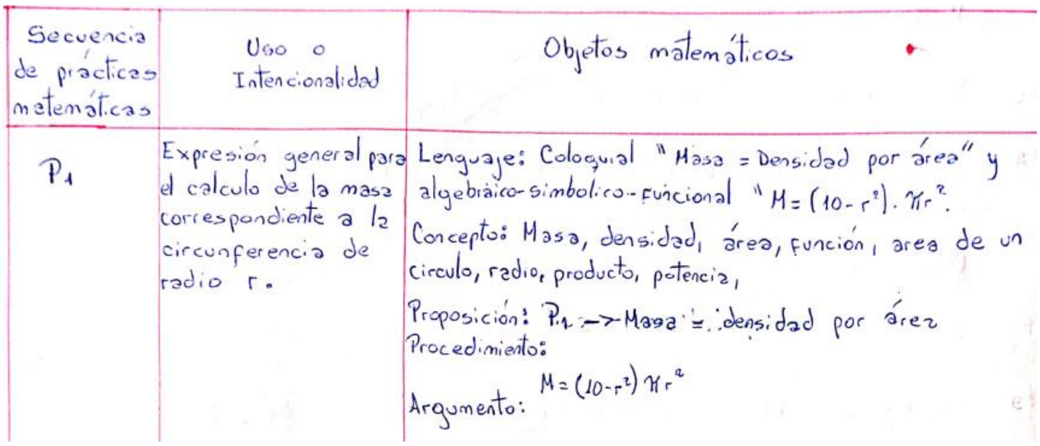
Teniendo en cuenta que la principal función del lenguaje es la comunicación, a continuación, se presentan una síntesis de las principales relaciones y funciones que podemos advertir en las respuestas de los FPM cuando reconocen los diferentes tipos de lenguajes en cada una de las prácticas:

- *Natural (o coloquial):* relacionado al discurso escrito, al uso de palabras y términos para comunicar relaciones y/o ideas matemáticas, por ejemplo: “Masa=Densidad por área” (ver Figura 7.28).
- *Simbólico:* relacionado al uso de símbolos que representan conceptos-definiciones: r (radio), M (Masa); relaciones: = (igualdad), e (pertenencia), > < (relaciones de orden); conjuntos R (números reales), π (número pi), $\cdots$ (puntos suspensivos, representan que el proceso continua y/o avanza hacia una generalización)
- *Aritmético:* relacionado al cálculo con números reales.
- *Algebraico-Funcional:* relacionado a las expresiones algebraicas $(10 - r^2)$ (Figura 7.29) y ecuaciones $M = (10 - r^2)\pi r^2$ (Figura 7.28).
- *Gráfico-geométrico:* relacionado al uso de algunos elementos geométricos como circulo, radio, circunferencia. Si bien, en la resolución no se observa explícitamente ninguna representación gráfica o geométrica, se puede advertir que en la narración del estudiante que hace un uso implícito de las representaciones de estos conceptos-definiciones que se han mencionado.

— *Gráfico-Tabular:* relacionado al uso de una tabla para organizar y visualizar los diferentes valores de masa (ver la intencionalidad de la P5 del E1 en la Figura 7.29).

Figura 7.28

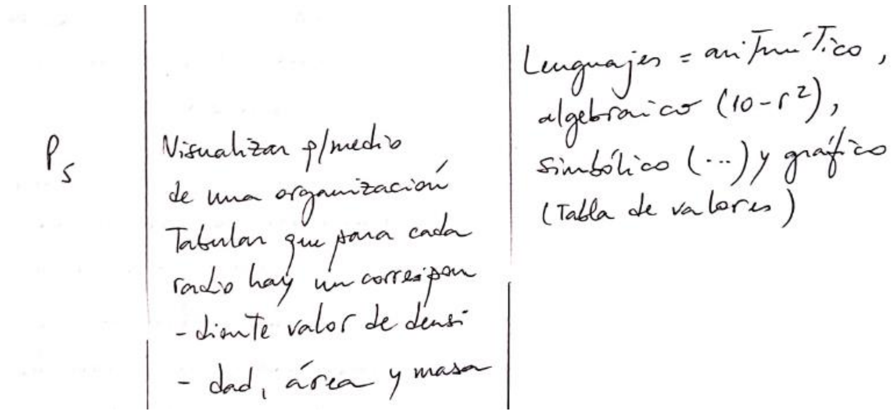
Parte de la respuesta de la Tarea 3 por E3



Secuencia de prácticas matemáticas	Uso o Intencionalidad	Objetos matemáticos
P_1	Expresión general para el calculo de la masa correspondiente a la circunferencia de radio r.	Lenguaje: Coloquial "Masa = Densidad por área" y algebráico-simbolico-funcional "$M = (10 - r^2) . \pi r^2$". Conceptos: Masa, densidad, área, función, area de un circulo, radio, producto, potencia, Proposición: P_1 → Masa = densidad por área Procedimiento: $M = (10-r^2)\pi r^2$ Argumento:

Figura 7.29

Parte de la respuesta de la Tarea 3 por E1



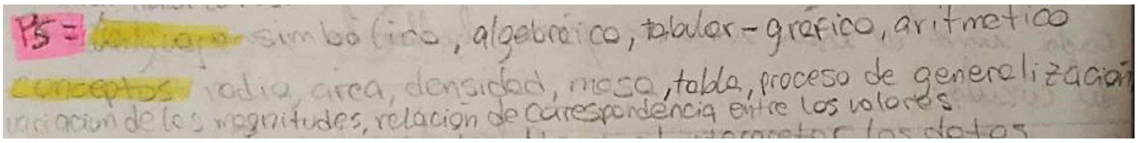
P_5	Visualizar p/medio de una organización Tabular que para cada radio hay un correspondiente valor de densidad, área y masa	Lenguajes = aritmético, algebraico $(10-r^2)$, simbólico (...) y gráfico (Tabla de valores)

7.6.4.4.2 Conceptos-definiciones

En relación con los conceptos-definiciones, los FPM no presentaron muchos inconvenientes para identificar estos conceptos en cada una de las prácticas matemáticas. Pero se puede advertir en las respuestas que la mayoría identifica como concepto-definición solamente a los objetos que puede reconocer explícitamente en la narración de la resolución del estudiante, algunos no logran identificar los conceptos que se están usando de manera implícita. Este hecho se produce ya que, de las ocho respuestas, seis logran identificar al concepto de función o relación de correspondencia entre el radio y la masa (ver Figura 7.30), y solo tres respuestas identifican al concepto de variación (ver Figura 7.30). Estos conceptos están siendo identificados por los FPM en la práctica matemática cinco (P5) donde se construye la tabla.

Figura 7.30

Parte de la respuesta de la Tarea 3 por E2



También resulta interesante destacar que solo dos FPM identifican a la aproximación y exactitud como conceptos-definiciones que intervienen en la resolución del estudiante. Estos conceptos son utilizados por la mayoría de los FPM al momento de identificar la intencionalidad y/o uso de las últimas prácticas matemáticas de la resolución del estudiante, pero no lo reconocen como un concepto que está cumpliendo una función importante en la resolución de la tarea.

La identificación de los conceptos de función, regla de correspondencia y variación que actúan de manera implícita en la resolución del estudiante constituye un indicador de que algunos FPM están logrando realizar un análisis detallado de las definiciones que está utilizando el estudiante ya que no todo está escrito o narrando en su resolución. Aquí surge una dificultad en varios FPM que no lograr identificar los conceptos-definiciones que utilizan los estudiantes de manera implícita en sus resoluciones, solo reconocen los conceptos que aparecen de manera explícita.

7.6.4.4.3 Proposiciones

En la secuencia de prácticas matemáticas las proposiciones cumplen la función de enunciación, es decir, son afirmaciones que nos permiten estudiar las asociaciones, vínculos y/o relaciones que se establecen, intervienen o emergen entre los conceptos-definiciones para construir ideas matemáticas que permitan avanzar en la resolución de la situación-problema.

En el análisis a priori de la Tarea 3 se han identificado nueve proposiciones que dan cuenta de las principales ideas y/o relaciones que construyó el estudiante para resolver la tarea propuesta. A continuación, se muestran las proposiciones (Pp):

— Pp1: existen infinitos valores de r;

— Pp2: $0 < r \leq 3$;

— Pp3: $r \in \mathbb{R}$

— Pp4: “visualizar para valores diferentes de r el cálculo de la masa”

— Pp5: “la masa obtenida por cada radio reemplazado, es únicamente de la circunferencia de r tomado”

— Pp6: “sumar cada esas masas para hallar la masa total”

— Pp7: al sumar las masas se obtiene una aproximación de la masa total

— Pp8: el procedimiento de P6 es engorroso

— Pp9: sumar las masas no es exacto

Si bien la mayoría de los FPM han logrado identificar las proposiciones que van surgiendo en la resolución del estudiante, se observa que ninguno ha logrado reconocer los enunciados de las proposiciones Pp7 y Pp9 donde entra en escena el concepto de aproximación y exactitud ya que al sumar las masas de la forma en la que presenta el estudiante no se podrá hallar la masa total exacta, sino que solo se podrá aproximar.

El hecho que ningún FPM reconoce las proposiciones Pp7 y Pp9 puede estar relacionado con la no identificación de los conceptos de aproximación y exactitud, como se ha mencionado en párrafos anteriores en la sección de conceptos-definiciones.

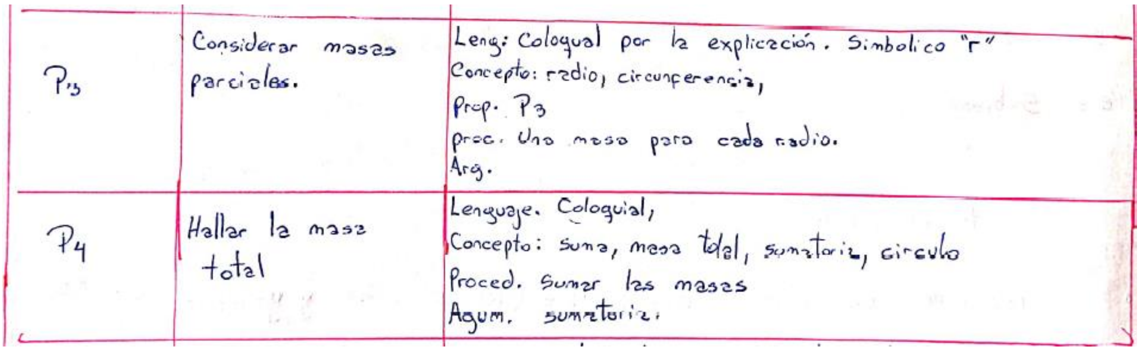
7.6.4.4.4 Procedimientos

Los procedimientos cumplen la función de algorimización, es decir, que nos indican las técnicas de cálculo, los algoritmos o las operaciones que se deben realizar para avanzar en la resolución de la situación-problema.

En las respuestas de los FPM se puede observar que la mayoría logra identificar tres principales procedimientos que intervienen en la resolución del estudiante; el primero, lo asocian con el cálculo de la masa (ver Figura 7.28); el segundo, plantean que “una masa para cada radio” (E3, ver Figura 7.31); y, por último “sumar las masas” (E3, ver Figura 7.31) o sumar todas las masas.

Figura 7.31

Parte del análisis cognitivo del E3 de la Tarea 3

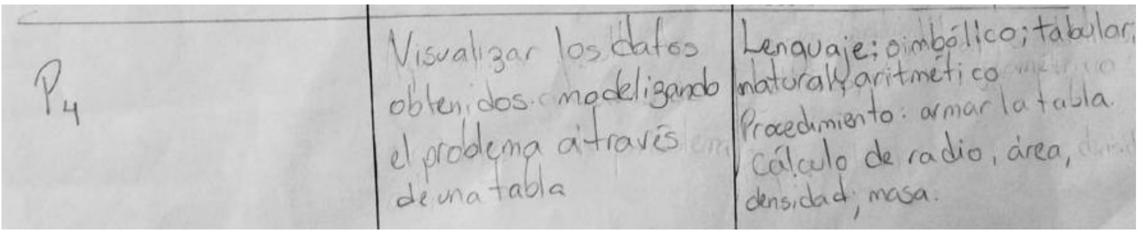


P3	Considerar masas parciales.	Leng: Coloqual por la explicación. Simbolico "r" Concepto: radio, circunferencia, Prop. P3 Proc. Una masa para cada radio. Arg.
P4	Hallar la masa total	Lenguaje. Cologuial, Concepto: suma, masa total, sumatoria, circulo Proced. Sumar las masas Agum. sumatoria.

Por otro lado, solo un FPM logra reconocer como procedimiento el cálculo de la densidad, área y masa cuando el estudiante realiza la tabla (ver Figura 7.32), aunque hay otro FPM que solo menciona como procedimiento “armar la tabla” con lo cual no queda claro si se refiere a los cálculos que se realiza en la tabla o a la construcción de la tabla cuya intención es visualizar que existen diferentes valores de masa para distintos valores de radio. El resto de los FPM no identifica este procedimiento en el análisis cognitivo.

Figura 7.32

Parte del análisis cognitivo del E8 de la Tarea 3



P4	Visualizar los datos obtenidos modelizando el problema através de una tabla	Lenguaje: simbólico; tabular; natural y aritmetico Procedimiento: armar la tabla. Cálculo de radio, área, densidad, masa.

7.6.4.4.5 Argumentos

Los argumentos son enunciados y/o razonamientos utilizados, de manera explícita o implícita, que cumplen la función de justificar, validar o explicar las proposiciones y procedimientos. En general, se puede observar que en los análisis cognitivos realizados por los FPM; dos no colocan en sus respuestas a los argumentos; cinco comparten la identificación de la función como correspondencia y la definición de sumatoria como argumentos; y, uno confunde con la explicación y/o descripción de los hechos.

Solo dos FPM logran identificar como argumentos la definición de circulo y circunferencia, pero no aclaran que se debería considerarlos como lugares geométricos debido al uso que tienen estos objetos en la resolución del estudiante.

Por otro lado, resalta importante destacar que algunos FPM mencionan como argumentos a la masa, densidad y al área, o como las expresan como las definiciones de masa, densidad y área. Solo dos FPM mencionan a la fórmula para el cálculo de la masa como argumento, este hecho es significativo ya que implica un análisis más profundo hacia la resolución del estudiante tratando de reconocer qué papel cumple este argumento en la resolución de la tarea dad por el estudiante.

Si bien hay otros argumentos que validan y justifican a las proposiciones y procedimientos que ha realizado el estudiante, estos no fueron identificados por los FPM, lo que constituye un indicador de la necesidad de revisar y volver a reflexionar sobre el papel que cumplen los argumentos en la resolución de una situación-problema.

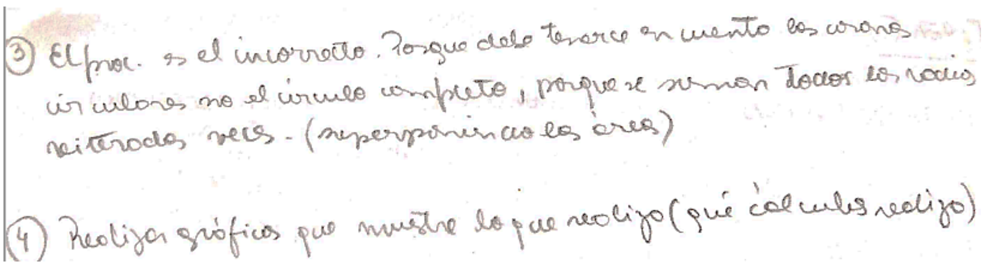
7.6.4.4.6 Respuestas de las preguntas 3 y 4

El análisis cognitivo nos permite identificar la red de objetos matemáticos que intervienen en la resolución de un estudiante, la trama de relaciones que establece el estudiante al resolver la situación y potenciales conflictos cognitivos. Estas relaciones determinan la competencia matemática del estudiante, y se es importante que el profesor pueda realizar este tipo de estudio. Por tales motivos, la pregunta 3 tiene la intención de que el FPM pueda valorar la resolución del estudiante y determinar potenciales conflictos, errores y/o dificultades que pudieran surgir en la resolución.

En esta dirección, encontramos que dos FPM plantean que la resolución es correcta pero incompleta porque no se logra un resultado exacto. En cambio, seis FPM plantean que la resolución es incorrecta y argumentan su respuesta, mencionado que se están superponiendo áreas de los círculos o que se están considerando los mismos valores de radio para las sumas parciales de las masas (Figura 7.33).

Figura 7.33

Respuestas de la pregunta 3 y 4 del E5


3) El proc. es el incorrecto. Porque debe tenerse en cuenta las coronas circulares no el circulo completo, porque se suman todos los radios reiterados veces. (superponiendo las áreas)

4) Realizar gráficos que muestre lo que realizo (qué calculos realizo)

En las respuestas de los FPM sobre porque la resolución es incorrecta, se puede apreciar que han logrado identificar un conflicto cognitivo que se relaciona con la consideración de las áreas de los círculos en lugar de trabajar con coronas circulares, lo que permite avanzar en la resolución sin superponer áreas, y, en consecuencia, masas. Si bien, los FPM no mencionan a este hecho didáctico significativo como conflicto cognitivo, pueden advertir que es una dificultad que presenta el estudiante y que no le permite avanzar en la resolución.

La identificación del conflicto cognitivo es uno de los primeros pasos para avanzar en la progresión del aprendizaje, por tales motivos se ha incluido en la consigna la pregunta 4 que busca generar la discusión con relación a cómo los FPM trabajarían sobre el conflicto con los estudiantes para avanzar en la resolución. La mayoría propone dos retroalimentaciones y/o estrategias que implementarían para resolver el conflicto; por un lado, solicitarle al estudiante que realice los gráficos de los círculos de los radios que está considerando para aproximar el valor de la masa total (ver respuesta de la pregunta 4 del E5, Figura 7.33), propiciando de esta manera el desarrollo de competencias argumentativas-comunicativas por parte de los estudiantes ya que implica volver sobre sus propias resoluciones, reflexionar sobre ellas y emplear recursos gráficos para mejorar la comunicación de las ideas matemáticas. Por otro lado, mencionan el uso de las preguntas como recurso para generar la discusión sobre la resolución para resolver el conflicto, solicitándole que amplie sus explicaciones, entre otras intervenciones.

7.6.5 Discusiones de la Tarea 3

En síntesis, se puede afirmar a partir de la evidencia recopilada y las valoraciones realizadas que los FPM han logrado realizar un gran avance en el desarrollo de la competencia de análisis cognitivo ya que han mejorado la identificación de las prácticas, objetos y procesos, como así también los potenciales conflictos cognitivos. Si bien hay varias cuestiones para mejorar, se considera que los resultados muestran un cierto grado de avance en el uso competente del análisis cognitivo en los FPM.

7.6.6 Análisis de la implementación de la Fase 4

7.6.6.1 Introducción

En este trabajo de investigación centramos nuestra atención en la evaluación de los conocimientos y competencias de los FPM en el análisis epistémico de una nueva situación-problema en la que interviene el diferencial de una función.

El desarrollo de la competencia de análisis epistémico implica:

— Proponer diferentes estrategias de resoluciones para la situación-problema.

— Dividir las resoluciones en prácticas matemáticas elementales y reconocer el uso e intencionalidad de cada una de las prácticas.

— Identificar los objetos: lenguajes (natural, icónico, diagramático, simbólico...), conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, que intervienen en esas prácticas.

— Reconocer los procesos matemáticos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas.

— Identificar conflictos epistémicos potenciales de las resoluciones.

— Relacionar las configuraciones de prácticas, objetos y procesos con los significados parciales del concepto diferencial.

En particular, abordamos las siguientes preguntas de investigación:

— *¿Cómo dividen los FPM las resoluciones en prácticas elementales?*

— *¿Reconocen los FPM el uso e intencionalidad de cada una de las prácticas matemáticas?*

— *¿Qué objetos matemáticos (lenguajes, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos) identifican los FPM en las prácticas matemáticas?*

— *¿Cómo establecen los FPM el significado parcial del diferencial que interviene en la resolución de la situación-problema?*

— *¿Qué relaciones establecen los FPM entre las prácticas y objetos matemáticos con los significados parciales del diferencial?*

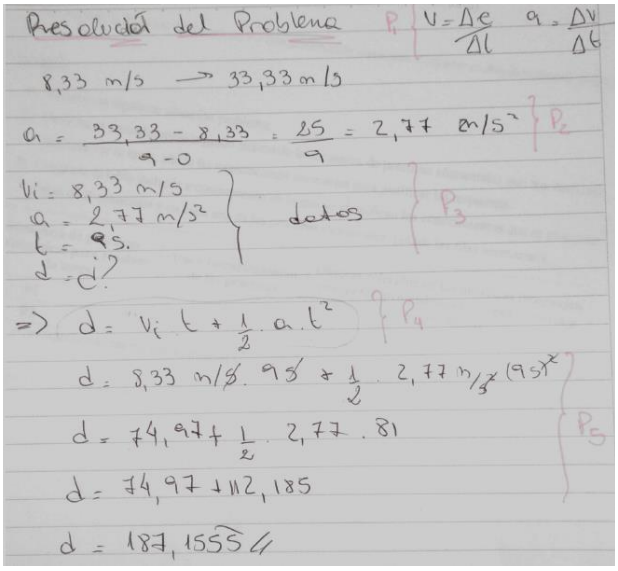
Las producciones realizadas por los FPM se analizan según las acciones que permiten dar cuenta del desarrollo de la competencia de análisis epistémico (Burgos y Godino, 2022b); es por ello que en primer lugar, se valora si los FPM lograron resolver la situación-problema y dividir la resolución en una secuencia de prácticas matemáticas elementales; en segundo lugar, se valora si reconocen el uso e intencionalidad de cada una de las prácticas; en tercer lugar, se avanza sobre la identificación de los objetos matemáticos que intervienen en las practicas; y por último, se valora qué relaciones establecen entre las prácticas y objetos matemáticos con los significados parcial del diferencial.

7.6.6.2 Resolución y reconocimiento de la secuencia de prácticas matemáticas elementales

En general, se presentaron cuatro resoluciones diferentes; una de las resoluciones es la aplicación de la fórmula para el cálculo de la distancia con aceleración constante la cual fue presentada por tres estudiantes (E3, E4 y E8) (Ver Figura 7.34).

Figura 7.34

Parte de la resolución del E8 de la Tarea 4



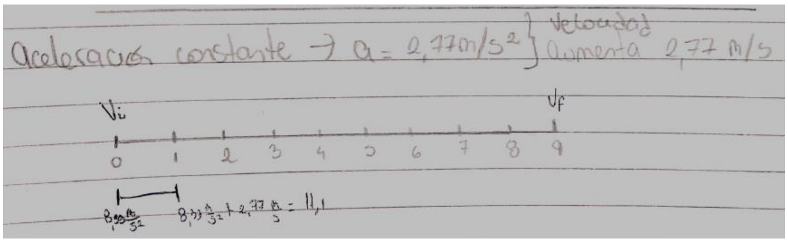
Como se puede apreciar en la Figura 7.34, el E8 ha utilizado la fórmula para calcular la distancia total del auto en los 9s y ha dividido su resolución en cinco prácticas matemáticas elementales, las cuales indican que ha logrado reconocer las diferentes acciones y/o decisiones en la resolución. El principal inconveniente que ha surgido de la resolución es la justificación y/o explicación por parte de los estudiantes sobre el dominio de validez de la fórmula para calcular la distancias. Frente a las preguntas de sus compañeros, estos FPM no pudieron responder cuándo es posible usar la fórmula o cómo se llega a obtener esa fórmula.

En la segunda resolución que presentaron los estudiantes (E2, E3 y E6) se observa que dividieron el intervalo de tiempo en subintervalos de 1s e intentaron calcular la distancia recorrida por el auto en cada subintervalo (ver Figura 7.35). Si bien, no se logra observar en las producciones de los FPM que hayan terminado la resolución utilizando esta estrategia, se considera que esta resolución es el punto de partida para la tercera resolución presentada por siete FPM.

Cabe destacar que en esta resolución se observa un avance en el reconocimiento de que el desplazamiento total del auto se obtendrá mediante la suma de los diferentes desplazamientos de cada uno de los subintervalos, lo que indica una primera identificación de la variación de las magnitudes involucradas (desplazamiento y velocidad) en función del tiempo considerado, además de relacionar la suma de los desplazamientos con las ideas de acumulación.

Figura 7.35

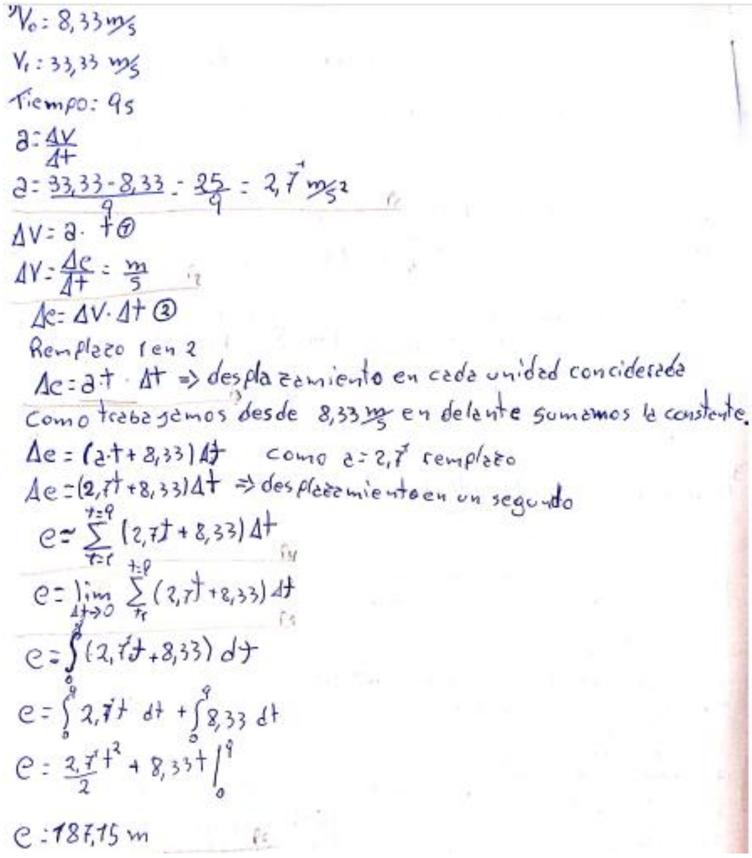
Parte de la resolución del E3 de la Tarea 4



La tercera resolución, presentada por el E10 se observa que la secuencia de prácticas matemáticas que ha utilizado para establecer relaciones entre la aceleración, la velocidad y el desplazamiento. Se destaca en la resolución como el estudiante divide las practicas a medida que interviene un nuevo objeto matemático, por ejemplo, en la Figura 7.36 se puede apreciar que el paso de la práctica 4, 5 y 6 implica el paso de plantear la sumatoria, luego aplica el límite de la sumatoria cuando el incremento del tiempo tiende a cero para llegar a la integral definida.

Figura 7.36

Parte de la resolución del E10 de la Tarea 4



$V_0: 8,33\ m/s$

$V_1: 33,33\ m/s$

Tiempo: 9s

$a: \frac{\Delta v}{\Delta t}$

$a: \frac{33,33-8,33}{9} = \frac{25}{9} = 2,7\ m/s^2$

$\Delta v: a \cdot t$ ①

$\Delta v: \frac{\Delta e}{\Delta t} = \frac{m}{s}$

$\Delta e: \Delta v \cdot \Delta t$ ②

Remplazo 1 en 2

$\Delta e: a t \cdot \Delta t \Rightarrow$ desplazamiento en cada unidad considerada

Como trabajemos desde $8,33\ m/s$ en delante sumamos la constante.

$\Delta e = (a \cdot t + 8,33)\Delta t$ como $a = 2,7$ remplazo

$\Delta e = (2,7t + 8,33)\Delta t \Rightarrow$ desplazamiento en un segundo

$e \simeq \sum_{t=1}^{t=9} (2,7t + 8,33)\Delta t$

$e = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{t=1}^{t=9} (2,7t + 8,33)\Delta t$

$e = \int_0^9 (2,7t + 8,33)\, dt$

$e = \int_0^9 2,7t\, dt + \int_0^9 8,33\, dt$

$e: \frac{2,7t^2}{2} + 8,33t \Big|_0^9$

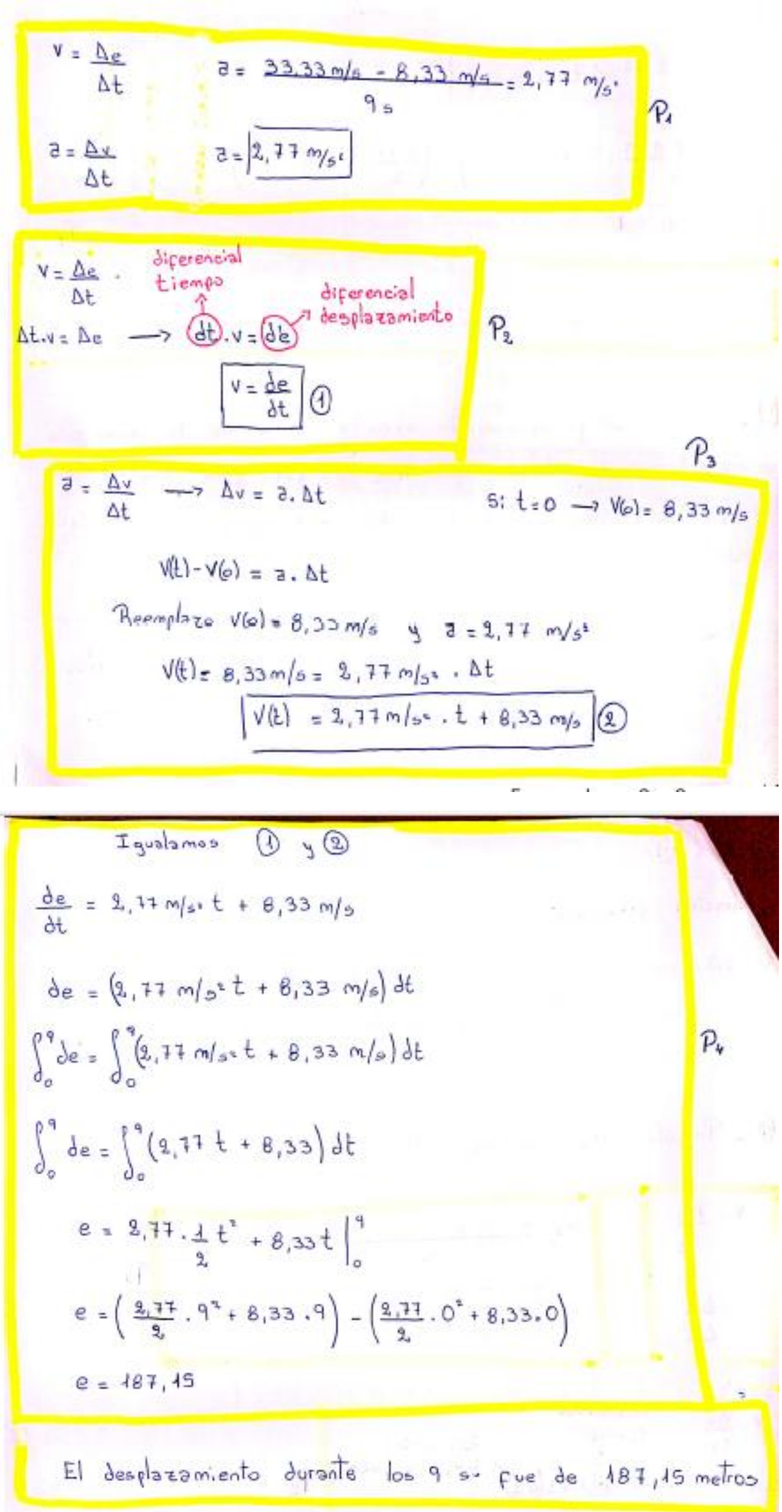
$e: 187,15\ m$

En la cuarta resolución, presentada por siete FPM, se puede observar como hacen uso del diferencial como una cantidad infinitesimal (Verón y Giacomone, 2021) para definir el diferencial tiempo (dt), el diferencial desplazamiento (de) y establecer las relaciones $de = v \cdot dt$ y $v = \frac{de}{dt}$. Además, se observa en la práctica 4 como se emplea la integral definida para calcular el desplazamiento total mediante la expresión $\int_0^9 de$ la cual indica la suma de los infinitos de que se determinan en el intervalo de tiempo $[0, 9]$.

En la resolución de la E12 (Figura 7.37) se puede observar cómo ha logrado identificar las prácticas matemáticas que conformar a la resolución, dividiendo según las acciones y/o decisiones que fue tomando para progresar en la compresión de la situación-problema. Tal vez, resulte necesario subdividir la práctica 4 en prácticas más elementales ya que intervienen objetos matemáticos diferentes y complejos, es decir, al principio se emplea la noción de diferenciales y se establece una ecuación diferencial, luego se plantea la integral definida como una suma de infinitos de, y, por último, se utiliza la Regla de Barrow. En este sentido, se podría descomponer la práctica 4 en tres prácticas matemáticas elementales.

Figura 7.37

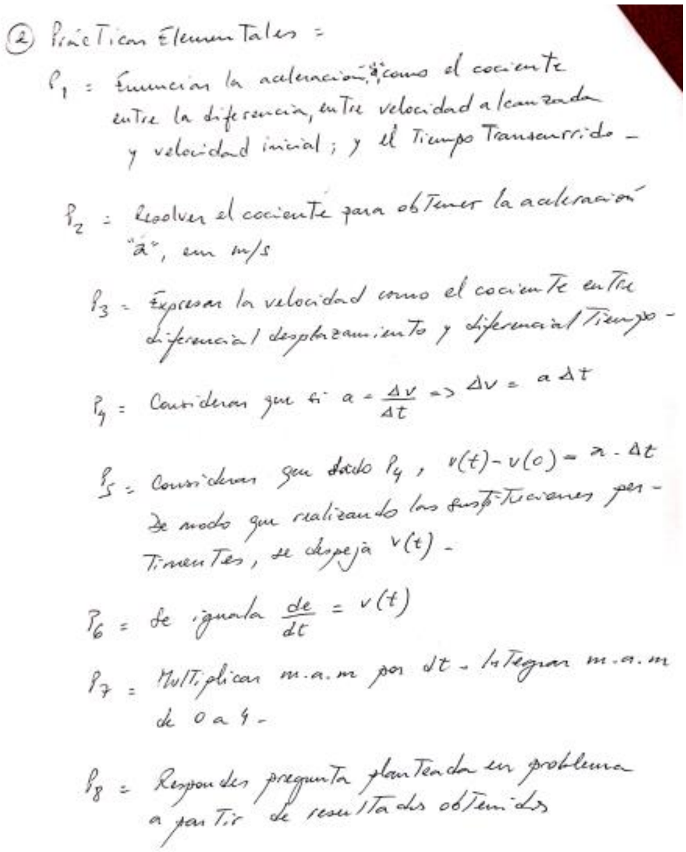
Parte de la resolución del E12 de la Tarea 4



A modo de síntesis, se puede advertir que algunos FPM no presentaron muchos inconvenientes para resolver la situación-problema, ya que todos presentaron alguna resolución e incluso algunos presentaron dos resoluciones. En relación con la valoración de la división de la resolución en una secuencia de prácticas matemáticas, es posible afirmar que la mayoría de los FPM logro identificar las prácticas matemáticas elementales en sus resoluciones, ya que 8 de las 12 respuestas dividen sus resoluciones en prácticas. A partir de la evidencia presentada, se puede agregar que los FPM dividen las prácticas matemáticas teniendo en cuenta las diferentes acciones y/o decisiones que van considerando o tomando para avanzar en la resolución de la tarea, como se puede apreciar claramente en la resolución de la E11 (ver Figura 7.38).

Figura 7.38

Parte de la resolución del E5 de la Tarea 4



② Prácticas Elementales =

P_1 = Enunciar la aceleración "a" como el cociente entre la diferencia, entre velocidad alcanzada y velocidad inicial; y el tiempo transcurrido.

P_2 = Resolver el cociente para obtener la aceleración "a", en m/s

P_3 = Expresar la velocidad como el cociente entre diferencial desplazamiento y diferencial tiempo.

P_4 = Considerar que si $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \Delta v = a \Delta t$

P_5 = Considerar que dado P_4, $v(t) - v(0) = a \cdot \Delta t$ de modo que realizando las sustituciones pertinentes, se despeja $v(t)$.

P_6 = Se iguala $\frac{de}{dt} = v(t)$

P_7 = Multiplicar m.a.m por dt. Integrar m.a.m de 0 a 4.

P_8 = Responder pregunta planteada en problema a partir de resultados obtenidos

Por último, es importante destacar que ningún FPM considera como una práctica matemática la primera acción que sucede al momento en que se enfrentan con la situación-problema, es decir, la interpretación y lectura del enunciado del problema está cargado de objetos matemáticos que intervienen y delinean las futuras acciones que se realizaran para comenzar a resolver la situación.

7.6.6.3 Reconocimiento del uso e intencionalidad de las prácticas matemáticas

Se considera importante que el FPM pueda ser competente en el reconocimiento del uso e intencionalidad de las prácticas matemáticas, es decir, no es solo describir o narrar los pasos realizados, sino poder determinar o identificar cual es el uso de esa práctica en el contexto del problema. Cada práctica matemática se utiliza o tiene la intención de establecer un procedimiento, calcular un valor, relacionar conceptos/proposiciones, interpretar una representación, comunicar una idea matemática, etc., por tales motivos, es importante que el profesor puede ser competente en identificar el uso e intencionalidad de cada práctica, ya que le permite valorar: las relaciones e ideas matemáticas que manifiestan los estudiantes; y los procesos que intervienen y emergen que constituyen indicadores de los aprendizajes y que son necesario identificarlos para poder discutirlos o institucionalizarlos, o para identificar conflictos cognitivos potenciales que intervienen en las resoluciones.

En general, se observa que siete resoluciones de los FPM no identifican el uso e intencionalidad de las prácticas matemáticas de la situación-problema. De las restantes, dos presentan de manera incompleta y tres muestran el análisis epistémico completo. En esta sección se analizarán las resoluciones presentadas por los tres FPM que han presentado el análisis epistémico con completo.

Una de las primeras cuestiones que se observa en una resolución de un FPM es que relacionan la secuencia de prácticas matemáticas con la explicación (narración) de los pasos que se realizan para resolver la situación-problema, sin advertir el uso que tiene esa práctica en el contexto del problema, como se observa en la respuesta del estudiante E5 (ver Figura 7.39).

Figura 7.39

Parte de la resolución del E5 de la Tarea 4

Secuencia de Prácticas Matemáticas	Uso e intencionalidad de las Prácticas
• Encontrar la velocidad	• Utilizar el cociente incremental para Hallar la velocidad.
• Reconocer que el tiempo se trabaja como variable.	• Aplicación del diferencial
• Obtener el área total recorrido por medio de la integral.	• Integración definida en un intervalo
	• Interpretar el resultado obtenido al final.

En la resolución presentada por la E12 se observa que logra identificar la intencionalidad de cada una de las cuatro prácticas matemáticas que ha dividido su resolución, pero su identificación es general y por tales motivos se pasa por alto objetos y procesos importantes de la resolución. Por ejemplo, en la segunda práctica se establece la diferencial tiempo (dt), la diferencial desplazamiento (de) y se los relaciona mediante la ecuación $dt \cdot v = de$ para obtener la expresión $v = \frac{de}{dt}$. Además, subyace el proceso de consideración de los infinitesimales en el tiempo y en el desplazamiento lo que posibilita el paso de los incrementos a los diferenciales (ver Figura 7.40). Sin embargo, la E12 plantea que la intencionalidad de la práctica es "Establecer una expresión para la velocidad" (ver Figura 7.40) la cual es incompleta ya que no logra reconocer todos los procesos matemáticos que intervienen en esta práctica. Una posible dificultad puede que este asociado al hecho de que la práctica dos es posible dividirla en prácticas más elementales que permitan mostrar con mayor detalle los procesos que se están realizando de manera implícita.

Figura 7.40

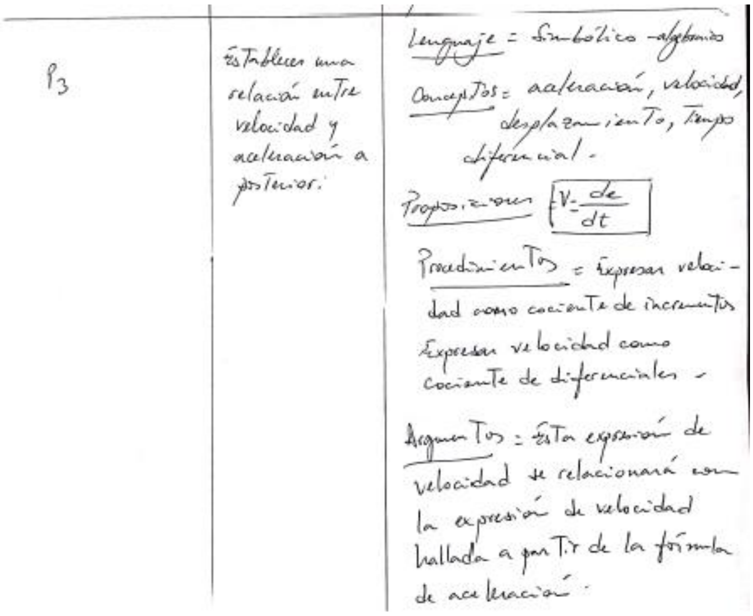
Parte de la resolución del E12 de la Tarea 4

Prácticas matemáticas	Intencionalidad	Objetos matemáticos
P_1	Establecer una expresión para calcular la aceleración.	Lenguaje: Simbólico (Δe, Δt...), aritmético (operaciones) algebraico (2,77 m/s²). Concepto: Operaciones aritmeticas, cuadrado, distancia (m), tiempo (s), velocidad, aceleración, incremento, Proposiciones: Procedimientos: Calcular el incremento de velocidad y tiempo para hallar la aceleración. Argumentos.
P_2	Establecer una expresión para la velocidad	Lenguaje: Simbólico (dt), algebraico ($dt \cdot v = \Delta e$) Concepto: Diferencial Proposición: dt (dif. tiempo), de (dif. de plazamiento) Procedimiento: trabajo algebraico par establecer la igualdad $v = \frac{de}{dt}$. Argumento: $dx \rightarrow \Delta x$

En la resolución del E11, se observa que es similar a la E12, pero se ha identificado ocho prácticas matemáticas, y en particular se toma la tercera para analizar y relacionar con lo expuesto anteriormente. En la práctica tres, no se hace mención del uso de los diferenciales, si bien se mencionan como objetos matemáticos que intervienen, pero no se logra identificar cómo emergen de la resolución, para qué se los utiliza, cuya información debería estar expuesta en la intencionalidad (ver Figura 7.41).

Figura 7.41

Parte de la resolución E11 de la Tarea 4



P3	Establecer una relación entre velocidad y aceleración a posterior.	Lenguaje = Simbólico-algebraico Conceptos = aceleración, velocidad, desplazamiento, tiempo diferencial. Proposiciones $\boxed{V = \frac{de}{dt}}$ Procedimientos = Expresar velocidad como cociente de incrementos Expresar velocidad como cociente de diferenciales. Argumentos = Esta expresión de velocidad se relacionará con la expresión de velocidad hallada a partir de la fórmula de aceleración.

En síntesis, se puede afirmar que las resoluciones de los E11 y E12 son adecuadas, en el sentido que están encausadas, pero son mejorables, ya que teniendo en cuenta que es el primer análisis epistémico que realizan los FPM de manera individual y solos, ya que la Tarea 4 era una actividad complementaria no obligatoria. Se considera que la identificación del uso e intencionalidad de las prácticas matemáticas es mejorable en la medida en que se pongan en discusión con los FPM cuyo objetivo principal es poder develar cuál es la intención, función y/o qué aporta cada una de las prácticas a la resolución de la situación-problema y al aprendizaje de los significados parciales de la diferencial.

7.6.6.4 Identificación de los objetos matemáticos

En esta sección se analizará un aspecto más de la competencia de análisis epistémico que han logrado los FPM en la identificación de los objetos matemáticos, como los lenguajes (natural, icónico, diagramático, simbólico, etc.), conceptos-definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos, que intervienen en la secuencia de prácticas matemáticas.

Para esta competencia se analizarán tres producciones de los FPM (E10, E11 y E12), ya que los restantes no han presentado la identificación de los objetos matemáticos en la secuencia de prácticas. En primer lugar, cabe destacar que estos tres FPM han realizado el reconocimiento de los objetos matemáticos que intervienen en cada una de las prácticas matemáticas que han dividido su resolución.

En relación con los *elementos del lenguaje* que identifican los FPM, predomina en sus resoluciones la identificación del lenguaje simbólico y algebraico. También, el E12 identifica el lenguaje aritmético (relacionado a las operaciones aritméticas para el cálculo de la aceleración), y funcional (asociado a la expresión que obtiene de la velocidad en función del tiempo $v(t)$). Además, mencionan E11 y E12 el lenguaje coloquial vinculado a la comunicación de la solución de la situación-problema.

Un aspecto importante para destacar es la precisión de la E12 en relación con las producciones de sus compañeros, ya que E12 indica entre paréntesis un ejemplo del lenguaje utilizado en cada práctica, a diferencia de sus compañeros que lo realizan de manera más general, esta cuestión se puede observar al comparar las resoluciones de E11 y E12 en las Figura 7.40 y Figura 7.41.

Con relación a la identificación de los *conceptos-definiciones*, los FPM no presentaron muchos inconvenientes para identificar estos conceptos en cada una de las prácticas matemáticas. Pero se puede advertir en las respuestas que la mayoría identifica como concepto-definición solamente a los objetos que puede reconocer explícitamente y/o que ocupa el lugar central en la práctica matemática. Aunque de las tres resoluciones, dos han logrado reconocer a los conceptos-definiciones de variación y de función. Sin embargo, resulta interesante destacar que en la secuencia de prácticas de la resolución del E10 (Figura 7.35) el paso de la P5 a la P6 se cambia Δt por dt, entre otros, al plantear el límite de la sumatoria, pero la incorporación del diferencial tiempo en la expresión de la integral no lo reconoce como un concepto-definición, ya que solo menciona a la integral definida como el nuevo concepto que interviene en la práctica.

Las *proposiciones* cumplen la función de enunciación en las prácticas matemáticas, es decir que son afirmaciones que permiten identificar asociaciones, vínculos y/o relaciones que se establecen, intervienen o emergen entre los conceptos-definiciones para construir ideas matemáticas que permitan avanzar en la resolución de la situación-problema.

En general, se observa que es uno de los objetos matemáticos que resulta más difícil su identificación son las proposiciones, ya que implica que el profesor debe tener una cierta competencia en poder reconocer las relaciones, vinculados y/o asociaciones entre los conceptos-definiciones, debe poder preguntarse, cómo se relacionan estos conceptos, qué ideas construyen estos conceptos que se están utilizando, este aspecto de la actividad matemática no resulta sencillo para los FPM, resultados que se encuentran en línea con los estudios de Giacomone (2018).

En las resoluciones, se puede observar que: E10 solo identifica una proposición "el desplazamiento es igual a la suma de los desplazamientos"; E12 reconoce tres proposiciones, las dos primeras asociadas a establecer la diferencial tiempo y la diferencial desplazamiento (Ver Figura 7.40), y la tercer proposición hace referencia a la consideración de la velocidad inicialen el tiempo inicial $(t = 0 \rightarrow v(0) = 8{,}33m/s)$. Sin embargo, la E11 indica en cada una de las ocho prácticas que ha dividido su resolución una proposición, algunas de ellas expresan las relaciones entre los conceptos empleando un lenguaje algebraico simbólico, como se puede apreciar en la proposición de P3 en la Figura 7.41.

Los *procedimientos* cumplen la función de algorimización, es decir, indican las técnicas de cálculo, los algoritmos o las operaciones que se deben realizar para avanzar en la resolución de la situación-problema. En las resoluciones de los FPM, el E10 menciona algunos procedimientos en su análisis de manera incompleta; en cambio, los E11 y E12 logran identificar en cada una de las prácticas matemáticas al menos un procedimiento. La diferencia entre E11 y E12, está en que E11 describe en cada práctica uno o más procedimientos como pasos, acciones, cálculos que realizó para avanzar en la resolución (Ver Figura 7.41); en cambio, E12 menciona los procedimientos de una manera más general, por ejemplo, expresa para la P2 "trabajo algebraico para establecer la igualdad $v = \frac{de}{dt}$" (ver Figura 7.40).

Los *argumentos* son enunciados y/o razonamientos utilizados, de manera explícita o implícita, que cumplen la función de justificar o validar las proposiciones y procedimientos. En las resoluciones de los FPM, el E10 no menciona ningún argumento en su análisis; en cambio, E12 menciona dos argumentos, uno en relación con la función como correspondencia entre la velocidad del auto y el tiempo, y el otro no es claro ya que solo lo expresa de manera simbólica como el paso o la relación entre la diferencial de x y el incremento de x $(dx \rightarrow \Delta x)$ (ver el argumento de P2 en la Figura 7.40). La E11 menciona a los argumentos solo en las primeras tres prácticas de las ocho que dividió, las mismas están asociadas a explicar los pasos realizados que a justificar qué conceptos-definiciones validan esas proposiciones o procedimientos empleados. Por tales motivos, se puede afirmar que resulta necesario volver a discutir con los FPM sobre la función que cumplen los argumentos en el análisis epistémico y la importancia de que el profesor logre desarrollar su competencia para identificarlos y ponerlos en discusión con los estudiantes.

En síntesis, a partir del análisis realizado, se puede plantear que en las resoluciones de los FPM, si bien han comenzado a desarrollar su competencia en la identificación de los objetos matemáticos que intervienen y emergen de cada una de las prácticas matemáticas, es necesario reforzar esta identificación para que logren reconocer los objetos que intervienen de manera clave en la resolución e identificar las prácticas que resulten conflictivas para los estudiantes en términos de la complejidad de los objetos y procesos matemáticos.

7.6.6.5 ¿Qué significado parcial del diferencial se puede relacionar con la tarea?

En relación con la pregunta 4 de la Tarea 4, de las 12 resoluciones de los FPM, tres asocian al Diferencial de Leibniz justificando porque se "trabaja con cantidades infinitesimales" (E10) o que "consideramos el tiempo y a la velocidad como cantidades infinitesimales" (E7) (ver Figura 7.42). En cambio, la E11 asocia al Diferencial de Cauchy y justifica mencionando los conceptos que se relacionan con este significado parcial como: "razón de incrementos, diferenciales, cociente de diferenciales y función derivada (ver Figura 7.43). Al importante a destacar en la justificación de la E11, es que menciona al concepto de función derivada, el cual no lo reconoce en la identificación de los objetos matemáticos en las prácticas, lo cual nos permite advertir la necesidad de volver a discutir con los FPM este interrogante y proponer nuevas actividades que incluyan momentos de reflexión sobre las relaciones que se establecen entre el análisis epistémico y los significados parciales de la diferencial que están interviniendo y emergiendo en las resoluciones.

Figura 7.42

Parte de la resolución de E7 de la Tarea 4

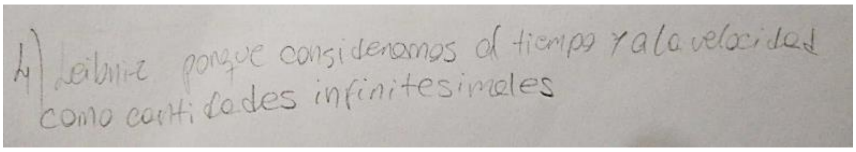
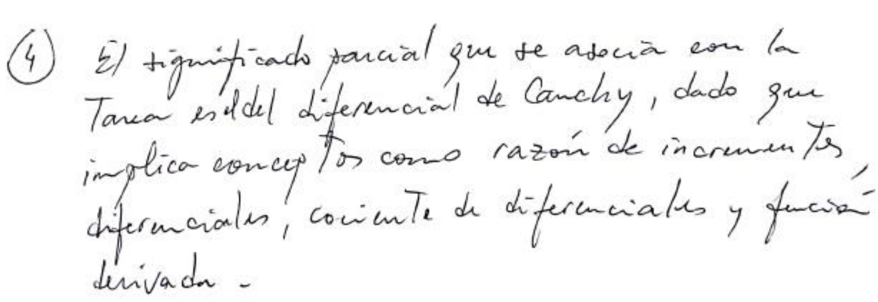

4) Leibniz porque consideramos al tiempo y a la velocidad como cantidades infinitesimales

Figura 7.43

Parte de la resolución de E11 de la Tarea 4


(4) El significado parcial que se asocia con la Tarea es del diferencial de Cauchy, dado que implica conceptos como razón de incrementos, diferenciales, cociente de diferenciales y función derivada.

Pero para la pregunta 4 hay que recuperar una resolución que implica el límite y comparar con las anteriores ya que en esta nueva resolución conviven dos significados parciales de la diferencial de Leibniz y Cauchy.

7.6.7 Discusiones de la Tarea 4

En síntesis, se observa que la identificación de algunos objetos matemáticos tiene cierta dificultad para los FPM, en particular sobre las proposiciones y argumentos. Sin embargo, el reconocimiento de los otros objetos ha resultado satisfactoria ya que la mayoría lo ha realizado de manera adecuada.

7.6.8 Análisis de la implementación de la Fase 5

7.6.8.1 Introducción

Al considerar que una lección de un libro de texto como un proceso de instrucción, es posible emplear las herramientas teóricas y metodológicas del EOS (Godino, 2017; Godino, Batanero y Font, 2007) para realizar un análisis sistemático de las lecciones de los libros de textos. La Teoría de Idoneidad Didáctica (Breda, Font y Pino-Fan, 2018; Godino, 2013; 2021) permite abordar el problema del análisis didáctico de los libros de textos en términos de caracterizar los significados parciales del concepto que se promueven e identificar potenciales conflictos semióticos y posibles mejoras para los aprendizajes pretendidos en las propuestas de los libros. Las diferentes facetas, componentes e indicadores de idoneidad sirven de guía para realizar una valoración de la lección del libro de texto en busca de potenciales mejoras.

El libro de texto es un recurso muy utilizado por los profesores para la planificación de las propuestas de enseñanza. Por tales motivos, resulta necesario que los profesores desarrollen competencias profesionales con relación al uso y gestión del libro de texto para abordar el estudio de los procesos instruccionales en los que interviene la diferencial.

En este sentido se considera necesario proponer en la formación de profesores de matemáticas actividades formativas que permitan el desarrollo de la competencia de análisis didáctico en las lecciones de los libros de textos, cuya competencia implica:

- Reconocer las prácticas matemáticas (operativas, discursivas y/ normativas) que intervienen y emergen en la lección del libro de texto.
- Identificar los objetos: lenguajes (natural, icónico, diagramático, simbólico...), conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, que intervienen en las prácticas de la lección del libro de texto.
- Reconocer los procesos matemáticos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas.
- Identificar conflictos epistémicos potenciales de las prácticas matemáticas.
- Relacionar las configuraciones de prácticas, objetos y procesos con los significados parciales del diferencial.

En esta dirección, las preguntas de investigación son:

- *¿Reconocen los FPM las prácticas matemáticas de la lección del libro de texto?*
- *¿Qué objetos matemáticos (lenguajes, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos) identifican los FPM en la lección del libro de texto?*
- *¿Identifican los FPM los procesos matemáticos implicados en la lección del libro de texto?*
- *¿Cómo establecen los FPM el significado parcial del diferencial que interviene en la lección del libro de texto?*
- *¿Qué aspectos consideran los FPM que se debería tener en cuenta para potenciar el análisis de la lección del libro de texto?*

La reflexión en torno a la faceta epistémica proporciona información útil para que el profesor pueda valorar las potencialidades y limitaciones del libro de texto, identificar conflictos de significados y potenciales mejoras, con el fin de optimizar los aprendizajes de los estudiantes.

A modo de organización, se analizarán en detalle las trece respuestas de los FPM a las preguntas de la Tarea 5 la cual corresponde al análisis epistémico de una lección del libro de texto de Stewart (2012) donde se presenta a la diferencial.

7.6.8.1.1 Pregunta 1: ¿Cuál la intención didáctica de la lección del libro de texto?

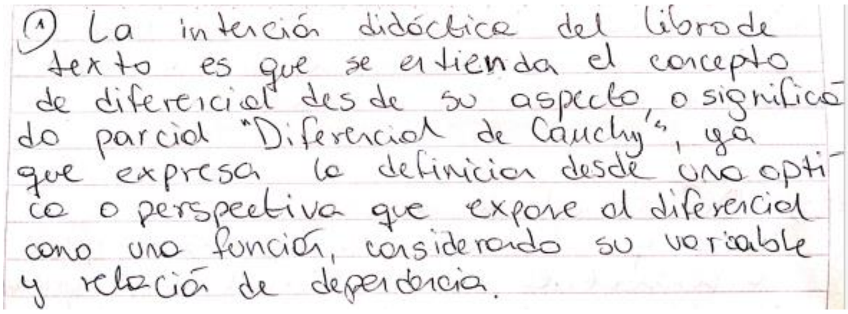
El objetivo principal de esta pregunta es observar en qué se basan los FPM para reconocer la intencionalidad didáctica de la lección, cuestión sumamente importante para el profesor saber para qué se podría utilizar esta lección del libro de texto para planificar y tomar decisiones sobre su uso en los procesos instruccionales en torno a la diferencial.

En las respuestas de los FPM, observamos que 8 mencionan de manera general que la lección pretende "definir", "presentar" o "conceptualizar" el concepto de diferencial. Dos FPM (E8 y E13) plantean que se pretende definir los diferenciales y establecer relaciones con la derivada. Además, E5 y E8, agregan en su respuesta a los tipos de diferenciales que intervienen en la lección y muestran sus símbolos: "diferencial de y" dy y "diferencial de x" dx.

La respuesta del E1, se diferencia de las anteriores ya que menciona que en la lección se aborda el concepto de diferencial como variable y aclara que corresponde a un significado parcial. Si bien E1 no escribe a que significado parcial hace referencia, la E6 si escribe explícitamente que se trata del significado parcial del diferencial de Cauchy y lo relaciona con el concepto de variable, función y relación de correspondencia (Ver Figura 7.44). También, la E11 menciona a los diferenciales dy y dx como variables de pendiente e independiente, respectivamente.

Figura 7.44

Parte de la resolución de la E6 de la Tarea 5



(1) La intención didáctica del libro de texto es que se entienda el concepto de diferencial desde su aspecto, o significado parcial "Diferencial de Cauchy", ya que expresa la definicion desde una optica o perspectiva que expone al diferencial como una función, considerando su variable y relación de dependencia.

Si bien el análisis está incompleto, resulta importante estudiar las afirmaciones que emiten los FPM en una primera observación de la lección del libro de texto sobre la diferencial, lo que nos permite realizar unas observaciones sobre los objetos matemáticos que más le llaman la atención y que les permite tomar unas primeras decisiones sobre la lección.

7.6.8.1.2 Pregunta 2: ¿Qué prácticas matemáticas se pueden identificar en la lección del libro de texto?

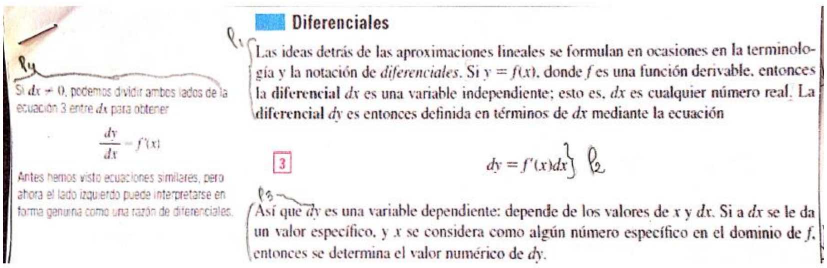
La identificación de la secuencia de prácticas matemáticas elementales resulta pertinente (o necesario) para emprender un análisis microscópico de la lección del libro de texto porque permite identificar hechos didácticos significativos o bien, momentos claves en los que participan conceptos claves o emergen conceptos pretendidos.

En el contexto de la presente investigación, una práctica elemental se puede considerar como didácticamente significativo en la medida en que el futuro profesor pueda advertir el surgimiento de un potencial conflicto semiótico, e identificar el uso de los objetos matemáticos primarios y sus relaciones.

Para el análisis de las producciones de los futuros profesores de matemáticas se cuenta con catorce respuestas. En general, todos los FPM han logrado identificar las prácticas matemáticas involucradas en la lección, la mayoría divide la lección en cuatro o cinco prácticas, se considera que esta forma de dividir las prácticas está asociada, en parte, por la disposición u organización de la configuración didáctica (lección). Algunos FPM dividen el primer párrafo en dos prácticas se parando las descripciones de los diferenciales dx y dy. A modo de ejemplo, se destacan las respuestas de los E12 y E14, ya que además de identificar las practicas matemáticas, mencionan el uso e intencionalidad de cada una de las prácticas, como se puede observar en la Figura 7.45 (a) y (b).

Figura 7.45

Parte de la respuesta de E14 de la Tarea 5



P4

Si $dx \neq 0$, podemos dividir ambos lados de la ecuación 3 entre dx para obtener

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Antes hemos visto ecuaciones similares, pero ahora el lado izquierdo puede interpretarse en forma genuina como una razón de diferenciales.

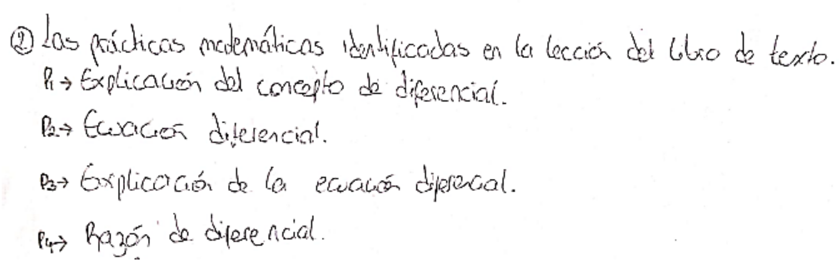
Diferenciales

P1 Las ideas detrás de las aproximaciones lineales se formulan en ocasiones en la terminología y la notación de *diferenciales*. Si $y = f(x)$, donde f es una función derivable, entonces la **diferencial** dx es una variable independiente; esto es, dx es cualquier número real. La **diferencial** dy es entonces definida en términos de dx mediante la ecuación

$$\boxed{3} \qquad dy = f'(x)dx \quad \text{P2}$$

P3 Así que dy es una variable dependiente: depende de los valores de x y dx. Si a dx se le da un valor específico, y x se considera como algún número específico en el dominio de f, entonces se determina el valor numérico de dy.

(a)



② Los prácticas matemáticas identificadas en la lección del libro de texto.

P1 → Explicación del concepto de diferencial.

P2 → Ecuación diferencial.

P3 → Explicación de la ecuación diferencial.

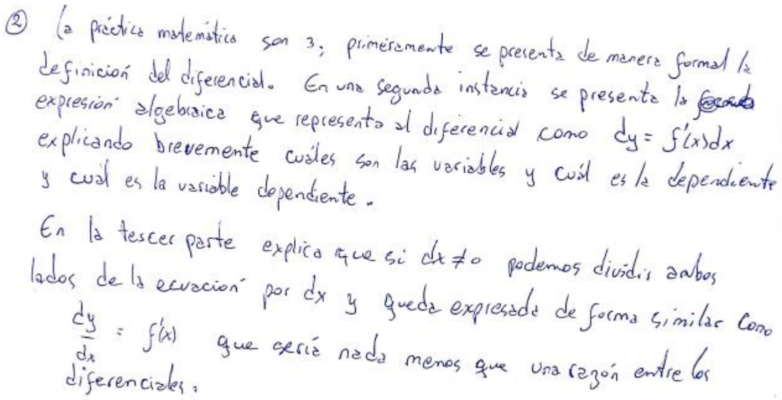
P4 → Razón de diferencial.

(b)

Por otro lado, otros FPM luego de dividir la lección en prácticas matemáticas, realizan una narración indicando las funciones o intenciones de cada una de las prácticas, donde se puede apreciar los objetos matemáticos que logran identificar, como se observa en la respuesta del E11 (ver Figura 7.46).

Figura 7.46

Parte de la respuesta del E11 de la Tarea 5

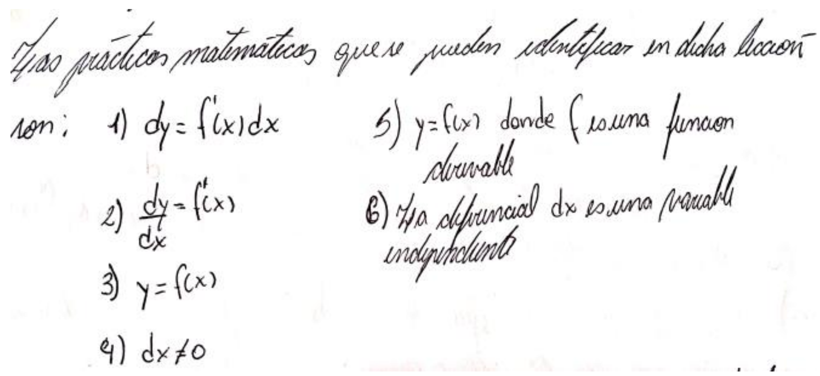

② la práctica matemática son 3; primeramente se presenta de manera formal la definición del diferencial. En una segunda instancia se presenta la ~~[illegible]~~ expresión algebraica que representa al diferencial como $dy = f'(x)dx$ explicando brevemente cuáles son las variables y cuál es la dependiente y cuál es la variable dependiente.

En la tescer parte explica que si $dx \neq 0$ podemos dividir ambos lados de la ecuación por dx y queda expresada de forma similar como $\frac{dy}{dx} = f(x)$ que sería nada menos que una razón entre los diferenciales.

Por otro lado, tres FPM asocian las prácticas matemáticas con las expresiones algebraicas y/o simbólicas (lenguaje) que interviene en la lección. Si bien, en la lección hay prácticas elementales del tipo algebraica y simbólica, no es cierto que solo se utiliza este tipo de lenguaje en las prácticas, ya que se deja de lado otros elementos del lenguaje que permiten la comunicación de las ideas matemáticas como el lenguaje natural, geométrico, icónico, etc. A modo de ejemplo, se muestra la respuesta del E10 en la Figura 7.47.

Figura 7.47

Parte de la respuesta del E10 de la Tarea 5


Las prácticas matemáticas que se pueden identificar en dicha lección son:

1) $dy = f'(x)dx$
2) $\frac{dy}{dx} = f'(x)$
3) $y = f(x)$
4) $dx \neq 0$
5) $y = f(x)$ donde f es una función derivable
6) La diferencial dx es una variable independiente

7.6.8.1.3 *Pregunta 3: ¿Qué objetos matemáticos intervienen y emergen en las prácticas matemáticas de la lección del libro de texto?*

En esta sección se analizará que objetos matemáticos (lenguajes, conceptos-definición, proposiciones, procedimientos y argumentos) que logran identificar los FPM en la configuración didáctica (lección del libro de texto) para progresar en el desarrollo de la competencia de análisis epistémico. Un aspecto importante para destacar sobre la organización y presentación del análisis de los objetos matemáticos realizada por los FPM es que de las 14 respuestas; 10 realizan un análisis global de la configuración didáctica; en cambio, solo 4 describen los objetos primarios en cada una de las prácticas matemáticas que han dividido la lección.

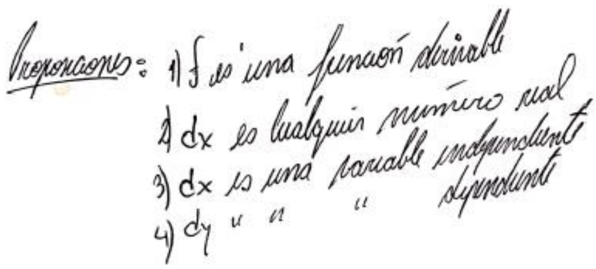
En relación con los *elementos del lenguaje*, todos los FPM identifican de manera correcta los lenguajes involucrados, donde mencionan al lenguaje natural o coloquial, simbólico, algebraico y funcional.

Respecto a los *conceptos-definiciones* que intervienen en las prácticas matemáticas, la mayoría de los FPM identifica sin inconvenientes los conceptos de función, variables independiente y dependiente, dominio de una función, función derivada, ecuación, diferenciales, división, razón de diferenciales, valor numérico y números reales. Si bien hay solo una respuesta que no identifica los conceptos, las restantes logran reconocer todos los conceptos mencionados. Sin embargo, el concepto de aproximación lineal solo es mencionado por dos FPM (E7 y E10).

En cuanto a las *proposiciones*, se tienen 10 respuestas de los FPM donde predomina la identificación de cuatro proposiciones relacionadas directamente con la conceptualización de la diferencial, como se puede observar en parte de la respuesta de E10 (Figura 7.48).

Figura 7.48

Parte de la respuesta de E10 de la Tarea 5



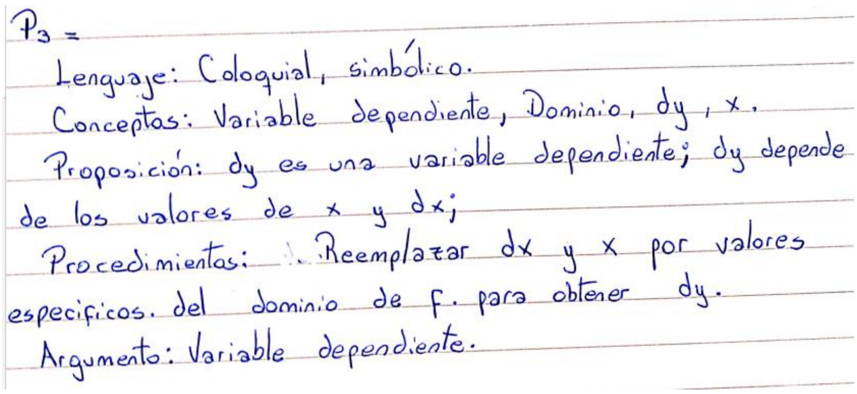
Si bien, la mayoría de los FPM ha logrado identificar las proposiciones que colaboran en la conceptualización de la diferencial de x (dx) como una variable independiente y que puede tomar cualquier número real, solo dos FPM (E1 y E2) han logrado identificar y explicitar una quinta proposición "$dx \neq 0$" la cual es muy importante para el proceso de definición de la diferencial.

La proposición "$dx \neq 0$" es reconocida por varios FPM como parte de un procedimiento, la cual es correcto ya que se está interpretando como una excepción, una indicación o una norma que dice que dx puede tomar cualquier número real distintos de cero. Pero también, es posible interpretarla como una afirmación que establece una relación entre dx y el conjunto de los números reales.

Otra proposición que solo ha sido mencionado por dos FPM tiene que ver con la relación que se establece entre los diferenciales dy y dx. Si bien, la mayoría reconoce que dy es una variable dependiente, no mencionan de quién depende y cómo es la relación entre los diferenciales que se definen en la configuración didáctica. Solo los E2, E8 y E12 mencionan explícitamente como una proposición a esta relación (ver Figura 7.49), otras respuestas de los FPM lo consideran como un procedimiento, que, si bien están relacionados, se considera importante que el FPM pueda identificar las funciones que puede cumplir un objeto matemático en el contexto de una configuración didáctica para potenciar de esta manera el uso y la gestión de las lecciones de los libros de textos (Castillo y Burgos, 2022; Castillo et al., 2022a).

Figura 7.49

Parte de las respuestas de E2 de la Tarea 5



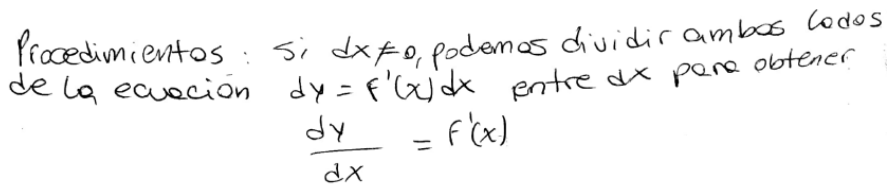
P3 =
Lenguaje: Coloquial, simbólico.
Conceptos: Variable dependiente, Dominio, dy, x.
Proposición: dy es una variable dependiente; dy depende de los valores de x y dx;
Procedimientos: Reemplazar dx y x por valores especificos. del dominio de f. para obtener dy.
Argumento: Variable dependiente.

En relación con los *procedimientos,* solo cinco FPM presentan dos o tres procedimientos que identifican en la lección del libro de texto. El procedimiento que predomina es calcular dy a partir de reemplazar valores de x y dx, como se observa en la respuesta de E2 en la Figura 7.49. Sin embargo, no aparece de manera explícita que los valores de x y dx se deben reemplazar en la ecuación $dy = f'(x)dx$ para obtener el valor de dy. El uso de la esta ecuación es mencionado solo por dos FPM, pero ninguno aclara de manera explícita cómo usarla.

También, se destaca el procedimiento que permite hallar la derivada de la función a partir de la ecuación $dy = f'(x)dx$ al plantear el cociente de diferenciales, como se puede apreciar en la respuesta de E8 en la Figura 7.50.

Figura 7.50

Parte de la respuesta de E8 de la Tarea 5

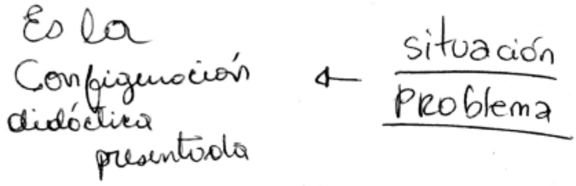


La identificación de los *argumentos* resulto bastante conflictiva para los FPM ya que solo ocho FPM mencionan este objeto matemático en sus análisis. Pero algunos identifican de manera incorrecta porque confunden al argumento con proposición y/o procedimiento. Por ejemplo, el E10 menciona como argumento “Diferencial dx es una variable independiente” siendo que el mismo FPM lo clasificó anteriormente como una proposición (Ver Figura 7.48). Si bien, el E10 no logra diferenciar, en este caso particular, una proposición y un argumento, también agrega otros argumentos que, si son adecuados y que cumplen la función de justificar y/o validar las afirmaciones y procedimientos, como, por ejemplo, se menciona a la definición de función, variables dependiente e independiente, etc.

Por último, resulta interesante destacar que solo un FPM (E7) coloca en su análisis epistémico al objeto matemático situación-problema, donde expresa que manera explícita que se trata de la “configuración didáctica presentada” (ver Figura 7.51).

Figura 7.51

Parte de la respuesta de E7 de la Tarea 5



7.6.8.1.4 Pregunta 4: ¿Qué procesos intervienen en la lección del libro de texto?

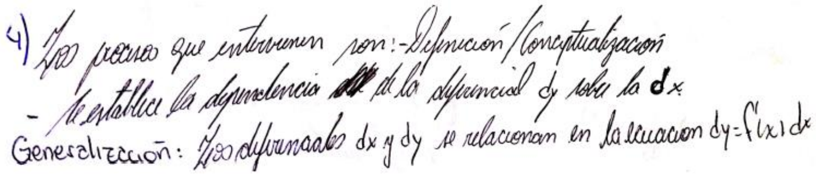
Desde la perspectiva del EOS, los procesos matemáticos son entendidos como un sistema de practica que tiene la intención de definir o conceptualizar un nuevo aspecto de un concepto, generalizar una relación y/o expresión, indicar la representación e interpretación de un concepto, etc.

Resulta de interés para esta investigación que los FPM puedan reconocer los procesos matemáticos que intervienen y emergen de la lección del libro de texto, ya que su identificación permitirá que el profesor pueda hacer un uso competente en los procesos instruccionales donde se utilice como recurso la lección del libro de texto en torno a la diferencial de una función.

La mitad de las respuestas de los FPM no mencionan a los procesos, de las restantes, tres respuestas son muy generales ya que solo mencionan que la intención es definir y presentar a los diferenciales. Sin embargo, cuatro respuestas de los FPM logran identificar tres procesos implicados en el sistema de prácticas, el primer proceso de identifican está relacionado con la conceptualización del diferencial, pero solo el E1 menciona explícitamente que “la lección pretende introducir la idea de diferencial como una variable” (E1) (*proceso de definición/conceptualización*). También, destacan el proceso para establecer la relación de dependencia de dy a partir de los valores de x y dx (*proceso de conceptualización y algoritmización*). También, el E10 plantea explícitamente un nuevo proceso que establece una relación entre los diferenciales dy y dx mediante la ecuación $dy = f'(x)dx$ (*proceso de conceptualización y generalización*) (ver Figura 7.52).

Figura 7.52

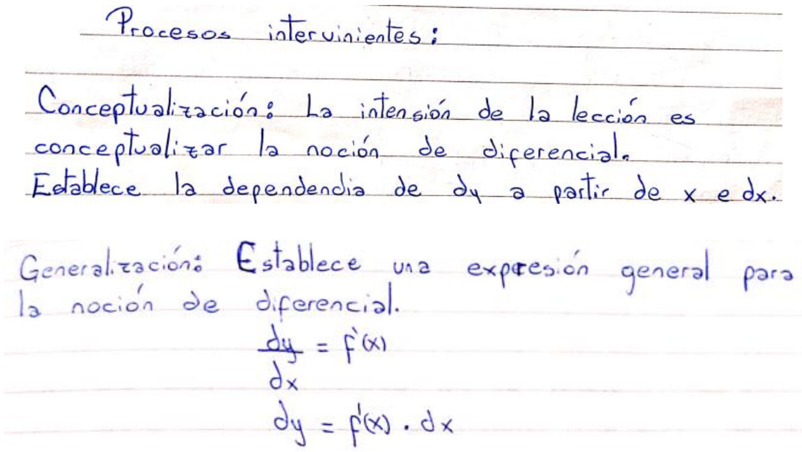
Parte de la respuesta de E10 de la Tarea 5


4) Los procesos que intervienen son: - Definición/Conceptualización
- Establece la dependencia de la diferencial dy sobre la dx
Generalización: Los diferenciales dx y dy se relacionan en la ecuación dy=f'(x)dx

Además, estos cuatros FPM destacan el *proceso de representación y/o simbolización* de la diferencial con el símbolo "d". Sin embargo, solo el E2 presenta como proceso la relación entre la razón de diferenciales y la derivada, la cual no explica de manera precisa, pero se muestra en la respuesta las relaciones de equivalencia (*proceso de generalización)* (ver Figura 7.53).

Figura 7.53

Parte de la respuesta de E2 de la Tarea 5



Procesos intervinientes:

Conceptualización: La intensión de la lección es conceptualizar la noción de diferencial.
Establece la dependendia de dy a partir de x e dx.

Generalización: Establece una expresión general para la noción de diferencial.

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

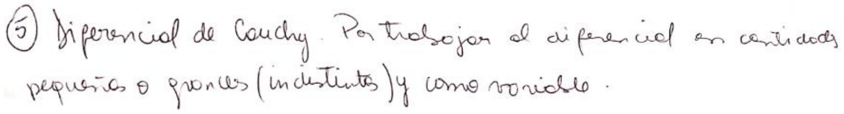
$$dy = f'(x) \cdot dx$$

7.6.8.1.5 *Pregunta 5: ¿Qué significado parcial del diferencial se pretende trabajar en la lección del libro de texto? Argumente su respuesta*

De las catorce respuestas de los FPM, todos logran relacionar la lección del libro de texto (configuración didáctica) con la Diferencial de Cauchy. Resulta interesante destacar que cinco respuestas argumentan mencionando que en la lección se pretende definir a la diferencial como una variable. Además, se destaca la respuesta de E13, que agrega que la diferencial puede tomar “cantidades pequeñas o grandes (indistinto)” (E13, ver Figura 7.54), lo cual constituye una característica asociada a la Diferencial de Cauchy.

Figura 7.54

Parte de las respuestas de E13 de la Tarea 5

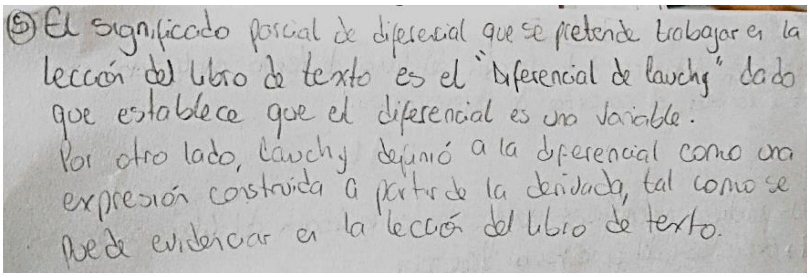


(5) Diferencial de Cauchy. Por trabajar el diferencial en cantidades pequeñas o grandes (indistinto) y como variable.

Otras dos respuestas de los FPM argumentan su elección mencionando que en la lección del libro de texto se presenta a la diferencial como una relación de variación entre de las variables, aludiendo a la relación funcional entre los diferenciales. También, hay siete respuestas que justifican mencionando la relación de la diferencial con la derivada, como se puede observar en la respuesta de E14 (ver Figura 7.55).

Figura 7.55

Parte de la respuesta de E14 de la Tarea 5



(5) El significado parcial de diferencial que se pretende trabajar en la lección del libro de texto es el "Diferencial de Cauchy" dado que establece que el diferencial es una variable.
Por otro lado, Cauchy definió a la diferencial como una expresión construida a partir de la derivada, tal como se puede evidenciar en la lección del libro de texto.

7.6.8.1.6 Pregunta 6: Destaca entre las prácticas, objetos y procesos identificados cuáles consideras potencialmente conflictivos para los estudiantes.

La identificación de los potenciales conflictos epistémicos y cognitivos es una competencia del profesor de matemática ya que reconocer los conflictos le permitirá mejorar los procesos instruccionales, anticipándose a la aparición de estos, diseñando estrategias para abordarlos con los estudiantes y así poder progresar en el aprendizaje de los conceptos.

De los catorce FPM, solo uno no presenta ninguna respuesta a esta pregunta, los demás hacen mencionan seis conflictos que se les puede presentar a los estudiantes al trabajar con la lección del libro de texto. A continuación, se mencionan los conflictos que identifican adecuadamente los FPM:

EL conflicto relacionado con los saberes previos, en particular, la función derivada es mencionado por 5 FPM (*Conflicto cognitivo*) (ver Figura 7.56). En la misma dirección, 6 FPM identifican como un potencial conflicto relacionar a la derivada como una razón de diferenciales, esta decisión se ban diciendo que la explicación es insuficiente para lograr una total comprensión de la relación que se establece (*Conflicto epistémico-cognitivo*) (ver Figura 7.56).

Figura 7.56

Parte de la respuesta de E10 de la Tarea 5

6) Uno de los posibles conflictos que podría surgir es en la práctica n° 5 que plantea y = f(x) con f una función derivable, podría considerarse como conflicto debido a que los estudiantes pudrían no recordar cuando una función es derivable.

Plantear que una de las notaciones de la derivada es dy/dx y luego considerar a dy/dx como una razón y como variables dependiente e independiente.

Esto generaría un conflicto cognitivo en el alumno debido a que las definiciones de conceptos sobre el diferencial van cambiando a medida que se avanza con la lección.

Otro *conflicto cognitivo* que destacan 4 FPM es entender la relación funcional entre los diferenciales dy y dx, y que dy depende de los valores que tome x y dx. A su vez, 2 FPM agregan como conflicto cognitivo comprender que dy y dx son variables.

Solo un FPM reconoce como un potencial conflicto el pasaje de la aproximación lineal a la diferencial como una función, ya que no queda claro cómo se relacionan estos conceptos (*Conflicto epistémico-cognitivo*).

Por último, E1 plantea como un potencial conflicto el abordaje de un nuevo significado parcial de la diferencial, ya que expresa que, si se estaba trabajando con la diferencial de Leibniz, esta nueva lección puede resultar conflictiva para el estudiante ya que se aborda a la diferencial como una variable (*Conflicto en la trayectoria cognitiva del estudiante*) (ver Figura 7.57).

Figura 7.57

Parte de la respuesta de E1 de la Tarea 5

6 Considero que, si el estudiante ya ha abordado el concepto de diferencial desde la mirada de Leibniz podría ser un conflicto potencial ver ahora al diferencial como una variable o no específico.
Y la comparación entre los conceptos.

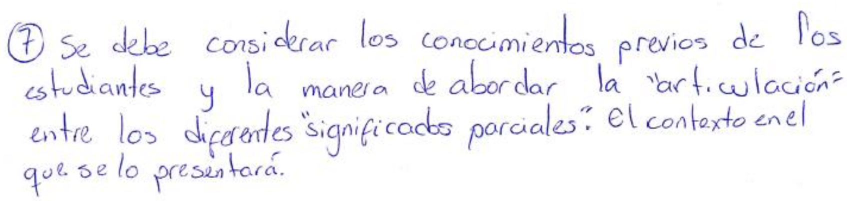
En síntesis, se puede afirmar que los FPM han logrado identificar varios potenciales conflictos epistémicos y cognitivos que pueden surgir al utilizar esta configuración didáctica (lección) para el proceso de enseñanza de la diferencial.

7.6.8.1.7 Pregunta 7: Para hacer un análisis de una lección de un libro de texto, que otros aspectos consideras que se debería tener en cuenta

En general, la mayoría de los FPM han indicado algún aspecto que consideran qué se debería tener en cuenta para hacer un análisis de una lección de un libro de texto. Algunos FPM destacan la necesidad de tener en cuenta los saberes previos de los estudiantes. Además, 3 FPM resaltan la importancia de considerar la manera de abordar la articulación entre los significados parciales de la diferencial (ver Figura 7.58). También, se observa en las respuestas la consideración del contexto y/o entorno en el cual se utilizará esta configuración didáctica (ver Figura 7.58).

Figura 7.58

Parte de la respuesta de E1 de la Tarea 5


(7) Se debe considerar los conocimientos previos de los estudiantes y la manera de abordar la "articulación" entre los diferentes "significados parciales". El contexto en el que se lo presentará.

Por otro lado, otros FPM resaltan la necesidad de disponer o agregar a la lección ejercicios de aplicación de los diferenciales. Si bien este aspecto está contemplado en la lección completa del libro de texto de Stewart (2012), es importante que los FPM identifiquen la necesidad de los ejercicios de aplicación para complementar el estudio de la diferencial.

También, E8 plantea que se debería tener presente el nivel curricular nivel al cual estaría destinado la lección. Otros FPM mencionan como aspectos a tener en cuenta como los recursos que se utiliza en la lección y las posibilidades del trabajo en grupo. Por último, dos FPM mencionan que es necesario tener en cuenta las seis facetas de la idoneidad didáctica (epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica).

En síntesis, es importante que el FPM sea competente en analizar una lección de un libro de texto y que tenga en cuenta no solo los aspectos epistémicos explícitos en la configuración didáctica, sino que pueda ir más allá en reconocer la importancia de otros aspectos que se corresponden con las facetas de la idoneidad didáctica para realiza run análisis microscópico de la actividad matemática que implica el uso de esta lección y así potenciar los procesos de instrucción en torno a la diferencial.

7.6.9 Discusiones de la Tarea 5

En la Tarea 5 se propuso a los FPM analizar y valorar la faceta epistémica y cognitiva identificando las prácticas, objetos y procesos matemáticos implicados en la lección de un libro de texto sobre la diferencial. Además, se avanzó sobre las relaciones con otros conceptos-definiciones y sus potenciales conflictos epistémicos y cognitivos. Como muestran los resultados, la experiencia formativa ha resultado ser enriquecedora para los FPM por las producciones, discusiones y comentarios que han realizado en la implementación de la tarea.

Este tipo de acciones formativas permiten abordar y desarrollar la competencia y conocimientos del FPM para el análisis de las lecciones de los libros de textos, propiciando de esta manera que se realice un uso eficiente en el sentido de poder tomar decisiones pedagógicas coherentes sobre el uso y la gestión de los libros de texto según las posibilidades y limitaciones que presentan los mismos.

7.7 Análisis Retrospectivo del Diseño

En esta sección se analiza todo el proceso implementado en el primer ciclo de formación y para ello se emplea la noción de la idoneidad didáctica Godino (2013) en sus diversas facetas y componentes para reflexionar sobre lo sucedido y buscar potenciales mejoras para futuras implementaciones.

Además, como insumo, se considerará la encuesta de opinión que han realizado los estudiantes en cada una de las secciones de clases, a modo de valoración de estas. Asimismo, se tendrán en cuenta los resultados que se han presentado y analizado las secciones anteriores.

7.7.1 Idoneidad epistémica y ecológica

A lo largo del primer ciclo formativo se han propuesto cinco tareas formativas orientadas hacia el desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico en los FPM. En general, se plantearon varias situaciones-problemas, algunos fueron problemas contextualizados en el campo de la física y/o ingeniería, y, en consecuencia, en la formación de profesores de matemática, como así también se ha desafiado a los FPM a realizar una análisis epistémico y cognitivo de una lección de un libro de texto. En este sentido, es posible afirmar que se plantearon varias propuestas.

Un aspecto importante por considerar es la representatividad de los significados parciales de la diferencial, que en el diseño del ciclo se abordaron los significados parciales de la diferencial de Leibniz y de Cauchy. Si bien, no se han trabajo con los otros significados, se han presentado a modo de conocer que existen otros vinculados a los desarrollados en las secciones, pero es necesario proponer nuevas experiencias formativas y disponer de más tiempo para estudiar los otros significados. Además, es importante tener en cuenta que los significados de la diferencial intervienen y emergen de diferentes contextos de aplicación lo que implica diferentes niveles de complejidad ontosemiótica, en términos de generalizada y formalización, de los objetos matemáticos que intervienen, por tales motivos, es pertinente preguntarnos si es posible abordar con el mismo grupo de estudiantes todos los significados de la diferencial. No hay que perder de vista que en el uso que los estudiantes otorgan al diferencial es donde este concepto cobra sentido para su estudio.

En las situaciones propuestas, se han establecidos varias conexiones con otros conceptos centrales del cálculo como la derivada y a integral. Además, se ha logrado realizar una gestión adecuada de los conflictos epistémicos y cognitivos que han surgido en el proceso de estudio de la diferencial.

Por otro lado, la acción formativa implementada es coherente con los objetivos del contexto institucional dado que se trata de futuros profesores y, por tanto, se debe asegurar la competencia para su desarrollo profesional. Asimismo, se trata de innovación basada en la práctica reflexiva, siendo una actitud favorable hacia el desarrollo profesional del profesor (Pochulu et al., 2016).

7.7.2 Idoneidad interaccional y mediacional

En cada una de las sesiones de la clase, el profesor recupera lo trabajo en la sesión anterior, plantea los objetivos de la clase y hace una presentación adecuada del tema. Las explicaciones e institucionalizaciones están apoyadas en el uso de diapositivas que permiten gestionar el tiempo y sistematizar los conocimientos pretendidos.

Todas las producciones de los estudiantes han sido discutidas y analizadas en detalle por el grupo clases en distintas instancias de puestas en común, donde el profesor constantemente invitaba y estimulaba a los FPM a explicar, compartir, justificar, discrepar y cuestionar alternativas y reflexionar, aspectos valorados positivamente por los propios participantes.

El tiempo fue un factor que, en cierto punto condicionó la implementación de algunas actividades. Sin embargo, en el desarrollo de las clases se trató de seguir el ritmo de aprendizaje de los FPM de tal manera de poder discutir todas las producciones y resolver todas las dudas de los FPM. Aunque, se ha logrado un gran avance en el uso competente del análisis ontosemiótico, se considera que cada FPM tiene su propio tiempo y trayecto de aprendizaje y para algunos no ha sido suficiente.

La investigación está condicionada por el ambiente real de clase, propio de las investigaciones de diseño. Además, se han empleado diferentes recursos materiales y tecnológicos para el desarrollo de las clases, aunque se pueden mejorar. Un aspecto importante que destacan los FPM tiene que ver con la preparación y organización de las sillas y mesas de los estudiantes. Si bien, en la primera sesión se distribuyeron en grupos, en las restantes sesiones del ciclo, se sentaban en forma de medialuna de tal manera que todo puedan mirar y escuchar al compañero y observar el pizarrón.

7.7.3 Idoneidad cognitiva y afectiva

Es posibles observar en las prácticas personales y afectivas de los FPM que en las Tareas 1 y 2 les ha resultado un poco conflictivo identificar los objetos matemáticos, pero a medida que se ha avanzado en el desarrollo de las acciones formativas, se puede apreciar cómo va mejorando sus análisis ya que realizan un uso más eficiente de la herramienta configuración ontosemiótica.

En general, los FPM no han tenido muchos inconvenientes para reconocer las prácticas matemáticas y sus intencionalidades. Pero en la identificación de los objetos matemáticos, el que sigue siendo un reto es reconocer las proposiciones y argumentos. Se considera, a partir de los resultados, que una posible causa de esta dificultad podría ser que en la mayoría de los análisis ontosemióticos realizados por los FPM, las proposiciones y argumentos no están escritos de manera explícita, lo que implica un cierto grado de complejidad reconocerlos. Pero, como se destacó en el análisis de la implementación, estos objetos cumplen funciones importantes en el progreso de una resolución, se considera que, con más tiempo y experiencias formativas, los FPM podrán superar estas dificultades.

Por último, se destaca en las valoraciones de los FPM que el ambiente de las sesiones de clases fue agradable, ya que el profesor alentaba a la participación de todos, se respectada el intercambio de ideas y se considera al error como una oportunidad para aprender.

7.8 Síntesis y Conclusiones

En este capítulo se ha descripto, analizado, explicado y valorado un diseño aplicado en un curso del profesorado de matemáticas, para desarrollar la competencia de análisis ontosemiótico. Los resultados y evidencias que se han mostrado permiten afirmar que se ha logrado iniciar y progresar en el uso competente de la herramienta configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos, propuesta en el marco del EOS. Si bien, existen varios puntos a mejorar, se considera que se ha logrado un progreso importante en el desarrollo de la competencia, teniendo en cuenta que uno de los factores que propició este avance es debido a las circunstancias contextuales y características particulares de los FPM, ya que disponen de conocimientos previos con relación al EOS por los trabajos que realizan el marco de la cátedra donde se implementa el ciclo formativo.

Las reflexiones sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de los significados parciales de la diferencial implican un cierto nivel de complejidad propio de la complejidad ontológica y semiótica de la diferencial, aspecto que se ha remarcado en el Capítulo 1, sección 1.1.3 donde se presentan varios modelos de significados que intentan explicar los principales usos de este concepto. En esta dirección, se considera que el modelo ontosemiótico de los significados parciales de la diferencial (Verón y Giacomone, 2021), constituye una herramienta potente para el diseño, implementación y valoración de ciclos de formación como se han desarrollado en este capítulo de la tesis. En la actualidad, siguen surgiendo investigaciones en el campo de la didáctica del cálculo y la física, donde se plantean nuevas categorizaciones sobre los usos que realizan los estudiantes de la diferencial en diferentes problemas vinculados a la derivada y a la integral, por ejemplo algunas investigaciones que dan cuenta de la complejidad en el aprendizaje la diferencial en relación con la integral son: Bueno et al., (2022), Jones y Ely (2023), Nilsen y Knutsen (2023), Oehrtman y Simmons (2023), Stevens y Jones (2023), entre otros. Estos estudios, nos permiten afirmar la importancia de seguir ampliando y aplicando el modelo de significados de referencia de la diferencial y de proponer nuevas experiencias formativas en diferentes carreras de matemática, física, ciencias experimentales e ingenierías. En esta dirección, se ha comenzado con algunas implementaciones en las carreras de ingeniería química e ingeniería en alimentos, como se puede apreciar en el artículo de Verón, Giacomone y Benítez (2022).

Por último, una cuestión importante para tener en cuenta es que estos logros son posibles en la medida que se diseñen e implementen una diversidad de experiencias formativas, ya que, con actividades aisladas, resultará difícil abordar el desarrollo de las competencias profesionales de los FPM.

Capítulo 8: Desarrollo de la Competencia de Análisis y Valoración de la Idoneidad Didáctica en Futuros Profesores de Matemáticas

Una parte del contenido de este capítulo aparece publicado en:

Verón, M. A. y Giacomone, B. (2022). Análisis de la idoneidad didáctica de un libro de texto para el estudio del diferencial. *En Actas del Primer Congreso Internacional de Didáctica de la Matemática.* CIDIDMAT 2022 (Virtual). Aceptado

8.1 Introducción

Muchas investigaciones en educación matemática plantean la reflexión sobre la práctica docente como una competencia clave para el crecimiento y desarrollo profesional, y para la mejora de la enseñanza. En esta dirección, diversos trabajos de investigación han desarrollado y aplicado la noción de idoneidad didáctica como una herramienta que orienta la reflexión de los procesos de estudio en la formación de profesores (Barboza y Castro, 2022; Burgos, 2020; Breda et al., 2017; Castillo y Burgos, 2022; Giacomone, 2018; Hummes et al., 2019, Seckel y Font, 2020; etc.).

En este capítulo se describe, analiza y valora el diseño, implementación y valoración del segundo ciclo de formación orientado al desarrollo de la competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica en futuros profesores de matemática (FPM), y para lograrlo, nos planteamos la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué tipo de acciones formativas sería necesario y posible implementar en un programa de formación para promover en los futuros profesores el conocimiento y uso competente de herramientas para la reflexión sistemática sobre procesos de estudio de la diferencial?

En este capítulo nos centraremos en el desarrollo de la competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica en los FPM (Godino et al., 2017), cuya competencia forma parte de una competencia general del profesor de matemáticas de diseño e intervención didáctica, como se ha desarrollado en el Capítulo 2, sección 2.1.6.

8.2 Características Generales del Ciclo Formativo

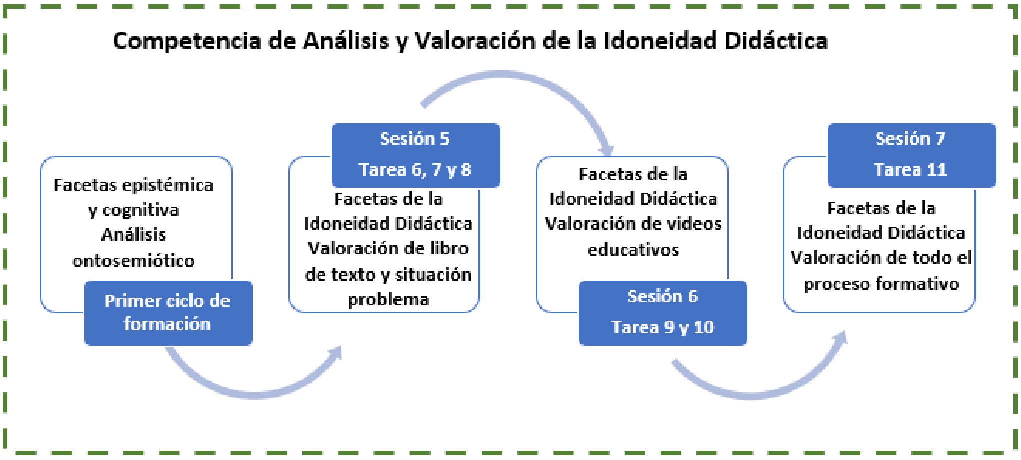
El segundo ciclo formativo se implementó durante el año 2022, en 3 sesiones de dos horas y media cada una, en el ámbito del curso Seminario de Didáctica de la Matemática. Participaron 15 estudiantes, futuros profesores, que estaban cursando el cuarto año de la carrera de Profesorado de Educación Secundaria en Matemática de un Instituto Superior de Formación Docente de Argentina.

Los participantes tienen conocimiento sobre algunas herramientas de EOS y sobre la perspectiva ontológica y semiótica que adopta el enfoque. Han participado recientemente al primer ciclo de formación sobre el "Desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico" descripto en el Capítulo 7 de la tesis. Además, durante el ciclo lectivo 2022 los estudiantes han participado en un taller sobre la reflexión del profesor de matemática donde se introdujo la noción de idoneidad didáctica, sus facetas y componentes a través de actividades.

A modo de síntesis, se presenta la trayectoria didáctica propuestas para el segundo ciclo de formación desarrollado en los FPM, como se puede apreciar en la Figura 8.1.

Figura 8.1

Trayectoria didáctica para del segundo ciclo de formación en los FPM



8.2.1 Cronograma del proceso formativo

En la siguiente Tabla 8.1 se muestra el cronograma de la experiencia formativa.

Tabla 8.1

Distribución de los encuentros del segundo ciclo de formación

Encuentro	Fecha	Tiempo
1er	21 de octubre de 2022	2,5 horas
2do	28 de octubre de 2022	2,5 horas
3er	11 de noviembre de 2022	2,5 horas

8.2.2 Organización de las actividades por encuentro

Las tareas de este segundo ciclo formativo están numeradas continuando con orden del ciclo formativo anterior ya que están relacionadas.

8.2.2.1 Primer encuentro

Discusión Tarea 5: Se retoma la Tarea 5 del primer ciclo de formación. El objetivo es identificar las posibles facetas involucradas en un proceso de estudio.

Tarea 6: Construcción de criterios de idoneidad didáctica. El objetivo es construir, a partir de la discusión conjunta, un sistema de componentes e indicadores de idoneidad didáctica para cada una de las facetas previamente identificadas. Se pretende obtener criterios de idoneidad específicos para la valoración de un proceso de estudio sobre la diferencial.

Tarea 7: Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de un caso específico. Se utiliza como caso el problema de cálculo de la masa el cuál fue resuelto analizado en el ciclo anterior. Se analizó en término de identificación de prácticas elementales, objetos y procesos implicados en tales prácticas.

Puesta en común Tarea 7: el objetivo es establecer relaciones entre las preguntas anteriores y los indicadores construidos por los estudiantes.

Tarea 8: Lectura de un texto. Se propone como tarea individual la lectura del artículo *Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas* (Godino, 2013). El objetivo es institucionalizar las nociones que van surgiendo en las actividades anteriores presentando una herramienta teórico-metodológica específica.

8.2.2.2 Segundo encuentro

Discusión de la Tarea 8: El objetivo es discutir las potencialidades de la herramienta de idoneidad didáctica que propone el EOS y enriquecer los criterios que mencionaron los estudiantes en la Tarea 6.

Presentación y discusión de la GVID-Diferencial (Verón, Giacomone y Pino-Fan, 2023): Se realiza una presentación y se discuten los indicadores específicos de la guía para la valoración de los procesos de estudio en torno a la diferencial.

Tarea 9: Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de dos videos educativos para el estudio del diferencial utilizando la GVID-Diferencial. Se utiliza como caso de aplicación el análisis de dos videos online con el objetivo de reflexionar sobre la importancia de identificar videos que podrían o no recomendar a sus estudiantes. En el análisis puede surgir la necesidad de utilizar criterios más específicos que podrían tenerse en cuenta a la hora de valorar videos.

Lectura complementaria: artículo de la GVID-Diferencial (Verón, Giacomone y Pino-Fan, 2023).

8.2.2.3 Tercer encuentro

Discusión de la Tarea 9: se pone en discusión y diálogo algunas respuestas representativas de los FPM sobre cada una de las facetas, componentes, subcomponentes e indicadores de los dos videos. Se establecen conclusiones en relación con cada una de las facetas.

Tarea 10: el objetivo de esta tarea es realizar una síntesis de las valoraciones que han realizado los FPM sobre cada uno de los videos mediante la asignación de una puntuación a modo de valorar el grado de idoneidad de cada video educativo.

Discusión de la tarea 10: se comparten los argumentos que expresan los FPM para la selección y asignación de puntajes de los videos educativos.

Tarea 11: Valoración de la idoneidad didáctica del proceso formativo que los estudiantes vivieron con esta experiencia. En este caso, los estudiantes deberán valorar cada una de las facetas implicadas, desde sus propias perspectivas poniendo en funcionamiento las herramientas teóricas estudiadas. El objetivo didáctico es evaluar la competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de los participantes. El objetivo del investigador es obtener información adicional que sirva para el análisis retrospectivo de todo el ciclo formativo, en particular, sobre la faceta cognitivo-afectiva

Cierre del ciclo formativo: se presentan y se relacionan todas las tareas del ciclo vinculando con las herramientas del EOS, los significados parciales de la diferencial y los análisis realizados.

8.2.3 Recogida y análisis de los datos

Como instrumentos de recogida de información se dispone de los siguientes elementos:

- respuestas escritas de las actividades grupales e individuales realizadas en clase;
- grabación en audio de todas las sesiones del curso (favoreciendo la interpretación de las observaciones registradas y el desarrollo del curso en la etapa de análisis retrospectivo);

— registro fotográfico de las producciones de los FPM en el pizarrón

Encuesta de opinión

Con la finalidad de recoger información adicional para este análisis, los estudiantes tenían que cumplimentar una encuesta de opinión anónima sobre los siguientes aspectos, para cada tarea:

Consigna

Realice una valoración de cada uno de los siguientes puntos referido a las tareas realizadas

1) Claridad de la tarea y de las consignas.

2) Adecuación de la metodología seguida (forma de trabajo, explicaciones del profesor).

3) Grado de motivación e interés suscitado por las actividades.

4) Nivel de aprendizaje logrado.

5) Grado de pertinencia global del taller para tu formación como profesor de matemáticas.

Cada ítem debía ser valorado según una escala de [1-5], siendo 1: valor mínimo y 5: valor máximo. Además, los estudiantes podían añadir cualquier comentario que considerasen pertinente.

8.3 Fases y Metodología de Implementación

8.3.1 Fase 1. Aproximación de las facetas y componentes de la idoneidad didáctica para el estudio del diferencial

En esta fase se busca recuperar los significados personales de los estudiantes en relación con la noción de idoneidad didáctica, sus facetas y componentes mediante la Tarea 5.

Luego se pretende avanzar en la discusión de la herramienta de reflexión de la idoneidad didáctica avanzando en la particularización de los criterios para el estudio del diferencial. Este proceso se realizará a partir de las experiencias previas y los significados personales que han vivido y construido los estudiantes con la Tarea 6.

8.3.2 Fase 2. Uso de los criterios para analizar y valorar la idoneidad didáctica de un problema

En esta fase se plantea la aplicación de la herramienta de reflexión, la guía de valoración de la idoneidad didáctica propuesta por Godino (2013) para el análisis y valoración del problema del cálculo de la masa (Tarea 7).

8.3.3 Fase 3. Uso de la GVID-Diferencial para el análisis y valoración de videos educativos

En esta fase se plantea la herramienta de la GVID-Diferencial para la reflexión del futuro profesor sobre un proceso de enseñanza y aprendizaje de la diferencial a partir del análisis y valoración de dos videos educativos (Tarea 9).

8.3.4 Fase 4. Evaluación

Primero, se plantea la Tarea 10 donde los FPM tienen que asignarles una puntuación a los videos educativos según una escala del grado de adecuación de la idoneidad didáctica y expresar sus argumentos.

Segundo, se plantea la Tarea 11 donde los FPM tiene que realizar una valoración de todo el ciclo formativo con el objetivo de efectuar una reflexión global de todo el proceso de instrucción experimentado y para recopilar información para futuras implementaciones.

Por último, cada una de las tareas implementadas se analizaron a priori con el objetivo de gestionar la clase, la puesta en común y los potenciales conflictos de aprendizaje. Al final de toda la implementación, se realizó un análisis retrospectivo de todo el ciclo formativo con el objetivo de identificar puntos de mejora y tomar decisiones para futuras implementaciones.

8.4 Diseño de Tareas. Análisis a priori

En esta sección se presentan los análisis a priori de las actividades formativas diseñadas para abordar y propiciar con los FPM el desarrollo de la competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica.

A modo de síntesis, se presenta a continuación una Tabla 8.2 donde se describen para cada consigna de las tareas del ciclo formativo los tipos de conocimientos didáctico-matemáticos implicados y las competencias profesionales de los FPM que interviene en las mismas.

Tabla 8.2

Competencias y conocimientos didácticos-matemáticos implicados en cada tarea del segundo ciclo de formación

Tarea	Consigna	Tipos de conocimientos didácticos-matemáticos	Competencias profesionales de los FPM
6	1) Intención didáctica de la lección del libro de texto	Epistémica, Cognitiva e Interaccional	Competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de una lección de un libro de texto
	2) Identificar prácticas matemáticas de la lección del libro de texto	Epistémica	
	3) Reconocer los objetos matemáticos intervienen y emergen en de la lección del libro de texto	Epistémica	
	4) Reconocer procesos intervienen en la lección del libro de texto	Epistémica	
	5) ¿Qué significado parcial del diferencial se pretende trabajar en la lección del libro de texto?	Epistémica	
	6) Identificar potenciales conflictivos para los estudiantes.	Epistémica-cognitiva	
	7) Para hacer un análisis de una lección de un libro de texto, que otros aspectos consideras que se debería tener en cuenta	Epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva y ecológica	
7	Realizar un análisis y valoración de la idoneidad didáctica del problema de cálculo de la masa	Epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica	Competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de una actividad
8	Lectura y diálogo del texto de Godino (2013)	Epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica	Discusión de las facetas, componentes e indicadores de idoneidad didáctica
9	Realizar un análisis y valoración de la idoneidad didáctica de cada uno de los videos utilizando la GVID-Diferencial, argumentando su respuesta e indicando, en lo posible, la evidencia y/o tiempo del mismo	Epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica	Competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de dos videos educativos
10	A partir del análisis y valoración que has realizado de los videos, ¿cuál recomendarías a tus estudiantes?, ¿por qué?	Epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica	
11	Utilizando la GVID-Diferencial, realizar una valoración de la	Epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional,	Competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de

	idoneidad didáctica de todo el proceso formativo	mediacional y ecológica	las clases del proceso formativo

8.4.1 Tarea 6. Aproximación a la valoración de la idoneidad didáctica de una lección de un libro de texto

Consigna

A partir de los discutido en la Tarea 5 ¿qué facetas, componentes y criterios de idoneidad didáctica se pueden identificar en el análisis de la Tarea 5?

Aclaración: se les brindará una tabla a modo de organizar la información que recuperan

Facetas	Criterios	Análisis y valoración

8.4.1.1 Análisis a priori de la Tarea 6

En la Tarea 5 se solicita a los FPM que realicen un análisis epistémico y cognitivo de prácticas, objetos y procesos que intervienen en una configuración didáctica formada por un fragmento del libro de texto de Cálculo de Stewart (2012). Sin embargo, en la Tarea 6 se los lleva a volver sobre la tarea anterior, pero con nuevos lentes para reflexionar sobre las facetas, componentes y criterios de idoneidad didáctica que pueden recuperar de sus conocimientos previos e identificar en la lección del libro de texto.

Teniendo en cuenta que la Tarea 5 forma parte del primer ciclo de formación, el análisis a priori en relación con las prácticas, objetos y procesos implicados en la lección del libro de texto se encuentra desarrollado en la sección 7.5.14 del Capítulo 7. En el análisis anterior, se identifican indicadores vinculados a la faceta epistémica como los significados institucionales (prácticas, objetos y procesos matemáticos), las relaciones con otros conceptos y potenciales conflictos epistémicos. Además, se avanza sobre algunos indicadores vinculados a la faceta cognitiva, que tiene relación principalmente con posibles interpretaciones y representaciones de los estudiantes que podrían generar un potencial conflicto cognitivo.

En los ítems de la consigna de la Tarea 5, es posible advertir las facetas de la idoneidad didáctica involucrada en cada ítem, como se puede apreciar en la Tabla 8.2. Si bien, la mayoría apunta al estudio de la faceta epistémica, también es posible observar en la lección del libro de texto aspectos vinculados a las facetas cognitiva afectiva, interaccional, mediacional y ecológica. En este sentido, a continuación, presentamos una breve síntesis del análisis y valoración de la idoneidad didáctica de las cuestiones más importantes de la lección del libro de texto, teniendo como punto de partida el análisis a priori que se ha realizada para esta tarea en el capítulo anterior.

En relación con la *faceta cognitiva*, no es posible observar en la lección del libro de texto el grado de adecuación de la mayoría de las componentes de esta faceta ya que no se observan las prácticas personales de los estudiantes, sin embargo, es posible advertir algunas cuestiones relacionadas a los conocimientos previos necesario para trabajar con la lección, como función, derivada, variable, cociente, número real, ecuación, entre otros. También, existen potenciales conflictos epistémicos y cognitivos, los cuales se han analizado en el capítulo anterior, que tiene estrecha relación con el uso del lenguaje simbólica y sus interpretaciones.

Un aspecto importante para destacar de la lección del libro de texto es que se menciona que las aproximaciones lineales se relacionan con los diferenciales, pero no es claro cuál es la relación que pretende establecer la lección, por tales motivos se considera un potencial conflicto cognitivo.

Por otro lado, no se observan en la lección del libro de texto elementos vinculados a la *faceta afectiva*, en parte, debido al recorte del fragmento de la lección en estudio. Sin embargo, es posible advertir algunos elementos de la *faceta interaccional* vinculado a la organización de la configuración didáctica, en particular, e posible observar que la intención es, por un lado, presentar y definir a los diferenciales dx y dy, y, por otro lado, se pretende establecer conexiones con la derivada.

Sobre la *faceta mediacional*, es posible mencionar que en este caso se utiliza un recurso que constituye un fragmento de una página de un libro de texto, donde se pueden incluir otros recursos como audiovisuales o softwares para potenciar el desarrollo de la competencia matemática de los estudiantes.

Por último, respecto a la *faceta ecológica*, se observa que la propuesta plantea conexiones intra-matemáticas con los conceptos de derivada, funciones, ecuación, variable y la razón. Además, la lección del libro de texto se corresponde con propuestas enmarcadas en el diseño curricular de un profesor de matemática, física y de ingeniería.

En síntesis, la intención didáctica de la Tarea 6 es recuperar los significados personales de los estudiantes en relación con la noción de idoneidad didáctica, sus facetas y componentes.

8.4.2 Tarea 7

Consigna

A partir de lo desarrollado en la primera clase donde se trabajó con el problema del cálculo de la masa, se pide:

a) Realizar comentarios valorativos indicando y argumentando sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje en cada una de las facetas de la idoneidad didáctica.

b) Indicar qué cambios propondría para argumentar el grado de idoneidad.

Aclaración: utilizar la siguiente tabla de guía (ver en Anexo 2)

8.4.2.1 Análisis a priori de la Tarea 7

El análisis y valoración de las facetas de la idoneidad didáctica de la situación problema del cálculo de la masa de la primera clase se ha analizado en detalle los conocimientos didáctico-matemáticos implicados en el análisis a priori y a posteriori de la implementación del mismo en el Capítulo 7, donde se identifican las prácticas, objetos, procesos matemáticos, relaciones y potenciales conflictos epistémicos y cognitivos.

Además, en el Capítulo 6, se analiza la idoneidad didáctica del mismo problema que se presenta en la lección del libro de texto de Salinas et al. (2012), cuyo estudio constituye en parte, el análisis a priori de esta tarea. Asimismo, en el análisis retrospectivo del Capítulo 7, se reflexiona desde la idoneidad didáctica en relación con la implementación de las primeras sesiones y el desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico. Por tales motivos, para evitar repetir la misma información, se considera que los estudios realizados en los capítulos y secciones anteriores serán utilizados como análisis a priori de la Tarea 7.

8.4.3 Tarea 8

Lectura para la casa del texto Godino (2013):

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, (11), 111-132.

La lectura y análisis a priori del texto de Godino (2013) pretende identificar, reconocer y fortalecer el estudio de los indicadores de idoneidad didáctica para la valoración de diferentes propuestas para la enseñanza y aprendizaje de la matemática.

A partir de la identificación de los indicadores específicos de cada una de las facetas de la idoneidad didáctica, es posible avanzar hacia el estudio de la particularización de los indicadores hacia un concepto en particular, como la diferencial de una función, cuyo resultado se ve plasmado en la Guía de Valoración de la Idoneidad Didáctica de procesos de estudio de la Diferencial (GVID-Diferencial) (Verón, Giacomone y Pino-Fan, 2023).

8.4.4 Tarea 9

Consigna

Vamos a considerar los siguientes vídeos educativos:

Video 1: https://www.youtube.com/watch?v=J5COVtWX8FU

Video 2: https://www.youtube.com/watch?v=IfoekgD8v2A

a) Realizar un análisis y valoración de la idoneidad didáctica de cada uno de los videos utilizando la GVID-Diferencial, argumentando su respuesta e indicando, en lo posible, la evidencia y/o tiempo del mismo (ver tabla en Anexo 4).

b) En la casilla “otros comentarios” se pueden incorporar aspectos que podrían no estar incluidos en la guía.

c) Mencionar posibles mejoras para aumentar el grado de idoneidad de cada faceta.

Aclaración: en el Anexo 3 se encuentra la tabla que utilizaron los FPM para realizar la valoración y en el Anexo 4 está la GVID-Diferencial que utilizaron los FPM.

8.4.4.1 Análisis a priori. Valoración de la Idoneidad Didáctica del Video 1

A continuación, se presenta una síntesis de la valoración de cada una de las facetas de la idoneidad didáctica del video 1.

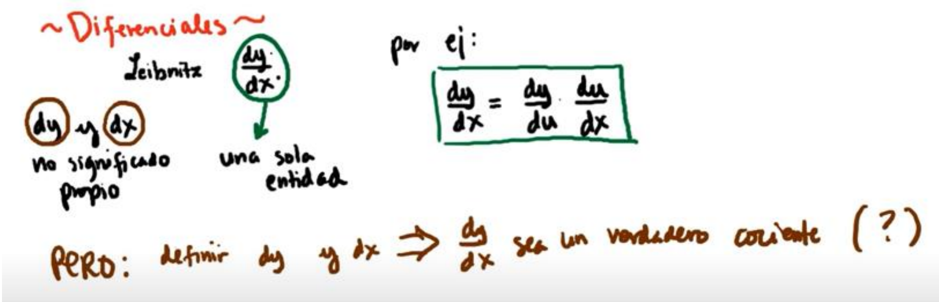
8.4.4.1.1 Faceta Epistémica

En relación con la *situación problema*, es posible advertir que en el video 1 la propuesta de la lección intenta establecer una definición (conceptualización) para los diferenciales dx y dy, considerándolos como variables y como cantidades muy pequeñas. Además, se propone establecer relaciones con la derivada e interpretar los diferenciales en una representación gráfica.

En la lección del video 1 se utilizan diferentes tipos de *lenguajes*; natural, con el uso de término como diferencial, infinitesimal, muy pequeño, fórmula, aproximación, "entidad única" (ver Figura 8.2); simbólico, algebraico y funcional, con las expresiones como $f, dx, dy, \Delta x, \Delta y, \neq, f'(x), \frac{dy}{dx}$ y $\frac{dy}{dx} = f'(x), dy = f'(x) \cdot dx$; gráfico y geométrico con la representación de la función, recta tangente y los diferenciales en un sistema de ejes coordenados. Además, se destaca que los términos que se utilizan para describir a los diferenciales son adecuados para los estudiantes que son FPM, y se plantea, en un determinado momento, una situación de expresión e interpretación de los diferenciales desde dos puntos de vistas, como una variable que puede tomar valores reales, pero también se puede representar gráficamente como una cantidad muy pequeña.

Figura 8.2

Conflictos epistémicos y cognitivos en el video 1



Fuente: (Critigo92, 2019, 3m1s)

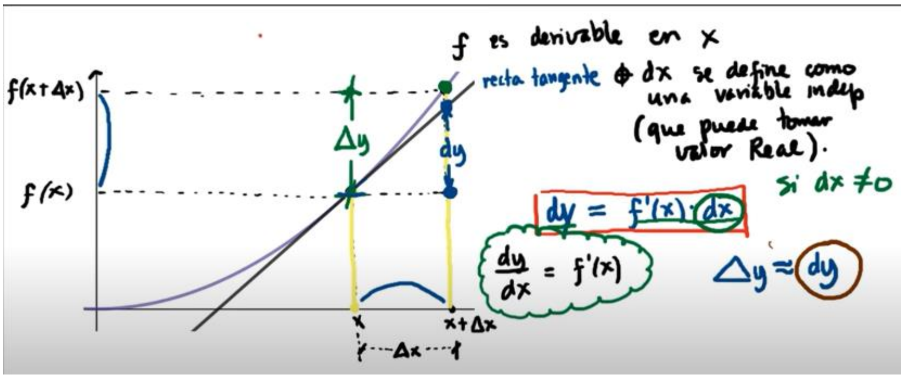
Los *conceptos-definiciones* que intervienen en la lección del video 1 son: diferenciales, cantidad, infinitesimales, incrementos, variables, valor real, cociente, producto, función, derivada, recta tangente, aproximación lineal, distancia, entre otros. Estos conceptos son adecuados para el nivel educativo de los FPM. Además, es posible advertir determinados momentos, como al principio donde el autor del video 1 plantea una situación en la pone en discusión las interpretaciones sobre los diferenciales y su representación simbólica, con lo cual es posible afirmar que, en cierta medida, en la lección del video se intenta generar o negociar definiciones e interpretaciones sobre la diferencial.

En la lección del video 1, se observan varias *proposiciones*, algunas se encuentran escritas como "$\frac{dy}{dx}$ es una única entidad", "dx y dy no tienen significado propio" (ver Figura

8.2), “dx se define como una variable independiente” (ver Figura 8.3) entre otras, y algunas se pueden identificar en el discurso, como por ejemplo “El verdadero cambio en la función es muy parecido al cambio en la linealización” o “dy es una magnitud infinitesimalmente pequeña”. Además, es posible observar que se utiliza el lenguaje simbólico y algebraico para establecer relaciones entre la derivada y la diferencial en la ecuación $dy = f'(x) \cdot dx$.

Figura 8.3

Representación geométrica de los diferenciales en el video 1



Fuente: (Critigo92, 2019, 11m9s)

Sobre los *procedimientos*, se observa que menciona la secuencia de prácticas que se necesitan realizar para establecer que el cociente de diferenciales es igual a la derivada. También, se explica cómo se determina gráficamente una representación geométrica de dy.

Los *argumentos* que se presentan para justificar y validar las proposiciones y procedimientos, la mayoría son adecuados para los FPM, sin embargo, no se explica porque se expresa la dy como un producto de la derivada y dx. Asimismo, se emplean representaciones geométricas para apoyar y reforzar las explicaciones y argumentaciones. Por último, se puede agregar que la lección intenta, en cierta medida, plantear una situación de discusión y justificación de porque con las derivadas los diferenciales no tienen significado propio, pero luego si adquieren significado.

En la lección del video 1, se establecen *relaciones* entre dos consideraciones de la diferencial; por un lado, son definidos como variables; pero, por otro lado, se los trata como cantidades infinitesimales en la representación geométrica (ver Figura 8.3). Además, se establecen conexiones entre la diferencial y la derivada.

Varios *procesos matemáticos* intervienen en la lección del video 1; la *conceptualización*, se produce al establecer las definiciones de la diferencial; el *proceso de* *representación* y *comunicación* mediante las expresiones simbólicas que identifican y relacionan a la diferencial; la *particularización*, al representar geométricamente en un sistema de ejes coordenados; y la *generalización* al plantear que los diferenciales son variables.

Sobre los *conflictos epistémicos*, en el video, se observar como el autor aborda un potencial conflicto epistémico vinculado principalmente al lenguaje y a la interpretación de este por los estudiantes (conflicto cognitivo), ya que al mencionar que "$\frac{dy}{dx}$ es una única entidad", genera un conflicto con los conocimientos previos de los FPM, ya que se dice que no es un cociente, pero se escribe como uno. Además, resulta que no es un cociente para la derivada, pero si representa un cociente para los diferenciales, si bien cambia la interpretación y lectura, no cambia la representación simbólica. Por otro lado, se genera un conflicto epistémico al escribir que "dx y dy no tienen significado propio" (ver Figura 8.2), siendo que en minutos posteriores al video si adquieren significados como variables. De esta manera se observan discordancias en el discurso del autor, que, si bien son retomados y considerados por el autor, de todas formas, se considera que es necesario nuevas instancias de reflexión sobre estos conflictos que son propios del estudio de la diferencial. Con esto no queremos decir que hay que ocultarlos o tomar una posición, sino que es necesario generar más instancias de trabajo con los FPM sobre estos potenciales conflictos epistémicos proponiendo espacios para que los estudiantes comparten sus interpretaciones y sentidos sobre la diferencial (Verón, Giacomone y Pino-Fan, 2023).

A partir de esta valoración, es posible afirmar que la faceta epistémica tiene un grado de idoneidad media alta. Para esta valoración se utiliza la misma escala que utilizan los FPM en la Tarea 10.

8.4.4.1.2 Faceta Cognitiva

En un video educativo donde solo interviene una persona que pretende explicar un contenido matemático, resulta imposible observar las prácticas personales de los estudiantes, que serían los receptores del video. Pero, no obstante, es posible reconocer determinadas características vinculadas a los indicadores de la faceta cognitiva. Por tales motivos, es posible afirmar que, a partir de la organización e intervenciones (preguntas) que plantea el autor, en cierto punto, se tiene en cuenta los potenciales *aprendizajes de los estudiantes* ya que el proceso de instrucción se organiza de tal manera que se tiene presente la compresión del estudiante, ya que, en reiteradas oportunidades, el autor, intenta establecer relaciones, propone nuevas explicaciones, retoma su propio discurso, etc.

Se dedica una gran parte del video 1 a las *relaciones o conexiones* de la diferencial con la derivada y a sus significados, generando de esta manera situaciones para diferenciar y relacionar la diferencial con otros conceptos, como la derivada, aproximación lineal, recta tangente. Por tales motivos, en cierto punto, se propone un aprendizaje del tipo relacional.

En relación con los *conocimientos previos*, se consideran que se tienen en cuenta ya que, en un momento del video se menciona que "la diferencial se relaciona con la linealización como hemos visto en otro video". Además, se utilizan diferentes registros de representación semiótica para la comunicación de las ideas matemáticas como gráficos, expresiones coloquiales y simbólicas.

Por otro lado, como se ha mencionado en la faceta anterior, los *conflictos cognitivos* que emergen de la lección del video están relacionados directamente con las interpretaciones y los conflictos epistémicos. Pero, e posible agregar, que considera el error y/o confusión en las interpretaciones como una fuente de aprendizaje, ya que al principio genera una situación al expresar "Pero como Cristi, ¡te vas a contradecir!, No muchachos", donde se intenta poner en discusión las interpretaciones del cociente de diferenciales.

En síntesis, se considera que la faceta cognitiva tiene un grado a idoneidad media baja.

8.4.4.1.3 Faceta Afectiva

En la lección del video es posible identificar el uso de términos o expresiones en el discurso que, en cierto punto, constituyen aspectos motivacionales. Por ejemplo, se parecía la utilización de las expresiones como ¡rayos! como una expresión de respuesta a alguna acción contradictoria. También, encontramos frases como "Pero como Cristi, ¡te vas a contradecir!, No muchachos", donde se puede apreciar que el autor utiliza diferentes recursos del lenguaje para incluir cuestiones que potencien las *emociones* de los receptores del video, y en consecuencia, se potencie la autoestima y se evite el rechazo hacia las matemáticas.

Además, se aprecia en el discurso del video, que el tono de voz, las palabras utilizadas, las frases que se menciona permiten generar, en cierta medida, una *actitud* de flexibilidad hacia la exploración de ideas y se genera un ambiente que invita a participar al estudiante.

Por otro lado, al comienzo de la lección del video 1, se recupera algunas creencias vinculadas a la interpretación y lectura de la derivada como entidad única y como cociente de diferenciales.

Por último, el grado de idoneidad afectiva es media.

8.4.4.1.4 Faceta Interaccional

En relación con la componente *interacciones docente-estudiantes*, es posible destacar del video varias cuestiones; primero que se aprecia la organización de las configuraciones didácticas están planificadas y se reconoce la secuencia de los momentos donde se van incorporando nuevos objetos matemáticos para avanzar el desarrollo de la lección. Además, se realiza una presentación clara y ordenada de los conceptos-definiciones vinculadas a la diferencial, intentando establecer relaciones con, por ejemplo, la derivada y sus interpretaciones. Asimismo, se utiliza en el discurso varias preguntas retóricas y argumentativas que invitan a reflexionar sobre la consideración del cociente de diferenciales y a cada uno de los diferenciales.

La utilización de recursos retóricos y argumentativos por el autor del video 1, genera en un cierto punto, una invitación a los estudiantes (receptor del video), para poner en diálogo sus interpretaciones, dudas y realizar conjetura en relación con las actividades propuestas (*interacción entre estudiantes*).

Por último, se aprecia que las configuraciones didácticas que intervienen en el video 1, tienden a ser del tipo dialógica, aunque no se manifiesten las prácticas personales de los estudiantes, el autor del video organiza su presentación y plantea una actitud de apertura al diálogo sobre las ideas con relación al estudio de la diferencial, contemplando de esta manera un cierto grado de la componente *evaluación formativa* de la GVID-Diferencial. En síntesis, se considera que el grado de idoneidad interaccional es media.

8.4.4.1.5 Faceta Mediacional

En la lección del video 1 se aprecia la utilización de varios *recursos* digitales y tecnológicos, como una pizarra digital, un graficador para la representación gráfica que se encuentra en la pantalla. Además, se emplean diferentes colores en la en la escritura y señalamiento de los objetos, lo que genera un ambiente más agradable su visualización.

Sobre la distribución del tiempo de enseñanza y aprendizaje, se considera que es adecuada ya que en la presentación cada momento de enseñanza tiene un tiempo designado, donde la explicación no es acelerada, sino que el autor del video 1, describe, explica y hace las pausas necesarias para trazar, escribir y realizar los comentarios, lo que se considera adecuado para el nivel educativo al cual se dirige, en este caso, para los FPM.

Se podría mejorar la utilización con un editor de texto para que la escritura de las palabras sea más accesible para todos, aunque se puede leer sin inconvenientes. También, se podría utilizar un graficador para realizar los trazos perpendiculares y paralelos con mayor precisión, en lugar de hacerlos a mano alzada.

En síntesis, se considera que el grado de idoneidad mediacional es media baja.

8.4.4.1.6 Faceta Ecológica

La propuesta de la lección del video 1 es adecuado para los *diseños curriculares* de las carreras que tengan a la materia cálculo 1 o análisis matemática 1 entre sus materias, estas carreras pueden ser el profesorado de matemáticas, licenciatura en matemáticas, y en menor medida, el profesorado de física e ingeniería. El grado de adaptación de la propuesta del video 1 a las carreras varía ya que la lección se caracteriza por plantear una propuesta didáctica que relaciona la derivada y la diferencial, pero en un contexto intra matemático, donde se observa el uso de diferentes representaciones (geométrica, simbólica, algebraica y funcional) pero no presenta en sus primeros 11 minutos conexiones con otras disciplinas. Sin embargo, en los últimos minutos del video presenta una situación problema, a modo de ejemplo lo cual podría habilitar el uso del video educativa para las carreras de física e ingeniería.

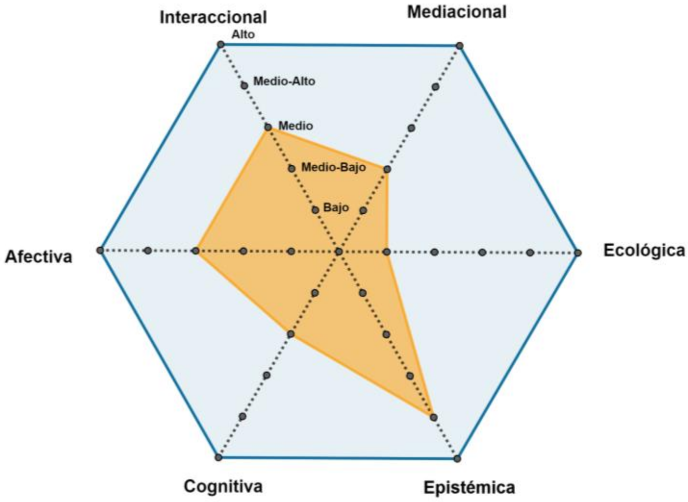
En cierta medida, es posible mencionar que en el diseño del video 1 se han considerado algunas *innovaciones didácticas* como la grabación del propio video y el uso de recursos digitales como la pizarra digital y un graficador.

A partir de la valoración realizada, se determina que le grado de idoneidad ecológica es bajo.

La Figura 8.4 sintetiza las características del proceso de estudio llevado a cabo en el video 1 para cada una de las facetas analizadas previamente. Representamos mediante el hexágono regular el grado máximo de las idoneidades que se supone a priori. El hexágono irregular interno representa el grado de las idoneidades efectivamente logradas.

Figura 8.4

Valoración de la idoneidad didáctica del video 1



8.4.4.2 Valoración del Video 2

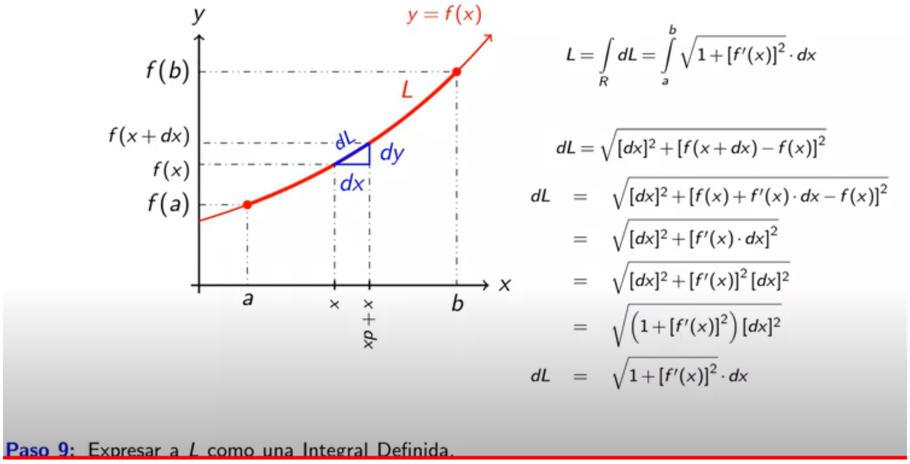
8.4.4.2.1 Faceta Epistémica

La *situación-problema* que se plantea en el video 2 pretende “establecer la integral definida que presente el valor exacto de la longitud de una parte de la gráfica de una función”, la cual se caracteriza por relacionar la diferencial con la integral, lo longitud de arco de la curva de una función y la derivada. La situación propuesta utiliza a la diferencial para modelizar y establecer una expresión para hallar la longitud de una curva en un intervalo. Además, se menciona de manera explícita en reiteradas oportunidades, con diferentes énfasis por parte del autor, que los diferenciales dx, dy y dL son considerados como “infinitamente pequeño”.

Al observar con detalle como el autor utiliza, describe y nombra a los diferenciales que intervienen y emergen de las prácticas matemáticas de la lección, se aprecia que estos reciben un tratamiento geométrico que es posible asociarlo con la configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos del significado parcial de la Diferencial de Leibniz (Verón y Giacomone, 2021), ya que dL expresa el autor que representa “un segmento de la recta (…) infinitamente pequeño”, “representa una parte infinitesimal de la curva”, el $[x, x + dx]$ “subintervalo infinitamente pequeño”, y dy representa “el cateto vertical” en el triángulo diferencial o característico (Bos, 1974; Kleiner, 2012), como se muestra en la Figura 8.5.

Figura 8.5

Lenguajes utilizados en el video 2



Fuente: (Aprender Matemáticas, 2020, 11m31s)

Continuando con la valoración de los *lenguajes*, en la lección del video 2 se observa que se utilizan diferentes tipos para varias funciones, por ejemplo; el lenguaje natural, se utiliza para expresar y escribir en la pantalla los pasos del decálogo que menciona el autor, además del discurso donde emplea diferentes términos como "infinitamente pequeño", "longitud de arco", "valor exacto", "valor numérico", entre otros, que cumplen la función de comunicar diferentes ideas matemáticas a medida que avanza con la lección; el lenguaje geométrico, se presenta con la representación gráfica de la función, el triángulo diferencial y los segmentos que representan a los diferenciales (ver Figura 8.5); el lenguaje simbólico, es remarcado por el autor, principalmente cuando expresa que es necesario otorgarle un "nombre matemático" al subintervalo infinitamente pequeño dL y que lo denomina como "diferencial longitud"; y el lenguaje algebraico y funcional, que se puede apreciar en todas las expresiones que conforman la lección del video plasmada en la Figura 8.5.

Asimismo, se considera que el lenguaje empleado es adecuado para un estudiante que cursa la asignatura de cálculo o análisis matemático, por tales motivos, es adecuado para los FPM. Por último, agregamos que se plantean situaciones en las que se utiliza el lenguaje para la expresión de las ideas matemáticas en varios registros.

En relación con los *conceptos-definiciones* que intervienen y emergen de la lección del video, estos son varios, algunos más importante son: integral definida, diferencial como una distancia infinitamente pequeña, derivada, longitud de un arco de una curva, triángulo diferencial, valor numérico, leyes de los exponentes, función, imagen, postulado de Leibniz, entre otros. También, se destaca en el video que algunos conceptos cumplen determinadas funciones que posibilitan el progreso en la resolución de la situación problema, y se hace explícita cual en papel que cumple, por ejemplo, la integral definida se la considera como una suma de todas las partes (Burgos et al., 2021). En la misma dirección, se considera a la función como una correspondencia (Pino-Pan y Parra-Urrea, 2021) que se establece entre los diferenciales que luego determinan al triángulo diferencial.

La presentación y utilización de los *conceptos-definiciones*, se considera que es adecuada para el nivel de los estudiantes, en nuestro caso para los FPM. Sin embargo, en la lección, no se aprecia que se habilite un espacio para la discusión de las interpretaciones que pueden llegar a realizar los estudiantes sobre los diferentes involucrados.

En relación con las *proposiciones*, varias de ellas se han mencionado en párrafos anteriores y resulta interesante destacar que las mismas son presentadas por el autor del video de manera clara y con énfasis, resaltado de esta forma su importancia para el desarrollo de la lección. Una proposición importante está relacionada con la consideración de la curva como una línea infinito-angular, asociado al triángulo diferencial, que en palabras de Leibniz dice "encontrar una tangente es dibujar una línea recta que une dos puntos de la curva que tienen una distancia infinitamente pequeña, es decir, el lado prolongado del polígono infinitoangular que para nosotros es lo mismo que la curva" (Leibniz, 1684, p. 223, citado en Bos, 1974, p. 19).

Sobre los *procedimientos*, se destaca que el autor realiza una explicación detallada de todas las acciones y decisiones que realiza para establecer las técnicas que se deben emplear para determinar la longitud de arco de una curva. Esta presentación está acompañada de los *argumentos* que justifican y validan las acciones, decisiones y técnicas que utiliza en la lección, ya que, por ejemplo, en un momento se utiliza y explica la "leyes de los exponentes", entre otras situaciones. Además, se utiliza el lenguaje geométrico para apoyar y reforzar las argumentaciones.

Las *relaciones* que se aprecian en el video 2 están vinculadas principalmente la diferencia con la longitud de arco de una curva y la integral definida. No obstante, se menciona a la derivada conectado con el postulado de Leibniz, no se explica en el video. También, se destaca como el autor relaciona los diferenciales con el triángulo diferencial y el Teorema de Pitágoras, de tal manera que la presentación resulta clara y ordenada.

En relación con los *procesos matemáticos*, se logra identificar varios; por un lado, el *proceso de conceptualización* y *representación* de la diferencial como una distancia o cantidad infinitamente pequeña y, en consecuencia, es posible conceptualizar la curva como una línea infinito-poligonal o infinitoangular, de donde emerge la representación geométrica dl triángulo diferencial. Además, se establece que la integral definida permite sumar todas las partes de longitudes infinitamente pequeñas (*proceso de algoritmización*) y se establece su representación simbólica $L = \int_R \, dL$. Además, se remarca la notación que se utilizará para denotar a los diferenciales, en particular a la diferencial longitud (proceso de simbolización), y el proceso de modelización y generalización que se plantea al utilizar a los diferenciales y los conceptos-definiciones para establecer una expresión para calcular la longitud de arco de una curva de una función en un intervalo.

Un hecho didácticamente significativo, vinculado al proceso de generalización, es la consideración y mención de la diferencial longitud, ya que en la lección del video 2 se plantea una función de correspondencia entre los diferenciales dx, dy y dL, que luego definen al triángulo diferencial. Pero es importante advertir que en el proceso de generalización que interviene, y el autor lo hace explicito, al decir que dL "es una parte genérica", "es una parte infinitesimal de la curva", "representa las infinitas partes infinitamente pequeñas del todo". Estas aclaraciones y usos de la diferencial en la lección resultan muy importante para el estudio de este concepto ya que, en esta situación se genera un juego del lenguaje donde emerge un elemento genérico y entra en acción su representación ostensiva e intensiva, donde radica la importancia de considerar las facetas duales en relación con el elemento genérico, ya que esta situación puede llegar a generar potenciales conflictos epistémicos y cognitivos.

Continuando con los potenciales conflictos epistémicos, se puede mencionar que en la lección del video no se apreciar discordancias en el uso y consideración de los diferenciales, ya que siempre reciben el mismo tratamiento. Además, se destaca que el autor tiene bastante cuidado al utilizar y mencionar a la diferencial evitando errores, contradicciones y ambigüedades. También, se destaca que, en la lección, al utilizar los símbolos y expresiones que van surgiendo, se van mencionando y explicando con detalle cómo se las considera, aclarando con que se los utiliza.

Por último, en la lección no se advierte que se considere algún espacio para que los estudiantes puedan compartir sus interpretaciones y/o dudas en relación con el uso de la diferencial, a modo de apoyar y reforzar el estudio de este concepto. Sin embargo, se puede considerar que existe una cierta apertura al final del video cuando el autor expresa "¡Muy fácil, verdad! ¿Puedes explicárselo a alguien más?, donde hace una invitación a socializar las ideas matemáticas y continuar con el estudio.

A partir de la valoración realizada, se considera que el grado de idoneidad epistémica es alto.

8.4.4.2.2 Faceta Cognitiva

Teniendo en cuenta que se está analizando y valorando una lección de un video donde no se observan las prácticas personales de los estudiantes, receptores del video, resulta difícil valorar la mayoría de los indicadores de la faceta cognitiva, pero, sin embargo, es posible identificar algunas cuestiones asociadas a los conocimientos didáctico-matemáticos de los procesos cognitivos que intervienen y emergen en los procesos de estudio de la diferencial.

En relación con los *aprendizajes*, no se observan las prácticas personales de los estudiantes, no obstante, al final del video, el autor plantea la posibilidad de que los estudiantes, puedan explicar a sus compañeros u otras personas lo que han entendido del video. En este sentido, es posible advertir que se tiene presente, en cierto punto, los aprendizajes de los estudiantes.

Sobre las *conexiones* entre los significados de la diferencial, sus representaciones y contextos de uso, se considera que existen características de la lección del video que nos permiten afirmar que se proponen situaciones que propician un aprendizaje de tipo relacional entre los diferenciales, sus representaciones y uso en las circunstancias contextuales de la situación problema. Además, en la presentación se logra reconocer con claridad las funciones que cumplen los diferenciales y su relación con la integral, lo que favorece el aprendizaje.

En la explicación del autor en el video 2 se logra apreciar que se tienen en cuenta los *conocimientos previos* de los estudiantes, ya que, por ejemplo, se recupera propiedades como la "leyes de los exponentes" y plantea que, si no se recuerda, que no hay problema y lo explica. Además, realiza una advertencia al estudiante indicando que la potencia es distributiva con respecto a la multiplicación, no así con la suma, lo que indica que se tienen presente los conocimientos previos de los estudiantes, pero si estos no están disponibles los explica brevemente. Por último, cabe destacar que en la lección se utilizan registros apropiados para representar la información, como el gráfico, las representaciones geométricas y las expresiones simbólicas.

Con relación a los *conflictos cognitivos*, no se logra apreciar que estos son tomados en cuenta por el autor ya que no se evidencia que se aborde o se discuten sobre, por ejemplo, potenciales errores o confusiones de los estudiantes. Además, cuando se plantea que la diferencial longitud dL representa una parte general, no se vuelve sobre esa mención para clarificar dudas o inquietudes que puede llegar a producir el proceso de generalización donde emerge el elemento genérico.

Por último, se considera a partir de la valoración realizada que la idoneidad cognitiva es baja.

8.4.4.2.3 Faceta Afectiva

Si bien resulta difícil valorar los conocimientos didáctico-matemáticos asociados a la faceta afectiva debido a la ausencia de los estudiantes por las características del video 2, resulta que el autor transmite una *actitud* positiva y realiza un juego con las entonaciones de su voz, de tal manera que cuando menciona aspectos importantes hace mucho énfasis. Además, como al final del video invita a los estudiantes a compartir con sus pares, se puede considerar que el autor tiene en cuenta la participación del estudiante, planteando un desafío lo que puede generar en algunos un desafió interesante, potenciando la autoestima y evitando el rechazo hacia las matemáticas (componente de las *emociones*).

En síntesis, se plantea que la valoración de la idoneidad afectiva es baja.

8.4.4.2.4 Faceta Interaccional

La organización de las configuraciones didácticas que conforman el video 2 se aprecia que fueron planificadas al mucho cuidado y detalle, ya que, por ejemplo, se presentan en la pantalla los diez pasos del decálogo para obtener la expresión de la longitud de arco de una curva en un intervalo. Además, una característica que se destaca es que antes de comenzar con el desarrollo plantea y explica porque no es posible calcular la longitud de arco de una curva con los saberes de la geometría analítica, lo que indica que el autor planificó la introducción al tema remarcando cundo es posible utilizar los diferenciales. Además, se observa que se utilizan varios recursos retóricos y argumentativos para el desarrollo de la lección.

En la lección del video 2, no se identifican elementos que posibiliten la apertura hacia la discusión, debate y comunicación entre los estudiantes. Aunque se entiende que resulta difícil contemplar estas cuestiones ya que la intención del video es realizar una presentación sin intervención de los estudiantes. Pero es importante tener en cuenta que la lección tendrá mayor idoneidad interaccional en la medida en que se planteen formatos de interacción de tipo dialógica y colaborativa (Godino et al., 2009).

En síntesis, se plantea que la valoración de la idoneidad afectiva es media baja.

8.4.4.2.5 Faceta Mediacional

En la lección del video se parecía que se observa que han utilizado varios *recursos tecnológicos*, como un programa de presentación de diapositivas, un editor de ecuaciones y un graficador. El uso de estos recursos permite que la presentación sea ordenada, legible y prolija.

Además, se destaca que la distribución del *tiempo* en los momentos de enseñanza es adecuada ya que no se realiza una presentación acelerada y se explica con detalle cada nuevo paso que se realiza, dedicando el tiempo suficiente a cada paso del decálogo. También, agregamos que el uso de los colores para resaltar o remarcar los objetos que se mencionan resulta adecuado porque permite identificar y seguir el desarrollo de la lección sin inconvenientes.

Por último, a partir de la valoración realizada, se considera que el grado de idoneidad mediacional es media baja.

8.4.4.2.6 Faceta Ecológica

La propuesta de la lección del video 2 es adecuado para un *diseño curricular* de las carreras del profesorado de matemáticas o licenciaturas en matemática, esto se debe a que la propuesta didáctica permite establecer conexiones intra matemáticas y no interdisciplinares.

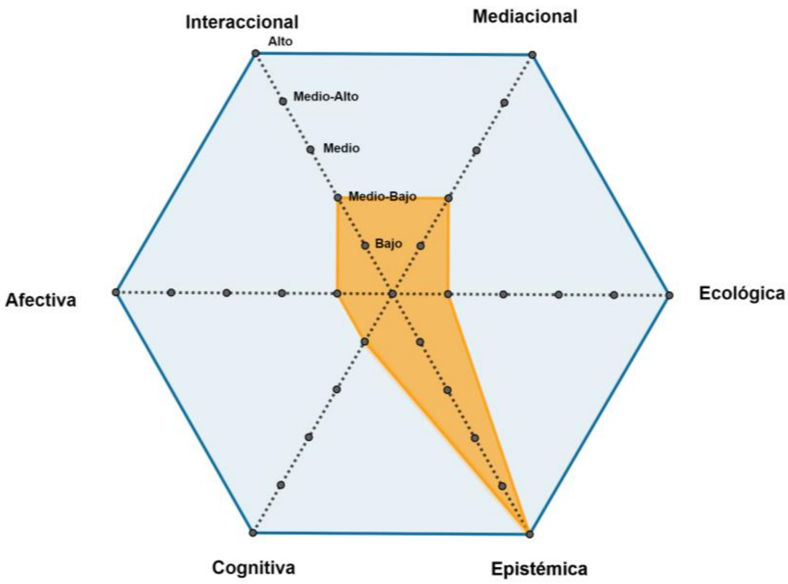
Asimismo, es posible valorar que el autor del video tiene en cuenta, en cierta medida, algunas *innovaciones en didáctica* del cálculo, aquellas que tienen que están vinculadas con el uso de los recursos digitales como el video, las presentaciones de diapositivas y el graficador.

En síntesis, se plantea que la valoración de la idoneidad ecológica es baja.

En la Figura 8.6 se representa con el hexágono irregular interno una síntesis visual del grado de idoneidad efectivo de cada una de las facetas involucradas en el proceso de estudio llevado a cabo en el video 2.

Figura 8.6

Valoración de la idoneidad didáctica del video 2



8.4.5 Tarea 10

Consigna

A partir del análisis y valoración que has realizado de los videos, ¿cuál recomendarías a tus estudiantes?, ¿por qué? Argumente su respuesta

Puedes utilizar una puntuación de 0 a 5 (0: nulo, 1: bajo, 2: medio-bajo, 3: medio; 4: medio-alto, 5: alto) para decidir el mayor o menor grado de idoneidad didáctica de los videos.

8.4.5.1 Análisis a priori de la Tarea 10

El análisis a priori de esta tarea forma parte del análisis a priori realizado en la Tarea 9. Además, se presentan las Figura 8.4 y Figura 8.6 a modo de resumen de la valoración de la idoneidad didáctica de cada video educativo.

8.4.6 Tarea 11

Consigna

Utilizando la GVID-Diferencial, realizar una valoración de la idoneidad didáctica de todo el proceso formativo que experimentaste en estas 7 sesiones de clases. Puedes agregar cualquier información adicional que consideres que pueda aportar a mejorar el curso.

La intención didáctica de la Tarea 11 es que los FPM puedan utilizar la GVID-Diferencial para valorar sus propias experiencias de tal manera que se pueda recopilar evidencias de aprendizajes.

8.5 Descripción General de la Implementación y Discusión de los Resultados

8.5.1 Análisis de la implementación de la Fase 1

8.5.1.1 Introducción

En esta sección, se describe y analiza la implementación de la Tarea 6 cuyo principal objetivo consiste en recuperar los significados personales de los estudiantes en relación con la noción de idoneidad didáctica, sus facetas y componentes mediante el análisis de la Tarea 5.

Cabe aclarar que los FPM han realizo un taller sobre la reflexión del profesor de matemática donde se ha abordado la noción de idoneidad didáctica, en el primer cuatrimestre del ciclo lectivo 2022, con lo cual se busca recuperar los aprendizajes como punto de partida para nuevas discusiones en relación con la enseñanza y aprendizaje de la diferencial. De esta manera, la Tarea 6 constituye una primera aproximación que pone a los FPM en una instancia de meta reflexión didáctica.

En primer lugar, se obtuvieron 12 respuestas de los FPM y todos han escrito en sus producciones las seis facetas de la idoneidad didáctica, como la epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica. Esto es posible ya que los FPM recuerdan las facetas o dimensiones que es necesario tener presente, desde la perspectiva del EOS, para analizar y valorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática.

A continuación, se van a retomar las respuestas de los FPM para cada una de las facetas, donde se analizarán los criterios que mencionan y las valoraciones que realizan.

8.5.1.2 Análisis y valoración de cada una de las facetas de la idoneidad didáctica

En relación con la *faceta epistémica*, los criterios que predominan en las respuestas de los FPM son: prácticas matemáticas, objetos matemáticos, procesos (en particular el proceso de conceptualización), significados, intencionalidad didáctica y conflicto epistémico. En menor medida, mencionan a la representatividad del contenido, relaciones entre significados y conceptos. A modo de ejemplo, se muestra la respuesta del E6 en la Figura 8.7. También, E11 plantea como criterio la representación del contenido y la calidad del contenido, con lo cual no queda claro con que connotación usa el término “calidad”.

Figura 8.7

Parte de la resolución de E6 de la Tarea 6

Facetas	Criterios	Análisis y valoración
Epistémica	Prácticas, objetos, procesos Intención didáctica Significados Representatividad Potencial conflicto epistémico	$\neq$ significados del diferencial

En síntesis, se observa en las 12 respuestas de los FPM que han logrado recuperar los criterios de la faceta epistémica: significados institucionales (relacionado a las prácticas y objetos matemáticos); los procesos (solo se menciona a la conceptualización); potenciales conflictos epistémicos; y relaciones con otros conceptos (solo se menciona las relaciones entre significados).

En cuanto a la valoración que realizan los FPM de la Tarea 5 a partir de los criterios que han identificado, la mayoría no ha logrado valorar de manera completa la Tarea 5. Esta situación se explica en parte por las dificultades de los FPM para comprender el enunciado de la Tarea 6, pero también está relacionado con los aprendizajes que recuerdan los estudiantes sobre el uso de los criterios de idoneidad para valorar una configuración didáctica, en este caso, una tarea. Sin embargo, en varias respuestas de los FPM se observa que destacan en la valoración el uso de diferentes elementos lingüísticos, en particular mencionan el lenguaje algebraico, coloquial, simbólico como: $dx, dy, f'(x)$. Además, se aprecia en las valoraciones la mención de la expresión "distintos significados" resaltando la importancia de abordar los diferentes significados de la diferencial, y la mención de algunos objetos matemáticos primarios como los lenguajes, conceptos, proposiciones, como se puede observar en la respuesta de E12 (ver Figura 8.8).

Figura 8.8

Parte de la resolución de E12 de la Tarea 6

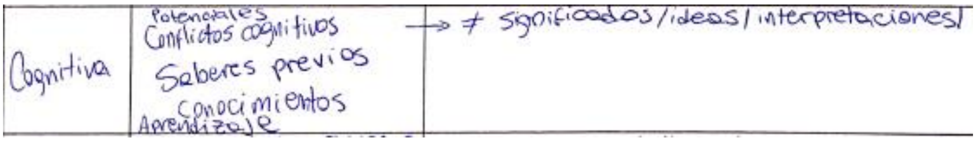
Epistémica	- Prácticas matemáticas - Objetos matemáticos - Procesos - ...	- Lenguajes, conceptos, prop... - dx, dy, f'(x) - Distintos significados

En síntesis, resulta necesario volver sobre la valoración de la faceta epistémica con los FPM, ya que constituye un aspecto a fortalecer porque, si bien reconocen los criterios y algunos indicadores, no logran poder utilizarlos de manera adecuada para valorar la propuesta, por tales motivos en la siguiente tarea del ciclo formativo se abordará esta situación.

Respecto a la *faceta cognitiva*, se observa en las 12 respuestas de los FPM que todos identifican dos criterios que son fundamentales de esta faceta, como los conocimientos previos y los potenciales conflictos cognitivos. En menor medida, se menciona como criterio a los significados personales (E1 y E2) o aprendizajes (E6 y E11) (ver Figura 8.9).

Figura 8.9

Parte de la resolución de E6 de la Tarea 6

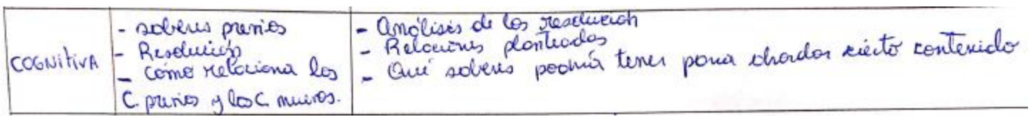


Cognitiva	Potenciales Conflictos cognitivos Saberes previos Conocimientos Aprendizaje	→ ≠ significados/ideas/interpretaciones/

Además, se observa como el E5 incorpora un criterio muy importante para la faceta cognitiva que tiene que ver con la relaciones o conexiones entre los significados parciales, sus sentidos, sus representaciones y sus contextos de uso (Verón, Giacomone, Pino-Fan, 2023) (ver Figura 8.10).

Figura 8.10

Parte de la resolución de E5 Tarea 6

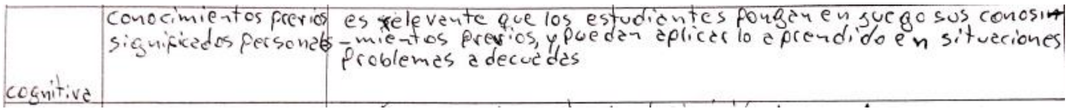


COGNITIVA	- saberes previos - Resolución - como relaciona los C. previos y los C. nuevos.	- Análisis de las resolución - Relaciones planteadas - Qué saberes podrían tener para abordar cierto contenido

En relación con la valoración que realizaron los FPM sobre la Tarea 5 en la faceta cognitiva, se observan dos tipos de respuestas, algunos colocan los aspectos (indicadores) que consideran necesario tener en cuenta para valorar la faceta cognitiva, como se aprecia en las respuestas de E5 y E6 en las Figura 4 y Figura 3, respectivamente. Por otro lado, resulta interesante el indicador de valoración que menciona E1 ya que hace foco en los aprendizajes y en la aplicación de éstos a nuevas situaciones-problemas (ver Figura 8.11). Otros, mencionan algunos conocimientos previos como derivadas, funciones, variables y ecuaciones, o mencionan que un potencial conflicto cognitivo son los diferentes significados de la diferencial.

Figura 8.11

Parte de la resolución de E1 de la Tarea 6

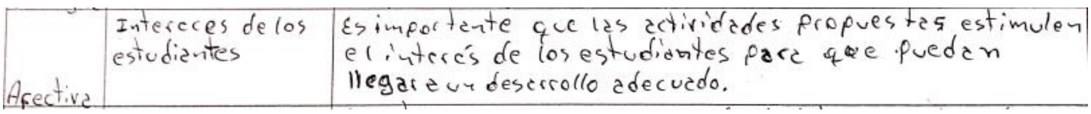


cognitiva	Conocimientos previos significados personales	es relevante que los estudiantes pongan en juego sus conosi-mientos previos, y puedan aplicar lo aprendido en situaciones problemas adecuadas

En la *faceta afectiva*, encontramos que solo 3 FPM no responden, el resto plantea como criterio común de esta faceta la motivación, los intereses de los estudiantes y los valores. Solo el E2 menciona a las creencias y el E7 agrega las emociones como criterios. Sin embargo, al momento de valorar los criterios planteados, la mayoría no emite una respuesta, a diferencia de E1 que menciona: "Es importante que las actividades propuestas estimulen el interés de los estudiantes para que puedan llegar a un desarrollo adecuado" (E1) (ver Figura 8.12). De esta manera se puede observar como para E1 es muy importante que la situación-problema (actividad) estimule el interés del estudiante. En contraposición a E1, el E11 menciona: "El incentivo para realizar la tarea proviene del docente y no de la tarea en sí misma" (E11) (ver Figura 8.13), lo que permite advertir que para E11 es muy importante que el docente genere o promueva el incentivo, o interés de los estudiantes. Si bien, ambas afirmaciones de los FPM es posible mejorarlas, los planteos de E11 no son correctos ya que existen criterios e indicadores que es necesario que el profesor los considere para el diseño de las configuraciones didácticas (actividades, ejercicios, problemas, lecciones de libro de texto, etc.) que permitirán aumentar el grado de idoneidad afectiva (Castillo, Burgos y Godino, 2022a).

Figura 8.12

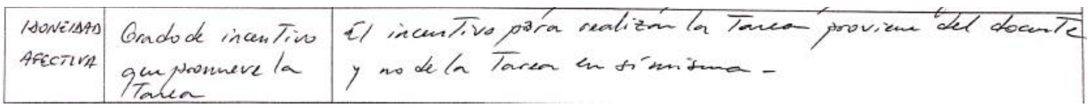
Parte de la resolución de E1 de la Tarea 6



Afectiva	Intereses de los estudiantes	Es importante que las actividades propuestas estimulen el interés de los estudiantes para que puedan llegar a un desarrollo adecuado.

Figura 8.13

Parte de la resolución de E11 de la Tarea 6



IDONEIDAD AFECTIVA	Grado de incentivo que promueve la Tarea	El incentivo para realizar la Tarea proviene del docente y no de la Tarea en sí misma -

En la *faceta interaccional*, casi todos los FPM proponen como criterios: las interacciones docente-estudiante y entre los estudiantes. Varios agregan como criterio la interacción estudiante-contenido, la cual no se aclara sobre qué aspectos se hace referencia. Sin embargo, solo el E3 menciona la "interacción con el libro/contenido" como criterio para tener en cuenta para el análisis de la lección del libro de texto de la Tarea 5 (ver Figura 8.14).

Figura 8.14

Parte de la resolución de E3 de la Tarea 6

Interaccional	. Relaciones docente, estudiante . Interacción con el libro/contenido	. Agregar ejemplos . Aportes extras. . Modificaciones.

Otro criterio que predomina en varis respuestas de los FPM tiene que ver con la “forma de trabajo” la cual es aclarada por E12 añadiendo los términos “individual o grupal”. Además, algunos FPM, como E5, plantean como criterio para valorar la faceta interaccional a la “organización de las clases”. Por otro lado, E2 es el único que destaca la autonomía como criterio a tener presente el generar actividades e instancias que propicien espacios de trabajo autónomo para los estudiantes, como se puede observar en la Figura 8.15.

Figura 8.15

Parte de la resolución de E2 de la Tarea 6

. Generar actividades que permita el intercambio entre estudiantes y a su vez, por medio de la guía y orientación del docente tengan una instancia en la cual puedan resolver algunas cuestiones particulares de forma autónoma.

En las valoraciones que realizan los FPM de la faceta interaccional, se observa que resaltan la necesidad de generar intercambios entre los estudiantes y que se pueda potenciar la comunicación entre ellos, como se muestra en la respuesta de E1 (ver Figura 8.16).

Figura 8.16

Parte de la resolución de E1 de la Tarea 6

Interaccional	Interacción docente Interacción entre estudiantes	es de suma importancia que los estudiantes puedan comunicar entre ellos sus apreciaciones como así también comunicar el docente para que este le oriente si van en buen camino

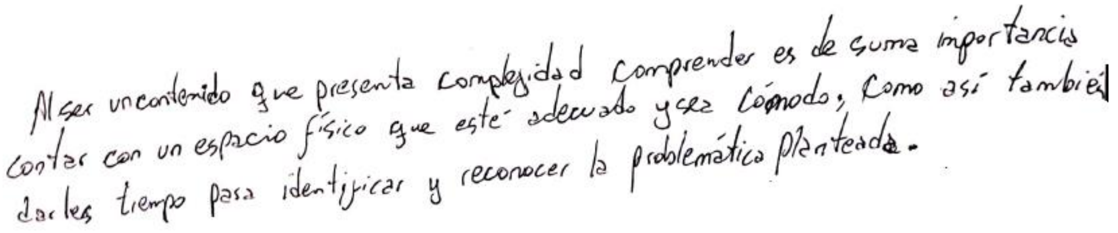
Además, se puede observar como el E3 utiliza los criterios que ha definido, en particular la interacción con el libro, para valorar la lección del libro de texto de la Tarea 5, por ejemplo, menciona que se debería agregar ejemplos, entre otras valoraciones que no son del todo claros (ver Figura 8.14).

En síntesis, se observa que los FPM han logrado recuperar la mayoría de los criterios e indicadores de la faceta interaccional como las interacciones docente-estudiantes, interacciones entre estudiantes y autonomía. Si bien, no se ha mencionado de manera explícita la evaluación como criterio a tener en cuenta, se puede apreciar de manera implícita que en las respuestas de los FPM tienden a considerar por parte del docente la importancia en la evaluación de los aprendizajes, por ejemplo, al mencionar “por medio de la guía y orientación del docente” (E2, Figura 8.15) o “comunicar al docente para que éste le oriente si van en buen camino” (E1, Figura 8.16). En estas respuestas, se advierte que el docente debería poder valorar las prácticas personales de los estudiantes como indicadores explícitos de las relaciones que están construyendo los estudiantes con los objetos matemáticos (Verón y Giacomone, 2023).

En la *faceta mediacional*, predomina en las respuestas de los 12 FPM los criterios de utilización de los recursos materiales y las condiciones del aula. En menor medida, se menciona el tiempo, asociado al indicador del tiempo de aprendizaje necesario para comprender la diferencial debido a su complejidad, como se muestra en la respuesta de E2 (ver Figura 8.17). Además, se recupera la valoración que realiza E2 en relación con los criterios mencionados, ya que explica la importancia de tener presente estos criterios en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la diferencial (ver Figura 8.17).

Figura 8.17

Parte de la resolución de E2 de la Tarea 6


Al ser uncontenido que presenta complejidad comprender es de suma importancia contar con un espacio físico que esté adecuado y sea Cómodo, Como así también darles tiempo para identificar y reconocer la problemática planteada.

Por otro lado, 4 FPM agregan como criterio: adaptación de la actividad al contexto o entorno, donde mencionan la necesidad de adecuar la actividad propuesta al entorno o al contexto en el cual se implementará, como se puede observar en la respuesta de E12 en la Figura 8.18. Si bien, resulta necesario adecuar la configuración didáctica a los recursos materiales disponibles y las condiciones del aula y distribución de los estudiantes, no queda del todo claro en las respuestas de los estudiantes el uso del término entorno o contexto.

Figura 8.18

Parte de la resolución de E12 de la Tarea 6

Mediacional	Entorno	- Adaptar la GD o actividad al entorno en el que se presenta. - Uso de los recursos. C.D.

Por otro lado, en relación con el criterio de utilización de recursos materiales, varias respuestas de los FPM mencionan la utilización de la una lección de un libro de texto como un recurso que se empleó en la tarea 5. Además, E3 agrega que el libro resulta conocido para los estudiantes ya que pertenece al libro de Cálculo de Stewart (2012).

En general, se observa en las respuestas de los FPM que han logrado identificar los tres criterios más importantes de la faceta mediacional: recursos materiales, condiciones ambientales y tiempo de enseñanza y aprendizaje, estableciendo algunos indicadores específicos a tener presente en los procesos de estudio de la diferencial.

En la *faceta ecológica*, la mayoría de los FPM menciona como criterios a la adaptación del curriculum, adaptación al nivel educativo y el contexto. Resulta interesante como E6 utiliza estos criterios para proponer un interrogante a modo de indicar de logro del criterio al plantear: ¿Corresponde la dificultad de la actividad al nivel? (E6, ver Figura 8.19)

Figura 8.19

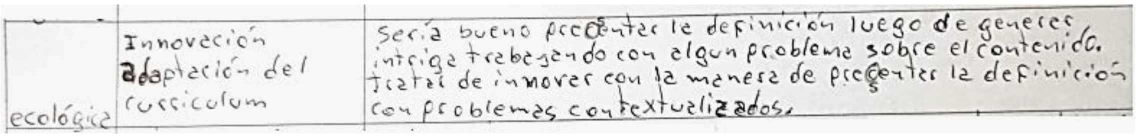
Parte de la resolución de E6 de la Tarea 6

Ecológica	- contexto - adaptación · curriculum · Nivel educativo (año)	Corresponde la dificultad ~~el nivel~~ de la actividad al nivel ?

También, E1 y E2, agregan como criterio dentro de la faceta ecológica a la innovación haciendo referencia a la necesidad de abordar el estudio de la diferencial mediante diferentes problemas contextualizados (ver Figura 8.20). Si bien, no se aclara qué se entiende por contexto o problemas contextualizados, resulta adecuado reflexionar sobre la contextualización de las situaciones-problemas en términos de adaptación curricular y adaptación socio-profesional. En este último sentido, el E11, valora que el contenido de la tarea 5 resulta de interés para el presente y futuro de los profesores de matemática, como se observa en la Figura 8.21.

Figura 8.20

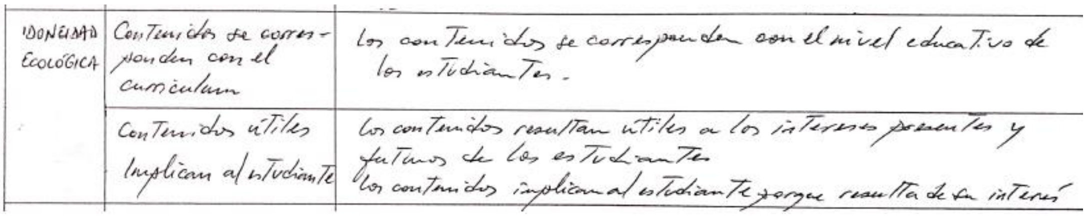
Parte de la resolución de E1 de la Tarea 6



ecológica	Innovación adaptación del curriculum	Seria bueno presentar la definición luego de generar intriga trabajando con algun problema sobre el contenido. Tratar de innovar con la manera de presentar la definición con problemas contextualizados.

Figura 8.21

Parte de la resolución de E11 de la Tarea 6



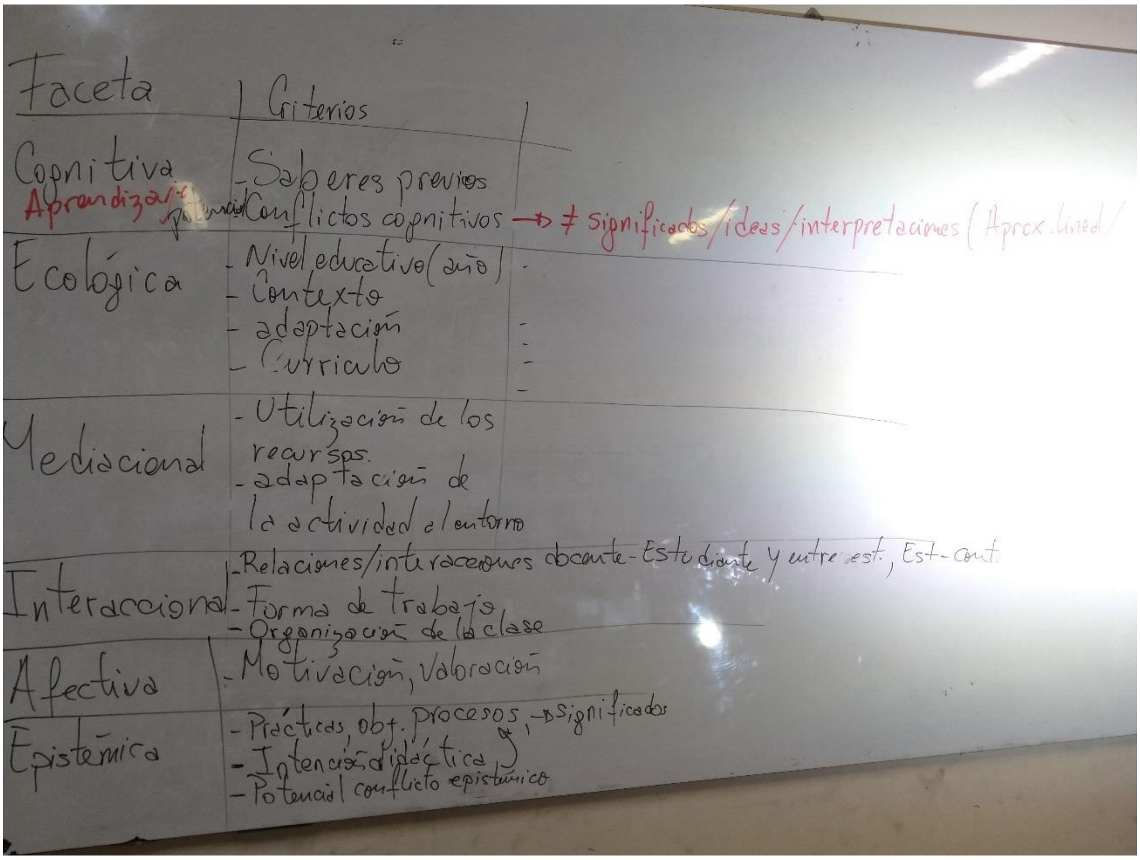
IDONEIDAD ECOLÓGICA	Contenidos se corresponden con el curriculum	Los contenidos se corresponden con el nivel educativo de los estudiantes.
	Contenidos útiles Implican al estudiante	Los contenidos resultan útiles a los intereses presentes y futuros de los estudiantes. Los contenidos implican al estudiante porque resulta de su interés

En síntesis, se observan en las respuestas de los FPM que han logrado recuperar tres criterios importantes de la *faceta ecológica.* Aunque, cabe aclarar que no todos consideran a la innovación como criterio y que la adaptación socio-profesional no predomina en las reflexiones de los FPM, por tales motivos resulta necesario volver sobre estos criterios para afinar los indicadores de cada uno y agregar los criterios faltantes como: educación en valores y conexiones intra e interdisciplinarias.

Por último, se comparte en la Figura 8.22 una foto de la discusión grupal que se realizó con el grupo clase recuperando sus conocimientos previos sobre las facetas, componentes e criterios de idoneidad didáctica, donde se puede apreciar que los FPM reconocen las facetas y algunas componentes de las mismas. Estos conocimientos son los que utilizaron para valorar la lección del libro de texto.

Figura 8.22

Facetas, componentes e indicadores recuperados por los FPM en la socialización



8.5.2 Análisis de la implementación de la Fase 2

8.5.2.1 Introducción

En esta sección, se presentan los principales resultados de la implementación de la Tarea 7 cuyo principal objetivo consiste utilizar la guía de valoración de la ID propuesta por Godino (2013) para el análisis y valoración de la ID de la implementación de la Tarea 1 (situación-problema del cálculo de la masa) en el primer ciclo de formación. Cabe aclarar que, en el primer ciclo, se realizó un análisis epistémico y cognitivo del problema y una resolución de un estudiante.

A continuación, se retomarán cada una de las facetas de la ID, de las 13 respuestas, para estudiar el uso de esta herramienta por parte de los FPM, en el sentido de determinar en qué medida los FPM comprenden las facetas, componentes y criterios, y cómo los emplean para valorar el diseño e implementación de una situación-problema.

8.5.2.2 Valoración del uso que hacen los FPM de la Idoneidad Didáctica

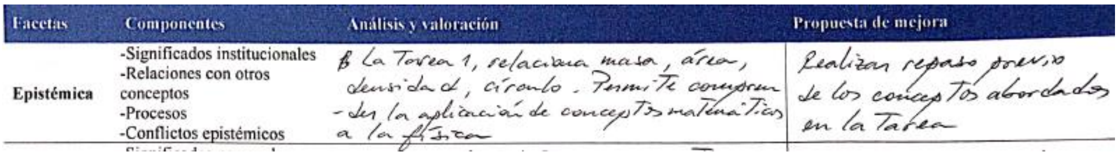
8.5.2.2.1 Faceta Epistémica

En esta faceta, se observan en las respuestas de los FPM que se han enfocado en dos componentes: relaciones con otros conceptos y conflictos epistémicos. Con respecto al primero, en la valoración que hacen los FPM, algunos mencionan los conceptos-definiciones involucrados en la Tarea 1: masa, área, densidad, circunferencia, círculo, integral, sumatoria y diferencial, como se muestra en la respuesta de E12 en la Figura 8.23. Otras respuestas que refieren a esta componente lo hacen de manera superficial ya que mencionan “El problema relaciona otros conceptos, que eran necesario para resolverlo” (E11) o “Se puede observar una correcta relación entre conceptos” (E7). Si embargo, en estas últimas valoraciones, no se aclara cuáles son las relaciones y/o conceptos a los que hacen referencia en sus respuestas.

Como propuesta de mejora, se puede observar que solo algunos FPM plantean mejoras a la faceta epistémica, por ejemplo, E12 propone que se realicen repasos previos de los conceptos involucrados en la tarea. El E4 agrega, “Enunciar los objetivos que tenemos que alcanzar” (E4), para potenciar esta faceta.

Figura 8.23

Parte de la resolución de E12 de la Tarea 7

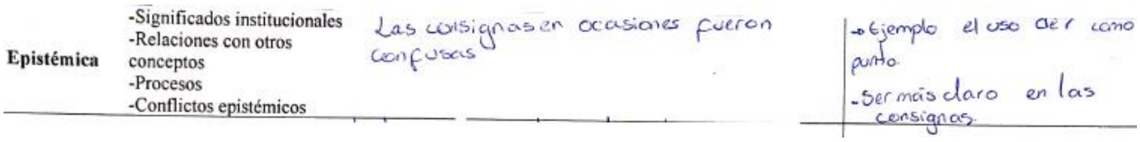


Facetas	Componentes	Análisis y valoración	Propuesta de mejora
Epistémica	-Significados institucionales -Relaciones con otros conceptos -Procesos -Conflictos epistémicos	β La Tarea 1, relaciona masa, área, densidad, círculo. Permite comprender la aplicación de conceptos matemáticos a la física	Realizar repaso previo de los conceptos abordados en la Tarea

Respecto a los conflictos epistémicos, si bien la mayoría de los FPM los menciona de manera superficial y general, ya que plantear de manera explícita cuál es el conflicto epistémico, por ejemplo, E6 menciona “Se fueron resolviendo los conflictos epistémicos a medida que surgían lo que ayudo en la resolución” (E6). Pero se destacan las valoraciones de E5 y E13 ya que expresan de manera explícita uno de los primeros conflictos epistémicos que emerge del problema de cálculo de la masa que está relacionado con la presentación y uso del radio, en este caso se genera un conflicto la representación ostensiva del radio, el uso del elemento genérico y la dualidad extensivo e intensivo. Dicha complejidad es expresa por los FPM como una confusión y/o como un doble uso de la misma letra, como se muestran en las respuestas de E5 y E13 en las Figura 8.24 y Figura 8.25, respectivamente.

Figura 8.24

Parte de la resolución de E5 de la Tarea 7


Epistémica

-Significados institucionales
-Relaciones con otros conceptos
-Procesos
-Conflictos epistémicos

Las consignas en ocasiones fueron confusas

-Ejemplo el uso de r como punto.
-Ser más claro en las consignas.

Figura 8.25

Parte de la resolución de E13 de la Tarea 7


Epistémica

-Significados institucionales
-Relaciones con otros conceptos
-Procesos
-Conflictos epistémicos

El uso de r para denotar el radio y r como variable.

En relación con la componente significados institucionales y procesos, solo el E2 menciona en su valoración de manera general que en la resolución del problema “están implicados diferentes significados y procesos que pueden producir en los estudiantes una serie de conflictos” (E2), pero no aclara y tampoco argumenta cuáles son específicamente los significados de la diferencial involucrados y los procesos que intervienen y emergen de la resolución.

En síntesis, se observa que algunas componentes de la faceta epistémica, como relaciones con otros conceptos y conflictos epistémicos resulta más accesible para los FPM su uso para la valoración, tal vez porque es un poco más sencillo su identificación que los componentes de los procesos y significados institucionales que implican la puesta en acción de un conjunto de conocimientos para poder emitir alguna valoración. También, se tiene en cuenta que la Tarea 1 ha sido resuelta por los estudiantes hace varias clases con el cual el tiempo que ha transcurrido desde la resolución hasta la tarea 7 es un condicionante. Sin embargo, resulta necesario potenciar el análisis y valoración de la faceta epistémica con los FPM con otras actividades formativas que les permita observar y analizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la diferencial, pero son los lentes de la idoneidad didáctica.

8.5.2.2.2 Faceta Cognitiva

Se observan, en las 13 respuesta de los FPM que han utilizado las componentes de conocimientos previos, y en menor medida, los conflictos cognitivos. Si bien se menciona la necesidad de considerar los conocimientos previos para resolver la tarea 1, no se especifican cuáles son. Sin embargo, algunos FPM consideran que les resultó “complicado” (E7) resolver la tarea 1 porque no tenían los conocimientos previos necesarios. Para resolver esta situación, dos FPM proponen como propuesta de mejora “recordar ciertos conocimientos previos para un mejor desarrollo de la actividad” (E13) o realizar “lectura previa del tema” (E3), como se muestra en la Figura 8.26. Si bien, es necesario tener determinados conocimientos previos para asegurar el éxito en la resolución del problema de cálculo de la masa de una lámina circular, teniendo en cuenta el contexto, se considera que no favorece el diseño e implementación de la tarea 1 realizar un repaso o lectura previa de los temas a desarrollar. Además, la tarea busca recuperar saberes previos, que los FPM lo han puesta en acción para avanzar y progresar en el aprendizaje de los significados parciales de la diferencial de una función.

Figura 8.26

Parte de la resolución de E3 de la Tarea 7

Cognitiva	-Significados personales -Relaciones con otros conceptos -Conocimientos previos -Procesos -Diferencias individuales -Conflictos cognitivos	- Considero que mis saberes previos no estaban tan frescos, (una lectura previa me habría ayudado)	lectura previa del tema.

Otra propuesta de mejora que plantea la E12 cuyo foco está en las situaciones-problemas (faceta epistémica) tiene que ver con comenzar con problemas más sencillos e ir complejizando a medida que se avanza (ver Figura 8.27). El aporte del FPM resulta interesante para pensar en el rediseño de la Tarea 1, ya que es posible pensar en el diseño de actividades previas que nos inviten a pensar en las primeras aproximaciones a los Significados parciales de la diferencial.

Figura 8.27

Parte de la resolución de E12 de la Tarea 7

Cognitiva	-Significados personales -Relaciones con otros conceptos -Conocimientos previos -Procesos -Diferencias individuales -Conflictos cognitivos	La resolución de la Tarea es exitosa si se disponen de los conocimientos previos necesarios. - Tuve que consultar con otros compañeros para resolverla.	Comenzar con problemas más simples e ir ascendiendo en complejidad a posteriori.

Por otro lado, se destaca la valoración de E11 ya que menciona de manera explícita un conflicto cognitivo que ha surgido en la implementación de la tarea que tiene que ver con el cálculo y consideración del área para obtener la masa de la lámina circular, si se consideran círculos concéntricos se está superponiendo valores de área para hallar el valor de la masa total (ver Figura 8.28).

Figura 8.28

Parte de la resolución de E11 de la Tarea 7

Cognitiva	-Significados personales -Relaciones con otros conceptos -Conocimientos previos -Procesos -Diferencias individuales -Conflictos cognitivos	La actividad estaba adecuada al currículo, para resolver necesitabamos de conocimientos previos que fueron considerados en el problema. Surgieron conflictos cognitivos porque no podíamos calcular la masa total, porque repetíamos el área en cada punto de la circunferencia

En síntesis, se aprecia que los FPM han focalizado sus respuestas en la faceta cognitiva en dos componentes: los conocimientos previos y potenciales conflictos cognitivos. Si bien, como ya se ha mencionado, resulta necesario volver a revisar los análisis, valoraciones y propuesta de mejora de los FPM para precisar con mayor detalle cuales son los conocimientos previos y los conflictos. De esta manera se realizará un mejor uso de las componentes y criterios de la faceta cognitiva. Por otro lado, se observa que los componentes de significados personales, relaciones, procesos y diferencias individuales no han sido utilizadas por los FPM, lo que nos permite reflexionar sobre la importancia de revisarlos para potenciar y mejorar las valoraciones de los FPM sobre esta faceta.

8.5.2.2.3 Faceta Afectiva

En la *faceta afectiva*, se observa en las respuestas de los FPM que han logrado utilizar y valorar tres componentes de esta faceta como: emociones, actitudes y motivación. En relación con las emociones, por ejemplo, E10 menciona a la ansiedad y a la preocupación en la resolución del problema (ver Figura 8.29).

Figura 8.29

Parte de la resolución de E10 de la Tarea 7

Afectiva	-Emociones, actitudes, motivación, creencias y valores	Creo que al ver un problema tan largo, la ansiedad es la primera que aparece junto con la preocupación.

Por otro lado, los E6 y E7, destacan el acompañamiento del profesor en la resolución de la actividad, valorando como positivo en la componente emociones-actitudes (ver Figura 8.30).

Figura 8.30

Parte de la resolución de E7 de la Tarea 7

Afectiva	-Emociones, actitudes, motivación, creencias y valores	El acompañamiento del profe dando tranquilidad al resolver.

Otros FPM, utilizan la componente motivación, para indicar que les resultó motivadora la clase destacando los aspectos que consideran como positivo. Por ejemplo, E8 dice “Fue muy motivadora la case porque había debate y es lo que nos gusta” (E8). Además, el E4 destaca otros aspectos de la clase que considera que fueron relevantes para la faceta afectiva como la interacción y los diálogos (ver Figura 8.31).

También, resaltan algunos FPM que las intervenciones que realizó el profesor (doctorando) en determinado momento de la clase entregando a cada estudiante un dulce (golosina) a modo de cambiar el ambiente del aula y renovar energías de los FPM luego de un recreo, produjo un cambio actitudinal en la mayoría de los FPM y en el ambiente del aula, tal como lo expresa E4 en su valoración.

Figura 8.31

Parte de la resolución de E4 de la Tarea 7

Afectiva	-Emociones, actitudes, motivación, creencias y valores	→ Interacción, diálogo utilizados de forma correcta. (comida de por medio)	Estuvo GENIAL.

Por otro lado, se observa que dos respuestas de los FPM que no son correctas en términos de la faceta afectiva; uno menciona sobre el contexto del problema, donde escribe: “el contexto me parece un poco lejano” (E3) el cual corresponde a la faceta epistémica; y el otro, menciona que: “el trabajo en equipo favorece el proceso” (E5) que corresponde a la faceta interaccional porque se relaciona con la organización de las interacciones. Con relación al primer comentario, el contexto del problema no es lejano al FPM ya que un indicador de la faceta epistémica plantea justamente la posibilidad de proponer una muestra representativa de situaciones que propicien la utilización de la diferencial para la modelización y representación de las variaciones, cambios o acumulación de diversos fenómenos de matemáticas, física, ingeniería y de las ciencias experimentales (Verón, Giacomone y Pino-Fan, 2023).

En síntesis, los FPM han logrado utilizar y valorar tres componentes fundamentales de la faceta afectiva, que tiene ver con las emociones, actividades y motivaciones, las cuales se consideran que es importante que el FPM los tenga en cuenta para diseñar, implementar y valorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la diferencial con una alta idoneidad afectiva.

8.5.2.2.4 Faceta Interaccional

En las respuestas de los FPM, se advierte que han utilizado para valorar las interacciones docente y estudiantes, y entre los estudiantes, ya que plantean valoran como positivo las intervenciones que ha realizado el profesor para generar las discusiones y avanzar en la resolución de la situación-problema, como se aprecia en la respuesta de E6 en la Figura 8.32.

Figura 8.32

Parte de la resolución de E6 de la Tarea 7

Interaccional	-Interacción Docente-Estudiante -Interacción entre estudiantes -Autonomía -Evaluación formativa	El profesor en una primera instancia dejó que interactuemos con el problema y luego nos guió para buscar otra forma de resolver Entre estudiantes fuimos logrando la resolución

También, se aprecia en la valoración de E12, que además del acompañamiento del profesor en los diferentes momentos de resolución de la tarea, resalta la forma de trabajo, característica propia de la implementación de la configuración didáctica, que tiene que ver con la posibilidad de generar momentos de trabajo individual y/o autónomo, como así también, momentos de trabajo grupal-colaborativo, como se muestra en la Figura 8.33.

Figura 8.33

Parte de la resolución de E12 de la Tarea 7

Interaccional	-Interacción Docente-Estudiante -Interacción entre estudiantes -Autonomía -Evaluación formativa	El docente acompañó el proceso de resolución despejando dudas Asimismo nos dio posibilidad de resolver el problema de manera autónoma y/o c/compañeros	La Tarea podría especificar que se puede realizar en grupo -

Incentivar y generar espacios de debates sobre las prácticas personales de los estudiantes es una competencia que el futuro profesor de matemática tiene que lograr promover, para potenciar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la diferencial implementando configuraciones del tipo dialógica y colaborativas (Verón y Giacomone, 2023), estos criterios son valorados por varios FPM, y a modo de ejemplo, se muestra la respuesta de E3 en la Figura 8.34.

Figura 8.34

Parte de la resolución de E3 de la Tarea 7

Interaccional	-Interacción Docente-Estudiante -Interacción entre estudiantes -Autonomía -Evaluación formativa	- Considero que las interacciones realizadas por el docente fueron excelente, así como la propuesta de la clase, y el incentivo del debate

Por otro lado, el E9 menciona una característica de la componente de evaluación formativa al escribir que se “favoreció una autoevaluación para saber lo que nos acordábamos del diferencial” (E9). Por último, E8 menciona que “la organización del aula fue diferente” (E8), esta valoración será retomada en la faceta mediacional.

En síntesis, la mayoría de los FPM han logrado utilizar de manera efectiva algunas componentes de la faceta interaccional, lo cual implica un primer progreso en el desarrollo de la competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica (Giacomone, Godino, Beltrán-Pellicer, 2018).

8.5.2.2.5 Faceta Mediacional

En el análisis y valoración que realizan los FPM se observa que han utilizado los componentes: tiempo, recursos materiales y condiciones del aula. Con relación al tiempo, plantean que el mismo fue adecuado para la resolución de la actividad y que el tiempo destinado para los debates fue bueno, sin embargo, algunos FPM plantean que en determinados momentos necesitarían mayor tiempo para la resolución.

Por otro lado, la mayoría de los FPM menciona que los recursos materiales fueron apropiados, pero solo algunos mencionan que en este caso particular se ha utilizado como recurso impresiones y que cada estudiante tenía su propia ficha, como lo expresa E10 en la Figura 8.35.

Figura 8.35

Parte de la resolución de E10 de la Tarea 7

Mediacional	Recursos materiales, condiciones del aula, número de estudiantes y tiempo	Se entregó la actividad impresa para cada estudiante. Cada uno tenía el suyo, se le dio el tiempo a cada uno de resolverlo

También, solo E8 refiere en sus valoraciones a las condiciones del aula, ya que menciona que “la organización del aula fue diferente” y que “las mesas se colocaban en forma de U” (E8). En este caso, se aprecia como el FPM valora como positivo la organización de las mesas en forma de U como lo ha implementado el profesor para potenciar los diálogos y debates entre los FPM.

Resulta interesante en la propuesta de mejora que menciona E6 respecto al gráfico de la situación-problema del cálculo de la masa, donde menciona que se podría cambiar por otro gráfico (ver Figura 8.36). Si bien, es discutible la función que cumple la representación gráfica en la Tarea 1, ya sea como un recurso o como un elemento del lenguaje en la faceta epistémica, su presencia ha generado un potencial conflicto epistémico-cognitivo que lo manifiesta el FPM como un aspecto a considerar para cambiar en la Tarea 1.

Figura 8.36

Parte de la resolución de E6 de la Tarea 7

Mediacional	Recursos materiales, condiciones del aula, número de estudiantes y tiempo	los recursos permitieron que tengamos que sacar conclusiones del problema hasta llegar a la resolución correcta	Se podría haber presentado otro gráfico

En síntesis, se puede apreciar que los FPM han comenzado a utilizar tres componentes de la faceta mediacional para analizar y valorar el proceso de enseñanza y aprendizaje que han experimentado en relación a la diferencial, si bien es necesario profundizar el análisis y la valoración, es un buen comienzo que los FPM utilicen los criterios de idoneidad para valorar y buscar potenciales mejoras de las propuestas, potenciando de esta manera el uso de los criterios como una herramienta que orienta las reflexiones de los FPM de los procesos instruccionales (Giacomone, Godino, Beltrán-Pellicer, 2018).

8.5.2.2.6 Faceta Ecológica

En general, en la mayoría de las valoraciones de los FPM se aprecia el uso de la componente adaptación al currículo, al mencionar que la propuesta es adecuada al nivel educativo y/o a la formación docente, como se muestra en la respuesta de E6 en la Figura 8.37. También, E12 menciona que la tarea 1 es adecuada al presente y futuro de los estudiantes, pensando en que serán profesores de matemática.

Figura 8.37

Parte de la resolución de E6 de la Tarea 7

Ecológica	Adaptación al currículo, adaptación socio-profesional, apertura a la innovación, educación en valores, contextos interdisciplinarios	la actividad estaba adaptada al curriculo adaptado al contexto y ala formación de docentes

También, E2 destaca la posibilidad que brinda el problema de articular con otras disciplinas como la física, al mencionar: “la posibilidad de articular la actividad y el contenido matemático para otras disciplinas nos permite hablar de una articulación entre diversas áreas” (E2). En su valoración, se advierte que en su valoración el uso de la componente conexiones interdisciplinarias. En esta misma dirección, E1 plantea que la tarea 1 podría haber sido resulta desde diferentes disciplinas, lo que considera como un aspecto de apertura hacia la innovación, lo cual es correcto ya que la posibilidad de articular y abordar una situación-problema desde la matemática, pero también desde la física, en este caso, es una característica que hace a la innovación en la didáctica del cálculo.

Por otro lado, E9 agrega que la actividad “estuvo super interesante la manera de trabajar, ya que es algo distintos a lo habitual” (E9), donde hace referencia al formato de trabajo de la configuración didáctica implementada, componente que corresponde a la faceta interaccional.

En síntesis, los análisis y valoraciones que han realizado los FPM han logrado utilizar algunas componentes de la faceta ecológica, lo cual implica un primer avance en el uso competente de esta herramienta. Cabe destacar, que los análisis y valoraciones que realizan los FPM necesitan ser más profundos en la descripción, explicación y valoración de la idoneidad didáctica (Godino, 2021; Godino, Batanero, Burgos y Gea, 2021; Godino, Batanero y Burgos, 2023), ya que algunas respuestas quedan solo en alguno de estos aspectos mencionados.

8.5.3 Análisis de la implementación de la Fase 3

8.5.3.1 Introducción

En este trabajo de investigación nuestro foco de atención se encuentra en propiciar el desarrollo de la competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica. En este sentido, se propone a los FPM que visualicen dos videos educativos para que realicen un análisis y valoración de cada video, ya que se considera que los videos constituyen un recurso de apoyo de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Para el análisis y valoración, los FPM cuentan con una herramienta que guía esta reflexión, la GVID-Diferencial, la cual presenta una síntesis de los conocimientos didáctico-matemáticos que se deberían tener en cuenta para efectuar una enseñanza idónea en relación con la diferencial.

En particular, abordamos las siguientes preguntas de investigación:

1) *¿Qué tipos de prácticas (matemáticas, didácticas, ...) recuperan los FPM para valorar la ID?*

2) *¿Qué tipos de objetos (matemáticos, didácticos, ...) identifican los FPM en las prácticas para valorar la ID?*

3) *¿Cuál es el grado de adecuación de las valoraciones que realizan los FPM de las prácticas que identifican del video educativo?*

4) *¿Qué potenciales mejoras proponen los FPM en cada una de las facetas de la ID para el video educativo?*

8.5.3.2 Análisis y valoración del video 1 utilizando la GVID-Diferencial

En esta sección se presentan los principales resultados del análisis y valoración que han realizado 11 FPM del video 1 utilizando la GVID-Diferencial. A modo de organización, se retomará cada una de las facetas, componentes, subcomponentes y criterios de la ID para valorar las respuestas más significativas que han realizado los FPM.

La competencia de de análisis y valoración de la idoneidad didáctica no se reduce solamente a identificar los objetos matemáticos y didácticos que intervienen y emergen de las prácticas matemáticas y didácticas de la lección del video, sino que se busca que los FPM puedan describir, explicar, valorar y proponer potenciales mejoras según el contexto de uso, las funciones semióticas que vinculan los objetos, las circunstancias del entorno, y el aprendizaje (entendido como en la relación dialéctica entre los significados institucionales y personales de los estudiantes).

Se considera que el FPM es competente en la medida en que pueda identificar los objetos matemáticos y didácticos, y las funciones que cumplen estos objetos en las prácticas Matemáticas y didácticas, en este sentido, el FPM debería preguntarse, por ejemplo, ¿qué función o papel cumple/tiene este objeto en esta práctica? y ¿cómo es posible mejorar la utilización y función de este objeto en una determina práctica? Este tipo de preguntas generan espacios de reflexión global y profesional de los procesos instruccionales, donde el FPM puede analizar y valorar el grado de adecuación de los conocimientos matemáticos y conocimientos didáctico-matemáticos en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y en este caso en particular, de la diferencial.

La principal intención didáctica de la experiencia formativa es que el PFM no solo mencionen los objetos, sino que puedan identificar el rol que juega ese objeto en esa práctica en particular, y cómo se podría potenciar, ya que desde la perspectiva del EOS, la idoneidad didáctica permite describir, explicar, valorar y proponer mejoras. Esta idea es la se intenta que los FPM puedan reconocer o hacer de la GVID-Diferencial para valorar los procesos instruccionales de la diferencial.

8.5.3.2.1 Faceta Epistémica

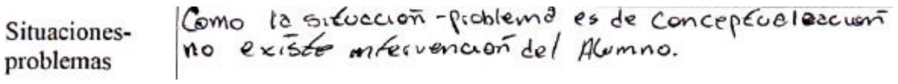
Esta faceta está formada por las componentes: significados institucionales (situaciones-problemas, lenguajes, conceptos-definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos), relaciones entre conceptos, procesos y conflictos epistémicos. A continuación, se analiza y valora las respuestas de los FPM sobre cada una de estas componentes, subcomponentes y criterios:

Significados institucionales

Situaciones-problemas: la mayoría de los FPM menciona que se trata de una situación-problema de conceptualización y/o definición de la diferencial. Por ejemplo, E11 escribe: "Definición de diferencial y de dónde viene. Aplicaciones y representación geométrica. Cálculo diferencial" (E11). También, algunos FPM resaltan el hecho de la no intervención del estudiante, por ejemplo, como lo menciona E8 en la Figura 8.38.

Figura 8.38

Parte de la resolución de E8 de la Tarea 9 del video 1

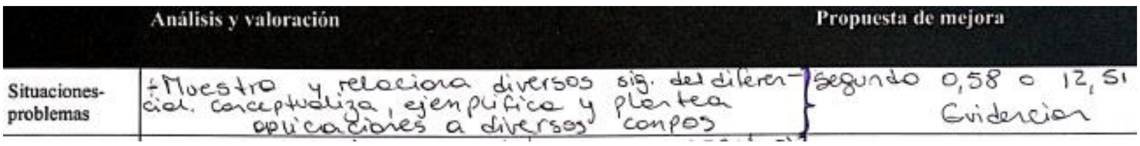


Situaciones-problemas	Como la situcción-problema es de conceptualizacion no existe intervención del Alumno.

Además, se destaca la respuesta de E10, que valora otros indicadores de este subcomponente que tienen que ver con proponer situaciones de contextualización, ejercitación, aplicación y que permitan establecer relaciones con otros conceptos, como se aprecia en la Figura 8.39.

Figura 8.39

Parte de la resolución de E10 de la Tarea 9 del video 1



	Análisis y valoración	Propuesta de mejora
Situaciones-problemas	+ Muestra y relaciona diversos sig. del diferencial. Conceptualiza, ejemplifica y plantea aplicaciones a diversos campos	Segundo 0,58 o 12,51 Evidencian

Por otro lado, E6 y E4, menciona que no se plantea una situación-problema relacionada o aplicable a la realidad de los estudiantes, lo que implica el uso de indicadores de la faceta afectiva y ecológica.

En general, se parecía que los FPM utilizan algunos indicadores del subcomponente situaciones-problemas para reconocer y valorar la propuesta del video (actividad, lección o configuración didáctica) indicando de manera general la "intención didáctica" del video.

Lenguajes: la mayoría de los FPM logra identificar sin inconvenientes los elementos del lenguaje, reconociendo los diferentes registros de representaciones semióticas que se puede visualizar en el video, como: natural o coloquial, simbólica, algebraica, funcional, gráfico y geométrico. A modo de ejemplo, se muestra la respuesta de E4 en la Figura 8.40.

Figura 8.40

Parte de la resolución de E4 de la Tarea 9 del video 1

Lenguajes	Presenta al lenguaje natural en lo que es la explicación de que es el diferencial. simbólico → $\frac{dy}{dx}$. $dy = f'(x).dx$; $\Delta y \approx dy$ gráfico → presenta un gráfico para explicar el dy

Además, E8 y E9 mencionan a la representación funcional, indicando la expresión $dy = f'(x)dx$ que relaciona las diferenciales dy y dx, como se menciona en el video. (ver Figura 8.41).

Figura 8.41

Parte de la resolución de E9 de la Tarea 9 del video 1

Lenguajes	Se presentaron distintos lenguajes (natural con la explicacion, simbolico $f'(x)$, algebraico $\frac{dy}{dx}$, funcional $dy=f'(x)dx$ grafico. 1/2 [Presenta terminos idoneo Vocabulario]

La reflexión del docente en relación con los elementos del lenguaje que intervienen y emergen de las prácticas matemáticas y didácticas, no se reduce solamente a identificar los tipos de lenguajes, sino que en la GVID-Diferencial, se avanza en la reflexión sobre el uso idóneo de estos elementos según sus destinatarios, en este sentido, dos FPM valoran que el lenguaje empleado es adecuado al nivel educativo propuesto (ver Figura 8.41 y Figura 8.42).

Figura 8.42

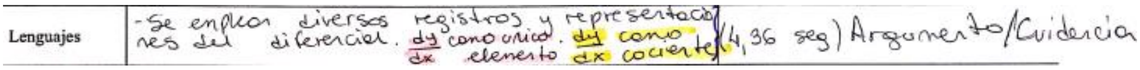
Parte de la resolución de E3 de la Tarea 9 del video 1

Lenguajes	•Se aprecian diferentes registros y representaciones. •Utiliza Lenguaje coloquial, simbólico, geométrico; algebraico. •El lenguaje es adecuado a un est. de nivel medio.

También, se destaca que la valoración experta/específica que realiza E10 para identificar los términos (lenguaje natural) que se utiliza en el video sobre la expresión $\frac{dy}{dx}$ como un único elemento y como cociente. Este hecho es didácticamente significativo ya que implica un potencial conflicto epistémico-cognitivo, en particular es un conflicto del lenguaje simbólico del uso de la diferencial, como se ha destallado en el análisis a priori y en capítulos anteriores (ver Figura 8.43).

Figura 8.43

Parte de la resolución de E10 de la Tarea 9 del video 1

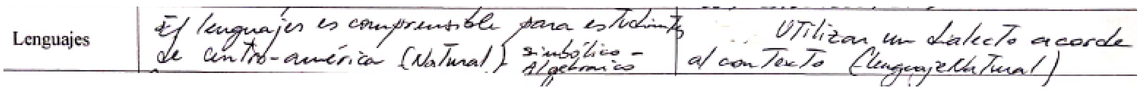


Lenguajes	-Se emplean diversos registros y representaciones del diferencial. dy/dx como único elemento. dy/dx como cociente	(4,36 seg) Argumento/Evidencia

Teniendo en cuenta que el uso de videos educativos de YouTube proviene de diferentes partes del mundo, resulta importante que los FPM puedan valorar que el lenguaje empleado sea adecuado para los estudiantes, en este caso de Argentina, es así como E6 considera importante destacar que las características y/o expresiones lingüísticas que se utiliza en el video corresponden a la región de Centroamérica, como se evidencia en la Figura 8.44.

Figura 8.44

Parte de la resolución de E6 de la Tarea 9 del video 1



Lenguajes	El lenguajes es comprensible para estudiantes de centro-américa (Natural) simbólico - algebraico	Utilizan un dialecto acorde al contexto (Lenguaje Natural)

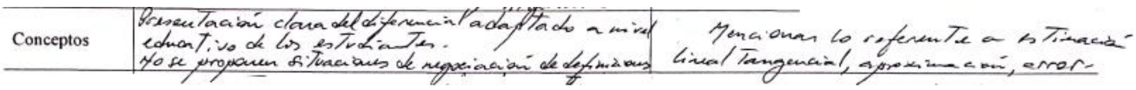
Por último, se recupera el comentario de E11 que menciona el uso del lenguaje simbólico para expresar y comunicar ideas matemáticas "Se proponen situaciones de expresión matemática e interpretación, en los diferentes registros mencionados. Por ejemplo $dy = f'(x).dx$; $\frac{dy}{dx} = f'(x)$" (E11).

En síntesis, se observa que los FPM han logrado utilizar todos los indicadores del subcomponente (lenguajes) para valorar de manera idónea la diversidad de registros, representaciones y usos de los elementos de lenguajes que intervienen y emerges de las prácticas matemáticas y didácticas del video.

Conceptos-definiciones: todos los FPM logran identificar algunos conceptos involucrados en las practicas matemáticas y didácticas del video, como: diferencial, derivada, función, cociente, pendiente, estimación lineal y/o tangencial, aproximación lineal, incremento de la función, cantidad infinitamente pequeña e incremento infinitesimal. Si bien, es importante que los FPM identifique los conceptos-definiciones involucrados, también es fundamental que puedan valorar el grado de adecuación de la presentación de estos conceptos y si zona adecuados al nivel educativo. En esta dirección, solo algunos FPM realizan algún comentario, como se muestra en la Figura 8.45.

Figura 8.45

Parte de la resolución de E6 de la Tarea 9 del video 1

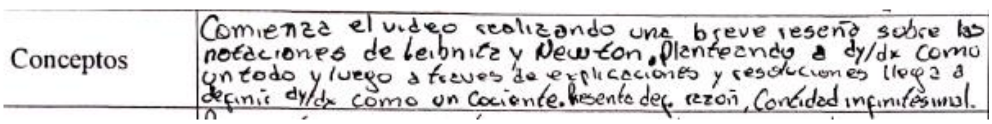


Conceptos	Presentación clara del diferencial adaptado a nivel educativo de los estudiantes. No se proponen situaciones de negociación de definiciones	Mencionar lo referente a situación lineal/Tangencial, aproximación, error.

En la respuesta del E6 (Figura 8.45) se observa que valora el tercer indicador del subcomponente, que tiene que ver con proponer situaciones donde los estudiantes tengan que generar o negociar definiciones que intervienen y emergen en el estudio de la diferencial (Verón, Giacomone, Pino-Fan, 2023). En esta valoración, si bien es correcta si se considera exclusivamente la participación del estudiante, pero resulta parcialmente incorrecta si se reflexiona sobre la discusión y planteos que realiza la autora del video sobre las definiciones de los conceptos y sus relaciones, en particular, se considera fundamental los planteos que se aprecian en el discurso para introducir a los diferenciales (ver Figura 8.46) y para explicar las relaciones entre la derivada y la diferencial (ver Figura 8.47).

Figura 8.46

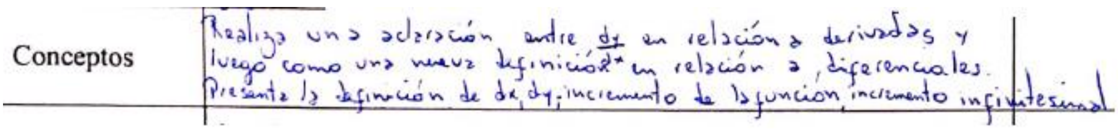
Parte de la resolución de E8 de la Tarea 9 del video 1



Conceptos	Comienza el video realizando una breve reseña sobre las notaciones de Leibnitz y Newton. Planteando a dy/dx como un todo y luego a traves de explicaciones y resoluciones llega a definir dy/dx como un Cociente. Presenta def. razón, Cantidad infinitesimal.

Figura 8.47

Parte de la resolución de E4 de la Tarea 9 del video 1



Conceptos	Realiza una aclaración entre dx en relación a derivadas y luego como una nueva definición en relación a diferenciales. Presenta la definición de dx, dy, incremento de la función, incremento infinitesimal

Por otro lado, se destaca la valoración que realiza E7 ya que no solo identifica algunos conceptos-definiciones que intervienen en la lección del video, sino que logra profundizar su valoración indicando la representación que se utiliza (lenguaje) para explicar los conceptos, lo cual resulta fundamental que el FPM logre identificar la función que desempañan los objetos matemáticos y didácticos en la configuración didáctica, en este caso hace referencia a la representación gráfica de los conceptos (ver Figura 8.48).

Figura 8.48

Parte de la resolución de E7 de la Tarea 9 del video 1

Conceptos	Se presentan de manera clara los conceptos. Además también se presenta las definiciones de dx, dy, incremento de la función a través de la representación gráfica.

En síntesis, se observa que los FPM logran identificar los conceptos-definiciones más relevantes que intervienen en la lección, como así también, varios destacan las relaciones entre la derivada y el cociente de diferenciales que realiza la autora del video. En este sentido, se puede afirmar que los FPM hacen un uso adecuado de los indicadores de este subcomponente, aunque resulta necesario profundizar su estudio para realizar valoraciones más específicas de las configuraciones didácticas.

Proposiciones: en general, la mayoría de los FPM logran identificar alguna proposición en la lección del video relacionado principalmente con el concepto-definición infinitesimales, a modo de ejemplo, E8 menciona "dy como una cantidad infinitamente pequeña" y "dy como un salto a la aproximación a la recta tangente a la curva" (E8) (Figura 8.49). También, E9 menciona "un incremento infinitesimal dx en x y dy en y" (E9).

Figura 8.49

Parte de la resolución de E8 de la Tarea 9 del video 1

Proposiciones	Presenta primeramente definiciones de cambio, de razón y luego un incremento infinitesimal, es decir dy como cantidad infinitamente pequeño y como un salto a la aproximación a la recta tangente a la curva.

Otra proposición que destacan varios FPM involucra a la derivada con el cociente diferencial, por ejemplo, E1 menciona: "definición de derivada como entidad única" (E1) o "plantea el cociente $\frac{dy}{dx}$ sin significado propio, luego realiza la explicación de cada uno por separado utilizando el método gráfico" (E2) (Figura 8.50).

Figura 8.50

Parte de la resolución de E1 de la Tarea 9 del video 1

Proposiciones	definición de derivada como una entidad única. luego planteo del cociente dy mediante la formula $dy = f(x) \cdot dx$. $\boxed{\Delta y \approx dy}$ $dx \rightarrow$ diferencia infinit pequeña

Otras afirmaciones, establecen relaciones entre expresiones simbólicas donde interviene la diferencial, como “$\Delta y \approx dy$ diferencia infinitamente pequeña” (E1, Figura 8.50), entre otras, como se muestra en la Figura 8.51 de la respuesta de E3.

Figura 8.51

Parte de la resolución de E3 de la Tarea 9 del video 1

Proposiciones	• $dy = f'(x)dx$; si $dx \neq 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x)$ • $\Delta y = dy$; $\Delta x = dx$ • Prop fundamentales del diferencial

Además, E3 propone como proposiciones a “dx como una variable independiente” (E3) lo cual expresa las relaciones entre los conceptos de función y definición de la diferencial como una variable.

En síntesis, en las valoraciones que realizan los FPM se observa que logran identificar algunas proposiciones fundamentales, principalmente relacionados con los conceptos de incremento, infinitesimal, derivada, función y variable. Además, se valora el potencial de la utilización del lenguaje simbólico para expresar y comunicar ideas matemáticas vinculadas a la diferencial. Pero también, se destaca el reconocimiento de determinadas afirmaciones que juegan una doble función según el contexto de uso, es decir, la expresión $\frac{dy}{dx}$ en un primer momento se presenta como entidad única sin significado propio, pero luego, a medida que se avanza en la lección del video, va cambiando, se establecen nuevas conexiones y adquiere otras interpretaciones, como un cociente de diferenciales, lo que implica que en la trayectoria didáctica propuesta por el video, se generan, discuten y conviven diferentes interpretaciones y sentidos de expresiones relacionadas a la diferencial (Verón y Giacomone, 2022). Por tales motivos, en la GVID-Diferencial, se encuentra un indicador específico para valorar este hecho que se considera fundamental que el FPM pueda identificarlo y usarlo de manera de promover este tipo de situaciones en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la diferencial (Verón, Giacomone, Pino-Fan, 2023).

Procedimientos: los principales procedimientos que logran identificar los FPM de la lección del video; uno se relaciona con la “diferencia de la ecuación” que consiste en incrementar las variables x e y en una cantidad infinitamente pequeña dx y dy, respectivamente (Verón y Giacomone, 2021). A modo de ejemplo, se muestra la respuesta de E4 en la Figura 8.52.

Figura 8.52

Parte de la resolución de E4 de la Tarea 9 del video 1

Procedimientos	Hace mención de la diferencia de la ecuación de manera implícita, cuando dice que las variables x e y incrementan en una cantidad infinitamente pequeña

El otro procedimiento que reconocen los FPM tiene que ver con las relaciones entre la derivada y la diferencial, los cuales surgen en el pasaje de la expresión $dy = f'(x)dx$ a $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, como se puede apreciar en la Figura 8.51. Además, resulta interesante destacar la valoración que realiza E8 donde menciona la explicación de cómo se representa gráficamente dy y Δy del video. Si bien, E8 no transcribe la explicación a la que hace referencia, se considera que el hecho de reconocer tal acto es de suma importancia ya que logra identifica run procedimiento del tipo gráfico de cómo se determina y dibuja los incrementos y las diferenciales.

También, en los comentarios de los FPM hacen mención de que los procedimientos son adecuados al nivel educativo que propone el video, pero no presentan alguna justificación explícita de esta afirmación. Por otro lado, E5 menciona que los procedimientos están relacionados con la diferencial de Leibniz, pero no presenta argumentos y/o evidencia que valide su afirmación.

En síntesis, se observa que los FPM logran identificar dos procedimientos fundamentales de la diferencial; uno de ello considera a la diferencial como una cantidad infinitamente pequeña vinculado a la diferencial de Leibniz; y el otro, aborda las relaciones entre la derivada y la diferencial, considerando a esta última como variables, procedimiento asociado a la diferencial de Cauchy (Verón, 2020; Verón y Giacomone, 2021).

Argumentos: en las respuestas de los FPM se observa que mencionan que en el video se explica y justifica las proposiciones y procedimientos que intervienen en las prácticas matemáticas y didácticas, pero no todos logran valorar con precisión los argumentos que han identificado. Solo E8, hace un análisis más profundo respecto a un procedimiento, como se aprecia en la Figura 8.53.

Figura 8.53

Parte de la resolución de E8 de la Tarea 9 del video 1

Argumentos	Primeramente se llega a $dy/dx = 2(2x)$ mediante operaciones algebraicas y luego para reforzar esto plantea una explicación gráfica para dar a conocer que vendría a ser Δx, Δy, dy y dx.

También, la mayoría de los FPM valora como positivo el uso de las representaciones geométricas para apoyar y reforzar las argumentaciones, como se aprecia en la Figura 45. En esta dirección, E2 plantea que se utiliza la representación gráfica para observar los incrementos.

En síntesis, la valoración que realizan los FPM resulta general, lo cual requiere volver a reflexionar sobre las funciones que cumplen los argumentos, como objeto matemático, y en el uso idóneo de los mismos para potenciar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la diferencial. En este sentido, E6 utiliza el indicar de la GVID-Diferencial para valorar que la lección del video no promueve situaciones donde los estudiantes tengan que argumentar, al plantearlo como una propuesta de mejora. Si bien, no especifica, cómo se podría incorporar tales situaciones, resulta interesante que los FPM puedan utilizar los indicadores de idoneidad didáctica para valorar y proponer potenciales mejoras de los procesos instruccionales (Godino, Batanero y Burgos, 2023).

Por último, en relación con los significados institucionales que han logrado identificar los FPM, se aprecia en sus valoraciones dos significados parciales de la diferencial; por un lado, la “diferencial como una cantidad infinitesimal” (E3 y E7) vinculado a la Diferencial de Leibniz (ver Figura 8.54); y también, la “diferencial como una variable independiente” (E3) que está vinculado a la Diferencial de Cuachy (ver Figura 8.55). Se considera importante que el FPM pueda reconocer los objetos primarios que intervienen y emergen de las prácticas matemáticas y didácticas, pero además es necesario que pueda reconocer cuales son las relaciones y conexiones entre los objetos que permiten configurar un significado parcial de la diferencial, de esta manera logra una mirada y una reflexión por parte del FPM más competente ya que el análisis y valoración que efectúa le permite identificar el significado parcial involucrado en la lección del video (Giacomone, 2018; Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017).

Figura 8.54

Parte de la resolución de E7 de la Tarea 9 del video 1

Situaciones-problemas	Diferencial como una cantidad infinitesimal.

Figura 8.55

Parte de la resolución de E3 de la Tarea 9 del video 1

Relaciones con otros conceptos	"dx como variable independiente" "$\frac{dy}{dx} = f'(x)$" "Incremento e infinitesimal."

Relaciones entre conceptos: en las valoraciones de los FPM se observa que logran identificar los conceptos-definiciones que se relacionan con la diferencial en la lección del video, la mayoría menciona a la derivada, incremento y cantidad infinitesimal, y en menor medida, mencionan a la pendiente, razón de cambio, función, variables, cociente, entre otros. A modo de ejemplo, se muestra la respuesta de E10 en la Figura 8.56.

Figura 8.56

Parte de la resolución de E10 de la Tarea 9 del video 1

Relaciones con otros conceptos	-derivada, pendiente, razón de cambio, cociente, variable, incremento, dependencia e independencia, función.

Una de las relaciones que mencionan la mayoría de los FPM es la relación de igualdad entre el cociente de diferenciales con la derivada expresada de manera simbólica y algebraica (ver Figura 8.55). Cabe destacar que E9 que menciona que se relacionan las notaciones (lenguaje simbólico), lo que le permite realizar un análisis y valoración más específico indicando como va cambiando las relaciones y las interpretaciones de las expresiones a medida que se avanza en la explicación de la lección del video (ver Figura 8.57).

Figura 8.57

Parte de la resolución de E9 de la Tarea 9 del video 1

Relaciones con otros conceptos	Relacionó las notaciones de diferencial. Notación de Leibniz permanece por encima de la de Newton. [Plantea la diferencia que la notación $\frac{dy}{dx}$ no es cociente, pero al definir dx e dy si es cociente)

Cabe aclarar que solo un FPM menciona en su valoración otras relaciones con los conceptos-definiciones que antes se han mencionado, indicando la diferencial como una cantidad infinitesimal y la diferencial como variables, como se observa en la respuesta de E8 en la Figura 8.58.

Figura 8.58

Parte de la resolución de E8 de la Tarea 9 del video 1

Relaciones con otros conceptos	Se establece las relaciones de la diferencial con la derivada de una función $dy/dx = f(x)$, como también, como cantidades infinitamente pequeños y como ~~[illegible]~~ variables dependientes o independientes

Procesos: la mayoría de los FPM menciona en su valoración al proceso de comunicación y/o representación de la diferencial, en particular, hacen foco en la utilización del lenguaje simbólico, como se puede apreciar en la respuesta de E2 en la Figura 8.59.

Figura 8.59

Parte de la resolución de E2 de la Tarea 9 del video 1

Procesos Modelización, comunicación, argumentación, conceptualización, representación, interpretación	derivada como cociente $\frac{dy}{dx}$, diferencial $y = dy$ diferencial $x = dx$

También, surge el proceso de generalización de las relaciones entre la derivada y la diferencial, el proceso de representación gráfica y la conceptualización de la diferencial, por ejemplo, "dy como una cantidad pequeña" (E4). A continuación, se muestran en las Figura 8.60 y Figura 8.61 como los FPM mencionan estos procesos en sus valoraciones.

Figura 8.60

Parte de la resolución de E4 de la Tarea 9 del video 1

Procesos Modelización, comunicación, argumentación, conceptualización, representación, interpretación	Presenta comunicación y argumentación de que es el diferencial, como se calcula. Se observa su representación gráfica y como se interpreta al dy, siendo este una cantidad infinitamente pequeña

Figura 8.61

Parte de la resolución de E9 de la Tarea 9 del video 1

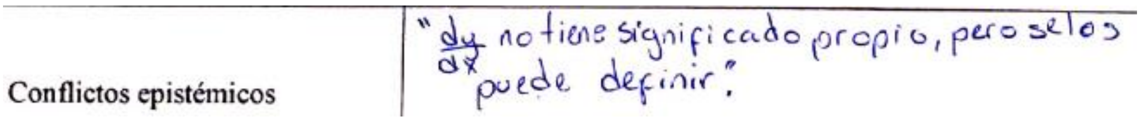
Procesos Modelización, comunicación, argumentación, conceptualización, representación, interpretación	Presenta diversidad de procesos (generaliza $\frac{dy}{dx} = f'(x)$; define, representa en el grafico). - La situación busca comprender la relación entre los cambios infinitamente pequeña (Leibniz) "muy, muy pequeño". - se promueve la conceptualización a partir de la descripción generalización.

Conflictos epistémicos: resulta importante que el FPM logre identificar las practicas matemáticas y/o didácticas de las cuales pueden surgir conflictos epistémicos potenciales vinculados a los objetos y procesos matemáticos que intervienen y emergen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la diferencial. En esta dirección, 9 FPM han logrado identificar diferentes tipos de conflictos epistémicos, algunos vinculados a las expresiones simbólicas de la diferencial, otros a las relación de la diferencial con la derivada, y por último, al proceso de conceptualización de la diferencial y sus relaciones; éstos conflictos están vinculados principalmente a las prácticas matemáticas que intervienen en la lección del video, pero también, algunos FPM han logrado reconocer conflictos en las practicas didácticas, que tienen relación con las ambigüedades y/o contradicciones que surgen de las explicaciones del autor del video en los diferentes momentos didácticos de la lección (configuraciones didácticas).

El E3 identifica que la expresión $\frac{dy}{dx}$ genera un conflicto ya que en el video se plantea que es una entidad única y que no representa un cociente, aunque luego se defina como un cociente de diferenciales. En esta valoración convergen diferentes conflictos epistémicos, por un lado, hay un *conflicto epistémico asociado al lenguaje simbólico*, ya que se denota con un cociente, pero se lo presenta como un símbolo que no representa un cociente sino una derivada (Verón y Giacomone, 2022). Por otro lado, hay un *conflicto epistémico en los procesos de conceptualización, interpretación y representación* del cociente de diferenciales, porque se establece que se debe considerar como un único símbolo (Ely, 2021), pero luego se separa en dos partes para definir a cada diferencial y adquiere una interpretación de cociente, este hecho es didácticamente significativo porque los cambios que producen generan conflictos epistémicos. A modo de ejemplo, se muestran las valoraciones de E3 y E9 en las Figura 8.62 y Figura 8.63.

Figura 8.62

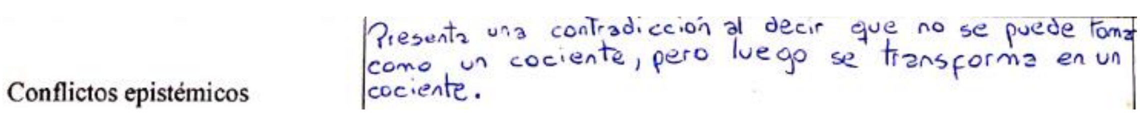
Parte de la resolución de E3 de la Tarea 9 del video 1



Conflictos epistémicos	"$\frac{dy}{dx}$ no tiene significado propio, pero se los puede definir."

Figura 8.63

Parte de la resolución de E9 de la Tarea 9 del video 1



Conflictos epistémicos	Presenta una contradicción al decir que no se puede tomar como un cociente, pero luego se transforma en un cociente.

Además, también se presenta un conflicto en el proceso de conceptualización e interpretación de la diferencial al mencionar que “dx y dy no tienen significado propio, pero se las puede definir” (E7) como se aprecia en la respuesta de E11 en la Figura 8.64.

Figura 8.64

Parte de la resolución de E11 de la Tarea 9 del video 1

Al inicio se presenta estas anotaciones para derivada, sin explicar que es **du.**

Nos dice en primer momento, que el objetivo es definir a dy y dx como un verdadero cociente. Pero, antes ya escribe ese cociente y se menciona que es la derivada, sin fundamentar porque Leibniz lo pensó de esa forma o si ya se había basado en el concepto de diferencial.

También, se advierte que E11 intenta recuperar en su análisis a las contradicciones y ambigüedades que surgen en la lección del video. Además, menciona que, en la lección, se menciona a du sin explicar que significa o representa.

Por último, se recupera la valoración que realiza E10 al plantear que al estar la lección en un video resulta difícil pensar en momentos de reflexión y participación de los estudiantes en el proceso. De esta manera, se advierte como el FPM considera un indicador de la GVID-Diferencial que plantea propiciar espacios de discusión y reflexión para que los estudiantes puedan compartir sus interpretaciones y sentidos que le atribuyen al uso de los diferenciales según el contexto de uso (Verón, Giacomone, Pino-Fan, 2023).

En las Tabla 8.3 a Tabla 8.14 se describe qué tan pertinente es el uso que hacen los futuros profesores sobre los indicadores de idoneidad didáctica para cada una de las facetas y para cada uno de los videos. Para esto se han considerado cuatro categorías: Adecuado, Poco adecuado, No adecuado, Ausencia.

- *Adecuado*: cuando utiliza y valora de manera correcta el indicador o parte de él. Además, incluye al menos una evidencia que muestre y justifique su valoración
- *Poco adecuado*: cuando utiliza y valora de manera parcialmente correcta el indicador o parte de él. O no se incluye evidencia que muestre y justifique su valoración
- *No adecuado*: cuando utiliza y valora de manera incorrecta el indicador

— *Ausencia*: se incluye esta categoría cuando el FPM no hace referencia al indicador para valorar las prácticas matemáticas y didácticas del video.

Tabla 8.3

Grado de pertinencia del uso de los indicadores de la faceta epistémica por los FPM del video 1 (n=11)

Faceta Epistémica			Pertinencia de la valoración			
Componentes	**Subcomponente**	**Indicadores Códigos**	**Adecuado**	**Poco adecuado**	**Nada adecuado**	**Ausencia**
Significados institucionales	Situaciones-problemas	SP1	2	1	1	7
		SP2	3	3		5
		SP3		1		10
	Lenguajes	L1	9	2		0
		L2	1	1		9
		L3	2	1		8
		L4	1			10
	Conceptos-definiciones	C1	7	1		3
		C2	8	1		2
		C3	4	2		5
	Proposiciones	Pp1	6	4		1
		Pp2		5		6
	Procedimientos	Pc1	6	5		0
	Argumentos	A1	1	8		2
		A2	4	5		2
		A3		1		10
Relaciones		R1	2	3		6
		R2	11			0
Procesos	Comunicación-argumentación	P1	6	4		1
	Modelización	P2		2		9
		P3	3			8
	Conceptualización	P4	3	1		7
Conflictos Epistémicos		CE1	4			7
		CE2	4	2	1	4
		CE3	5			6
		CE4		1		10
		CE5		1		10

En general, en la Tabla 8.3, se muestra un resumen que refleja el grado de pertinencia de las valoraciones que realizan los FPM de cada uno de los indicadores de la faceta epistémica. Es decir, que de esta manera es posible identificar qué tan competente es el uso de los indicadores de la GVID-Diferencial que hacen los FPM al valorar los videos educativos.

En particular, en relación con la faceta epistémica, se observa que se utilizan de manera competente la mayoría de los indicadores, a excepción de algunos de los conflictos epistémicos y los procesos. Pero es posible afirmar, que la mayoría de las valoraciones que realizaron los FPM hacen un uso adecuado del indicador ya que en su evaluación presentan evidencias o ejemplos específicos de lo que están considerando.

Aclaración importante: Resulta necesario remarcar que los datos de la tabla no reflejan el grado de idoneidad del video, sino que reflejan el grado de adecuación del uso de los indicadores de la GVID-Diferencial por parte de los FPM para valorar el video, con lo cual la información que brinda nos permite reflexionar sobre el grado de desarrollo de la competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica en los FPM.

Por ejemplo, un FPM puede expresar que en el video no se proponen espacios para que los estudiantes compartan sus interpretaciones con relación a la diferencial, entonces, frente a este comentario, el FPM hace un uso adecuado del indicador CE5 (ver en la GVID-Diferencial) del conflicto epistémico, porque le permite valorar la propuesta con relación a la gestión de los conflictos epistémicos. Pero esto no significa que la lección del video genere este espacio contemplando lo que expresa el indicador, sino todo lo contrario.

8.5.3.2.2 Faceta Cognitiva

En esta faceta se analizarán las valoraciones que realizaron los FPM sobre los siguientes componentes:

Significados personales (Aprendizajes): Si bien la mayoría de los FPM no presentan ninguna valoración en relación con esta componente, pero solo tres realizan algunos comentarios generales. Por ejemplo, E6 plantea que “consigue que los significados personales de los estudiantes se relacionan con los significados institucionales pretendidos” (E6) Este comentario es parcialmente incorrecto ya que no es posible advertir en la lección del video las prácticas personales de los estudiantes para poder valorar sus aprendizajes. El mismo FPM, menciona como propuesta de mejora incorporar la evaluación de los aprendizajes para mejorar el proceso. En cambio, E11 menciona respecto a los aprendizajes que “no se registra” indicando de esta manera que no es posible observar en la lección del video los aprendizajes de los estudiantes ya que estos no intervienen en ningún momento.

Relaciones (conexiones): 6 FPM han realizado algún comentario respecto a los indicadores de las relaciones, y uno de ellos, plantea promover un aprendizaje de tipo relacional de manera que los estudiantes puedan establecer relaciones y conexiones entre los significados parciales de la diferencial, sus sentidos, sus representaciones y contextos de uso (Verón, Giacomone, Pino-Fan, 2023). En este sentido, E1 menciona que en la lección del video “se relaciona la diferencial con la derivada” (E1), también, E9 hace referencia a las notaciones (lenguaje simbólico) que expresan relaciones entre la derivada y el cociente de diferenciales. A modo de ejemplo, se muestra la valoración de E10 en la Figura 8.65.

Figura 8.65

Parte de la resolución de E10 de la Tarea 9 del video 1

Relaciones (conexiones)	Proponer momentos de relación entre los diferentes conceptos" (sig. parciales) de la diferencial.

Por otro lado, resulta interesante la propuesta de mejora de E6, donde menciona “Plantear situaciones que relacionen el diferencial con posibles aplicaciones de la física, etc.” (E6). En su comentario, se aprecia que ha logrado advertir que las situaciones-problemas que se plantean en la lección del video, no son vinculadas con otras ciencias, como la física, química, ingeniería o ciencias experimentales, aspecto considerado fundamental a tenerlo presente en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la diferencial (López-Gay et al., 2015; Verón, Giacomone y Pino-Fan, 2023)

Procesos: la mayoría de los FPM no han realizado algún comentario a este componente, sin embargo, resulta interesante analizar la valoración de E6 ya que menciona que “No se observa que se tenga en cuenta los procesos matemáticos metacognitivos” (E6). En este sentido, resulta de interés para esta investigación que el FPM valora y reconoce la importancia de considerar los procesos que ponen en juego los estudiantes para el proceso instruccional, por tales motivos, plantea que no se aprecia en las configuraciones didácticas del video que se planteen situaciones para fortalecer y/o recuperar estos procesos. Si bien, la valoración y la propuesta de mejora del FPM resulta general (ver Figura 8.66), es valioso en el marco del desarrollo de la competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica que los FPM utilicen las facetas, componentes e indicadores de idoneidad para valorar las clases y proponer mejoras (Giacomone, Godino y Beltrán-Pellicer, 2018; Beltrán-Pellicer y Giacomone, 2018), con lo cual, en cierto punto, este FPM lo ha logrado al advertir una ausencia que considera relevante a tener en cuenta para mejorar el proceso instruccional.

Figura 8.66

Parte de la resolución de E6 de la Tarea 9 del video 1

Relaciones (conexiones)	No plantea en esta oportunidad todos los tipos de relaciones posibles que se pueden establecer con el diferencial	Plantear situaciones que relacionen el diferencial con posibles aplicaciones en la física, etc.

Conocimientos previos: en los 6 comentarios de los FPM respecto a esta componente, algunos, hacen mención de los conceptos-definiciones que deberían tener los estudiantes para entender las explicaciones del video, como, por ejemplo: cantidad, variable, función, pendiente, distancia entre dos puntos, variación, acumulación y derivada.

Por otro lado, la valoración que hacen los FPM se enfoca en los elementos del lenguaje que forman parte de los conocimientos previos, en el cual mencionan la utilización adecuada de los registros simbólicos, con las notaciones de la diferencial, y los registros gráficos.

También, resulta importante destacar que en la GIVD-Diferencial se remarca la necesidad de considerar el uso y las interpretaciones de los objetos matemáticos, desde la perspectiva personal, para facilitar y potenciar la comunicación de las ideas matemáticas y de la información en general, en este sentido, recuperamos la valoración de E4 porque no solo menciona algunos conceptos-definiciones como conocimientos previos, sino que avanza, en la dirección de valorar que las representaciones gráficas y las expresiones simbólicas facilitaron entender algunas ideas en relación a la diferencial, como se parecía en la Figura 8.67.

Figura 8.67

Parte de la resolución de E6 de la Tarea 9 del video 1

Relaciones (conexiones)	No plantea en esta oportunidad todos los tipos de relaciones posibles que se pueden establecer con el diferencial	Plantear situaciones que relacionen el diferencial con posibles aplicaciones en la física, etc.

Diferencias individuales: en los primeros once minutos del video no se logra apreciar que se tenga en cuenta las diferencias individuales de los estudiantes ya que estos no participan y no se menciona los mismos. Pero en la segunda parte del video, se incluyen otros tipos de situaciones-problemas, como actividades de ampliación y ejemplificación donde se plantea la discusión con relación al uso de la diferencial en el contexto del problema, esta cuestión es destacada por E11 al mencionar: “Se incluyen actividades de contraejemplos y analogías. Por ejemplo, plantear la discusión sobre la aproximación, que se presenta al realizar los cálculos de: $dA = A^{\prime}(l).dl$ y ΔA en relación con los significados del diferencial” (E11).

Conflictos cognitivos: la mayoría de los FPM no han realizado algún comentario respecto a esta componente, sin embargo, E4 plantea que, si bien no se observan estos conflictos en la lección del video educativo, destaca que en el video se realizan aclaraciones respecto a la relación entre la derivada y los diferenciales, en particular, por el uso y el significado de expresiones simbólicas como $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, cuestión que se ha analizado con detalle en la faceta epistémica.

Tabla 8.4

Grado de pertinencia del uso de los indicadores de la faceta cognitiva por los FPM del video 1 (n=11)

Faceta Cognitiva		**Pertinencia de la valoración**			
Componentes	**Indicadores Códigos**	**Adecuado**	**Poco adecuado**	**Nada adecuado**	**Ausencia**
Significados personales (Aprendizajes)	A1		2		9
	A2		2		9
Relaciones (conexiones)	R1		2		9
	R2	1	3		7
Procesos	P1		2		9
Conocimientos previos	C1	4	2		5
	C2				11
	C3	3	1		7
Diferencias individuales	D1		1		10
	D2				11
	D3	1			10
Conflictos cognitivos	CC1	1	1		9
	CC2		1		10

En general, en la Tabla 8.4, se muestra un resumen que refleja el grado de pertinencia de las valoraciones que realizan los FPM de cada uno de los indicadores de la faceta cognitiva. Es decir, que de esta manera es posible identificar qué tan competente es el uso de los indicadores de la GVID-Diferencial que hacen los FPM al valorar los videos educativos.

Como se ha previsto, la valoración de la faceta cognitiva resulta difícil ya que no se observan las prácticas personales de los estudiantes, por las características del video. Pero resulta interesante la información que se puede extraer al observar que existen características del video que dan cuenta de conocimientos cognitivos.

Además, resulta necesario aclarar que la mayoría de los FPM no realizan comentario sobre estos indicadores, lo que genera que aumenten las ausencias, lo que indica es que no se valoró o no se puede valorar ese indicador, esto no quiere decir que hayan valorado o utilizado de forma incorrecta el indicador, ya que al analizar el video no es posible valorar todos los indicadores, pero si pueden ser utilizados para proponer mejoras, como lo han hecho algunos FPM.

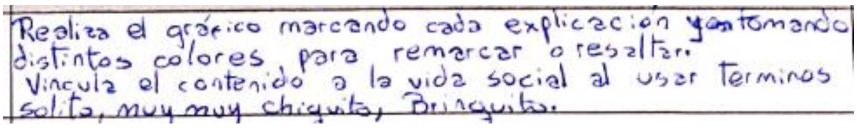
8.5.3.2.3 Faceta Afectiva

En esta faceta se valora las emociones, actitudes, creencias y valores de los sujetos implicados en los procesos de enseñanza y aprendizaje, en este caso particular, al tratarse de un video educativo, no es posible realizar valoraciones respecto a las componentes de la dimensión afectiva de los estudiantes, pero si es posible advertir aspectos del video que potenciar determinados aspectos de esta faceta.

En cuanto a las *emociones* y/o *actitudes*, varios FPM valoran como positivo dos aspectos importantes que destacan del video; por un lado, el uso de un lenguaje natural (léxico) contextualizado a los estudiantes, por ejemplo, “Se puede apreciar que el lenguaje utilizado no es técnico, sino que está relacionado al lenguaje cotidiano del estudiante” (E7), “utiliza un lenguaje cercano al de los estudiantes” (E3), “Léxico contextualizado al estudiante” (E10); por otro lado, el uso de los colores para diferenciar y destacar aspectos puntuales de la lección del video, es valorado por varios FPM, por ejemplo, se muestra la respuesta de E9 en la Figura 8.68.

Figura 8.68

Parte de la resolución de E9 de la Tarea 9 del video 1



Realiza el gráfico marcando cada explicación y tomando distintos colores para remarcar o resaltar.
Vincula el contenido a la vida social al usar terminos solito, muy muy chiquito, Brinquito.

Además, destacamos la valoración de E11, en la componente *actitudes*, ya que no solo menciona que se usa colores en la lección del video, sino que además indica la función que cumplen los colores en las explicaciones y sus beneficios, como se puede apreciar en la Figura 8.69.

Figura 8.69

Parte de la resolución de E11 de la Tarea 9 del video 1

Se presentan palabras motivacionales para que las personas que estén viendo el video, lo continúen haciendo. Esto se ve reflejado cuando dice:
"Ahora vamos tu y yo a caminar un pequeño paso hacia adelante"

Algo para destacar que no todos lo hacen en los videos es remarcar las escrituras importantes con colores diferentes o alguna viñeta para resaltar lo importante y que la comprensión sea más fácil.

Sobre las *creencias*, solo E2 y E6, mencionan que "al comenzar el video expreso que la diferencial es un concepto que es difícil de comprender" (E2). Este hecho es didácticamente significativo ya que se considera que las creencias, actitudes y los valores entran en juego en la toma de decisiones de los sujetos en relación con las estrategias didácticas, gestión de la clase, concepciones sobre la enseñanza, competencia matemática de los estudiantes, entre otros (Moreno y Azcárate, 2003).

Tabla 8.5

Grado de pertinencia del uso de los indicadores de la faceta afectiva por los FPM del video 1 (n=11)

Faceta Afectiva		**Pertinencia de la valoración**			
Componentes	**Indicadores/Códigos**	**Adecuado**	**Poco adecuado**	**Nada adecuado**	**Ausencia**
Emociones	E1	3	1		7
Actitudes	A1	1	2		8
Creencias	C1	1	1		9
Valores	V1		1		10

En general, en la Tabla 8.5, se muestra un resumen que refleja el grado de pertinencia de las valoraciones que realizan los FPM de cada uno de los indicadores de la faceta afectiva. Nuevamente resulta difícil considerar la valoración de todos los indicadores ya que no se observar a los estudiantes por las características del video, pero si es posible valorar determinados aspectos en relación con el autor del video y la situación.

8.5.3.2.4 Faceta Interaccional

Interacciones docente-estudiante: en las valoraciones de los FPM consideran que en la lección del video, las configuraciones didácticas, realizan una presentación clara, ordenada y secuenciada de la diferencial y sus relaciones con los otros conceptos-definiciones como la derivada, a modo de ejemplo, se muestra la respuesta de E4 ya que no solo menciona lo anterior, sino que destaca la explicación y los vínculos de la expresión simbólica $\frac{dy}{dx}$ en relación con la derivada y los diferenciales para evitar potenciales conflictos (ver Figura 8.70).

Figura 8.70

Parte de la resolución de E4 de la Tarea 9 del video 1

Interacciones docente-estudiantes	La presentación del diferencial en el video se encuentra en forma clara y ordenada. Hace aclaración de los símbolos $\frac{dy}{dx}$ en derivada y en diferenciales para evitar potenciales conflictos

También, se destaca la valoración que realiza E8 ya que menciona el tipo de configuración didáctica que logra identificar en la lección del video educativo, es así que, en primer lugar, se plantea una conceptualización algebraica de la diferencial, y luego, la lección se caracteriza por una configuración que resalta la representación gráfica (ver Figura 8.71). Además, E8 propone como mejora, plantear situaciones que permitan establecer relaciones con otros conceptos como el límite y la integral, el cual resulta un aporte importante para la reflexión sobre la trayectoria didáctica.

Figura 8.71

Parte de la resolución de E8 de la Tarea 9 del video 1

Interacciones docente-estudiantes	Primeramente plantea una conceptualización algebraica para luego reforzar esto a través de la representación gráfica	Tal vez plantearse más situaciones-problemas que involucren las relaciones con otros conceptos como, integral, límite.

Por otro lado, E11 realiza una propuesta de mejora al mencionar "Sucede que, si se hace el video en pantallas digitales, la escritura con el pincel no queda muy ordenada y prolija" (E11) donde observa las características visuales de la comunicación que tienen que ver con el formato de la escritura, de tal manera de mejorar la comunicación de las ideas matemáticas que se aprecian en el video. Resulta importante los comentarios de E11 ya que reflexiona sobre aspectos del video educativo que se pueden mejorar para facilitar la comunicación, la cual es una característica fundamental para tener presente para potenciar las interacciones entre docentes y estudiantes.

Además, E10 destaca que en la lección del video se realizan preguntas, aspecto que se considera importante ya que el uso de interrogantes propicia espacios de intercambio entre docente y estudiantes y entre los mismos estudiantes sobre determinadas cuestiones de la lección.

Interacción entre estudiantes: la mayoría de los FPM menciona que no se registran interacciones entre los estudiantes o momentos de diálogo dado que la lección del video educativo no propone una configuración del tipo dialógica y colaborativa, sino que se caracteriza por realizar una presentación del concepto avocando en una configuración del tipo magistral.

También se destaca las apreciaciones de E11 al mencionar que “En el video la persona que lo graba presenta una actitud muy cómoda y un lenguaje que posibilita el seguir viendo sin aburrirse” (E11). Si bien, su valoración corresponde más bien a la componente actitudes de la faceta afectiva, se considera que, para potenciar las interacciones entre los estudiantes, el ambiente de trabajo generado por el docente debe ser adecuado y brindar comodidad para los estudiantes. De esta manera, es posible establecer relaciones entre las componentes de las distintas facetas (afectiva-interaccional) ya que es imposible reflexionar sobre un solo aspecto sin considerar todas las facetas que intervienen en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la diferencial.

En relación con la *autonomía*, la mayoría de los FPM plantean que existe un cierto aspecto de esta componente en el momento de que el estudiante debe asumir la responsabilidad de ver el video y seguir las explicaciones que se presentan en la lección.

Con respecto a la *evaluación formativa*, solo E8 realiza un comentario indicando que una forma de evaluación consiste en considerar los conocimientos previos de los estudiantes, aspecto que se puede asociar a la evaluación diagnóstica o inicial.

Tabla 8.6

Grado de pertinencia del uso de los indicadores de la faceta interaccional por los FPM del video 1 (n=11)

Faceta Interaccional		**Pertinencia de la valoración**			
Componentes	**Indicadores Códigos**	**Adecuado**	**Poco adecuado**	**Nada adecuado**	**Ausencia**
Interacciones docente-estudiante	IDE1	5	4	1	1
Interacción entre estudiantes	IEE1	2	2		7
Autonomía	A1	3			8
Evaluación formativa	EF1	1			10
	EF2				11

En general, en la Tabla 8.6, se muestra un resumen que refleja el grado de pertinencia de las valoraciones que realizan los FPM de cada uno de los indicadores de la faceta interaccional, donde es posible advertir potenciales mejoras al uso y gestión del recurso (video educativo) para potenciar la evaluación formativa.

8.5.3.2.5 Faceta Mediacional

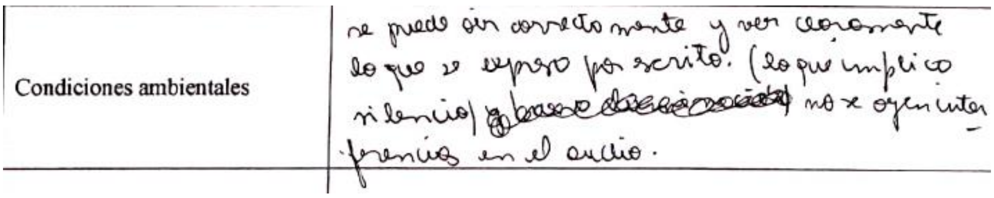
Sobre los *recursos materiales* los FPM valoran el uso de un recurso tecnológico audiovisual compuesto por el video y señalan el empleo de una pizarra digital. Resulta interesante la propuesta de mejora de E6 donde plantea utilizar una aplicación que permita construir gráficos para evitar realizarlos a "mano alzada" (E6), de tal manera que se mejore su presentación. Por otro lado, E10 propone "sumar otro [recurso] que favorezca la escritura y lectura del proceso" (E10), cuya incorporación permitirá mejorar la comunicación de las ideas matemáticas del video.

Si bien, la mayoría de los FPM plantea que se utiliza de manera óptima la pizarra digital, E7 realiza un análisis más profundo indicando que la autora del video realiza utiliza de manera adecuada la distribución del espacio de la pizarra. Además, destacamos la valoración de E9 donde avanza con sus reflexiones y recupera una característica muy importante que se potencia con el uso de los recursos tecnológicos, como las pizarras digitales, la posibilidad de volver sobre lo escrito para reforzar una explicación, retomar alguna cuestión puntual, o para establecer nuevas relaciones, esta posibilidad de retomar o volver en cualquier momento en cualquier parte del desarrollo de la lección es una gran ventaja del uso de estos recursos.

En la componente *condiciones ambientales*, la mayoría de los FPM no han realizado algún comentario, pero solo dos realizan una valoración desde perspectivas diferentes. El E6 plantea que "las condiciones ambientales dependen de la situación propia de quien mira el video" (E6), posicionado de esta forma su mirada en pensar en las condiciones en las cuales los estudiantes visualizan el video. En cambio, E2 reflexiona sobre las características del video que permiten una clara visualización, en el sentido de que se escucha correctamente el discurso del autor, se puede leer y observar sin inconvenientes las escrituras y gráficos del video, aspectos que permiten generar un ambiente cómodo al visualizar el video (ver Figura 8.72).

Figura 8.72

Parte de la resolución de E2 de la Tarea 9 del video 1



Condiciones ambientales	se puede oír correctamente y ver claramente lo que se expresó por escrito. (lo que implica silencio) no se oyen interferencias en el audio.

En relación con el *tiempo de enseñanza y aprendizaje*, la mayoría de los FPM menciona que la distribución del tiempo en la lección del video, según las diferentes configuraciones didácticas que se presentan, fue adecuada ya que "el tiempo empleado para la explicación en el video resultó adecuado" (E6), "el tiempo de explicación y organización de las intervenciones fueron correctas" (E3), "la distribución del tiempo es idónea en relación con la organización de los momentos de enseñanza" (E7).

Tabla 8.7

Grado de pertinencia del uso de los indicadores de la faceta mediacional por los FPM del video 1 (n=11)

Faceta Mediacional		**Pertinencia de la valoración**			
Componentes	**Indicadores Códigos**	**Adecuado**	**Poco adecuado**	**Nada adecuado**	**Ausencia**
Recursos materiales	RM1	7	3		1
Condiciones ambientales	CA1	1	1		9
Tiempo de enseñanza y aprendizaje	T1		4		7

En general, en la Tabla 8.7, se muestra un resumen que refleja el grado de pertinencia de las valoraciones que realizan los FPM de cada uno de los indicadores de la faceta mediacional, donde es se observa un gran uso pertinente del indicador con relación a la utilización y gestión de los recursos materiales, pero es insuficiente en los demás indicadores. Parte de esta cuestión está vinculada por las limitaciones del dispositivo didáctico.

8.5.3.2.6 Faceta Ecológica

Esta faceta valora el grado en que una propuesta (lección del video educativo) es adecuado dentro del entorno en que el que se realiza (Godino, 2013; 2021).

En relación con la componente *adaptación al currículo*, la mayoría de los FPM plantean que la propuesta de la lección del video es adecuada para el nivel secundario y/o superior. Además, E1 y E5 agregan que la propuesta "se adepta al curriculum de futuros profesores de matemática" (E1), en este sentido, E9 realiza una valoración más específica indicando que la propuesta se encuentra "adaptado a nuestro nivel [FPM] ya que se trabaja contenidos del diseño [Diseño curricular jurisdiccional del Profesorado de Educación Secundaria en Matemática]" (E9). Sin embargo, E4 menciona un aspecto importante del video, que en el mismo no se aclara o menciona para “hacia quien va dirigida la presentación” (E4), destacando de esta manera un aspecto importante a reflexionar sobre los destinatarios del video.

Con respecto a la componente *apertura hacia la innovación*, encontramos dos posturas en las valoraciones de los FPM; por un lado, algunos plantean que no se tiene en cuenta los resultados de las investigaciones en didáctica del cálculo ya que “no se mencionan investigaciones” (E6); pero, por otro lado, otros FPM plantean que se utiliza las nuevas tecnologías para la realización y presentación del video. El comentario de E6 nos lleva a reflexionar sobre ¿cómo considera un FPM que se utilizan los resultados de las investigaciones en didáctica del cálculo para mejorar y potenciar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas? Un posible ejemplo de este interrogante lo ha realizado E10 en su valoración al hacer referencia a la diversidad de significados de los conceptos, en este caso en particular, de la diferencial (ver Figura 8.73).

Figura 8.73

Parte de la resolución de E10 de la Tarea 9 del video 1

Apertura hacia la innovación didáctica	Considero q' toma en cuenta investigaciones. dado q' presenta los diferentes significados parciales.

Además, recuperamos la valoración de E4 ya que agrega la posible finalidad y/o utilidad del video en una propuesta más amplia de enseñanza, porque menciona que la lección del video “sirve para reforzar el concepto de diferencial” (E4), con lo cual agrega, en cierto sentido, un aspecto para tener en cuenta con la utilización de recursos tecnológicos, como videos educativos que permitan “abordar la modelización matemática, el tratamiento y conversión entre los diferentes registros de representación semiótica y la integración de varias disciplinas” (Verón, Giacomone y Pino-Fan, 2023).

Sobre la componente *adaptación socio-profesional*, la mayoría de los FPM plantean que la propuesta del video educativo está adaptada a la formación de un futuro docente, en particular, E8 agrega, que la propuesta contribuye a un “futuro profesor de matemáticas, física, ingeniero” (E8). Si bien, no logran explicitar, en esta sección, justificaciones de sus afirmaciones, se considera que en las facetas anteriores han mostrado diferentes características que le permiten validar estas afirmaciones.

En relación con los *valores en la educación*, la mayoría de los FPM no realiza ningún comentario, algunos tachan el espacio en la tabla para esta componente, E6 menciona que “no se registra” (E6), pero E11 plantea que “el video fomenta los valores democráticos como el pensamiento crítico” (E11). En la afirmación de E11 se advierte que utiliza el indicar para resaltar el pensamiento crítico que propician la lección del video, aunque no se muestra evidencia de este aspecto, se considera que la valoración es adecuada ya que la organización de las configuraciones didácticas que conforman la lección y las prácticas matemáticas y didácticas que se presentan en el video, intentan generar espacios de discusión sobre ideas matemáticas en relación a la diferencial, fomentando de esta manera espacios de reflexión.

Por último, respecto a las *conexiones intra e interdisciplinarias*, la mayoría de los FPM mencionan que la propuesta del video educativo permite establecer conexiones intra matemáticas con los conceptos-definiciones de derivada, variables, función, infinitesimales, diferenciales, pendiente y razón de cambio. En general, no mencionan la ausencia de las conexiones interdisciplinarias, ya que no se presentan en la lección del video, pero resulta de interés para esta investigación que los FPM puedan valorar los indicadores que se pueden observar en el video y también, puedan reconocer los indicadores que no se presentan para proponer potenciales mejoras de la lección.

Tabla 8.8

Grado de pertinencia del uso de los indicadores de la faceta ecológica por los FPM del video 1 (n=11)

Faceta Ecológica		**Pertinencia de la valoración**			
Componentes	**Indicadores Códigos**	**Adecuado**	**Poco adecuado**	**Nada adecuado**	**Ausencia**
Adaptación al currículo	AC1	6	2		3
Apertura hacia la innovación didáctica	AI1	2	1		8
Adaptación socio-profesional y cultural	AS1	3	1		7
Educación en valores	EV1	1	1		9
Conexiones intra e interdisciplinarias	CI1	6	1		4

En general, en la Tabla 8.8, se muestra un resumen que refleja el grado de pertinencia de las valoraciones que realizan los FPM de cada uno de los indicadores de la faceta ecológica, donde se aprecia que los FPM han logrado utilizar de manera adecuada la mayoría de los indicadores de esta faceta.

8.5.3.3 Análisis y valoración del video 2 utilizando la GVID-Diferencial

8.5.3.3.1 Faceta Epistémica

Significados institucionales

Situaciones-problemas: la mayoría de los FPM destacan que en la lección del segundo video educativo, se establecen relaciones entre la integral y la diferencial a partir de una propuesta para determinar la longitud total de una curva en un intervalo dado, como lo expresa E9 en su valoración (ver Figura 8.74).

Figura 8.74

Parte de la resolución de E9 de la Tarea 9 del video 2

Situaciones-problemas	Propone una situación donde se aplica la integral a partir del diferencial, explicando todos los pasos para hallar el diferencial y luego integrar para hallar el valor total de la longitud

Además, se puede apreciar en la respuesta de E9 que menciona una característica importante de la lección que es la explicación de todos los pasos necesarios para establecer la diferencial (en particular, la diferencial longitud dL). De esta manera, el FPM realiza una valoración especializada ya que recupera características de las prácticas matemáticas y didácticas donde interviene de manera clave la diferencial.

También, se destaca la valoración de E1 la cual menciona que "la situación dada como ejemplo generaliza correctamente la aplicación de integral definida" (E1), donde se advierte que recupera que el tipo de situación (aplicación) y el proceso matemático involucrado (generalización), realizando de esta manera una valoración más específica de la propuesta del video. En este mismo sentido, E3, E4 y E10 mencionan que la situación-problema plantea a la conceptualización de la diferencial, destacando de esta manera el proceso que caracteriza a la situación, pero no logran especificar qué se está conceptualizando de la diferencial.

Por último, se destaca lo que agrega E11 al mencionar que en la presentación del video se explica como calcular la longitud de una curva "aplicando el decálogo para el establecimiento de la integral definida, basado en la definición de integral acorde a Leibniz" (E11). En primer lugar, recupera el término "decálogo" ya que en la lección se presentan los diez pasos a realizar para resolver la situación-problema. Segundo, considera el proceso de conceptualización de las relaciones entre la diferencial y la integral definida; y tercero, menciona que se trabajará con la integral en el contexto de Leibniz, con lo cual, se puede afirmar que los elementos que recupera E11 para realizar sus comentarios indican que ha logrado utilizar los criterios para realizar un análisis más detallado de esta componente de la faceta epistémica.

Lenguajes: en todas las valoraciones que realizan los FPM mencionan que en la lección del video se observa el uso de diversos tipos de lenguajes como: natural, algebraico, simbólico, geométrico y funcional. A modo de ejemplo, se muestra en la Figura 8.75 la valoración de E1, donde se muestran algunas evidencias del uso de los lenguajes.

Figura 8.75

Parte de la resolución de E1 de la Tarea 9 del video 2

Lenguajes	-natural -algebraico -simbólico $y=f(x)$; $dL=\sqrt{dy^2+f(x+dx)-f(x)^2}$; $f(x)\,dx$; $\int_R = L$

Resulta interesante destacar, las valoraciones que realizan E2 y E3, ya que no solo mencionan los diferentes tipos de lenguajes, sino que agregan su función en el contexto de la lección, esto se observa, por ejemplo, al mencionar que se utiliza el "lenguaje natural al explicar [lo] simbólico en las notaciones, algebraico en la resolución" (E2, ver Figura 8.76). Estas valoraciones que realizan los FPM implica un uso más competente de los criterios que conforman la componente lenguajes ya que no solo mencionan los diferentes tipos de lenguajes que intervienen, sino que avanzan en indicar la función y/o lugar que ocupa un tipo de lenguaje en el desarrollo de la propuesta de la lección, con lo cual implica un uso competente de los criterios de la GVID-Diferencial, y en consecuencia, un progreso en el desarrollo de la competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica.

Figura 8.76

Parte de la resolución de E2 de la Tarea 9 del video 2

Lenguajes	lenguaje natural al explicar, simbólico en las notaciones, algebraico en la resolución, gráfico

Asimismo, se destaca el aporte de E10 que además de mencionar los diferentes tipos de lenguajes, agrega las relaciones entre los lenguajes. En este sentido, en la valoración se advierte que el FPM considera las relaciones entre los lenguajes como un indicador del potencial de la lección del video de la faceta epistémica.

Por otro lado, es importante que los FPM puedan valorar si el lenguaje empleado en la lección del video es adecuado al nivel educativo al cual se dirige, en esta dirección, solo dos FPM mencionan que el lenguaje es "compresible" (E7) o adecuado para los estudiantes.

Por último, destacamos la valoración de E9 porque menciona como se "describe a la diferencial como una cantidad infinitamente pequeña" (E9). Si bien este comentario involucra diferentes criterios de la fase de epistémica, resulta interesante advertir cuáles son los términos que se emplean para describir a la diferencial en la lección del video.

Conceptos-definiciones: en general la mayoría de los FPM menciona los principales conceptos involucrados en la lección del video 2, como: "integral, diferencial, teorema de Pitágoras" (E2), "variación, subintervalo, curva, recta, longitud" (E6), "funciones, derivada, sumatoria, longitud de una curva, infinitesimal" (E8), "variación infinitesimal" (E5), "longitud de arco de una curva" (E10), incrementos, integral definida, entre otros. Además, mencionan que la presentación de los mismo es clara y adecuada al nivel (E1, E3 y E7).

Asimismo, destacamos la valoración de E9 ya que no solo menciona algunos conceptos involucrados, sino que avanza en indicar las relaciones entre los mismos y cómo son considerados los diferenciales en la lección del video, donde plantea que "dx, dy como incrementos de la función" (E9) y a dL como una "longitud infinitamente pequeña" (E9) (ver Figura 8.77).

Figura 8.77

Parte de la resolución de E9 de la Tarea 9 del video 2

Conceptos	Presenta al dx, dy como los incrementos de la función y a partir de ello calcular el diferencial de esa longitud infinitamente pequeña que ha considerado

En el mismo sentido, en la respuesta de E10, se menciona como se considera a la diferencial en la lección del video (ver Figura 8.78). Resulta de interés para esta investigación, advertir que los FPM han logrado profundizar sus valoraciones ya que no solo se identifican los conceptos-definiciones que intervienen y emergen en la secuencia de práctica matemáticas y didácticas de la lección, sino que también han logrado reconocer las funciones que desempeña estos objetos matemáticos en las prácticas, con lo cual implica un nivel más en el desarrollo de su competencia profesional y en la reflexión global de una lección de un video utilizando los criterios de idoneidad didáctica (Giacomone, Beltrán-Pellicer y Verón, 2022).

Figura 8.78

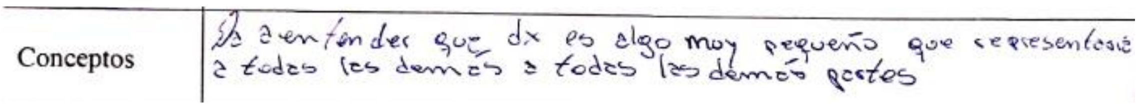
Parte de la resolución de E10 de la Tarea 9 del video 2

Conceptos	- Diferencial como cantidad infinitesimal - Longitud del arco de la curva.

Por otro lado, destacamos la valoración que realiza E4 ya que no solo menciona que en la lección del video 2 se considera a dx como "algo muy pequeño" (E4) sino que agrega "representa a todas las demás partes" (E4) (ver Figura 8.79). En este comentario del FPM se adviertes varios aspectos importantes; por un lado, se recupera el símbolo y cómo es considerado en la lección del video, como se ha mencionado en párrafos anteriores; por otro lado, el FPM logra indicar con total claridad los procesos matemáticos involucrados en las prácticas, como la representación, conceptualización y generalización. Además, es posible plantear que el FPM considera, de manera implícita, el juego del lenguaje de dx al considerarlo como un elemento genérico, en la cual entran en juego las facetas duales extensivas e intensivas al mismo tiempo, en el sentido de que dx se considera como una cantidad muy pequeña, pero también se considera que dx es un representante de todos las demás partes. De esta manera, se puede decir que la valoración de E4 es casi experta por los aspectos que recupera de la lección y que le permitirán, en un futuro, realizar análisis y valoración cada vez más profundos.

Figura 8.79

Parte de la resolución de E4 de la Tarea 9 del video 2



Conceptos	Se da a entender que dx es algo muy pequeño que representaría a todas las demás a todas las demás partes

Por último, recuperamos los comentarios de E5 y E6 que mencionan, en contraposición a los demás FPM, que en la lección del video "no se presenta de forma clara el concepto de diferencial" (E6). Si bien, es posible que para algunos estudiantes la presentación no sea la más adecuada para entender qué es la diferencial, estos FPM no presentan alguna evidencia y/o justificación de sus afirmaciones. Además, cabe mencionar que la intención de la lección del video 2 es obtener una expresión para hallar la longitud de una curva en un intervalo donde la diferencial es utilizada para lograr este objetivo, en este sentido, la intención de la lección no es definir la diferencial, sino utilizarla para hallar una expresión, a diferencia del video 1 cuyo objetivo es definir a la diferencial.

Proposiciones: la mayoría de los FPM han realizado algún comentario de este subcomponente, sin embargo, solo algunos han logrado identificar alguna afirmación que relaciona los conceptos-definiciones que intervienen en las prácticas matemáticas.

En general, las principales proposiciones que destacan los FPM hace referencia a la consideración de los diferentes tipos de diferenciales involucrados en la lección del video 2 y su consideración como una cantidad infinitesimal. Por ejemplo, se plantea "dx y dy como cantidad infinitesimal” (E3) y “dL cantidad muy pequeña” (E4). Por otro lado, se destaca la valoración de E5 ya que recupera una de las principales relaciones que vincula varios conceptos como función como correspondencia, cantidad infinitamente pequeña, longitud de la curva y subintervalo, como se puede apreciar en la Figura 8.80.

Figura 8.80

Parte de la resolución de E5 de la Tarea 9 del video 2

Proposiciones	• $L=\int dL=\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$ • $[x; x+dx]$ es infinitamente pequeño, por lo que la porción de la long. de la curva que le corresponde también será infinitamente pequeño (dL)

En la comunicación de las ideas matemáticas es importante el uso del lenguaje simbólico-algebraico, ya que permite vincular símbolos, conceptos-definiciones y significados en un juego de lenguaje donde cobra relevancia la representación intensiva de los elementos genéricos, considerando de esta manera las facetas duales de los objetos matemáticos. Este aspecto se puede apreciar en la valoración de E2, por ejemplo, al plantear “$L=\int_R dL$” (E2), proposición que conlleva una multiplicidad de conceptos y relaciones entre la diferencial, como una porción infinitesimal de longitud (Verón y Giacomone, 2021) y la integral como suma de las infinitas partes dL de la curva (Verón y Giacomone, 2022) (ver Figura 8.81). Además, esta proposición es desarrollada por E5 al vincular la integral definida con la derivada para obtener una expresión para calcular la longitud de la curva en un intervalo $[a, b]$ (ver Figura 8.80).

Figura 8.81

Parte de la resolución de E2 de la Tarea 9 del video 2

Proposiciones	$L=\int_R dL$; $f(x+dx)=f(x)+f'(x)dx$

Además, se destaca en la resolución de E2 que se recupera una proposición denominada en la lección del video 2 como “Postulado de Leibniz” mediante la expresión $f(x+dx)=f(x)+f'(x)dx$ que relaciona la derivada con la diferencial como cantidad infinitesimal positiva, como se puede apreciar en la Figura 8.81.

Por otro lado, E7 menciona como posible mejora “Proponer situaciones de negociación” (E7) ya que considera que en la lección del video 2 no se proponen situaciones donde los estudiantes tengan que generar o negociar proposiciones sobre las interpretaciones y sentidos que le atribuyen a la diferencial, según el contexto de uso (Verón, Giacomone, Pino-

Fan, 2023). De esta manera, se advierte como E7 ha utilizado la GVID-Diferencial para valorar no solo las proposiciones, sino que avanza en analizar elementos de la configuración didáctica que propicie la generación y comunicación de las ideas matemáticas vinculadas a la diferencial.

Por último, se menciona que en las resoluciones de los FPM aparece, en menor medida, la valoración de adecuación de las proposiciones al nivel educativo al cual se dirige, en general aquellos que lo mencionan, plantean que las afirmaciones son adecuadas.

Procedimientos: la mayoría de los FPM menciona que los procedimientos fueron claros y adecuados al nivel, sin embargo, no precisan a que nivel correspondería. En las respuestas de los FPM, en general, recuperan técnicas de cálculo cuyo principal concepto-definición involucrado es la diferencial como una cantidad infinitesimal. Por ejemplo, E2 menciona las expresiones que se obtienen en la lección del video 2 para calcular la diferencial longitud dL, como se observa en la Figura 8.82. También, E4 menciona "dL como una cantidad infinitamente pequeña" (E4) para hacer referencia a la consideración que se tiene que realizar para obtener una expresión general (elemento genérico) para calcular la longitud infinitesimal de la curva (diferencial longitud).

Figura 8.82

Parte de la resolución de E2 de la Tarea 9 del video 2

Procedimientos	Se llega de la fórmula $dL = \sqrt{(dx)^2 + [f(x+dx)-f(x)]^2}$ a $dL = \sqrt{1+(f'(x))^2} \cdot dx$ dividir al segmento de curva en partes infinitamen te pequeñas

Asimismo, E2 menciona una característica importante y necesaria del procedimiento para lograr establecer las expresiones para calcular la longitud de la curva en un intervalo dado, el cual consiste en "dividir al segmento de curva en partes infinitamente pequeñas" (E2) (ver Figura 8.82), cuya consideración es fundamental en el marco del cálculo de Leibniz, ya que constituye el punto de partida para trabajar con los diferenciales dx, dy y dL y el triángulo diferencial (Verón y Giacomone, 2021).

En el mismo sentido, E9 plantea que en la lección del video 2 se presenta el procedimiento "diferencia de ecuación" donde se incrementa las variables x e y en una cantidad infinitamente pequeña dx y dy, respectivamente, como se aprecia en la Figura 8.83. Además, se destaca la valoración de E9 ya que asocia su valoración con los significados parciales de la diferencial, en este caso en particular, menciona que se "presenta al diferencial de Leibniz" (E9), con lo cual es posible afirmar como el FPM realiza una valoración experta ya que relaciona los objetos matemáticos que identifica en la lección del video 2 con los significados parciales del concepto.

Figura 8.83

Parte de la resolución de E9 de la Tarea 9 del video 2

Procedimientos	Presenta el diferencial de Leibniz. "Diferencia de la ecuación" que consiste en incrementar las variables x & y en una cantidad infinitamente pequeña denotada dx y dy.

Por otro lado, E5 y E6 plantean que no es claro la relación que se pretende establecer en la lección, pero aclaran que si es claro la presentación del concepto diferencial pero no las relaciones. En estos comentarios de los FPM, se supone que las relaciones a las que quieren hacer referencia son a las conexiones entre la diferencial con la integral, pero no logran especificar cual es la cuestión y/o aspecto de la lección que le genera una confusión. De todas formas, resulta interesante la valoración de los FPM ya que permite reflexionar sobre el vínculo entre la intención didáctica de la lección y los procedimientos que se presentan.

Argumentos: en la mayoría de los comentarios de los FPM se observan que valoran positivamente la utilización de las representaciones gráficas y/o geométricas, por ejemplo, "se utiliza el gráfico como un apoyo para realizar las explicaciones" (E4), "usa el gráfico como apoyo para reforzar los cálculos" (E3), "se utiliza representación geométrica para definir integral definida" (E1). En estas valoraciones, se observa que los FPM logran reconocer en qué medida el uso de las representaciones gráficas y/o geométricas son empleadas para ejemplificar, apoyar y reforzar las proposiciones y procedimientos que se presentan en la lección del video 2.

En contraposición a lo mencionado anteriormente, dos FPM plantean que "se usa la representación gráfica para apoyar las argumentaciones, sin embargo, éstas resultan un tanto engorrosa" (E5). En esta valoración no se menciona de manera explícita que aspecto y/o hecho del video les resulta "engorrosa" para analizar con mayor profundidad, se entiende que una primera visualización del video puede resultar un poco compleja debido a la complejidad de los objetos matemáticos implicados en la lección lo que puede generar cierta dificultad para los estudiantes, por tales motivos, se recomienda visualizar más de una vez el video 2.

Por otro lado, se recupera la valoración de E9 porque plantea que las proposiciones y procedimientos se justifican y se demuestran para definir expresiones que permiten conceptualizar a la diferencial longitud dL, como se puede apreciar en la Figura 8.84.

Figura 8.84

Parte de la resolución de E9 de la Tarea 9 del video 2

Argumentos	Las proposiciones y procedimientos que esta utilizando las justifica y demuestra por y: $dL = \sqrt{(dx)^2 + [f(x+dx) - f(x)]^2}$

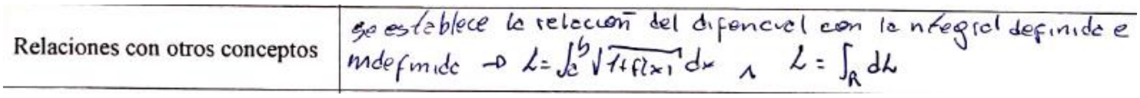
En relación con el criterio de la GVID-Diferencial que hace referencia a la necesidad de proponer situaciones donde los estudiantes tengan que argumentar (Verón, Giacomone y Pino-Fan, 2023), solo un FPM se refiere al mismo en su valoración indicando que “el argumento es desde un único sentido, no propone validación” (E10). En este comentario, se observa que el FPM plantea que en la lección no se proponen espacios para la generación o discusión de los argumentos que validan las proposiciones y procedimientos presentados, ya que las interacciones entre docentes y estudiantes están pensadas en un único sentido, como menciona E10, porque no se realizan interrogantes que inviten a poner en discusión o diálogo sobre los objetos matemáticos de las prácticas que se están presentando, por tales motivos, se considera que la valoración de E10, la cual propone como mejora incorporar este tipo de trabajo, implica un gran avance en el uso de los criterios de la GVID-Diferencial para valorar la lección del video 2, y en consecuencia, este uso constituye un indicador del grado de desarrollo de la competencia de análisis y valoración de los FPM (Giacomone, Godino y Beltrán-Pellicer, 2018).

Relaciones con otros conceptos: la mayoría de los FPM mencionan que en la lección del video se relaciona a la diferencial con la integral e integral definida, y en menor medida mencionan que “se relaciona con longitud de un segmento, diferencial, teorema de Pitágoras (triángulos) y derivadas” (E2), “se evidencia la relación entre diferencial y la aplicación de la integral para hallar la longitud del arco de la curva (E5), “se relaciona con el concepto de integral e infinitesimal” (E6). De esta manera, se advierte que los FPM han logrado identificar las relaciones con otros conceptos-definiciones.

Además, destacamos la valoración de E5 ya que no solo menciona los conceptos, sino que escribe cual es la intención de establecer esta relación, que en el caso particular del video 2, es para determinar una expresión para calcular la longitud del arco de una curva. En esta dirección, E4 realiza una valoración experta ya que presenta las relaciones entre la diferencial y la integral indicando las expresiones que permiten evidenciar y recopilar estas relaciones, como se observa en la Figura 8.85.

Figura 8.85

Parte de la resolución de E4 de la Tarea 9 del video 2

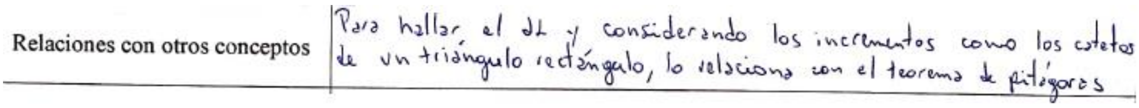


Relaciones con otros conceptos	se establece la relación del diferencial con la integral definida e indefinida $\rightarrow L=\int_a^b\sqrt{1+f'(x)}\,dx \quad \wedge \quad L=\int_R dL$

Por otro lado, destacamos la valoración de E9 ya que logra recuperar relaciones entre el Teorema de Pitágoras y el triángulo diferencial de lados $(dL, dx\ y\ dy)$, indicando cómo se consideran a los lados del triángulo diferencial para hallar una expresión para la diferencial longitud dL (ver Figura 8.86). En el comentario que realiza E9, resulta que se describe, de manera implícita, el *procedimiento* que se relaciona con la consideración del triángulo diferencial el cual constituye un proceso matemático fundamental en el marco del cálculo de Leibniz y que permite progresar hacia el cálculo de la longitud del arco de una curva. De esta manera, es posible afirmar que los criterios de la GVID-Diferencial, permiten a los FPM realizan valoraciones cada vez más experta logrando identificar objetos y procesos que son fundamentales para los procesos de enseñanza y aprendizaje de la diferencial.

Figura 8.86

Parte de la resolución de E4 de la Tarea 9 del video 2



Relaciones con otros conceptos	Para hallar el dL y considerando los incrementos como los catetos de un triángulo rectángulo, lo relaciona con el teorema de pitágoras

También, recuperamos el siguiente comentario "Se deja registrado cada paso a seguir en la demostración de la fórmula buscada" (E11) ya que resulta importante advertir una característica del video 2, que durante la explicación se presentan los pasos a realizar. Si bien, esta apreciación por parte de E11 corresponde a la faceta interaccional, es posible observar que en la lección del video la mayoría de las relaciones que se mencionan se expresan de manera simbólica, y algunas en lenguaje coloquial, quedando registrado en la pantalla digital que se utiliza.

Por último, ponemos en discusión el comentario de E10 ya que plantea "no propone momentos de relación con otros conceptos, solo las utiliza" (E10), el cual se considera que no es del todo adecuado porque en la lección del video 2 se utilizan varios conceptos-definiciones para establecer relaciones entre la diferencial, integral definida y longitud de arco de una curva, como lo han mencionado otros FPM.

Procesos: la mayoría de los FPM logran identificar los procesos de conceptualización de los diferenciales como cantidades infinitesimales o infinitamente pequeña, en particular, recuperan a la diferencial de longitud dL. Al mismo tiempo, hacen referencia al proceso de representación simbólica de los diferenciales $dx, dy \, y \, dL$, como se puede apreciar en el comentario de E4 en la Figura 8.87.

Figura 8.87

Parte de la resolución de E4 de la Tarea 9 del video 2

Procesos Modelización, comunicación, argumentación, conceptualización, representación, interpretación	Plantea representaciones como dx, dL cantidades infinitamente pequeños, Cant. genericos y mediante la grafica.

Además, E4, menciona a las "cantidades genéricas" que se relaciona con el proceso de generalización de los diferenciales que intervienen y emergen de la lección del video 2.

Por otro lado, E2 recupera el proceso de algoritmización que permite calcular la longitud total de la curva cuando menciona "longitud del segmento de una curva como la sumatoria de los dL" (E2). En esta dirección, E9 relaciona este proceso con la Diferencial de Leibniz al expresar que en la lección del video se "plantea una situación para hallar la longitud de una curva, para esto utiliza el diferencial de Leibniz para explicarlo" (E9).

También, destacan los FPM que en la lección se utiliza la modelización para establecer relaciones entre la integral y la diferencial mediante las cantidades infinitesimales, como lo plantea E5 y E6 en su valoración (ver Figura 8.88).

Figura 8.88

Parte de la resolución de E5 de la Tarea 9 del video 2

Procesos Modelización, comunicación, argumentación, conceptualización, representación, interpretación	Se plantean situaciones en las que la modelización es utilizada para comprender y establecer relaciones que involucran cambios infinitamente pequeños.

Conflictos epistémicos: solo 4 FPM han realizado algún comentario en relación con este componente. En general, solo E2 propone de manera particular un potencial conflicto en relación con el uso de la fórmula para calcular la distancia entre dos puntos, pero no expresa porque considera como un potencial conflicto para el cálculo de la longitud de una curva.

Por otro lado, E7 menciona "no se observan ambigüedades en la presentación de los objetos matemáticos asociados con integral definida" (E7) donde se observa que utiliza el indicador de la GVID-Diferencial para hacer su comentario sobre la presentación de los objetos matemáticos que intervienen en la lección del video 2. Además, propone como mejora "propiciar espacios de debate acerca de interpretaciones y sentidos". En esta dirección, recuperamos la valoración de E10 que escribe "no hay momento de reflexión, ni propone potenciales dudas que las responde a lo largo del video" (E10), en el cual se observa que utiliza dos indicadores de la guía para evidenciar que hay aspectos del video que se pueden mejorar.

Tabla 8.9

Grado de pertinencia del uso de los indicadores de la faceta epistémica por los FPM del video 2 (n=11)

Faceta Epistémica			**Pertinencia de la valoración**			
Componentes	**Subcomponente**	**Indicadores Códigos**	**Adecuado**	**Poco adecuado**	**Nada adecuado**	**Ausencia**
Significados institucionales	Situaciones-problemas	SP1	1	7		3
		SP2	2			9
		SP3		7		4
	Lenguajes	L1	7	4		0
		L2		2		9
		L3	1			10
		L4	3			4
	Conceptos-definiciones	C1	7	3		1
		C2	4	1		6
		C3	1	2		8
	Proposiciones	Pp1	5	3		3
		Pp2	2	4		5
	Procedimientos	Pc1	4	6		1
	Argumentos	A1	2	7		2
		A2	7	2		2
		A3	1	2		8
Relaciones		R1	3	3		5
		R2	7	2	1	1
Procesos	Comunicación-argumentación	P1	7	3		1
	Modelización	P2	3	3		5
		P3	2	3		6
	Conceptualización	P4	5	3		3
Conflictos Epistémicos		CE1				11
		CE2	1	3		7
		CE3				11
		CE4	1			10
		CE5	1			10

En general, en la Tabla 8.9, se muestra un resumen que refleja el grado de pertinencia de las valoraciones que realizan los FPM de cada uno de los indicadores de la faceta epistémica, donde se observa vacíos llamativos con relación a la componente situaciones-problemas y conflictos epistémicos. Esto se debe principalmente a que en la lección del video 2, no se tienen en cuenta la diversidad de situaciones-problemas, y, por otro lado, no se observa en el video que se tengan en cuenta los potenciales conflictos.

8.5.3.3.2 Faceta Cognitiva

Significados personales (Aprendizajes): la mayoría de los FPM no realiza algún comentario de este componente ya que no es posible observar en la lección del video 2 las practicas personales de los estudiantes. En esta dirección, E11 menciona “no se registra” haciendo referencia a lo antes mencionado.

Relaciones (conexiones): en general, los FPM identifican que en la lección del video se plantean situaciones que permiten a los estudiantes establecer conexiones entre la integral, la longitud de arco y la diferencial. Por ejemplo, E5 menciona “se plantea situaciones que le permite al estudiante relacionar el diferencial con la integral”, “se plantean relaciones entre la diferencial y la integral” (E8). Además, algunos FPM mencionan otras conexiones con los conceptos de derivada y sumatoria, como lo expresa E3 “relaciona el cálculo de longitud a partir de conocimientos previos al generalizar. Relaciona el diferencial con el cálculo de la longitud. Relaciona distintos contenidos derivada, sumatoria, integral”.

Resulta importante destacar que en la valoración de E3, menciona al proceso de generalización como una acción importante y necesaria de tener presente para establecer relaciones entre el cálculo de la longitud de arco de la curva y los conocimientos previos. De esta manera, es posible observar que el FPM realiza una valoración experta ya que advierte la necesidad de considerar los procesos matemáticos para generar y establecer relaciones entre los conceptos-definiciones.

Por otro lado, se recupera la valoración de E9 ya que en su comentario avanza en la explicación de la función que cumplen los objetos matemáticos para establecer relaciones entre la diferencial, la integral y la longitud de arco de la curva, como se puede apreciar en la Figura 8.89. En este sentido, se puede afirmar que el FPM realiza una valoración experta ya que logra identificar las funciones semióticas implicadas en el proceso que permiten establecer las relaciones entre los objetos matemáticos.

Figura 8.89

Parte de la resolución de E9 de la Tarea 9 del video 2

Relaciones (conexiones)	A partir del diferencial de una cantidad infinitamente pequeña, explica como integrar para hallar la longitud total de una curva.

Uno de los indicadores de este componente plantea proponer experiencias (situaciones, ejemplos, explicaciones, …) que permitan valorar si el estudiante establece relaciones o conexiones entre los significados de la diferencial, sus sentidos, representaciones y contextos de uso; y en este sentido, la valoración de E1 recupera en ciertos aspectos de la lección del video al plantear que con el uso del lenguaje gráfico “se puede observar de forma más precisa el concepto de integral” (E1). De esta manera, está identificando el rol que tiene la representación gráfica para establecer relaciones entre la integral y la diferencial.

En relación con los *procesos*, solo cinco FPM realizan algún comentario. Los estudiantes E2 y E11 mencionan los procesos de resolución de problemas, generalización, conceptualización y representación, pero no se refieren en qué medida logran identificar estos procesos en las prácticas personales de los estudiantes (ya que esto no se evidencia en el video) o si se tiene en cuenta la competencia matemática de los estudiantes para que puedan implementar estos procesos. En este sentido, si se tienen en cuenta los conocimientos previos, es posible valorar que en la lección del video 2 se tiene en cuenta la competencia matemática del estudiante para explicar los procesos involucrados en el desarrollo del video, ya que estos procesos son necesarios para conceptualizar la longitud de arco de una curva mediante los diferenciales. Por tales motivos, planteamos que las respuestas de los FPM resultan incompletas y que no logran especificar cómo el autor del video 2 tiene en cuenta los procesos en su explicación.

Por otro lado, destacamos las valoraciones de E5 y E6 ya que analizan una pregunta que realiza el autor del video como una invitación a la reflexión sobre los propios procesos de pensamiento al plantear “¿puedes explicárselo a alguien más? Que permite la posterior reflexión sobre lo aprendido” (E5). En estas valoraciones, se observa un uso adecuado de los indicadores de la GVID-Diferencial, ya que logran identificar que al final del video 2 el autor plantea un interrogante que invita a los estudiantes a compartir las ideas matemáticas que se presentaron en el video con el desafío de explicar a un compañero, lo que implica un importante proceso de reflexión para organizar las ideas y desarrollar competencias comunicativas y argumentativas. Por tales motivos, es posible afirmar que los FPM han realizado una valoración experta de este componente, constituyendo un indicador más del desarrollo de la competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica.

Conocimientos previos: la mayoría de los FPM menciona que en la lección del video se tienen en cuenta los siguientes conocimientos previos como derivada, integral, sumatoria, función, teorema de Pitágoras, funciones, intervalos, infinitesimal, incrementos, cantidad y pendiente. Además, E3 plantea que en el video 2 se retoman otros conocimientos que son necesarios para avanzar en la explicación, como se puede apreciar en la Figura 8.90.

Figura 8.90

Parte de la resolución de E3 de la Tarea 9 del video 2

Conocimientos previos (se tienen en cuenta los mismos elementos que para la idoneidad epistémica)	Retoma conocimientos previos necesarios (Prop. potencia - raiz; distancia entre 2 puntos. etc) Usa distintos registros (gráfico, expresiones simbólicas[L], en

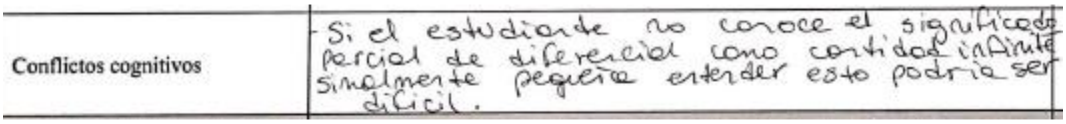
También, se observa en la valoración de E3 (ver Figura 8.90) que destaca la utilización de diferentes registros de representación semiótica para la representación de la información, lo cual constituye un indicador importante a tener en cuenta en este componente. Cuestión que es planteada por E5 y E6 en sus comentarios “se utiliza el registro gráfico/simbólico para representar la información” (E5) y “se utilizan diferentes registros apropiados para la representación de la información” (E6).

En la lección del video 2 no se observa aspectos que permitan asociar a la componente *diferencias individuales* de los estudiantes, por tales motivos, dos FPM mencionan que los indicadores de este componente “no se identifica” (E11) o “no se tienen en cuenta diferencias individuales dadas las características del recurso” (E7). En el comentario de E7, justifica la ausencia de estos indicadores debido a las características del recurso, en este caso un video educativo. Si bien, la valoración realizada por los FPM es adecuada, se podría proponer mejoras teniendo en cuenta los indicadores para mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la diferencial.

En relación con los *conflictos cognitivos*, solo tres FPM han realizado algún comentario sobre esta componente; E7 menciona que en la lección del video 2 “aborda solo algunos significados posibles” pero no aclara cuales son los significados que se trabajan y cuáles no. Sin embargo, en la valoración de E10 menciona de manera explícita el significado parcial del diferencial que puede llegar a generar un potencial conflicto cognitivo si el estudiante no logra considerar a la diferencial como una cantidad infinitamente pequeña, como se puede apreciar en la Figura 8.91.

Figura 8.91

Parte de la resolución de E10 de la Tarea 9 del video 2



Conflictos cognitivos	- Si el estudiante no conoce el significado percial de diferencial como cantidad infinitamente simalmente pequeña entender esto podría ser dificil.

Por último, se considera que la valoración de E11, la cual expresa "No se presentan situaciones para analizar los conflictos cognitivos" es parcialmente correcta ya que no es posible observar las prácticas personales de los estudiantes debido a las características del recurso; no obstante, es posible valorar las acciones y decisiones que toma el autor del video en relación a la gestión de los aprendizajes, como por ejemplo, advirtiendo potenciales errores para abordarlos en la lección del video.

Tabla 8.10

Grado de pertinencia del uso de los indicadores de la faceta cognitiva por los FPM del video 2 (n=11)

Faceta Cognitiva		**Pertinencia de la valoración**			
Componentes	**Indicadores Códigos**	**Adecuado**	**Poco adecuado**	**Nada adecuado**	**Ausencia**
Significados personales (Aprendizajes)	A1	1		1	9
	A2	1			10
Relaciones (conexiones)	R1	2	1		8
	R2	8	1		2
Procesos	P1	2	2		7
Conocimientos previos	C1	7	1		3
	C2				11
	C3	2			9
Diferencias individuales	D1	1	2		8
	D2		1		10
	D3	1			10
Conflictos cognitivos	CC1	1	2		8
	CC2	1			10

En general, en la Tabla 8.10, se muestra un resumen que refleja el grado de pertinencia de las valoraciones que realizan los FPM de cada uno de los indicadores de la faceta cognitiva, donde se aprecia que la mayoría de los FPM hace un uso competente del indicador de relaciones R2 y conocimientos previos (C1).

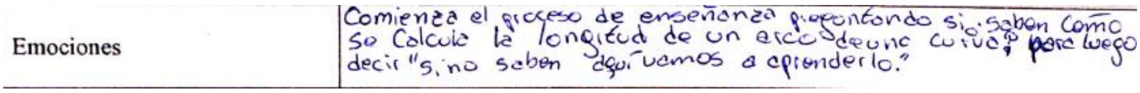
8.5.3.3.3 Faceta Afectiva

Para el análisis de esta faceta se cuenta con 7 respuestas de los FPM ya que 4 no han realizado ningún comentario vinculado a los compontes de emociones, actitudes, creencias y valores.

En relación con las *emociones*, E3, E4 y E9 identifican en la lección del video 2 aspectos motivacionales relacionados con la pregunta retórica que se realiza al comienzo de la lección sobre el cálculo de la longitud de arco de una curva, pero a su vez invita y abre la posibilidad de aprender por medio del video, como se puede apreciar en la valoración de E4 en la Figura 8.92. Además, E3 agrega que "potencia la motivación y autoestima" al realizar este tipo de intervención. En estas valoraciones se observa como los FPM logran identificar características de la configuración didáctica que intentan potenciar la autoestima de los estudiantes, realizando así una valoración experta de esta componente.

Figura 8.92

Parte de la resolución de E4 de la Tarea 9 del video 2



Emociones	Comienza el proceso de enseñanza preguntando si saben Como se Calcula la longitud de un arco de una curva? para luego decir "si no saben aquí vamos a aprenderlo."

Por otro lado, E7 menciona "no se vinculan contenidos con problemas sociales o personales de los estudiantes" reflexionando de esta manera que la lección del video 2 no se ha considerado la vinculación del contenido con problemáticas sociales y culturales de los estudiantes, lo cual constituye una valoración adecuada porque es una potencial mejora que se podría tener en cuenta para una segunda parte del video.

En la valoración de la lección del video 2 sobre la vinculación con las problemáticas sociales de los estudiantes, desde la faceta afectiva, un aspecto que destaca E10 está relacionado con el uso de un lenguaje cercano a los estudiantes, en este sentido, E10 plantea que en el video se aprecia un "léxico matemático, no informal" (E10), indicando de esta manera que en la propuesta el discurso utilizado (lenguaje – faceta epistémica) no se emplean metáforas y/o analogías para apoyar las explicaciones.

En cuanto a las *actitudes*, E9 destaca que "la explicación del diferencial mediante los pasos lleva a que se genere una actitud más positiva para aprender el diferencial", indicando de esta manera que la organización de la lección del video explicitando en detalle los pasos a realizar (faceta interaccional), resulta positivo para potenciar el aprendizaje de la diferencial.

Por otro lado, E1 destaca la “actitud de motivación” (E1) que transmite el autor del video 2 ya que utiliza expresiones que invitan a los estudiantes a participar y a ayudar a un compañero (ver Figura 8.93). De esta manera se valora que en la lección del video se fomenta una actitud positiva y de flexibilidad hacia la comunicación de ideas matemáticas, aportando de esta forma al desarrollo de competencias comunicativas y argumentativas.

Figura 8.93

Parte de la resolución de E1 de la Tarea 9 del video 2

Actitudes	La actitud de motivación: al final del video expresa que es fácil el contenido y se está capacitado claro para ayudar a un compañero con el tema.

Por último, E7 expresa que “no se plantean situaciones que lleven a la participación de los estudiantes”, cuya valoración en parte el correcta, pero a partir de los comentarios de sus compañeros, es posible afirmar que, en la propuesta del video, existen elementos que propician espacios de participación de los estudiantes, como se ha analizado en párrafos anteriores.

En relación con las creencias, solo tres FPM han realizado algún comentario. Por un lado, E3 hace referencia a crecencias sobre los aprendizajes de los estudiantes ya que menciona “respeta las creencias en los aprendizajes al indicar que se va a enseñar por más que sepa o no” (E3). En este comentario, se observa como el FPM valora la apertura que realiza el autor de video 2 al comenzar la lección.

Por otro lado, E7 recupera una creencia sobre la enseñanza y aprendizaje de los diferenciales que expresa el autor “inicialmente se menciona una creencia acerca de que el tema ‘es difícil’” (E7), destacando de esta manera que las creencias del autor pueden llegar a influenciar el desarrollo de la lección, por tales motivos, E7 propone como mejora “no debería dar por hecho que ‘el tema es difícil’”.

También, E10 menciona que el autor del video 2, “considera que el estudiante conoce el significado parcial de Leibniz ‘DIFERENCIAL’”. En este comentario, el FPM hace referencia a que el autor del video 2 supone que un conocimiento previo es el significado parcial de la diferencial de Leibniz donde se considera a la diferencial como una cantidad infinitesimal o infinitamente pequeña.

Para finalizar, en relación con los valores, solo un FPM realiza un comentario indicando que “no se observa el criterio”, lo cual resulta adecuado ya que no se observa en la lección del video 2 elementos que se relacionen con los valores éticos y morales.

Tabla 8.11

Grado de pertinencia del uso de los indicadores de la faceta afectiva por los FPM del video 2 (n=11)

Faceta Afectiva		**Pertinencia de la valoración**			
Componentes	**Indicadores/Códigos**	**Adecuado**	**Poco adecuado**	**Nada adecuado**	**Ausencia**
Emociones	E1	3	2		6
Actitudes	A1	3	2		6
Creencias	C1	2	1		8
Valores	V1		1		10

En general, en la Tabla 8.11, se muestra un resumen que refleja el grado de pertinencia de las valoraciones que realizan los FPM de cada uno de los indicadores de la faceta afectiva, se observa que existen determinados aspectos que están valorando los FPM del video y haciendo un uso adecuado de los indicadores.

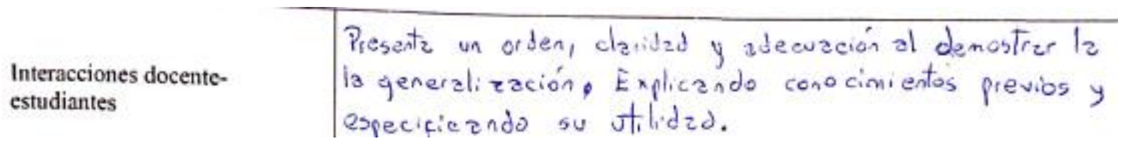
8.5.3.3.4 Faceta Interaccional

Interacciones docente-estudiante: la mayoría de los FPM plantean que la presentación que realiza el autor del video 2 es "clara, ordenada y adecuada" (E1), Además, también se destaca la explicación detallada de los pasos a realizar para determinar la expresión para calcular la longitud de arco de la curva, como se puede apreciar en la siguiente valoración de E9: "La presentación de la explicación del diferencial se encuentra de manera muy clara y organizada por pasos para hallar el diferencial", también E10 expresa "Presentación: clara, ordenada, bien secuenciada (paso 1°, 2°, …)".

También, se destacan las siguientes valoraciones de los FPM ya que no solo mencionan las características de las configuraciones didácticas, sino que logran reconocer la función que desempeñas determinados objetos de las prácticas matemáticas y didácticas que permiten potenciar la trayectoria didáctica, por ejemplo, E2 plantea que los "Problemas permiten establecer una relación entre el diferencial y la integral"; por otro lado E3, expresa la relación de las configuraciones didácticas con los procesos matemáticos y el uso de los conocimientos previos, como se puede observar en la Figura 8.94 en la respuesta de E3.

Figura 8.94

Parte de la resolución de E3 de la Tarea 9 del video 2



Además, se destaca la valoración de E4 ya que no solo hace referencia a la organización de la configuración didáctica, sino que logra reconocer las conexiones y funciones que cumplen los tipos de lenguajes en el desarrollo de la lección del video 2 (ver Figura 8.95). En consecuencia, es posible afirmar que los FPM están realizando valoración cada vez con mayor detalle, en el sentido de que no solo describen, sino que logran explicar, valorar y proponer potenciales mejoras, prácticas que constituyen indicadores explícitos del desarrollo de la competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica (Giacomone, Godino y Beltrán-Pellicer, 2018).

Figura 8.95

Parte de la resolución de E4 de la Tarea 9 del video 2

Interacciones docente-estudiantes	se presentó y desarrolló la explicación de forma muy bien organizada, partiendo desde lo gráfico para luego ir planteando cuestiones Algebraicas

En relación con la explicación del autor del video, E2 propone como mejora que "podría detenerse más en cada paso para mejorar la compresión del proceso" (E2). Asimismo, E11 menciona: "Noto que, al mirar el video, me pierdo con la explicación ya que no utiliza el cursor como indicador para lo que está diciendo en la primera parte del video, después si lo implementa" (E11), valorando de esta manera la relación entre el uso de un recurso tecnológico (cursor) en la presentación de la lección. En este último comentario se aprecia un aspecto que relaciona la faceta interaccional y mediacional, indicando de esta manera que las facetas no están aisladas, sino que están en una constante interacción (Godino 2013; Godino, Batanero y Burgos, 2023).

Por último, se recupera la valoración de E7 que expresa "No se observa este indicador. No hay retroalimentación" porque su comentario, en parte es adecuado ya que no se presentan retroalimentaciones debido a que no se cuentan con las practicas personales de los estudiantes, pero el indicador de esta componente implica aspectos de las configuraciones didácticas de la lección que no se han considerado, por tales motivos no es adecuado la valoración de E7, cuya evidencia lo conforman los comentarios de sus compañeros.

Sobre la componente interacciones entre estudiantes, la mayoría de los FPM no han emitido algún comentario, salvo E7 que menciona que "no se observa", lo cual es correcto porque no interactúan los estudiantes en la lección del video 2.

Por otro lado, destacamos la valoración que realiza E11 al comparar las apreciaciones que realizó en el video 1 con el video 2, ya que recupera indicadores que se asocian a faceta afectiva al escribir “En el video, la persona que lo graba presenta una actitud correcta, por ahí no se expresa con palabras motivadoras para seguir viendo, como sí ocurrió en el video anterior” (E11), pero que en cierto punto, la presencia o no de estas características potencia las interacciones entre los estudiantes.

En la componente *autonomía*, la mayoría de los FPM no han realizado algún comentario, sin embargo, tres respuestas plantean que “El estudiante debe asumir la responsabilidad al analizar el video” (E6). Por otro lado, otras dos respuestas expresan que “No se puede identificar” (E11) por las características de la lección del video.

Evaluación formativa: la mayoría de los FPM no han realizado algún comentario de este componente; sin embargo, dos respuestas plantean “Se podría pensar al conocimiento previo como una evaluación. Debido a que el alumno necesitaría recordar varias cuestiones” (E4), donde los indicadores de los aprendizajes están vinculados a disponibilidad y uso de los conocimientos previos.

Por otro lado, E7 y E11 mencionan que no es posible observar o identificar estos indicadores en la lección del video 2, lo cual en cierto punto es correcta porque no se cuenta con las prácticas personales de los estudiantes. Pero, en la valoración de la componente evaluación formativa, un indicador de la GVID-Diferencial plantea analizar los formatos de interacción (dilógico, colaborativo, magistral e individual) (Godino, Font, Whilhelmi y De Castro, 2009), aspecto que influye sobre el tipo de evaluación que promueve la lección del video 2 y que no se tuvo en cuenta para realizar los comentarios.

Tabla 8.12

Grado de pertinencia del uso de los indicadores de la faceta interaccional por los FPM del video 2 (n=11)

Faceta Interaccional		**Pertinencia de la valoración**			
Componentes	**Indicadores Códigos**	**Adecuado**	**Poco adecuado**	**Nada adecuado**	**Ausencia**
Interacciones docente-estudiante	IDE1	10		1	0
Interacción entre estudiantes	IEE1		2		9
Autonomía	A1	3	2		6
Evaluación formativa	EF1	1	3		7
	EF2				11

En general, en la Tabla 8.12, se muestra un resumen que refleja el grado de pertinencia de las valoraciones que realizan los FPM de cada uno de los indicadores de la faceta interaccional, donde se observa que casi todos los FPM hace un uso adecuado del indicador de la GVID-Diferencial en relación con las interacciones docente-estudiante.

8.5.3.3.5 Faceta Mediacional

Recursos materiales (manipulativos, audiovisuales e informáticos): la mayoría de los FPM menciona los recursos que utiliza el autor del video 2 en la lección, como: video, pizarra digital, pizarra interactiva, graficador y la herramienta insertar ecuaciones. Además, es posible observar que las valoraciones de los FPM van más allá de mencionar los recursos materiales que utilizan en el video ya que explican el grado de adecuación del uso del recurso en el contexto de la lección, por ejemplo, E4 plantea "utiliza un recurso tecnológico para el desarrollo de la explicación, el cual les permitía ser más prolijo ya que podía insertar ecuaciones que se podían entender con claridad". También, E10 expresa que se utiliza "Recurso audiovisual muy bueno, se percibe claramente la nomenclatura y gráficos", donde logra reconocer en qué medida el recurso empleado potencia un determinado aspecto de las configuraciones didácticas planificadas.

Sobre las condiciones ambientales, solo tres FPM han realizado algún comentario. E1 escribe a modo de ítems "audio claro. Pizarra digital: fondo claro pueden leerse los conceptos y ver claramente lo escrito", donde se puede afirmar que evalúa el grado de adecuación del uso de estos recursos para el desarrollo de la lección.

Por otro lado, E11 plantea que no es posible identificar este indicador, haciendo referencia a que no se conocen los aspectos vinculados a las condiciones del aula y la distribución de los estudiantes dado las características del recurso. Asimismo, E7 expone que "las condiciones ambientales dependen de la situación de quien mira el video" indicando que la valoración quedará sujeta a las condiciones que presente el o los sujetos que visualicen el video educativo 2.

En relación con el *tiempo de enseñanza y aprendizaje*, la mayoría de los FPM plantean que el tiempo empleado en la explicación de la lección del video es adecuado, por ejemplo, E1 expresa "la distribución del tiempo correcto: explicación paso a paso de lo realizado", donde se observa que valora la organización del tiempo en los momentos de enseñanza. En este sentido, E3 menciona que "Buena organización del tiempo de enseñanza al dedicar un momento para explicar que se pretende generalizar", donde destaca el tiempo que destina el autor del video a explicar el proceso de generalización, esto constituye un indicador que el autor distribuye el tiempo según la dificultad de los objetos y procesos implicados, con lo cual es posible afirmar que la valoración del FPM es experta porque logra utilizar los indicadores de la GVID-Diferencial para profundizar su análisis.

Además, destacamos la valoración de E4 y E5 porque logran identificar el grado de adecuación del uso del tiempo para la organización, planificación, desarrollo y gestión de las practicas matemáticas y didácticas que intervienen en el video educativo, al expresar “buena organización y gestión del desarrollo de las explicaciones” (E4) y “se evidencia trabajo en la planificación y organización del tiempo y el desarrollo de la planificación” (E5).

Por otro lado, se destaca la valoración sobre el uso del tiempo y la planificación en el comentario de E11 donde resalta una ventaja que presentan los videos educativos con las anticipaciones y organización de los momentos de enseñanza, al expresar que “Las escrituras se presentan de forma programada, por ello, la persona que habla va más rápido con su explicación” (E11). Pero el riesgo que trae esta ventaja es descuidar el tiempo de aprendizaje de los que están visualizando el video, por tales motivos E2 propone como mejora “se podría extender un poco más para poder explicar más detalladamente”, o como lo expone E10 “considero que el video debería durar más tiempo y se deberían exponer de manera más tranquila los argumentos que validan las proposiciones y procedimientos”. En estas valoraciones de los FPM es posible observar que interactúan indicadores de las facetas mediacional y cognitiva, con lo cual se puede afirmar que estos comentarios constituyen indicadores explícitos del desarrollo de la competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica (Giacomone, Godino y Beltrán-Pellicer, 2018).

Tabla 8.13

Grado de pertinencia del uso de los indicadores de la faceta mediacional por los FPM del video 2 (n=11)

Faceta Mediacional		**Pertinencia de la valoración**			
Componentes	**Indicadores Códigos**	**Adecuado**	**Poco adecuado**	**Nada adecuado**	**Ausencia**
Recursos materiales	RM1	8	1		2
Condiciones ambientales	CA1	1	2		8
Tiempo de enseñanza y aprendizaje	T1	9			2

En general, en la Tabla 8.13, se muestra un resumen que refleja el grado de pertinencia de las valoraciones que realizan los FPM de cada uno de los indicadores de la faceta mediacional, donde se advierte que los FPM han logrado utilizar de manera adecuada el indicador que hace referencia a la gestión y distribución del tiempo, y el de los recursos materiales.

8.5.3.3.6 Faceta Ecológica

Para el análisis de la faceta ecológica se cuenta con ocho respuestas ya que tres no han emitido ningún comentario para las componentes.

Adaptación al currículo: la mayoría de los FPM plantean que la propuesta es adecuada al nivel educativo (nivel secundario y terciario/superior) donde se trabaja con las integrales definidas. También, mencionan que la propuesta es adecuada al "curriculum de futuros profesores de matemática" (E2) y "la presentación de este contenido corresponde a la formación de profesores de matemática" (E9).

Sobre la *apertura hacia la innovación didáctica*, solo tres FPM realizan algún comentario; por un lado, plantean que se consideran las innovaciones en didáctica por el uso de las nuevas tecnologías, por ejemplo, E9 expresa "utiliza a la tecnología como un recurso para explicar el diferencial". En esta misma dirección, E7 expone que "no menciona investigaciones recientes. Aunque los recursos empleados son innovadores", donde valora que en parte se observa el uso de recursos innovadores pero que en la lección del video 2 no se mencionan investigaciones recientes del tema. Si bien, el indicar de la GVID-Diferencial plantea el uso de los resultados de las investigaciones en relación con la didáctica del cálculo, y en particular de la diferencial, para proponer potenciales mejoras, más que mencionarlas de manera explícita.

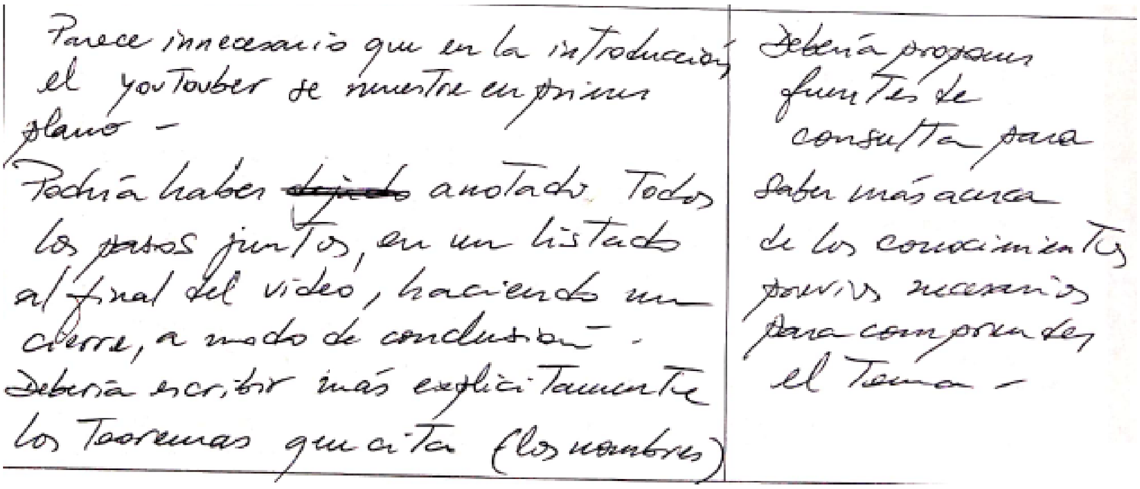
En relación con la componente *adaptación socio-profesional y cultural*, la mayoría de los FPM plantean que "la propuesta de enseñanza del diferencial está orientada al campo profesional de un profesor de matemática" (E9). También, destacamos la valoración de E3 que expresa "la propuesta se adapta mejor a la formación docente que al contexto de ingeniería" (E3), donde se aprecia que el FPM identifica que la propuesta se vincula con la formación docente y no tanto con propuestas del campo de las ingenierías.

Respecto a la componente *educación en valores*, solo tres FPM han realizado algún comentario; por un lado, E3 menciona que "no realiza discriminaciones si el alumno no sabe calcular o usar la integral para el cálculo”, donde se valora el respeto hacia el otro. Además, E9 agrega que “en la presentación del video no se observa la transmisión de estereotipos”.

Conexiones intra e interdisciplinarias: la mayoría de los FPM valora las conexiones intra-matemáticas entre la diferencial y la integral definida. De forma más particular, E2 agrega las conexiones con la longitud de arco de una curva, E3 plantea “establece conexiones entre cantidades (cantidad infinitesimal de intervalos) con integral”, y E8 menciona que se realizan conexiones entre la diferencial con la integral y la función. Por último, recuperamos los comentarios que agrega E7 ya que valora indicadores relacionados con la faceta interaccional, epistémica, cognitiva y mediacional, como se puede apreciar en la Figura 8.96.

Figura 8.96

Parte de la resolución de E7 de la Tarea 9 del video 2


Parece innecesario que en la introducción el youtuber se muestre en primer plano –
Podría haber ~~dejado~~ anotado todos los pasos juntos, en un listado al final del video, haciendo un cierre, a modo de conclusión.
Debería escribir más explícitamente los teoremas que cita (los nombres)

Debería proponer fuentes de consulta para saber más acerca de los conocimientos previos necesarios para comprender el tema –

Tabla 8.14

Grado de pertinencia del uso de los indicadores de la faceta ecológica por los FPM del video 2 (n=11)

Faceta Ecológica		**Pertinencia de la valoración**			
Componentes	**Indicadores Códigos**	**Adecuado**	**Poco adecuado**	**Nada adecuado**	**Ausencia**
Adaptación al currículo	AC1	6			5
Apertura hacia la innovación didáctica	AI1	2	1		8
Adaptación socio-profesional y cultural	AS1	2	3		6
Educación en valores	EV1	2	1		8
Conexiones intra e interdisciplinarias	CI1	4		1	6

En general, en la Tabla 8.14, se muestra un resumen que refleja el grado de pertinencia de las valoraciones que realizan los FPM de cada uno de los indicadores de la faceta ecológica, donde los FPM hacen un uso adecuado del indicador “adaptaciones al curriculum”.

En síntesis, en esta sección se ha logrado analizar las valoraciones que realizan los FPM sobre cada uno de las facetas, componentes e indicadores de la GVID-Diferencial. Además, se ha valorado el grado de adecuación del uso del indicador por parte del FPM para su valoración, donde se obtiene información respecto al uso competente de los indicadores de la idoneidad didáctica, información valiosa para estudiar el grado de avance en el desarrollo de la competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica en los FPM.

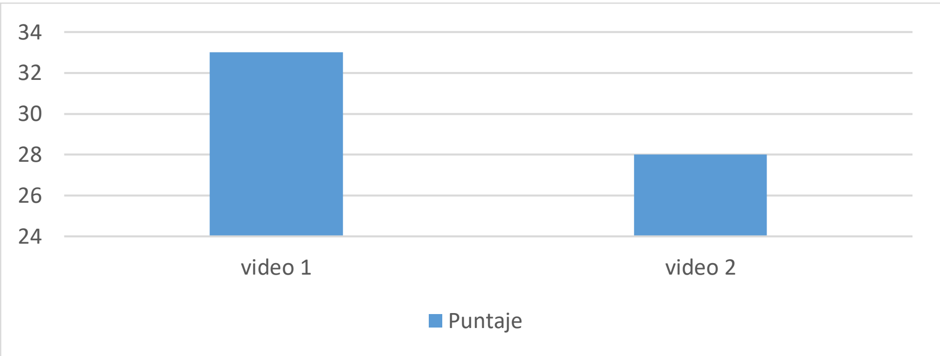
8.5.4 Análisis de la implementación de la Fase 4

8.5.4.1 Análisis de las respuestas de la Tarea 10

En las respuestas de los FPM sobre el video educativo que recomendarían a sus estudiantes, la mayoría selecciona el video 1, aunque hay tres FPM que expresan que recomendarían ambos videos. Asimismo, el puntaje que ha asignado cada uno de los FPM para valorar la idoneidad didáctica de los videos, se observa que el video 1 ha obtenido un mayor puntaje, como se puede apreciar en la Figura 8.97.

Figura 8.97

Resultados de los puntajes de la valoración de la idoneidad didáctica de los videos

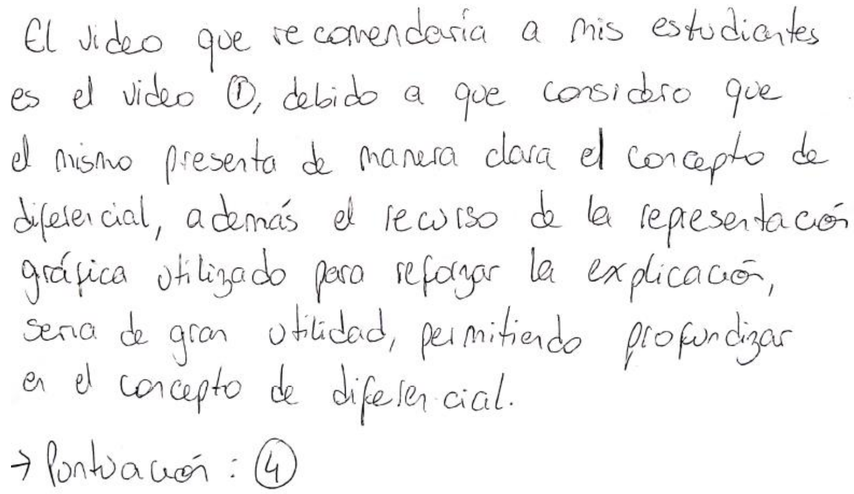


A continuación, identificamos las facetas del conocimiento didáctico-matemático que mencionan los FPM en sus justificaciones para seleccionar y valorar los videos educativos.

Por ejemplo, en el comentario de E8, se observa que selecciona los videos considerando conocimientos didáctico-matemáticos vinculados a la faceta epistémica, en particular hace foco en las conexiones de la diferencial con la derivada y la integral, ya que menciona: “recomendaría ambos videos a mis estudiantes considerando que el primero hace referencia a la relación entre diferencial y derivada y el segundo a la relación entre diferencial e integral” (E8). Asimismo, E5 expresa “yo recomendaría a mis estudiantes el video n° 1, porque plantea una breve reseña, explica por qué se utiliza dicha notación, presenta una mayor cantidad de relaciones de la diferencial con otros contenidos, como ser: derivada, cantidad infinitesimal, recta tangente”, donde se aprecia que tiene en cuenta el subcomponente lenguaje. Además, E6 recomienda los dos videos destacando el uso del lenguaje gráfico, y E2 logra destacar la importancia de atender al lenguaje gráfico para potenciar las explicaciones, como se puede observar en la Figura 8.98.

Figura 8.98

Respuesta de E2 de la Tarea 10

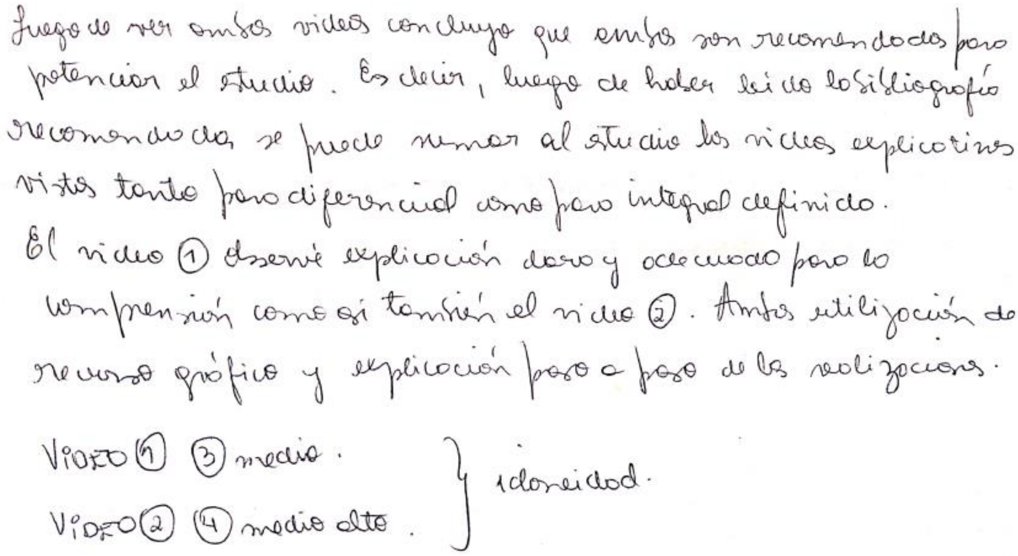

El video que recomendaría a mis estudiantes es el video 1, debido a que considero que el mismo presenta de manera clara el concepto de diferencial, además el recurso de la representación gráfica utilizado para reforzar la explicación, sería de gran utilidad, permitiendo profundizar en el concepto de diferencial.

→ Puntuación: 4

También, destacan los FPM que han seleccionado el video educativo 1 la faceta cognitiva e interaccional, al mencionar aspecto vinculados con la organización y presentación de las configuraciones didácticas (componente interacciones entre docente y estudiantes) y el aprendizaje de los estudiantes, por ejemplo, E4 plantea “es más claro a la hora de entenderlos y realiza una explicación más accesible, es decir que se comprende mejor”, y como se puede apreciar en el comentario de E6 en la Figura 8.99.

Figura 8.99

Respuesta de E6 de la Tarea 10


Luego de ver ambos videos concluyo que ambos son recomendados para potenciar el estudio. Es decir, luego de haber leído la bibliografía recomendada, se puede sumar al estudio los videos explicativos vistos tanto para diferencial como para integral definido.

El video (1) observé explicación claro y adecuado para la comprensión como así también el video (2). Ambos utilización de recurso gráfico y explicación paso a paso de las realizaciones.

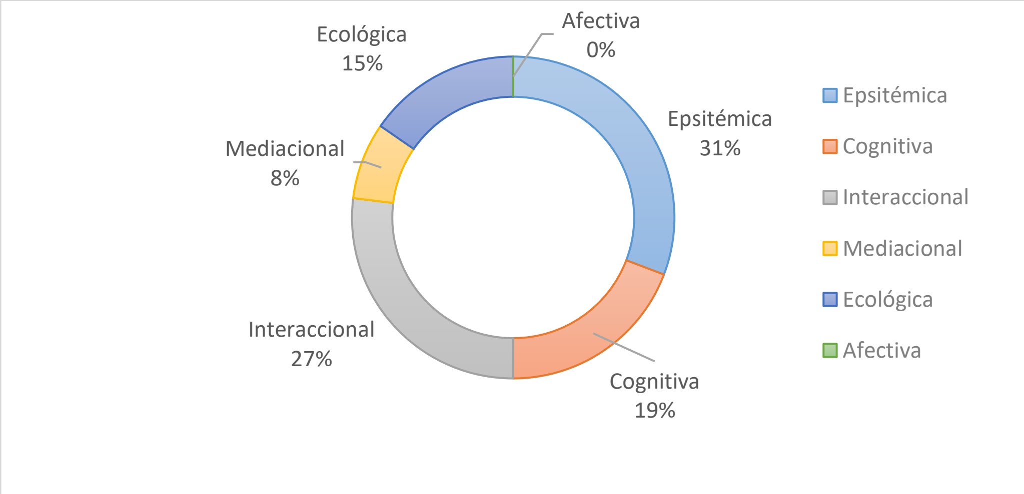
VIDEO (1) (3) medio.
VIDEO (2) (4) medio alto.
idoneidad.

Además, se aprecian aspectos de la faceta mediacional y ecológica en el comentario de E3 donde plantea que "el video 2 me parece más un recurso para la aplicación del diferencial a un área que para la explicación del concepto desde cero" (E3). Pero avanza en su justificación indicando que el análisis y valoración realizado en la Tarea 9 con la GVID-Diferencial le permite decidir y justificar, al expresar que "Como se puede apreciar en la GVID-Diferencial, esta rúbrica sirve como argumento de lo expuesto anteriormente" (E3).

A modo de síntesis, se presenta a continuación un gráfico en la Figura 8.100 que intenta reflejar las facetas de la idoneidad didáctica que utilizan los FPM para argumentar la selección del video educativo 1.

Figura 8.100

Porcentajes de las facetas de la idoneidad didáctica utilizadas para la elección del video 1

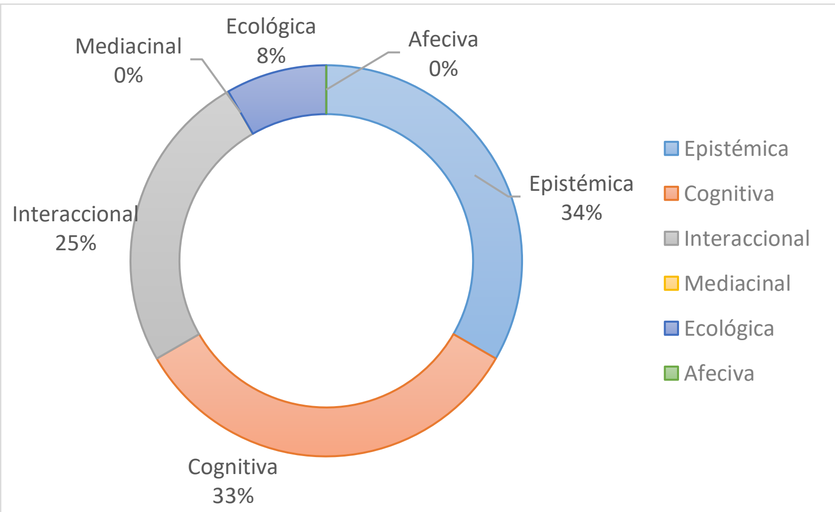


En relación con la elección del video educativo 2, E9 recupera criterios vinculados con la faceta epistémica, cognitiva e interaccional al mencionar que elige el video 2 "porque comienza explicando lo que se trabajará; usa una organización más clara y precisa (gráfico). Al retomar un contenido previo, explica cómo lo hace o donde lo usa" (E9). Asimismo, E7 expresa "El video 2 brinda los pasos para poder resolver este tipo de situaciones-problemas", destacando una componente de la faceta epistémica.

A modo de síntesis, se presenta a continuación un gráfico en la Figura 8.101 que intenta reflejar las facetas de la idoneidad didáctica que utilizan los FPM para argumentar la selección del video educativo 2.

Figura 8.101

Porcentajes de las facetas de la idoneidad didáctica utilizadas para la elección del video 2



Por otro lado, destacamos la valoración que realiza E11 al comparar las apreciaciones que realizó en el video 1 con el video 2, ya que recupera indicadores que se asocian a faceta afectiva al escribir “En el video (2), la persona que lo graba presenta una actitud correcta, por ahí no se expresa con palabras motivadoras para seguir viendo, como sí ocurrió en el video anterior” (E11), pero que en cierto punto, la presencia o no de estas características potencia las interacciones entre los estudiantes.

8.5.4.2 Análisis de las respuestas de la Tarea 11

En esta sección, se presentará una síntesis de las valoraciones de los 14 FPM que han realizado de los dos ciclos de formación el cual se ha desarrollado en 7 sesiones de clases de aproximadamente 2,5 horas cada uno. Para la valoración, los FPM emplearan la GVID-Diferencial para describir, explicar, valorar y proponer potenciales mejora de las sesiones donde se abordaron cuestiones vinculadas con los significados parciales de la diferencial, los conocimientos didáctico-matemáticos implicados en los procesos de estudio de este concepto y la competencia de análisis ontosemiótico de prácticas, objetos y procesos, y la competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica.

A modo de organización, se hará referencia a cada una de las facetas de la idoneidad didáctica que han valorado los FPM y se presentarán algunas respuestas representativas.

8.5.4.2.1 Faceta Epistémica

Situaciones-problemas: La mayoría de los FPM mencionan que se ha presentado una “muestra representativa situaciones-problemas, relacionando diferentes significados parciales, modelización y representación de variaciones” (E2), además, E3 agrega que las situaciones-problemas permitieron abordar “relaciones con otros contenidos” (E3). También, mencionan los distintos de situaciones y sus relaciones con los procesos, por ejemplo, E13 expresa “situaciones de contextualización, ejercitación”, “modelización, cambios, etc, de diversos fenómenos” (E6), “se generaliza, conceptualiza, aplica” (E7).

Por último, destacamos los comentarios de E10 que expresa “distintas clases y tareas” y “cada clase la situación problema era distinta porque necesitábamos hacer cosas distintas para llegar a algo” (E12), donde se aprecia la valoración de aspectos vinculados con la interrelación entre las faceta epistémica-interaccional.

Lenguajes: en las valoraciones de los FPM se observa que todos plantean que se “se emplean diferentes registros y representaciones para describir el diferencial” (E2), donde mencionan los tipos de lenguajes como: coloquial o natural, funcional, tabular, gráfico, geométrico, algebraico y funcional. Por otro lado, la mayoría menciona que el "Uso del lenguaje es adecuado a los estudiantes" (E14).

También destacamos la valoración de E4 "se emplean términos idóneos para describir el diferencial y vincularlo con otros contenidos", donde los FPM logran indicar la principal función de comunicar, expresar, representar que cumplieron los elementos del lenguaje para potenciar los aprendizajes. Por último, se recupera el comentario de E6 porque logra plantear que el uso de los diferentes registros y representaciones a lo largo de las 7 sesiones, permitieron establecer interconexiones entre las clases, como se puede observar en la Figura 8.102.

Figura 8.102

Parte de la resolución de E6 de la Tarea 11

Lenguajes	Se evidenció la implementación de diferentes registros y representaciones que permitieron la interconexión entre las clases. Además, se presentó un lenguaje adecuado al nivel de los est.

Conceptos-definiciones: en general los FPM mencionan que durante las clases se ha realizado una presentación clara y adecuada al nivel de los estudiantes de los conceptos como se parecía en los comentarios de E1 y E2 "diferencial, integral, derivadas, límites, diferencial masa, área, cálculo de la longitud de arco de una curva, idoneidad didáctica" (E1), "se realiza una presentación clara de los conceptos fundamentales del diferencial adaptados al nivel. se presentan definiciones del dx, dy, incrementos, etc." (E2). En el comentario de E1 se destaca el concepto de idoneidad didáctica que menciona el FPM, ya que avanza en la identificación de los nuevos conceptos trabajados en el desarrollo de las competencias profesionales del profesor de matemáticas.

Asimismo, E10 escribe "se abordan muchos conceptos: diferencial, significados, análisis didáctico, entre otros", donde se observa que ambos estudiantes destacan en su valoración conceptos que se fueron abordando a lo largo de trayectoria didáctica como significados y análisis didáctico.

Además, se destacan las valoraciones de los FPM que hacen foco en la necesidad de las situaciones-problemas para construir y/o negociar definiciones e interpretaciones de la diferencial para resolver los problemas, como lo expresa: "Se propuso situación donde tuvimos que generar argumentos para la utilización del diferencial" (E4), "aparición de situaciones-problemas donde había que establecer las definiciones de diferencial, como aplicarlo para resolver una situación problema" (E5).

Por último, se destaca la valoración de E14 porque escribe "los conceptos fundamentales del diferencial fueron presentados de forma clara, ya que se los construyo a lo largo de las clases", donde se puede observar que implícitamente hace referencia a la trayectoria didáctica, resaltando la importancia de considerar que la enseñanza de un concepto es un proceso que se desarrolla a lo largo de un trayecto que implica el estudio de una muestra representativa de situaciones-problemas e involucra a diversos conceptos, de esta manera es posible pensar en un proceso de enseñanza y aprendizaje que intente abordar varios significados de la diferencial. De esta manera, es posible afirmar que en la valoración del FPM se encuentran aspectos vinculados a las interrelaciones entre las faceta epistémica-interaccional.

En relación con las *proposiciones*, la mayoría de los FPM plantean que éstas fueron abordadas y presentadas de manera clara y adecuadas al nivel. A modo de ejemplo, recuperamos la valoración de E5 que plantea "las tareas proponían situaciones donde había que generar proposiciones sobre el diferencial, según el problema que estaba planteado", donde vincula las diferentes situaciones-problemas con la producción de conjeturas y afirmaciones con relación a la diferencial.

Sobre los *procedimientos*, los FPM mencionan que se han presentado y discutido todos los procedimientos propuestos por los estudiantes, como lo expresa E7 al escribir que "se trabaja sobre los procedimientos propuestos por los estudiantes, analizando, adaptándolos al nivel, y estableciendo relaciones", donde se destaca la función que cumple este objeto matemático en el aprendizaje de los significados parciales de la diferencial. En esta dirección, E2 y E5 mencionan que se han abordado los significados de la Diferencial de Leibniz y la Diferencial de Cauchy en las tareas.

Respecto a los *argumentos*, la mayoría de los FPM plantea que "las proposiciones y procedimientos que surgieron fueron explicados en forma clara y concisa. En todas las situaciones los estudiantes debían argumentar" (E14). Además, se menciona que "siempre se justificaron los argumentos de forma adecuada, se usaron representaciones geométricas para apoyar, siempre dando lugar al alumno para argumentar" (E4). Asimismo, destacamos la valoración de E3 que expresa "se utilizaron representaciones geométricas, algebraicas, etc., que sirvieron de apoyo para realizar los argumentos", donde destaca la función que cumplieron las representaciones sobre los argumentos. De esta manera, es posible advertir que los FPM logran utilizar los indicadores para valorar las sesiones de clases que han experimentado de manera adecuada.

En general, sobre las *relaciones*, los FPM mencionan que en las sesiones de clases se han establecido conexiones con varios conceptos, como ya se ha mencionado en secciones anteriores, pero es necesario destacar que identificar cierto grado de articulación entre los significados parciales de la diferencial, aspecto que ya se ha mencionado en el análisis de las respuestas de las otras componentes que forman la faceta epistémica. Además, advierten la trayectoria didáctica que interviene de a poco en cada clase mediante comentario como los de E14, cuando expresa: "en todas las clases se estableció relaciones entre la diferencial con otros conceptos".

En relación con los *procesos*, la mayoría de los FPM destacan varios procesos matemáticos vinculados a la modelización, comunicación, argumentación, generalización y la conceptualización. Además, plantean que en las configuraciones didácticas "se promovieron situaciones que posibiliten al estudiante reflexionar en torno a los procesos realizados" (E7). También, destacamos la valoración de E6 donde logra describir con mayor precisión los procesos matemáticos involucrados en los ciclos formativos propuestos, al expresar que "Se evidenció que, en las diferentes clases, el estudiante tuvo la oportunidad de modelizar situaciones que involucra el diferencial. Además, de describir, explicar, comunicar conjeturas sobre el diferencial" (E6).

Por último, recuperamos la valoración de E4 que hace foco en los procesos de comunicación y argumentación experimentado durante las sesiones, ya que plantea "Se promovieron situaciones donde los estudiantes tuvimos que describir, armar, desarmar, explicar y analizar conjeturas de nuestros compañeros, entre otras" (E4).

Sobre los conflictos epistémicos, algunos FPM mencionan que "surgieron varios conflictos de acuerdo con la interpretación o significado de cada estudiante" (E10), donde se destaca que en las diferentes sesiones de clases se han propiciado espacios para que los FPM hayan podido compartir sus interpretaciones en relación con la diferencial y poder discutirlos con el grupo clase. Asimismo, otros FPM mencionan los conflictos en torno a las interpretaciones de los símbolos matemáticos vinculados a la diferencial.

8.5.4.2.2 Faceta Cognitiva

En relación con los aprendizajes (*significados personales*) los FPM comentan que han logrado varios aprendizajes y que se manifiestan en las relaciones, prácticas y procesos que pusieron en acción para resolver las diferentes situaciones-problemas. Asimismo, los FPM destacan que han logrado aprendizajes no solo vinculados a los significados de la diferencial, sino que han avanzado en el desarrollo de competencias profesionales del profesor de matemáticas vinculadas al análisis ontosemiótico y valoración de la idoneidad didáctica, como se puede apreciar en el comentario de E4 en la Figura 8.103.

Figura 8.103

Parte de la resolución de E4 de la Tarea 11

Significados personales (Aprendizajes)	Los significados personales adquiridos son unicos no pensé antes que podría aprender este tipo de análisis tan minucioso, por ejemplo: en libro de texto, en videos, en las clases etc.

Además, se destaca la valoración de E3 ya que menciona que los aprendizajes logrados tendrán implicancias por fuera de los dos ciclos de formación, ya que expresa que podrá implementar los análisis realizados para los trabajos de la cátedra de Seminario de Didáctica de la Matemática, como se puede apreciar en la Figura 8.104.

Figura 8.104

Parte de la resolución de E3 de la Tarea 11

Significados personales (Aprendizajes)	Los significados institucionales pretendidos se relacionaron mucho a los significados personales en la medida que mucho de lo trabajado en cada clase fue de gran ayuda para comprender todo el análisis didáctico y los distintos significados de un objeto (En particular nos ayudo mucho para realizar los trabajos en la catedra del seminario)

Por otro lado, los FPM destacan que “Se posibilito que el estudiante modelice, generalice, proponga, reestructure, contribuyendo al proceso de metacognición” (E7), donde se hace referencia a los *procesos* implicados en los ciclos de formación.

Una componente que resalta en la valoración de la mayoría de los FPM es las *diferencias individuales*, ya que plantean que “constantemente se promueve el logro y apoyo” (E11), además, se “contempla el hecho de no recordar, a partir de esto se volvía a repasar o socializar” (E10). También, destacan la consideración del tiempo de aprendizaje de cada estudiante y las actividades planteadas para reforzar, ampliar y nuevos ejemplos.

En general, la mayoría de los FPM realiza un comentario sobre los *conflictos cognitivos*; algunos destacan el uso y gestión del error en la clases, por ejemplo, “se tomaron nuestros errores como parte del aprendizaje y a partir de ellos replantear situaciones con sus respectivas intervenciones" (E11), "se presentaron varios a lo largo de las clases por el hecho de el enfrentamiento entre los distintos significados del diferencial" (E10), "se valora el error y confusión al relacionar los diferentes significados" (E13), donde se presentan conflictos cognitivos asociados a las interpretaciones de la diferencial.

También, E5 recupera un conflicto epistémico y cognitivo que se genera en la resolución de la situación problema del cálculo de la masa total de la Tarea 1 por el hecho de superponer áreas, conflicto que se ha analizado en el capítulo anterior, al mencionar que para E5 fue un conflicto "no poder calcular la masa total de una lámina porque se repetían las áreas". En esta dirección, E3 expresa que "en todas las ocasiones se abordaron cuáles serán los posibles conflictos que podrían surgir en el estudio de la diferencial", donde se refleja el abordaje realizado con los FPM sobre los potenciales conflictos que pueden emerger en los procesos de estudio de la diferencial de una función.

Además, se destaca el comentario de E12 al mencionar que "personalmente tuve dificultades con el concepto porque había entendido gráficamente y me costó mucho poder relacionar con los distintos significados", porque resalta un potencial conflicto epistémico cognitivo que tiene ver con los el juego de lenguaje entre el proceso de conceptualización y representación, ya que no es lo mismo establecer la diferencial a partir de su representación algebraica que gráfica o geométrica, porque en cada tipo de lenguaje interviene un sistema de prácticas y objetos matemáticos diferentes, como se puede apreciar en el análisis ontosemiótico de la solución geométrica y algebraica del Capítulo 4.

8.5.4.2.3 Faceta Afectiva

En las valoraciones de los FPM sobre las *emociones*, destacan que "siempre nos sentimos cómodos, tranquilos, con estimulación de los alfajores de maicena" (E4), donde se puede apreciar algunas emociones de los FPM. Además, mencionan que "se permitían las diferentes opiniones de los alumnos sin cancelar o juzgar ninguna" (E1) y "se potencia la autoestima contemplando la visión de todos" (E10), donde identifican algunos aspectos que potenciaron la motivación e interés de los FPM.

En relación con las *actitudes* y *valores*, los FPM destacan el respecto por la opinión de los compañeros y la escucha de diferentes opiniones y caminos de resolución. También, expresan la "flexibilidad en los distintos puntos de vista" (E10) y la "la actitud flexible ante la idea de que ninguna respuesta estaba del todo mal. Siempre se rescata algo" (E11). Por último, recuperamos el comentario de E12 ya que refleja la importancia de generar un clima de confianza, propiciar el pensamiento crítico y reflexivo, y potenciar el proceso de comunicación y argumentación:

> en las clases el profesor aceptaba toda clase de preguntas u opiniones sin importar cual alejado de lo esperado estuviera y nunca hacía de menos algo, para él todo era importante, incentivando a que se puede hablar con más confianza. Además, que motivaba la resolver y cuestionar las cosas y no daba nada por sabido. (E12)

Por otro lado, se recupera el comentario de E4 que expresa "En lo particular el trabajo como investigador en la carrera es muy interesante y significativo. Creía que no iba a poder con el trabajo y todo lo contrario" (E4), el cual refleja el proceso de metacognición del FPM en relación con su sistema de creencias sobre su propio proceso de aprendizaje.

8.5.4.2.4 Faceta Interaccional

En relación con las *interacciones docente y estudiantes*, la mayoría de los FPM plantean que "las configuraciones planificadas estaban organizadas de forma clara y adecuada" (E6) y que las "las actividades propiciaban a establecer relaciones con otros contenidos ya trabajados" (E5). Además, destacan que las intervenciones y preguntas del profesor propiciaban espacios para establecer relaciones entre la diferencial con otros conceptos.

Sobre las interacciones entre estudiantes, casi todos los FPM destacan que en las configuraciones didácticas planificadas se gestaron "se puede apreciar que el estudiante tuvo una participación activa a través del diálogo, la comunicación y el debate grupal" (E6), donde destacan la gestión de las interacciones por parte del profesor y la participación activad de los estudiantes. Estos aspectos también se pueden reconocer en la valoración de E12 al expresar que "en todas las clases el docente incentivaba a que se genere un debate entre alumnos" (E12) y "se planifica para que se plantean debates o diálogos grupales" (E11).

Por otro lado, la mayoría de los FPM destacan como indicadores de la consideración de la evaluación formativa durante el desarrollo de las sesiones de clases al reconocer que se generaron "diálogos colaborativos, debates, dando lugar a interrogantes" (E11), y destacan la retroalimentación al escribir "Para llevar a cabo la resolución de las actividades surgían momentos de retroalimentación para considerar los conceptos que intervenían en las tareas" (E5). Asimismo, los FPM comienzan a reconocer las interacciones que les permitieron establecer relaciones, no solo vinculados al concepto diferencial, sino que también vinculados al desarrollo de las competencias profesionales del profesor de matemáticas, como se puede apreciar en el comentario de E3: “en todo el proceso formativo creo que se pudo evidenciar algunos progresos en cuanto a la comprensión de la diferencial, así como todo el análisis didáctico, el cual conlleva a identificar las prácticas, objetos y procesos implicados”.

8.5.4.2.5 Faceta Mediacional

En general, la mayoría de los FPM destaca la “buena utilización de los recursos disponibles que facilitaron el desarrollo de cada clase” (E3), y “Buen uso de los recursos (presentaciones claras, ejemplificaciones, uso adecuado de las tablas y fichas para organizar la tarea y optimizar el tiempo)” (E10).

En relación con las *condiciones del aula*, la mayoría de los FPM ha valorado como positivo la organización implementada, ya que mencionan: “Se hizo un excelente uso del espacio, ya que se distribuyó las mesas de tal forma que la dispersión por el aula favorezca el diálogo” (E7) y “Buena distribución de mesas (forma circular, enfrentados para el debate)” (E10).

Sobre la organización y distribución de los *tiempos de enseñanza y aprendizaje*, la mayoría de los FPM plantea que “los tiempos fueron adecuados y utilizados de manera eficiente” (E1), además, “la distribución del tiempo fue excelente ya que en cada momento que fue necesario nos detuvimos para reflexionar” (E7), donde se enfatiza el equilibrio que se buscó entre los momentos de enseñanza y aprendizaje, según las necesidades de los estudiantes y de las circunstancias contextuales.

8.5.4.2.6 Faceta Ecológica

En relación con la adaptación de las propuestas de los dos ciclos de formación con el *currículo*, la mayoría de los FPM menciona que “propuesta acorde al diseño curricular para un profesorado de matemática y para la cátedra” (E14) y que “Estuvo adaptado, ya que desde Seminario y EDI se trabaja el enfoque, y de cierta forma, nos aporta para otros trabajos” (E10).

También, destacan los FPM, con respecto a la *apertura hacia la innovación didáctica*, que “es tenido en cuenta diversas investigaciones y consultado mucha bibliografía extra” (E11) y “se utilizaron las nuevas tecnologías para facilitar la organización de las clases” (E14).

Por otro lado, afirman que “las propuestas contribuyen a la formación de un profesor de matemática en el análisis de actividades” (E14) en relación con *la adaptación socio-profesional* de las propuestas de los ciclos de formación. Asimismo, E8 expresa que parte de la propuesta también podría ser implementada en el contexto de la carrera de ingeniería.

En relación con la educación en valores, los FPM manifiestan que "se tuvo siempre en cuenta las emociones e intervenciones de los estudiantes sin mostrar situaciones de discriminación" (E13). También, agregan que "se evidencia que todas las clases se dio un papel activo a todos los estudiantes" (E6), y resaltan los valores "se promueve la tolerancia, respeto por las ideas de los pares, etc." (E2).

Po último, la mayoría de los FPM destacan las conexiones intra e interdisciplinarias, al mencionar las conexiones con los conceptos de integral, derivadas, cantidad, funciones, variable, y conexiones con la física con los conceptos de masa, velocidad y aceleración.

8.6 Análisis Retrospectivo del Diseño

En esta sección se analiza todo el proceso implementado en el primer segundo de formación y para ello se emplea la noción de la idoneidad didáctica de Godino (2013) en sus diversas facetas y componentes para reflexionar sobre lo sucedido y buscar potenciales mejoras para futuras implementaciones.

Además, como insumo, se considerará la encuesta de opinión que han realizado los estudiantes en cada una de las secciones de clases, a modo de valoración de estas. Asimismo, se tendrán en cuenta los resultados que se han presentado y analizado a lo largo de todo el Capítulo 8.

8.6.1 Idoneidad epistémica y ecológica

A lo largo del segundo ciclo formativo se han propuesto cinco tareas formativas orientadas hacia el desarrollo de la competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica en los FPM. En general, se plantearon varias situaciones que involucraba el uso de los criterios de idoneidad para realizar valoraciones, desde una lección de un libro de texto, un problema, dos videos educativos y las sesiones de clases. Las fases de implementación de este ciclo de formación proponen una variedad de tipos de tareas que propician un uso cada vez más completo y eficiente de los criterios de idoneidad.

Además, es posible destacar que el diseño propuesto muestra una apertura hacia la innovación basada en la investigación y a la práctica reflexiva, ya que no se limita solo a la valoración de situaciones-problemas, sino que también se valoran lecciones de libros de textos y videos educativos, experiencias formativas muy enriquecedora para la formación de profesores de matemática, como lo plantean Beltrán-Pellicer et al., (2021); Burgos et al., (2020); Castillo y Burgos (2022); Giacomone et al., (2022), entre otros.

8.6.2 Idoneidad interaccional y mediacional

Debido al nivel de producciones de los FPM, se considera que se ha propiciado interacciones entre estudiantes y entre los FPM con el profesor, de tal manera que se lograron resolver los conflictos epistémicos, cognitivos e instruccionales que fueron surgiendo. Además, se han utilizado diferentes recursos retóricos y argumentativos generando momentos de diálogo, comunicación y debate sobre las afirmaciones y producciones de los FPM.

En cierto punto, el profesor asumió el rol de orientar la discusión sin validar las conjeturas de los estudiantes, esto posibilitó que los FPM tuvieron que asumir la responsabilidad del proceso de estudio. Se planteo y sostuvo un tipo de trabajo cuyas formas de interacciones fueron del tipo dilógicas y colaborativas, lo que potencia la idoneidad interaccional del proceso.

Se considera que se ha utilizado de manera eficiente los recursos materiales y tecnológicos, como lo evidencias las valoraciones de los estudiantes. Además, se destaca la organización del aula, aspecto que propicio la escucha, el diálogo y la discusión entre los FPM.

Por último, las valoraciones de los FPM mencionan que la distribución del tiempo en momentos de enseñanza y aprendizaje ha sido adecuada, y producto de ello, son las valoraciones expertas que lograron algunos FPM en las diferentes tareas.

8.6.3 Idoneidad cognitiva y afectiva

Las prácticas personales de los FPM con relación al uso de los indicadores de idoneidad didáctica dan cuenta de una utilización competente de esta herramienta de reflexión global sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de la diferencial. Si bien, se generaron diferentes conflictos cognitivos, se consideran que estos han sido abordados y resueltos con el grupo clase.

Además, las circunstancias contextuales y las características de los participantes ha permitido alcanzar un alto grado de competencia en los FPM en la utilización de los indicadores de la GVID-Diferencial.

Asimismo, destacamos que el profesor ha logrado promover aspectos motivacionales en el desarrollo de las sesiones de clases, ya que no se produjo rechazo hacia las propuestas, y se generó un ambiente de confianza donde todos podían participar, respectando las ideas de todos y empleando el error como fuente de aprendizaje.

8.7 Síntesis y Conclusiones

En este capítulo se ha descripto, analizado, explicado y valorado un diseño aplicado en un curso del profesorado de matemáticas, para desarrollar la competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica en FPM. Los resultados y evidencias que se han mostrado permiten afirmar que se ha logrado iniciar y progresar en el uso competente de los indicadores de idoneidad didáctica para la reflexión sistemática de los procesos de estudio de la diferencial. Si bien, existen varios aspectos a mejorar, se considera que se ha logrado un progreso importante en el desarrollo de la competencia, teniendo en cuenta que uno de los factores que propició este avance es debido a las circunstancias contextuales y características particulares de los FPM, ya que disponen de conocimientos previos con relación al EOS por los trabajos que realizan el marco de la cátedra donde se implementa el ciclo formativo.

Los conocimientos didáctico-matemáticos sobre los procesos de estudio de la diferencial que se han sintetizados en la GVID-Diferencial, constituyen una potente herramienta para el diseño, implementación y valoración de ciclos formativos, como el que se ha descripto en este capítulo.

Un aspecto distintito del diseño del ciclo implementado es la variedad de situaciones-problemas formadas por lecciones de libros de textos, problemas, videos educativos y procesos de estudio, esta diversidad de propuestas enriquece la formación del FPM y logra una cierta apertura hacia la innovación didáctica con la utilización de recursos, como los videos educativos, cuestión que se ha proliferado sus usos e investigación en las clases de matemáticas. Por tales motivos, se considera oportuno plantear este tipo de actividades formativas en la formación de profesores de matemática, cuyos resultados constituyen el punto de partida para la mejora y la implementación de nuevas propuestas.

Capítulo 9: Síntesis, Conclusiones y Perspectivas de Investigación

9.1 Introducción

En esta tesis se ha abordado dos problemáticas, por un lado, la caracterización de los significados institucionales de la diferencial lo que permitió la construcción de un modelo ontosemiótico de los significados parciales. Dicho modelo se ha ampliado con la incorporación de los conocimientos didáctico-matemáticos de los procesos de estudio de la diferencial en las facetas epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica. Por otro lado, se ha diseñado, implementado y evaluado dos ciclos de formación con los FPM con el objetivo de iniciarlos en el desarrollo de la competencia de análisis e intervención didáctica. El primer estudio se focaliza en el diseño, implementación y valoración de experiencias formativas orientada al desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico, y el segundo estudio, se centra en el diseño, implementación y valoración de experiencias formativas orientada al desarrollo de la competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica. Ambos estudios están basados en la aplicación sistemática de herramientas teóricas del EOS.

A continuación, se presenta una síntesis de los principales resultados que se han obtenido durante el desarrollo de esta tesis. Estos resultados son producto de once preguntas de investigación y dos objetivos generales, con sus respectivos objetivos específicos, planteados en el Capítulo 1. Posteriormente, se incluye una síntesis de las implicaciones de este trabajo y su aporte al campo de la educación matemática y al campo específico de la formación de profesores de matemática. Además, se incluye también algunas cuestiones abiertas y futuras líneas de investigación. La tesis tiene su cierre con la mención de los aportes científicos derivados de este trabajo.

9.2 Conclusiones sobre las Preguntas de Investigación 1, 2, 3 y 4

1) *¿Cuáles son las configuraciones de objetos y procesos matemáticos implicados en las prácticas que constituyen los diversos significados del concepto de diferencial? (Configuraciones epistémicas)*

2) *¿Cuáles son los diversos significados del diferencial y qué elementos permiten distinguirlos?*

3) *¿Cómo se relacionan y articulan entre sí los diversos significados del diferencial?*

4) *¿Es posible definir un modelo, para categorizar los significados del diferencial según el grado de generalidad y formalización de los objetos intervinientes?*

Este grupo de preguntas se corresponde con el planteamiento del primer objetivo general y cuatro objetivos específicos. Se considera que se ha logrado responder a los interrogantes y objetivos mediante la descripción y caracterización de los significados parciales de la diferencial con la construcción del modelo ontosemiótico, información que se ha que se detalla en los Capítulos 3 y 4 de la tesis. A continuación, se discuten el logro de los objetivos.

9.2.1 Aportes derivados del objetivo general OG-1

OG-1: *Establecer un modelo ontosemiótico de referencia de los diversos significados del concepto de diferencial.*

Desde la perspectiva del EOS, una investigación de didáctica de la matemática focalizada en el estudio de un concepto, como la diferencial, tiene que partir de la reconstrucción de los significados parciales institucionales que sentarán las bases para reflexionar sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de la diferencial en diferentes contextos. En este sentido, la articulación de los diversos significados permite la construcción de un modelo ontosemiótico de los significados parciales de la diferencial, el cual constituye una potente herramienta teórica y metodológica ya que permite identificar los significados que intervienen y emergen de las propuestas de enseñanza, de las lecciones de los libros de textos, reconocer y prever potenciales conflictos epistémicos, y proponer potenciales mejoras.

Para comprender la pluralidad de los significados de la diferencial, en primer lugar, en el Capítulo 3 se ha estudiado su origen y evolución identificando las situaciones-problemas y los sistemas de prácticas de donde emerge este concepto. Luego, en el Capítulo 4, se avanza hacia la descripción de las configuraciones de prácticas, objetos y procesos matemáticos que caracterización a los significados parciales de la diferencial. De esta manera, se logran establecer conexiones entre los significados según el grado de generalidad y formalización de los objetos implicados para establecer el modelo ontosemiótico de los significados parciales de la diferencial.

9.3 Conclusiones sobre las Preguntas de Investigación 5

5) *¿Qué aspectos y criterios deberían tener en cuenta un profesor para optimizar los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto de diferencial?*

Esta pregunta de investigación se relaciona con parte del objetivo general 1 y 2, ya que para determinar los aspectos y criterios que debería tener en cuenta un profesor para optimizar los procesos de estudio de la diferencial, en primer lugar, es necesario considerar el modelo ontosemiótico de los significados parciales de la diferencial y ampliarlo incorporando los conocimientos didácticos matemáticos de las facetas epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica de la idoneidad didáctica. Para lograr este proceso, en el Capítulo 5, se ha utilizado la Teoría de la Idoneidad Didáctica (Godino, 2013; Godino, Batanero y Burgos, 2023) para particularizar los indicadores a los procesos de enseñanza y aprendizaje de la diferencial, obteniendo como resultado una la GVID-Diferencial que permite apoyar, reforzar y orientar la reflexión global de los procesos de estudio de la diferencial.

La GVID-Diferencial, constituye el primer paso del estudio preliminar que plantea la metodología de diseño, ya que constituye las bases para el diseño de propuestas formativas idóneas.

Luego, en el Capítulo 6, se avanza en el análisis de los conocimientos didáctico-matemáticos que intervienen y emergen en una lección de un libro de texto de cálculo, utilizando la GVID-Diferencial. Este estudio se justifica en la necesidad de valorar las posibilidades y limitaciones de los lecciones de los libros de textos, como así también los potenciales conflictos semióticos que pueden surgir, de tal manera que la información recolectada permita al profesor de matemáticas hacer un uso competente de esta herramienta para potenciar y orientar sus decisiones y acciones en relación al uso de los libros de textos, porque se considera que los libros son un recurso muy utilizado por los profesores para planificar y gestionar sus clases.

En esta valoración de la idoneidad didáctica de la lección del libro de texto, se ha logrado identificar diferentes cuestiones importantes que los profesores de matemática deberían tener en cuenta para organizar sus clases. Por ejemplo, resulta importante destacar la presencia de los conflictos epistémicos vinculados al lenguaje simbólico propio de la diferencial y sus conexiones con la derivada, y los conflictos en relación con la conceptualización, entre otros. Los resultados de esta valoración constituyen el punto de partida para proponer potenciales mejoras de cada una de las facetas de la idoneidad didáctica con el fin de mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la diferencial.

9.4 Conclusiones sobre las Preguntas de Investigación 6, 7, 8 y 9

6) *¿Qué situaciones-problemas permiten abordar y articular los significados parciales del concepto de diferencial en la formación inicial de profesores de matemática?*

7) *¿Cuáles son las configuraciones de objetos y procesos puestas en juego por los futuros profesores de matemática en la resolución de los problemas en torno a los significados parciales de la diferencial? (configuraciones cognitivas)*

8) *¿Qué tipo de acciones formativas sería necesario y posible implementar en un programa de formación para iniciar a los futuros profesores en el conocimiento y la competencia para el análisis ontosemiótico?*

9) *¿Qué tipo de acciones formativas sería necesario y posible implementar en un programa de formación para promover en los futuros profesores el conocimiento y uso competente de herramientas para la reflexión sistemática sobre un proceso de estudio del diferencial?*

Este grupo de preguntas se corresponde con el planteamiento del segundo objetivo general y dos objetivos específicos. Se considera que se ha logrado responder a los interrogantes y objetivos mediante el diseño, implementación y evaluación de dos ciclos de formación con los FPM enfocados a desarrollar determinadas competencias profesionales de los profesores de matemática, información que se presenta en el Capítulo 7 y 8. A continuación, se discuten el logro de los objetivos.

9.4.1 Aportes derivados del objetivo general OG-2

OG-2: *Analizar y promover el crecimiento profesional en los futuros profesores de matemáticas sobre conocimientos y competencias didáctico-matemáticas relativos al modelo ontosemiótico del concepto de diferencial.*

Se considera que este objetivo general y sus específicos, se han logrado ya que en el Capítulo 7 se presenta el diseño, implementación y valoración del primer ciclo de formación donde se aborda el desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico, y en el Capítulo 8 se presenta el diseño, implementación y valoración del segundo ciclo de formación donde se aborda el desarrollo de la competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica.

A continuación, se retoman los principales resultados del primer ciclo de formación (Capítulo 7).

El primer ciclo de formación está formado por cinco tareas formativas que conforman una trayectoria didáctica planifica para propiciar el desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico. La Tarea 1 implica la resolución de una situación problema donde emerge la diferencial para modelizar la situación y progresar en la solución. En la misma, intervienen varios conflictos epistémicos y cognitivos los cuales es necesario que los FPM emprendan procesos metacognitivos para nuevas nuestras estrategias y resolver los conflictos que van surgiendo para llegar a la solución. Esta primera acción formativa constituye la Fase 1 del ciclo que tiene la intención realizar una exploración inicial de los significados personales de los FPM de la diferencial.

En la Tarea 2, los FPM realizan el primer análisis epistémico (Fase 2) identificando los objetos y procesos matemáticos implicados en sus propias resoluciones de la situación problema de la Tarea 1. En la Tarea 3, realizan el primer análisis cognitivo (Fase 3) donde tienen que identificar y dividir la secuencia de prácticas matemáticas de una resolución, hecha por otro estudiante, además de reconocer la intencionalidad de cada práctica y los objetos matemáticos. Además, se puede apreciar como en el enunciado de la consigna se los invita a reflexionar sobre los potenciales conflictos epistémicos y cognitivos.

Luego en la Tarea 4, se plantea una nueva situación problema, pero se solicita al FPM que utilice la técnica de análisis ontosemiótico de práctica, objetos y procesos para resolver la tarea (Fase 4: puesta en práctica de la técnica de análisis ontosemiótico). En la Tarea 5, se cambia el instrumento y se propone que a los FPM que analicen un fragmento de una lección de un libro de texto sobre la diferencial, de tal manera que puedan utilizar el modelo ontosemiótico de los significados parciales de la diferencial, los cuales se ha abordado en las sesiones anteriores, para el análisis epistémico y cognitivo de la propuesta.

La valoración de las producciones de los FPM en relación con cada una de las tareas desarrolladas en el primer ciclo muestra un gran progreso en el desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico, esto se respalda con todas las evidencias que se presentan y se analizan en detalle en la implementación de cada una de las tareas, con lo cual, es posible afirmar que se ha logrado superar el objetivo propuesto.

El segundo ciclo de formación, compuesto por cuatro fases, se diseñaron seis tareas formativas que propician el desarrollo de la competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica. La Tarea 6 (Fase 1) es la primera aproximación a las facetas, componentes e indicadores de idoneidad didáctica, que como puede apreciarse en los resultados, y en particular en la Figura 8.19, los FPM recuperan muchos conocimientos previos en relación con la idoneidad didáctica, cuestión no menor por las características del grupo.

En la Tarea 7, se vuelvo sobre la situación problema de la Tarea 1 pero con nuevos lentes propuestos por los criterios de idoneidad didáctica utilizando las facetas y componentes. Esta tarea se complementa con la Tarea 8 donde se aborda el estudio detallado de los criterios de idoneidad didáctica del teto de Godino (2013). Estas actividades constituyen la Fase 2 del ciclo que tiene la intención de iniciarlos en el uso de los criterios para analizar y valorar la idoneidad de una situación problema que ellos mismos experimentaron.

La Tarea 9, supone un nuevo reto para los FPM ya que implica la valoración de dos videos educativos sobre la diferencial, pero tuvieron que utilizar la GVID-Diferencial, la cual fue presentada y discutida con detalle antes de la implementación de esta tarea. Esta acción formativa corresponde a la Fase 3 donde se propone el uso de la GVID-Diferencial para analizar y valorar videos educativos.

Posteriormente, en la siguiente sesión, se propone la Tarea 10 donde tienen que seleccionar y valorar qué video recomendaría a sus futuros estudiantes, y la Tarea 11 que implica un proceso de metacognición y valoración de todo el proceso de formación utilizando la GVID-Diferencial. Ambas tareas conformar la Fase 4 de evaluación.

La evidencia recopilada de cada una de las experiencias formativas permite afirmar que se ha logrado un alto grado de desarrollo de la competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica, el uso que realizan los FPM de los indicadores de la GVID-Diferencial para describir, explicar y valorar las propuestas es muy satisfactorio.

Además, resulta importante destacar que se ha logrado identificar en el primer ciclo de formación criterios vinculados al desarrollo de la competencia de análisis epistémico y análisis cognitivo, si bien estos no son nuevos, pero para nuestra investigación se han adaptado y han sido de mucha utilidad para analizar el desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico.

También se ha elaborado unos criterios que debería tener en cuenta el profesor para desarrollar la competencia de gestión de las interacciones, esta producción constituye un gran aporte para futuras investigaciones.

Por otro lado, se ha logrado identificar algunos criterios vinculados al uso que hacen los FPM de los indicadores de la GVID-Diferencial, en el sentido de no solo reflexionar sobre si el FPM considera o no los criterios en su valoración, sino que avanzamos hacia el estudio de cómo utiliza los indicadores para valorar, por ejemplo, se observa que varios FPM logran realizar una valoración bastante experta cuando logran reconocer la función (función semiótica) que cumplen los objetos matemáticos en el desarrollo de la propuesta. Es decir, no es lo mismo que un FPM mencione que en la lección del video se utiliza el lenguaje simbólico y gráfico porque menciona a los objetos matemáticos, que otro FPM donde plantea que en la lección del video se utiliza el lenguaje natural para explicar las expresiones simbólicas, que se utiliza la representación gráfica para mostrar los diferenciales en una determinada parte del gráfico. En esta última valoración, se aprecia que el objeto matemático es identificado y valorado por la función que cumple en la lección.

Otro gran aporte o resultado tiene q ver con el análisis de los conflictos y como usarlos para potenciar la gestión de las interacciones en las clases. Un descubrimiento fue el surgimiento del conflicto del elemento genérico y la representación ostensiva e intensiva del radio en la representación geométrica de la situación problema de la Tarea 1.

9.5 Conclusiones sobre las Preguntas de Investigación 10 y 11

10) *¿Cuál es el grado de idoneidad didáctica del proceso formativo implementado en la formación inicial de profesores de matemática sobre el significado global del concepto de diferencial?*

11) *¿Qué cambios se deberían introducir en el diseño e implementación del proceso formativo para incrementar su idoneidad didáctica en una próxima implementación en la formación inicial de profesores de matemática?*

En relación con la pregunta de investigación 10, en el análisis de los resultados de ambos ciclos de formación se ha respondido en parte, ya que se considera que a lo largo de todo el proceso formativo se han abordado los significados parciales de la diferencial de Leibniz y Cauchy. Los otros, se han mencionado, pero no formaron parte de este proceso. Un condicionante importante de esta restricción es el tiempo disponible ya que los ciclos de formación se desarrollaron en clases reales de los FPM.

No obstante, por las evidencias de las producciones de los estudiantes (prácticas personales) es posible afirmar que se ha logrado un alto grado en la idoneidad epistémica, por el análisis epistémico que realizaron los FPM; el grado de idoneidad cognitiva es media alta, por los análisis cognitivos que han producido y por las cuestiones que son necesarias revisar; una alta idoneidad interaccional, porque principalmente se ha logrado propiciar momentos de dialogo, discusión, comunicación y debate entre los estudiantes generando interacciones del tipo dilógicas y colaborativas; una idoneidad mediacional media alta, ya que es posible mejorar la utilización de los recursos empleados y la distribución del tiempo; una idoneidad afectiva alta, ya que el profesor se ha preocupado constantemente en potenciar la confianza y autoestima de los FPM de tal manera que sea agradable para el FPM participar de las sesiones de clases; y una idoneidad ecológica media alta ya que es posible mejorar algunos aspectos.

Existen varios cambios que se pueden tener en cuenta para futuras implementaciones, por ejemplo, la posibilidad de incorporar nuevas situaciones-problemas donde intervenga el significado parcial de la diferencial de Fréchet. Además, ampliar la cantidad experiencias formativas donde interviene la diferencial. Otra posible ampliación tiene relación con la incorporación de nuevos libros de textos, de tal manera que el FPM tenga que tomar decisiones pedagógicas sobre el uso de estas para planificar una clase utilizando los textos.

Por otro lado, se podría proponer más tiempo para visualizar los videos, o repetir su reproducción de tal manera que puedan fortalecer sus registros. Entre otras potenciales modificaciones que se pueden considerar teniendo en cuenta las principales dificultades de los FPM en la implementación.

9.6 Reflexiones Finales

A modo de reflexión final podemos decir que hemos logrado satisfactoriamente los objetivos planteados y contribuir así, al campo de la formación inicial de profesores de matemática.

El modelo ontosemiótico de los significados de la diferencial junto con la Guía de Valoración de la Idoneidad Didáctica de procesos de estudio de la Diferencial (GVID-Diferencial) han sido han sido operativos y han demostrado ser eficientes para el diseño, implementación y valoración de procesos instruccionales orientado al desarrollo de competencias profesionales de los profesores de matemática vinculados a los procesos instruccionales de la diferencial. Además, han demostrado ser una herramienta potente para describir, explicar y valorar adecuadamente las prácticas educativas de los FPM.

Se han implementado dos ciclos de formación con 7 sesiones de clases de 2,5 horas, acompañadas de una serie de experiencias formativas con momentos de trabajo individual y grupal, presencial y no presencial, discusiones grupales e institucionalizaciones por parte del profesor. El proceso de diseño de la trayectoria didáctica fue sistemático, creativo, dinámico, utilizando un conjunto de diferentes actividades y recursos que han dado lugar a las innovaciones dirigidas a los desafíos que enfrentan los FPM y para los propios profesores, formador de formadores e investigadores.

Un aspecto importante para destacar es que, en las experiencias formativas, además de abordar los conocimientos didáctico-matemáticos con relación a la diferencial, también se plantea el uso, compresión y dominio de las herramientas teóricas y metodológicas del EOS, como el análisis ontosemiótico epistémica y cognitivo, y la idoneidad didáctica, mediante acciones formativas que propician el uso competente por parte de los FPM de estas herramientas. A partir de los resultados de esta investigación, es posible afirmar que se ha logrado que los FPM hagan un uso competente de estas herramientas teóricas para el análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje en torno a la diferencial. Si bien, existen varios aspectos para seguir trabajando y afinando su uso, logrado grandes avances.

9.7 Futuras Líneas de Investigación

En este capítulo se presentaron las principales contribuciones realizadas al estudio y desarrollo de los conocimientos y competencias didáctico-matemáticos de los procesos de estudio de la diferencial, desde una perspectiva ontosemiótica. Aún quedan muchas cuestiones a investigar en relación con los procesos de enseñanza y aprendizaje de la diferencial, y al desarrollo de competencias profesionales de los FPM con relación al estudio de la diferencial.

A continuación, se presentan algunos primeros aspectos que permitirían contribuir a avanzar en el problema de investigación que se ha planteado en esta tesis.

9.7.1 Extensión del modelo ontosemiótico de los significados parciales de la diferencial

En esta tesis se ha desarrollado el modelo ontosemiótico de los significados parciales de la diferencial, el cual contempla cuatro significados parciales. Este modelo es posible extenderlo hacia el estudio de las formas diferenciales en la geometría diferencial, como plantean varios autores. No obstante, se surge la necesidad de diseñar una diversidad de situaciones-problemas con conexiones intra matemáticas e interdisciplinares de tal manera que la diferencial intervenga de manera clave, y permita ampliar las conexiones de este concepto con los significados otros del cálculo.

Una puerta que se abrió en el proceso durante el primer ciclo de formación giró en torno al estudio de los conflictos epistémicos y cognitivos que genera la diferencial y sus relaciones con los procesos matemáticos, como el elemento genérico y las facetas duales de los objetos, aspectos que dan cuenta de la complejidad ontológica y semiótica que involucra el estudio de la diferencial.

9.7.2 Diseño e implementación de nuevas experiencias formativos en torno a los procesos de estudio de la diferencial

En relación con los procesos de instrucción sobre la diferencial, se considera oportuno diseñar, implementar y valorar ciclos de formación con estudiantes de diferentes carreras, como así también, implementar nuevas experiencias formativas con los FPM.

Por otro lado, experiencias recientes del grupo de investigación que enmarca esta tesis doctoral ha comenzado con pequeñas experiencias a plantear situaciones-problemas similares a las trabajadas en los ciclos de formación en la formación de ingenieros, donde ha surgido la necesidad de realizar estudios más profundo en relación a cómo los estudiantes lograr superar los conflictos semióticos que implica el estudio de la diferencial, más aún cuando entra en juego elementos genéricos y las facetas duales del objeto.

Una línea de investigación que cada año crece en experiencias formativas desarrolladas en muchos países tiene que ver con los significados parciales de la integral, en particular como cambio total, acumulación y suma de infinitas piezas, donde interviene de manera directa la diferencial, con lo cual es necesario plantear nuevos estudios para focalizar la atención en las prácticas, objetos, procesos, conexiones y potenciales conflictos que intervienen en esas situaciones-problemas, aspectos estudiados desde diferentes enfoques teóricos en los estudios de Bueno et al., (2022), Jones y Ely (2023), Nilsen y Knutsen (2023), Oehrtman y Simmons (2023), Stevens y Jones (2023), entre otros, donde se sigue preguntando sobre el rol de la diferencial en el contexto del problema (López-Gay et al., 2015; Verón, Giacomone y Pino-Fan, 2023).

9.7.3 Desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico en tareas vinculadas a la diferencial

La relación entre los aprendizajes alcanzados por los FPM y los conocimientos didáctico-matemáticos de los procesos de estudio de la diferencial, nos permite reflexionar sobre la necesidad de promover nuevas experiencias formativas que propicien el desarrollo de conocimientos matemáticos y competencias profesionales en la formación de profesores de matemática, como así también los conocimientos que deberían tener los FPM para diseñar, implementar y evaluar propuestas didácticas potentes, desde el punto de vista epistémico y cognitivo.

En consecuencia, es posible avanzar en nuevas líneas de investigación que planteen ampliar la variedad de situaciones-problemas, diseñar e implementar una muestra más representativa de situaciones-problemas con mayor disponibilidad de tiempos, diseñar e implementar ciclos formativos destinados para profesores y estudiantes de matemáticas, física y ciencias experimentales e ingenierías.

9.7.4 Desarrollo de la competencia de análisis de la idoneidad didáctica en procesos de enseñanza y aprendizaje de la diferencial

A partir de los resultados obtenidos, una posible experiencia formativa que podría enriquecer la valoración de la idoneidad didáctica, y en particular, promoviendo procesos de metacognición, sería volver sobre las primeras valoraciones de las situaciones-problemas, como la lección del libro de texto para mejorar el análisis, identificar dificultades y potenciar la reflexión sistemática de los procesos de estudio de la diferencial haciendo un uso competente de la herramienta.

Por otro lado, es posible proponer nuevos estudios que empleen otros recursos tecnológicos y audiovisuales, teniendo en cuenta los planteos de Hitt (2014) y Thompson y Harel (2021), con el uso de animaciones, de tal manera que los FPM puedan explorar o interactuar de otras formas con el fenómeno de estudio para luego plantear la situación problema y reflexionar sobre la idoneidad de estas experiencias formativas.

9.8 Publicaciones Derivadas de la Producción Doctoral

En este último apartado presentamos las aportaciones que hemos realizado al campo de la didáctica del análisis matemático y al campo de la formación de profesores, a partir de los desarrollos y resultados obtenidos a lo largo de la investigación. Los mismos están ordenados cronológicamente de manera descendente.

9.8.1 Artículos publicados en revistas y memorias de congresos

Verón, M. A. y Giacomone, B. (2021). Análise dos significados do conceito de diferencial de uma perspectiva ontosemiótica. *Revemop*, *3*, e202109. https://doi.org/10.33532/revemop.e202109

Verón, M. A. y Giacomone, B. (2021). Perspectiva ontosemiótica del diferencial de una función: implicaciones para la enseñanza. *En Actas del 7° Seminario de Enseñanza y Aprendizaje del Cálculo* (pp. 3-4). Grupo de investigación en Educación Matemática de la Universidad Industrial de Santander (EDUMAT- UIS). http://funes.uniandes.edu.co/24621/

Verón, M. A. y Giacomone, B. (2022). Análisis de la idoneidad didáctica de un libro de texto para el estudio del diferencial. *En Primer Congreso Internacional de Didáctica de la Matemática.* CIDIDMAT 2022 (Virtual), en prensa.

Verón, M. A., Giacomone, B. y Benítez, M. del C. (2022). Significados que los estudiantes de ingeniería otorgan al concepto de diferencial: *Advances in Engineering and Innovation, 7*(15), 86-94. https://www.progreso.tecnm.mx/revistaAEI/index.php/aei/article/view/111

Verón, M.A., Giacomone, B., Benítez, M., Operuk, R., Pereyra, V., Kramer, F., Nacimento, G. y Verón, H. (2022). Análisis de una lección de un libro de texto de cálculo sobre el estudio del diferencial. *En VII Encuentro Provincial de Investigación Educativa*. REDINE, en prensa.

Verón, M. A., Giacomone, B. y Benítez, M. del C. (2022). Usos de la diferencial en una lección de la integral. *En actas de las XXVI Jornadas Nacionales de Educación Matemática de la Sociedad Chilena de Educación Matemática*. SOCHIEM. https://drive.google.com/file/d/1OQXIlksut8Kt4Epye7rsR0llMOTGgIAI/view

Verón, M. A. y Giacomone, B. (2023). Valoración de la idoneidad interaccional de una discusión sobre la resolución de un problema en torno al estudio de la diferencial. En *Actas del Congreso SOMIDEM1*. Aceptado.

Giacomone, B. y Verón, M. A. (2023). Competencia de futuros profesores de matemática para identificar prácticas, objetos y procesos en la resolución de un problema del diferencial. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, E. y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 267-274). SEIEM.

Verón, M. A. y Giacomone, B. (2023). Modelo ontosemiótico del concepto de diferencial. Implicaciones para la formación de profesores de matemática. *En 3ª Jornada de Tesistas de Posgrado Intercambiando perspectivas, metodologías y conclusiones.* Facultad de Humanidades y Ciencias Sociales. Universidad Nacional de Misiones. Aceptado.

Verón, M. A., Giacomone, B. y Pino-Fan, L. R. (2023). Guía de valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de la diferencial. *Uniciencia*, en prensa.

9.8.2 Participación en eventos científicos.

Verón, M. A. y Giacomone B. (2021). Análisis Ontosemiótico de los Significados del Concepto de Diferencial. *En XIII Encuentro de Estudiantes de Profesorados de Matemática y XII Encuentro Regional de Profesores de Práctica Profesional y Didáctica de la Matemática (Modalidad Virtual)*. Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales. Universidad Nacional de Misiones. https://www.researchgate.net/publication/350873866_ANALISIS_ONTOSEMIOTICO_DE_LOS_SIGNIFICADOS_DEL_CONCEPTO_DE_DIFERENCIAL

Verón, M. A. y Giacomone, B. (2021). Perspectiva ontosemiótica del diferencial de una función: implicaciones para la enseñanza. *En Actas del 7° Seminario de Enseñanza y Aprendizaje del Cálculo* (pp. 3-4). Grupo de investigación en Educación Matemática de la Universidad Industrial de Santander (EDUMAT- UIS). http://funes.uniandes.edu.co/24621/

Verón, M. A. y Giacomone, B. (2022). Análisis de la idoneidad didáctica de un libro de texto para el estudio del diferencial. *En Primer Congreso Internacional de Didáctica de la Matemática - CIDIDMAT 2022 (Virtual)*. Universidad de los Lagos. Aceptado.

Verón, M. A., Giacomone, B. y Benítez, M. D. C. (2022). Significados que los estudiantes de ingeniería otorgan al concepto de diferencial. *En II Foro de Experiencias Docentes en Ciencias Básicas para la formación de ingenieros.* Universidad Autónoma de Yucatán y el Instituto Tecnológico Superior Progreso del Tecnológico Nacional de México, en prensa.

Verón, M.A., Giacomone, B., Benítez, M., Operuk, R., Pereyra, V., Kramer, F., Nacimento, G. y Verón, H. (2022). Análisis de una lección de un libro de texto de cálculo sobre el estudio del diferencial. En *VII Encuentro Provincial de Investigación Educativa*. REDINE. Universidad Nacional de Misiones, en prensa.

Verón, M. A., Giacomone, B. y Benítez, M. del C. (2022). Usos de la diferencial en una lección de la integral. *En actas de las XXVI Jornadas Nacionales de Educación Matemática de la Sociedad Chilena de Educación Matemática*. SOCHIEM. https://drive.google.com/file/d/1OQXIlksut8Kt4Epye7rsR0llMOTGgIAI/view

Verón, M. A. (2023). Desafíos en la organización y sistematización de la información: El caso del diferencial. *En actas de Día de Jóvenes Investigadoras e Investigadores en Educación Matemática (JIIEM).* Congreso SOMIDEM1. Aceptado.

Referencias

Alibert, D. y Legrand, M. (1989). Procedures differentielles et integrales aun niveau du premier cycle universitaire – une mise au point. En *Procedures différentielles dans les enseignements de mathematiques et de physique au niveau du premier cycle universitaire* (Annexe VII). Université Paris 7: IREM et LDPES.

Aprende Matemáticas (23 de agosto de 2020). *Establecimiento de una integral definida para calcular longitud de arco* [Archivo de Vídeo]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=IfoekgD8v2A

Araya Bastias, D., Pino-Fan, L. R., Medrano, I. G. y Castro, W. F. (2021). Epistemic Criteria for Designing Limit Tasks on a Real Variable Function. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 35*(69), 179-205. https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a09

Arcos Quezada, J. I. (2004). Rigor o entendimiento, un viejo dilema en la enseñanza de las Matemáticas: el caso del cálculo infinitesimal. *Tiempo de Educar*, *5*(10), 77-110. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=311/31101004

Artigue, M. (1989). Le passage de la différentielle totale à la notion d'application linéaire tangente. En Procedures différentielles dans les enseignements de mathematiques et de physique au niveau du premier cycle universitaire (Annexe I). Université Paris 7: IREM et LDPES.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gomez (Ed.), *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 97-140). Una empresa docente y Grupo editorial Iberoamérica.

Artigue, M., Menigoux, J. y Viennot, L. (1990). Some aspects of students' conceptions and difficulties about differentials. *European Journal of Physics, 11*(5), 262-267. https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0143-0807/11/5/002

Artigue, M. y Viennot, L. (1987). Some aspects of students' conceptions and difficulties about differentials. En J. D. Novak (Ed), *Actas del Second International Seminar: Misconceptions and Educational Strategies in Sciences and Mathematics* (Vol. III). Cornell, Ithaca, USA: Ed. Cornell University.

Badillo, E, Font, V., y Azcárate, C. (2005). Conflictos semióticos relacionados con el uso de la notación incremental y diferencial en libros de física y de matemática del bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias,* (Extra), 1-6. https://ddd.uab.cat/pub/edlc/edlc_a2005nEXTRA/edlc_a2005nEXTRAp263consem.pdf

Barboza, J. A. y Castro, W. F. (2022). La competencia docente de análisis de idoneidad didáctica en futuros profesores de matemáticas al planificar la enseñanza. *Assensus, 7*(12). https://revistas.unicordoba.edu.co/index.php/assensus/article/view/2946

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, 8*(3), 247-263.

Beltrán-Pellicer, P. y Godino, J. D. (2020) An onto-semiotic approach to the analysis of the affective domain in mathematics education. *Cambridge Journal of Education, 50*(1), 1-20. https://doi.org/10.1080/0305764X.2019.1623175

Beltrán-Pellicer, P. y Giacomone, B. (2018). Desarrollando la competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica en un curso de posgrado mediante la discusión de la de una experiencia de enseñanza. *REDIMAT, Journal of Research in Mathematics Education*, *7*(2), 111-133. https://digibug.ugr.es/handle/10481/57723

Beltran-Pellicer, P., Godino, J. D., y Giacomone, B. (2018). Elaboración de Indicadores Específicos de Idoneidad Didáctica en Probabilidad: Aplicación para la Reflexión sobre la Práctica Docente. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 32*(61), 526-548. https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n61a11

Beltrán-Pellicer, P., Burgos, M. y Giacomone, B. (2021). Análisis de vídeos educativos en línea por estudiantes de máster de secundaria. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 157-164). SEIEM.

Bos, H. J. M. (1974). Differentials, higher-order differentials and derivatives in the Leibnizian calculus. *Archive for history of exact sciences,14*(1), 1-90.

Boyer, C. B. (1959). *The history of the calculus and its conceptual development*. Dover.

Bueno, S., Burgos, M., D. Godino, J. y Pérez, O. (2022). Significados intuitivos y formales de la integral definida en la formación de ingenieros. *Revista Latinoamericana de*

Investigación en Matemática Educativa, 25(2), 135-168. https://doi.org/10.12802/relime.22.2521

Burgos, M. (2020). *Niveles de algebrización en el razonamiento proporcional desde las perspectivas institucional y personal. Implicaciones para la formación de profesores de matemáticas* [Tesis de doctorado, Universidad de Granada]. https://enfoqueontosemiotico.ugr.es/tesis/Tesis_MBurgos_2020.pdf

Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P. y Godino, J. D. (2020). The issue of didactical suitability in mathematics educational videos: experience of analysis with prospective primary school teachers. *Revista Españolade Pedagogía, 78*(275), 27-49.

Burgos, M., Bueno, S., Pérez, O. y Godino, J. (2021). Onto-semiotic complexity of the Definite Integral. *Journal of Research in Mathematics Education, 10*(1), 4-40. http://dx.doi.org/10.17583/redimat.2021.6778

Burgos, M., Castillo, M. J., Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B. y Godino, J. D. (2020). Análisis didáctico de una lección sobre proporcionalidad en un libro de texto de primaria con herramientas del enfoque ontosemiótico. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 34*(66). 40-68. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a03

Burgos, M. y Castillo, M. J. (2022) Identificación de conflictos semióticos en una lección de libro de texto sobre proporcionalidad por parte de maestros en formación. *Revemop, 4, e202204*.

Burgos, M., Giacomone, B., Godino, J. D. y Neto, T. (2019). Desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico de futuros profesores de matemáticas mediante tareas de proporcionalidad. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M.T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 241-261). Ediciones Universidad Salamanca.

Burgos, M. y Godino, J. D. (2020). Modelo ontosemiótico de referencia de la proporcionalidad. Implicaciones para la planificación curricular en primaria y secundaria. *AIEM Avances de Investigación en Educación Matemática,* (18), 1-20. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i18.255

Burgos, M. y Godino, J.D. (2022a). Prospective Primary School Teachers' Competence for the Cognitive Analysis of Students' Solutions to Proportionality Tasks. *Journal für Mathematik-Didaktik, 43*, 347–376. https://doi.org/10.1007/s13138-021-00193-4

Burgos, M. y Godino, J.D. (2022b). Assessing the Epistemic Analysis Competence of Prospective Primary School Teachers on Proportionality Tasks. *International Journal of Science and Mathematics Education, 20*, 367–389. https://doi.org/10.1007/s10763-020-10143-0

Breda, A. y Lima, V. M. R. (2016). Estudio de caso sobre el análisis didáctico realizado en un trabajo final de un master para profesores de matemáticas en servicio. *REDIMAT, Journal of Research in Mathematics Education*, *5*(1), 74-103. http://dx.doi.org/10.4471/redimat.2016.1955

Breda, A. Font, V. y Pino-Fan, L. R. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *32*(60), 255-278. https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13

Breda, A., Pino-Fan, L. R. y Font, V. (2017). Meta Didactic-Mathematical Knowledge of Teachers: Criteria for The Reflection and Assessment on Teaching Practice. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *13*(6), 1893-1918. https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a

Castillo, M. J. y Burgos, M. (2022). Reflexiones de futuros maestros sobre la idoneidad didáctica y modo de uso de una lección de libro de texto. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *36*(72). 555-579. https://doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a25

Castillo, M. J., Burgos, M. y Godino, J. D. (2022a). Competencia de futuros profesores de matemáticas para el análisis de la idoneidad didáctica de una lección sobre proporcionalidad en un libro de texto. *Educación Matemática*, *34*(2), 39-71. https://doi.org/10.24844/EM3402.02

Castillo, M. J. C., Burgos, M. y Godino, J. D. (2022b). Elaboración de una guía de análisis de libros de texto de matemáticas basada en la teoría de la idoneidad didáctica. *Educação e Pesquisa*, *48*, e238787. https://doi.org/10.1590/S1678-4634202248238787esp

Castro, W. F. y Pino-Fan, L. R. (2021). Comparing the Didactic-Mathematical knowledge of derivative of in-service and pre-service teachers. *Acta Scientiae*, *23*(3), 34-95. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.5842

Cauchy, A. L. (1821). *Cours d'analyse de l'Ecole Royale Polytechnique*. París: de l'Imprimerie Royale, ETH Library Zurich. https://doi.org/10.3931/e-rara-26185

Cauchy, A. L. (1823). Résumé des leçons données à l'Ecole Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal. París: de l'Imprimerie Royale, ETH Library Zurich. https://doi.org/10.3931/e-rara-25962

Cauchy, A. L. (1826). Leçons sur les applications du calcul infinitésimal à la géométrie. París: de l'Imprimerie Royale, ETH Library Zurich. https://doi.org/10.3931/e-rara-59689

Cauchy, A. L. (1829). Leçons sur le calcul différentiel. París. Recuperado de https://play.google.com/books/reader?id=HXltAAAAMAAJ&hl=es&pg=GBS.PP1

Chapman, O. (2014). Overall commentary: understanding and changing mathematics teachers. En J.–J. Lo, K. R. Leatham y L. R. Van Zoest (Eds.), *Research Trends in Mathematics Teacher Education* (pp. 295-309). Springer International Publishing.

Cordero-Osorio, F. (1991). Taking a differential element: its formation and meaning in the didactic discourse of calculus. International *Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *22*(6), 869-872. https://doi.org/10.1080/0020739910220601

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2007). Research methods in education. Routledge.

Critigo92. (29 de enero de 2019). *Diferenciales* [Archivo de Vídeo]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=J5COVtWX8FU

Dray, T. y Manogue, C. (2003). Using differentials to bridge the vector calculus gap. *College Mathematics Journal*, *34*, 283–290.

Dray, T. y Manogue, C. A. (2010). Putting Differentials Back into Calculus. *The College Mathematics Journal*, *41*(2), 90-100. https://doi.org/10.4169/074683410X480195

Edwards, C. H. (1979). *The historical development of the calculus*. Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-6230-5

English, L. (2008). Setting an agenda for international research in mathematics education. En L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 3-19). Routledge.

Ely, R. (2017). Definite integral registers using infinitesimals. *The Journal of Mathematical Behavior*, *48*, 152-167. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.10.002

Ely, R. (2021). Teaching calculus with infinitesimals and differentials. *ZDM Mathematics Education*, *53*, 591-604. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01194-2

Escudero, D. I., Carrillo, J., Flores-Medrano, E., Climent, N., Contreras, L. C. y Montes, M. (2015). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas detectado en la resolución del problema de las cuerdas. *PNA*, *10*(1), 53-76.

Eves, H. (1981). *Great moments in mathematics* (After 1690). The Mathematical Association of America.

Ferrini-Mundy, J. y Gaudard, M. (1992). Secondary school calculus: Preparation or pitfall in the study of college calculus? *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(1), 56-71.

Frank, K. y Thompson, P.W. (2021). School students' preparation for calculus in the United States. *ZDM Mathematics Education*, *53*, 549–562. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01231-8

Font, V. (2011). Competencias profesionales en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *Unión*, *26*, 9-25.

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, *82*, 97–124. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9411-0

Font, V., Pino-Fan, L. R. y Breda, A. (2020). Una evolución de la mirada sobre la complejidad de los objetos matemáticos. *Revista Paradigma*, *41*, 107-129. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2020.p107-129.id846

Garcés-Córdova, W. y Font-Moll, V. (2022). Criterios que guían la práctica de los profesores de matemáticas en los cursos de ciencias básicas de la ingeniería. *Uniciencia*, *36*(1), 1-19. https://doi.org/10.15359/ru.36-1.5

García Jiménez, V. (2018). Resignificar la diferencial en y con prácticas de modelación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *11*(1), 139-178.

Giacomone, B. (2018). *Desarrollo de competencias y conocimientos didáctico-matemáticos de futuros profesores de educación secundaria en el marco del enfoque ontosemiótico* [Tesis de doctorado, Universidad de Granada]. https://enfoqueontosemiotico.ugr.es/tesis/Tesis_Giacomone.pdf

Giacomone, B., Beltrán-Pellicer, P. y Verón, A. (2022). Reflexiones de profesores en formación sobre la idoneidad didáctica de videos educativos. *CEMer–Caminhos da Educação Matemática em Revista*, *12*(2), 200-2012. https://aplicacoes.ifs.edu.br/periodicos/caminhos_da_educacao_matematica/article/view/1369

Giacomone, B., Godino, J. D. y Beltrán-Pellicer, P. (2018). Desarrollo de la competencia de análisis de la idoneidad didáctica en futuros profesores de matemáticas. *Educação e Pesquisa, 44*, e172011. https://doi.org/10.1590/s1678-4634201844172011

Giacomone, B., Godino, J. D., Wilhelmi, M. R. y Blanco, T.F. (2018). Desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico de futuros profesores de matemáticas. *Revista Complutense de Educación, 24*(1), 35-52. https://doi.org/10.5209/RCED.54880

Giacomone, B., Godino, J. D., Wilhelmi, M. R. y Blanco, T. F. (2016). Reconocimiento de prácticas, objetos y procesos en la resolución de tareas matemáticas: una competencia del profesor de matemáticas. En A. Berciano, C. Fernández, T. Fernández, J. González, P. Hernández, A. Jiménez, J. A. Macías, F. Ruiz, M. T. Sánchez, (Eds.), Investigación en Educación Matemática XX (pp. 257-265). SEIEM

Giacomone, B. y Verón, M. A. (2023). Competencia de futuros profesores de matemática para identificar prácticas, objetos y procesos en la resolución de un problema del diferencial. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, E. y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 267–274). SEIEM.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques, 22*(2/3), 237-284.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *11*, 111-132. https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/14720/13965

Godino, J. D. (2014). *Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos: motivación, supuestos y herramientas teóricas*. Universidad de Granada. https://www.ugr.es/~jgodino/eos/sintesis_EOS_24agosto14.pdf

Godino, J. D. (2017). Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M.

Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Godino, J. D. (2021). De la ingeniería a la idoneidad didáctica en la enseñanza de las matemáticas. *Revemop, 3*, e202129. https://doi.org/10.33532/revemop.e202129

Godino, J. D., Aké, L. P., Gonzato, M., y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(1), 199-219. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.965

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C. y Burgos, M. (2023). Theory of didactical suitability: An enlarged view of the quality of mathematics instruction. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 19*(6), em2270. https://doi.org/10.29333/ejmste/13187

Godino, J. D., Batanero, C., Burgos, M. y Gea, M. M. (2021). Uma perspectiva ontosemiótica dos problemas e métodos de pesquisa em educação matemática. *Revemop, 3*, e202107. https://doi.org/10.33532/revemop.e202107

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM Mathematics Education, 39*, 127–135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2020). El enfoque ontosemiótico: implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la didáctica. *Revista Chilena de Educación Matemática, 12*(2), 3–15. https://doi.org/10.46219/rechiem.v12i2.25

Godino, J D., Batanero, C., Font, V. y Giacomone, B. (2016). Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 285-294). SEIEM.

Godino, J. D., Batanero, C., Rivas, H. y Arteaga, P. (2013). Componentes e indicadores de idoneidad de programas de formación de profesores en didáctica de las matemáticas.

Revista Eletrônica de Educação Matemática, 8(1), 46-74. https://doi.org/10.5007/1981-1322.2013v8n1p46

Godino, J. D., Beltrán-Pellicer, P., Burgos, M. y Giacomone, B. (2017). Significados pragmáticos y configuraciones ontosemióticas en el estudio de la proporcionalidad. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Recuperado de http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Godino, J. D. y Burgos, M. (2020). ¿Cómo enseñar las matemáticas y ciencias experimentales? Resolviendo el dilema entre transmisión e indagación. Revista *Paradigma, 41,* 80-106. http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/Godino&Burgos_Paradigma2020.pdf

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques, 26*(1), 39-88. http://ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/analisis_procesos_instruccion.pdf

Godino, J. D. Font, V., Wilhelmi, M. R. y De Castro, C. (2009). Aproximación a la dimensión normativa en Didáctica de las Matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias, 27*(1), 59-76.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 31*(37), 90-113. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05

Godino, J. D., Giacomone, B., Blanco, T. F., Wilhelmi, M. R. y Contreras, A. (2016). Onto-semiotic configurations underlying diagramatic reasoning. *Proceedings of the 40th Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME 40). Accepted Research Report

Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A. y Wilhelmi, M. R. (2014) Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico - semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 34*, 167-200.

Godino, J. D., Wilhelmi, M. R., Blanco, T. F., Contreras, Á, y Giacomone, B. (2016). Análisis de la actividad matemática mediante dos herramientas teóricas: Registros de representación semiótica y configuración ontosemiótica. *Avances De Investigación En Educación Matemática*, (10), 91-110. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i10.144

Gomez, A. (2019). A look to differential. Journal of Physics: Conference Series. *V International Conference Days of Applied Mathematics, 1414*, 1-7. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1414/1/012001

Golz, E., Krampe, Y., Fiege, C., Verón, A. y Clasen, R. (2022). Niveles de lectura gráfica de futuros profesores de educación secundaria en matemática. *En VII Encuentro Provincial de Investigación Educativa* REDINE - Universidad Nacional de Misiones.

Gordillo, W. y Pino-Fan, L. R. (2016). Una propuesta de reconstrucción del significado holístico de la antiderivada. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *30*(55), 535-558. DOI

Grootenboer, P. y Marshman, M. (2016). El dominio afectivo, las matemáticas y la educación matemática. En *Matemáticas, Afecto y Aprendizaje*. Springer, Singapur. https://doi.org/10.1007/978-981-287-679-9_2

Harel, G. (2021). The learning and teaching of multivariable calculus: a DNR perspective. *ZDM Mathematics Education 53*, 709–721. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01223-8

Hitt, F. (2014). Nuevas tendencias en la enseñanza del cálculo: la derivada en ambientes TICE. *AMIUTEM*, *2*(2), 1-19.

Hitt, F. (2017). El aprendizaje del cálculo y nuevas tendencias en su enseñanza en el aula de matemáticas. *ECO MATEMATICO*, *8*, 6-15. https://doi.org/10.22463/17948231.1374

Hitt, F. y Dufour, S. (2021). Introduction to calculus through an open-ended task in the context of speed: representations and actions by students in action. *ZDM Mathematics Education*, *53*, 635–647. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01258-x

Hu, D. y Rebello, N. S. (2013). Understanding student use of differentials in physics integration problems. *Physical Review Special Topics - Physics Education Research*, *9*(2), 1-14. https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.9.020108

Hummes, V. B., Font, V. y Breda, A. (2019). Uso combinado del estudio de clases y la idoneidad didáctica para el desarrollo de la reflexión sobre la propia práctica en la formación de profesores de matemáticas. *Acta Scientiae*, *21*(1), 64-82. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.v21iss1id4968

INFD. (2010). Proyecto de mejora para la formación inicial de profesores para el nivel secundaria. Área: Matemática. Buenos Aires: Ministerio de Educación, Instituto Nacional de Formación Docente y Secretaría de Políticas Universitarias. Recuperado de http://www.jorgealiaga.com.ar/documentos/gestion-decano/LES_CONEAU/Acreditacion_Profesorados/proyecto.pdf

Jones, S. R. (2013). Understanding the integral: Students' symbolic forms. *The Journal of Mathematical Behavior*, *32*(2), 122–141. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.12.004

Jones, S. (2015). Areas, anti-derivatives, and adding up pieces: definite integrals in pure mathematics and applied science contexts. *Journal of Mathematical Behavior, 38*, 9–28. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.01.001

Jones, S.R. y Ely, R. (2023) Approaches to Integration Based on Quantitative Reasoning: Adding Up Pieces and Accumulation from Rate. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *9*, 8–35. https://doi.org/10.1007/s40753-022-00203-x

Jones, S.R., Lim, Y. y Chandler, K.R. (2017). Teaching Integration: How Certain Instructional Moves May Undermine the Potential Conceptual Value of the Riemann Sum and the Riemann Integral. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *15*, 1075–1095. https://doi.org/10.1007/s10763-016-9731-0

Keisler, H. J. (2000). *Elementary calculus. An infinitesimal approach*. University of Wisconsin.

Kelly, A. E., Lesh, R. A. y Baek, J. Y. (Eds.). (2008). *Handbook of Design Research in Methods in Education. Innovations in Science, Technology, Engineering, and Mathematics Learning and Teaching*. Routledge.

Kitcher, P. (1984). *The nature of mathematical knowledge*. Oxford University Press.

Kleiner, I. (2012). History of the infinitely small and the infinitely large in calculus, with remarks for the teacher. In *Excursions in the History of Mathematics* (pp. 67-101). Birkhäuser Boston. https://doi.org/10.1007/978-0-8176-8268-2_4

Kleiner, I. (2001). History of the infinitely small and the infinitely large in calculus. *Educational Studies in Mathematics, 48*, 137–174. https://doi.org/10.1023/A:1016090528065

Kline, M. (1972). El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días. Alianza Universidad, 1992.

López-Gay, R. L. V. (2001). *La introducción y utilización del concepto de diferencial en la enseñanza de la física. Análisis de la situación actual y propuesta para su mejora* [Tesis de doctorado, Universidad Autónoma de Madrid]. http://hdl.handle.net/10486/671450

López-Gay, R. y Martínez Torregrosa, J. (2005). Identificación de obstáculos para un uso con comprensión del cálculo diferencial en física. *Enseñanza de las ciencias,* (extra), 1-5.

López-Gay, R., Sáez, J. M. y Torregrosa, J. M. (2015). Obstacles to mathematization in physics: The case of the differential. *Science & Education*, *24(*5-6), 591-613. https://doi.org/10.1007/s11191-015-9757-7

López-Gay, R., Martínez-Torregrosa, J., Jiménez Liso, M., Martínez Chico, M. y Gil Martínez, E. (2018). Significado y uso de la diferencial. Ayudando a conectar el mundo físico y matemático. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, (81), 41-44. http://hdl.handle.net/10045/101630

McMillan, J., y Schumacher, S. (2001). *Investigación cualitativa.* Addison.

Malet, O., Giacomone, B. y Repetto, A. M, (2021). Idoneidad didáctica como herramienta metodológica: desarrollo y contextos de uso. *Revemop*, *3*, e202110. https://doi.org/10.33532/revemop.e202110

Mason, J. (2016). Perception, interpretation and decision-making: understanding gaps between competence and performance —a commentary. *ZDM Mathematics Education*, *48*(1-2), 219-226

Martínez-Planell, R. y Trigueros, M. (2021). Multivariable calculus results in different countries. *ZDM Mathematics Education 53*, 695-707. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01233-6

Martínez-Torregrosa, J., López-Gay, R. y Gras-Martí, A. (2006). Mathematics in physics education: scanning historical evolution of the differential to find a more appropriate model for teaching differential calculus in physics. *Science & Education, 15*(5), 447-462. http://doi.org/10.1007/s11191-005-0258-y

Martínez-Torregrosa, J., López-Gay, R., Gras-Martí., A. y Torregrosa-Gironés, G. (2002). La diferencial no es un incremento infinitesimal. Evolución del concepto de diferencial y su clarificación en la enseñanza de la física. *Enseñanza de las Ciencias, 20*(2), 271-283.

Martínez Uribe, A., Pluvinage, F. y Montaño Zetina, L. M. (2017). El concepto de la derivada en el contexto de la enseñanza de la física, recursos para el uso de diferenciales y las tecnologías de información y comunicación. *El Cálculo y su Enseñanza, Enseñanza de las Ciencias y la Matemática, 8*, 1-17. https://recacym.org/index.php/recacym/article/view/1

Montes, M. D. y Ursini, S. (2014). CHIC en el análisis de las actitudes hacia las matemáticas en estudiantes de secundaria CHIC: análisis de las actitudes de los estudiantes de secundaria hacia las matemáticas. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, 16* (3), 901-924.

Moreno, M. M. y Azcárate C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las Ciencias: Revista de investigación y experiencias didácticas, 21*(2), 265-80. https://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/21935

Neubrand, M. (2018). Conceptualizations of professional knowledge for teachers of mathematics. *ZDM Mathematics Education, 50*, 601–612. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0906-0

Nilsen, H.K. y Knutsen, K.H. (2023). First-year engineering students' interpretations of differentials and definite integrals. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 9*, 173-200. https://doi.org/10.1007/s40753-022-00208-6

Oehrtman, M. y Simmons, C. (2023). Emergent Quantitative Models for Definite Integrals. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 9*, 36–61. https://doi.org/10.1007/s40753-022-00209-5

Oldenburg, R. (2016) Differentiale als Prognosen. *Journal für Mathematik-Didaktik, 37*, 55-82. https://doi.org/10.1007/s13138-016-0096-2

Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics, 14*, 235-250.

Petrou, M. y Goulding, M. (2011). Conceptualizing teachers' mathematical knowledge in teaching. En Rowland, T. y Ruthven, K. (eds.), *Mathematical Knowledge in Teaching* (pp. 9–25). Springer. https://doi.org/10.1007/978-90-481-9766-8_2

Pino-Fan, L., Castro, W. y Font, V. (2022) A macro tool to characterize and develop key competencies for the mathematics teacher's practice. *Int. J. Sci. Math. Educ, 20*, 1-26. https://doi.org/10.1007/s10763-022-10301-6

Pino-Fan, L. R., y Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradígma, 36*(1), 87-109.

Pino-Fan, L., Godino, J. D. y Font, V. (2018). Assessing key epistemic features of didactic-mathematical knowledge of prospective teachers: the case of the derivative. *Journal of Mathematics Teacher Education, 21*(1), 63-94.

Pino-Fan, L. R., Godino, J. D. y Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa 13*(1). 141-178. https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/4423

Pino-Fan, L. y Parra-Urrea, Y. (2021). Criterios para orientar el diseño y la reflexión de clases sobre funciones ¿Qué nos dice la literatura científica? *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 91*, 45-54.

Planas, N., y Iranzo, N. (2009). Consideraciones metodológicas para la interpretación de procesos de interacción en el aula de matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 12*(2), 179-213.

Pochulu, M., Font, V. y Rodríguez, M. (2016). Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas. *Relime: Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 19*(1), 71-98.

Pulido, R. (1997). *Un estudio teórico de la articulación del sable matemático en el discurso escolar: la transposición didáctica del diferencial en la física y la matemática escolar* [Tesis de doctorado no publicada]. Cinvestav.

Pulido, R. (2010). La enseñanza de los diferenciales en las escuelas de ingeniería desde un enfoque socioepistemológico. *Relime: Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(4-I), 85-97.

Puczko, M., Clasen, R. y Verón, A. (2019). ¿Qué relaciones establecen los estudiantes al aumentar o disminuir el perímetro y/o área de un rectángulo utilizando el Tangram como recurso didáctico? En A. M. Oudin y A. M. Zoppi (Comps.), *Memorias del VI Encuentro Provincial de Investigación Educativa.* REDINE. http://doi.org/10.5281/zenodo.4587710

Rabuffetti, H. T. (1987). *Introducción al análisis matemático.* El Ateneo.

Ramírez, R., Ibarra, S. y Pino-Fan, L. (2020). Prácticas evaluativas y significados evaluados por profesores del bachillerato mexicano sobre la noción de ecuación lineal. *Educación Matemática, 32*(2), 69-98. http://doi.org/10.24844/EM3202.03

Robinson, A. (1966). *Non-standard analysis.* North-Holland Publishing Company Amsterdam.

Rodríguez-Nieto, C. A., Font, V. M., Borji, V. y Rodríguez-Vásquez, F. M. (2022) Mathematical connections from a networking of theories between extended theory of mathematical connections and onto-semiotic approach, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *53*(9), 2364-2390. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1875071

Rossi, P. (1997). *El nacimiento de la ciencia moderna en Europa*. Barcelona: Crítica - Grijalbo Mondadori, 1998.

Ruz, F., Molina-Portillo, E. y García, J. M. C. (2019). Guía de valorización de la idoneidad didáctica de procesos de instrucción en Didáctica de la Estadística. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *33*(63), 135-154. https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a07

Salinas, P., Alanis, J. A., Pulido, R., Santos, F., Escobedo, J. C. y Garza, J. L. (2012). Cálculo aplicado: Competencias matemáticas a través de contextos Tomo 2. Cengage Learning Editores SA de CV.

Schoenfeld, A. y Kilpatrick, J. (2008). Towards a theory of proficiency in teaching mathematics. En D. Tirosh, y T. L. Wood (Eds.), *Tools and Processes in Mathematics Teacher Education* (pp. 321-354). Ed. SensePublisher.

Seckel, M. J. y Font, V. (2020). Competencia reflexiva en formadores del profesorado de matemática. *Magis. Revista Internacional de Investigación en Educación, 12*(25), 127-144. https://doi.org/10.11144/Javeriana.m12-25.crfp

Sherin, B. L. (2001). How students understand physics equations. *Cognition and instruction, 19(*4), 479-541. https://doi.org/10.1207/S1532690XCI1904_3

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review 57*(1), 1-22.

Stevens, B. N. y Jones, S. R. (2023). Learning integrals based on adding up pieces across a unit on integration. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education volume*, *9*, 118-148. https://doi.org/10.1007/s40753-022-00204-w

Stewart, J. (2012). *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas* (7ma. Ed.). Cengage Learning Editores.

Tall, D. O. (1981a). Comments on the difficulty and validity of various approaches to the calculus. *For the Learning of mathematics, 2*(2), 16-21.

Tall, D. O. (1981b). Intuitions of infinity. *Mathematics in School, 10*(3), 30-33.

Tall, D. O. (1992). Students' difficulties in calculus. En Proceedings of Working Group 3 on Students difficulties in calculus, ICME-7 (pp. 13-28). Québec, Canada, doi=10.1.1.377.2989&rep=rep1&type=pdf

Taylor, A. (1974). The differential: nineteenth and twentieth century developments. *Archive for History of Exact Sciences, 12*(4), 355-383. https://www.jstor.org/stable/41133401

Thompson, P. W. (1994). Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. *Educational Studies in Mathematics, 26*(2-3), 229-274.

Thompson, P.W. y Harel, G. (2021). Ideas foundational to calculus learning and their links to students' difficulties. *ZDM Mathematics Education 53*, 507-519. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01270-1

Valdivé, C. y Garbin, S. (2008). Estudio de los esquemas conceptuales epistemológicos asociados a la evolución histórica de la noción de infinitesimal. *Relime: Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11*(3), 413-450. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=335/33511305

Verón, M. A. (2020). Análisis ontosemiótico de los significados del concepto de diferencial [Tesis de maestría, Universidad de Granada]. https://hdl.handle.net/20.500.12219/3055

Verón, M. A. y Clasen, R. C. (2021). El lugar de la investigación educativa en el profesorado de matemática: Una experiencia de trabajo articulado. *Revista de Matemática, Ensino* *e Cultura–REMATEC*, *16*(38), 35-48. https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n38.p35-48.id335

Verón, M. A. y Giacomone, B. (2021). Análise dos significados do conceito de diferencial de uma perspectiva ontosemiótica. *Revemop, 3,* e202109. https://doi.org/10.33532/revemop.e202109

Verón, M. A. y Giacomone, B. (2022). Análisis de la idoneidad didáctica de un libro de texto para el estudio del diferencial. En *Primer Congreso Internacional de Didáctica de la Matemática. CIDIDMAT 2022* (Virtual). Aceptado.

Verón, M. A., Giacomone, B. y Benítez, M. del C. (2022). Significados que los estudiantes de ingeniería otorgan al concepto de diferencial. *Advances in Engineering and Innovation, 7*(15), 86-94. https://www.progreso.tecnm.mx/revistaAEI/index.php/aei/article/view/111

Verón, M.A., Giacomone, B., Benítez, M., Operuk, R., Pereyra, V., Kramer, F., Nacimento, G. y Verón, H. (2022). Análisis de una lección de un libro de texto de cálculo sobre el estudio del diferencial. En *VII Encuentro Provincial de Investigación Educativa. REDINE* (en prensa).

Verón, M. A., Giacomone, B. y Benítez, M. del C. (2022). Usos de la diferencial en una lección de la integral. En *Actas de las XXVI Jornadas Nacionales de Educación Matemática de la Sociedad Chilena de Educación Matemática*. SOCHIEM. https://drive.google.com/file/d/1OQXIlksut8Kt4Epye7rsR0llMOTGgIAI/view

Verón, M. A. y Giacomone, B. (2023). Valoración de la idoneidad interaccional de una discusión sobre la resolución de un problema en torno al estudio de la diferencial. En *Actas del Congreso SOMIDEM* (en prensa).

Verón, M. A. y Giacomone, B. (2023). Modelo ontosemiótico del concepto de diferencial. Implicaciones para la formación de profesores de matemática. En *3ª Jornada de Tesistas de Posgrado Intercambiando perspectivas, metodologías y conclusiones. Facultad de Humanidades y Ciencias Sociales*. Universidad Nacional de Misiones. Aceptado.

Verón, M. A., Giacomone, B. y Pino-Fan, L. R. (2023). Guía de valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de la diferencial. *Uniciencia*, en prensa.

Von Korff, J. y Rebello, N. S. (2014). Distinguishing between change and amount infinitesimals in first-semester calculus-based physics. *American Journal of Physics, 82*(7), 695-705. https://doi.org/10.1119/1.4875175

Wilhelmi, M. R., Godino, J. D. y Lacasta, E. (2007). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathematiques, 27*(1), 77-120.

Anexos

Anexo 1

Tarea 6

A partir de los discutido en la Tarea 5, responde: ¿Cómo se podrían reformular/adecuar los criterios de idoneidad didáctica identificados en el punto 1 para el estudio del diferencial de una función?

Tabla a modo de organización de la información

Facetas	Criterios	Análisis y valoración

Anexo 2

Tarea 7

Consigna:

Realizar un análisis y valoración de la idoneidad didáctica del problema de cálculo de la masa e indicar posibles mejoras, teniendo en cuenta la siguiente tabla de guía:

Facetas	Componentes	Análisis y valoración	Propuesta de mejora
Epistémica	-Significados institucionales -Relaciones con otros conceptos -Procesos -Conflictos epistémicos		
Cognitiva	-Significados personales -Relaciones con otros conceptos -Conocimientos previos -Procesos -Diferencias individuales -Conflictos cognitivos		
Afectiva	-Emociones, actitudes, motivación, creencias y valores		
Interaccional	-Interacción Docente-Estudiante -Interacción entre estudiantes -Autonomía -Evaluación formativa		
Mediacional	Recursos materiales, condiciones del aula, número de estudiantes y tiempo		
Ecológica	Adaptación al currículo, adaptación socio-profesional, apertura a la innovación, educación en valores, contextos interdisciplinarios		
Otros comentarios			

Anexo 3

Tarea 9

Tabla utilizada para registrar la valoración de los videos

Video 1

Idoneidad	**Componentes**		**Análisis y valoración**	**Propuesta de mejora**
Epistémica	Significados institucionales	Situaciones-problemas		
		Lenguajes		
		Conceptos		
		Proposiciones		
		Procedimientos		
		Argumentos		
	Relaciones con otros conceptos			
	Procesos	Modelización, comunicación, argumentación, conceptualización, representación, interpretación		
	Conflictos epistémicos			
Cognitiva	Significados personales (Aprendizajes)			
	Relaciones (conexiones)			
	Procesos			
	Conocimientos previos (se tienen en cuenta los mismos elementos que para la idoneidad epistémica)			
	Diferencias individuales			

	Conflictos cognitivos	
Afectiva	Emociones	
	Actitudes	
	Creencias	
	Valores	
Interaccional	Interacciones docente-estudiantes	
	Interacciones entre estudiantes	
	Autonomía	
	Evaluación formativa	
Mediacional	Recursos materiales (manipulativos, audiovisuales e informáticos)	
	Condiciones ambientales	
	Tiempo de enseñanza y aprendizaje	
Ecológica	Adaptación al currículo	
	Apertura hacia la innovación didáctica	
	Adaptación socio-profesional y cultura	
	Educación en valores	
	Conexiones intra e interdisciplinares	
Otros comentarios		

Anexo 4

Guía de Valoración de la Idoneidad Didáctica para el estudio de la diferencial (GVID-Diferencial)

Idoneidad Epistémica	
Componentes	Indicadores
	Situaciones-problemas
	-Se plantea una muestra representativa de situaciones-problemas que muestren y relacionen los diversos significados del diferencial involucrando las cantidades infinitesimales, variables cuyos límites son infinitésimos y aproximaciones o estimaciones lineales. -Se proponen situaciones de contextualización, ejercitación, aplicación y de generación de problemas en matemáticas y en las ciencias experimentales (problematización) para el estudio de cambios infinitesimales por los propios estudiantes. -Se plantean situaciones que propician la utilización del diferencial para la modelización y representación de las variaciones, cambios o acumulación de diversos fenómenos de matemáticas, física, ingeniería y de las ciencias experimentales.
	Lenguajes
Significados	-Se emplean diferentes registros y representaciones para describir al diferencial (natural, algebraico, simbólico, gráfico, funcional, etc.), indicando sus conexiones. -Se utiliza un nivel de lenguaje adecuado a los estudiantes que se dirige. -Se emplean términos idóneos para describir la diferencial en distintos contextos, como cantidades pequeñas, cantidades infinitamente pequeñas, incremento infinitesimal, tangente, inclinación, aproximación lineal, pendiente, derivada, etc. -Se proponen situaciones de expresión matemática e interpretación, en los diferentes registros mencionados. Por ejemplo: $dy = f'(x).dx$; $\frac{dy}{dx} = f'(x)$; $f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0$; $\int f(x)dx$; $\int df$
	Conceptos
	-Se realiza una presentación clara de los conceptos fundamentales del diferencial y se adaptan al nivel educativo al que se dirigen. -Se presentan las definiciones del dx, dy, incremento de la función, derivada, cantidad infinitesimal, variación infinitesimal, razón de diferencial, incremento infinitesimal, pendiente, estimación lineal tangencial, aproximación, error, etc. -Se proponen situaciones donde los estudiantes tengan que generar o negociar definiciones que intervienen y emergen en el estudio del diferencial.
	Proposiciones
	-Se presentan las proposiciones fundamentales del diferencial en forma clara y se adaptan al nivel educativo al que se dirigen. Por ejemplo: “un incremento infinitesimal dx en x, produce un incremento infinitesimal dy en y” (Martínez-Torregrosa et al., 2002).

	-Se proponen situaciones donde los estudiantes tengan que generar o negociar proposiciones sobre las interpretaciones y sentidos que atribuyen al diferencial, según el contexto de uso.
	Procedimientos
	-Se presentan los procedimientos fundamentales del diferencial en forma clara y se adaptan al nivel educativo al que se dirigen. Por ejemplo: “diferencia de la ecuación” que consiste en incrementar las variables x e y en una cantidad infinitamente pequeña dx y dy, respectivamente (Leibniz), el proceso de paso al límite para plantear la derivada como el cociente de diferenciales (Cauchy) o el incremento de la función se puede escribir como una suma de una aplicación lineal y homogénea del incremento de x y una función ε que tiende a cero cuando Δx tiende a cero) (Fréchet) (Verón, 2020).
	Argumentos
	-Las proposiciones y procedimientos se explican y argumentan (se justifican y demuestran) de forma adecuadas según el nivel educativo a que se dirigen. -Se usan representaciones geométricas para apoyar y reforzar las argumentaciones -Se promueven situaciones donde el estudiante tenga que argumentar.
Relaciones	-Se identifican y articulan los diversos significados del diferencial según los objetos matemáticos (problemas, definiciones, proposiciones etc.) el nivel de generalización y formalización de los objetos intervinientes. -Se proponen situaciones para establecer relaciones entre la diferencial con otros conceptos, como derivada $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, integral $\int dy$ y ecuaciones diferenciales.
Procesos	**Comunicación-argumentación**
	-Se debería tener en cuenta la diversidad de procesos (problematización, representación, definición, generalización, modelización, …) de los cuales emergen los objetos que intervienen en las prácticas matemáticas. Por ejemplo: El proceso de representación de los diferenciales mediante expresiones simbólicas como dx, dy, df y mediante gráficos como la linealización de una curva.
	Modelización
	-Se plantean situaciones que permitan al estudiante utilizar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones donde interviene la diferencial. Por ejemplo, problemas de velocidad instantánea, desintegración radiactiva, etc (López-Gay et al., 2018). -Se plantean situaciones en las que la modelización es utilizada para comprender y establecer relaciones en el estudio de diversos fenómenos que involucran cambios infinitamente pequeños (Leibniz), o cambios considerados como variables que tiene límite cero (Cuachy), o al buscar la mejor aproximación local o estimación lineal de una curva en un punto (Fréchet) de diversos fenómenos de estudio provenientes de las matemáticas, la física, química, biología, economía y las ingenierías (López-Gay et al., 2015).
	Conceptualización

	-Se promueven situaciones donde los estudiantes tengan oportunidad de describir, explicar, hacer generalizaciones y conjeturas sobre la diferencial como cantidades de magnitudes infinitamente pequeñas (Diferencial de Leibniz), como una variable que tiene límite cero (Diferencial de Cauchy), como la mejor aproximación local de la curva (Diferencial de Fréchet).
Conflictos epistémicos	-Se debería evitar discordancias entre los significados del diferencial con los correspondientes a la institución de referencia, por ejemplo, en las carreras de matemática, física, ingeniería y ciencias experimentales. -Se debería tener cuidado con la presentación de los objetos matemáticos relacionados con la diferencial para evitar errores, contradicciones y ambigüedades. -Se debería tener en cuenta que los símbolos y expresiones que involucran al diferencial varían su significado según los contextos de uso y al estar relacionados con otros conceptos como derivada, integral y ecuaciones diferenciales, es importante dejar en claro cuál es el sentido de su uso. Por ejemplo: $dy = f'(x).dx$; $\frac{dy}{dx} = f'(x)$; $f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0$; $\int f(x)dx$; $\int df$ -Se considera necesario generar instancias de reflexión sobre la diferencia en la consideración de los diferenciales como cantidad infinitamente pequeñas o como variables cuyo límite tiende a cero. -Se considera oportuno propiciar espacios para que los estudiantes compartan sus interpretaciones y sentidos en relación a para qué se usan los diferenciales en la resolución de las situaciones-problemas.

Idoneidad Cognitiva	
Componentes	Indicadores
Significados personales (Aprendizajes)	-Se debería conseguir que los significados personales de los estudiantes se relacionen con los significados institucionales pretendidos, implementados y evaluados (ver, por ejemplo, Ramírez, Ibarra y Pino-Fan, 2020). -La evaluación de los aprendizajes debería utilizarse para mejorar el proceso de instrucción teniendo en cuenta las características personales, los niveles de comprensión y competencia que pueden desarrollar los estudiantes.
Relaciones (conexiones)	-Se debería proponer experiencias (situaciones, ejemplos, explicaciones…) que promuevan un aprendizaje de tipo relacional, de manera que permitan valorar si el estudiante establece relaciones o conexiones entre los significados de diferencial, sus sentidos, sus representaciones y contextos de uso. -Se plantean situaciones que permiten diferenciar y relacionar la diferencial con la derivada, el límite, la integral y las ecuaciones diferenciales. Por ejemplo: velocidad instantánea, cálculo de la masa de una lámina, cambio total de la masa, etc.
Procesos	-Se debe tener en cuenta la competencia del estudiante para implementar procesos matemáticos en relación al diferencial (modelización, generalización, conceptualización, resolución o planteamiento de

	problemas, prueba, representación, etc.) y metacognitivos (reflexión sobre los propios procesos de pensamiento matemático).
Conocimientos previos (se tienen en cuenta los mismos elementos que para la idoneidad epistémica)	-Se analiza que los estudiantes tienen los conocimientos previos y necesarios para abordar el estudio del diferencial, entre ellos: cantidad, variable, función, pendiente, variación, acumulación, entre otros que dependen de la complejidad ontosemiótica del significado parcial del diferencial que se pretende estudiar. -El profesor planifica situaciones-problemas (p.e. aproximación o estimación lineal, pronóstico lineal, razón de cambio, tasas, velocidad, desintegración radiactiva, cálculo del área de un círculo, variación, cambio y acumulación total de la masa, optimización, etc.) que promueven la modelización en diversos contextos y permiten comprender la riqueza de procesos que emergen en el estudio del diferencial. -Se utilizan diferentes registros apropiados para la representación de información, como gráficos, tablas, ecuaciones, expresiones simbólicas, etc.
Diferencias individuales	-Se debería tener en cuenta en el proceso instruccional las diferencias individuales de los estudiantes en sus conocimientos previos y estilos de aprendizaje en el proceso de estudio de la diferencial. -Se incluyen actividades de ampliación, refuerzo, contraejemplos y analogías. Por ejemplo, plantear la discusión sobre el uso de los términos: cantidad pequeña, cambio infinitamente pequeño, infinitesimal, variación infinitesimal, porción infinitesimal, aproximación, estimación lineal, error, entre otros, en relación a los significados del diferencial. -Se promueve el acceso, el logro y apoyo de todos los estudiantes.
Conflictos cognitivos	-El proceso de instrucción debería abordar y clarificar los diferentes significados del diferencial teniendo en cuenta las dificultades que se presentan según el contexto de uso, las expresiones simbólicas utilizadas y las interconexiones con otros conceptos como límite, derivada, integrales y ecuaciones diferenciales. -Se valora el error y la confusión en relación a las interpretaciones o sentidos del diferencial como fuente de aprendizaje.

Idoneidad Afectiva	
Componentes	Indicadores
Emociones	En esta componente se valorará que los contenidos estén vinculados con los problemas sociales o la vida social de los estudiantes, como así también que incluyan aspectos motivacionales y que se generen espacios para potenciar la autoestima evitando el rechazo hacia las matemáticas (Castillo, Burgos y Godino, 2022).
Actitudes	Se valorará si se plantean situaciones que motivan a los estudiantes en la participación de las actividades, en favorecer la argumentación en situaciones de igualdad y fomentar una actitud de flexibilidad hacia la exploración de ideas y caminos de resolución de problemas
Creencias	Se valora las creencias sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, como así también las creencias en torno a la formación profesores, físicos e ingenieros en relación al cálculo.

Valores	Se valorará los sistemas de valores que ayudan a motivar las decisiones.

Idoneidad Interaccional	
Componentes	Indicadores
Interacciones docente-estudiantes	Se valora si las configuraciones didácticas planificadas posibilitan una presentación clara, ordenada y adecuada de los conceptos claves en relación al diferencial. Además, si se propicia situaciones-problemas que permitan establecer relaciones con los otros conceptos del cálculo, como el límite, derivada e integral, de manera que se empleen recursos retóricos y argumentativos para reconocer y resolver potenciales conflictos de significados del diferencial.
Interacciones entre estudiantes	Las configuraciones didácticas planificadas deberían contemplar momentos de diálogo, comunicación y debate entre los estudiantes, y generar situaciones donde los estudiantes tengan que convencer a sus pares sobre la validez de sus afirmaciones y conjeturas empleando argumentos matemáticos.
Autonomía	Se valora si las situaciones-problemas contemplan momentos donde los estudiantes tengan que asumir la responsabilidad del estudio desarrollando una autonomía para enfrentarse a diferentes y nuevos problemas.
Evaluación formativa	Se considera la evaluación continua a lo largo de todo el desarrollo de la trayectoria didáctica y no únicamente al final ya que la progresión en el aprendizaje tiene lugar en la medida que el estudiante se apropia de los diversos significados, reconoce y comprende la trama de objetos matemáticos implicados en ellos (Godino y Burgos, 2020). Por tales motivos, se considera estas prácticas personales como indicadores explícitos para que el profesor pueda valorar las relaciones de los estudiantes con los objetos. Se tendrá mayor idoneidad interaccional si se consideran formatos de interacción de tipo dialógica y colaborativas, sobre las de tipo magistral e individual (Godino, Font, Wilhelmi y De Castro, 2009).

Idoneidad Mediacional	
Componentes	Indicadores
Recursos materiales (manipulativos, audiovisuales e informáticos)	Se valora el uso de diferentes tipos de recursos manipulativos, audiovisuales e informáticos que permitan generar buenas situaciones-problemas que potencien el desarrollo de la competencia matemática de los estudiantes. Los recursos tecnológicos, como calculadoras, sistemas de cálculo algebraico simbólico, software de geometría dinámica, graficadores, hojas de cálculo, applets y dispositivos de presentación interactiva, tienen un gran peso en la enseñanza del cálculo diferencial (Garcés-Córdova y Font, 2022), ya que permiten, entre otras cuestiones, estudiar modelos concretos y potenciar la visualización. Sin embargo, Hitt (2014), advierte que el uso de herramientas tecnológicas no debe ser destinado exclusivamente a graficar funciones, ya que se pierde la riqueza que éstas aportan a los procesos de modelación matemática. Se destaca

	también la importancia y el impacto educativo mediante la manipulación de objetos físicos y su articulación con entornos tecnológicos (Hitt, 2014).
Condiciones ambientales	Ls condiciones del aula y la distribución de los estudiantes deben ser adecuadas para llevar a cabo el proceso instruccional del estudio del diferencial pretendido.
Tiempo de enseñanza y aprendizaje	resulta importante valorar si la distribución del tiempo es idónea en relación a la organización de los momentos de enseñanza, las experiencias de aprendizajes, los momentos de trabajo presencial y no presencial, y la dedicación a los contenidos según su dificultad para los estudiantes. Se recomienda dedicar tiempo de discusión al fenómeno físico mediante la modelización sin limitarla a aspectos netamente algebraicos (Hitt, 2014).

Idoneidad Ecológica	
Componentes	Indicadores
Adaptación al currículo	Se valora en qué medida la propuesta de enseñanza se corresponde con los diseños curriculares, ya sean profesores de matemáticas o física, licenciados en matemáticas, ingenieros, economistas, etc.
Apertura hacia la innovación didáctica	Se valora si se tienen en cuenta los resultados de las investigaciones en didáctica del cálculo y el uso de las nuevas tecnologías ya que existe una tendencia actual en la enseñanza del cálculo donde los recursos tecnológicos ocupan un lugar importante en la clase de matemáticas (Hitt, 2017).
Adaptación socio-profesional y cultura	Se valora si la propuesta de estudio del diferencial contribuye a la formación socio-profesional de los estudiantes. Es decir, si está orientada hacia el estudio del diferencial en el contexto de la ingeniería o si se adapta al campo profesional de un futuro profesor de matemáticas o física, según la carrera.
Educación en valores	La propuesta de enseñanza debería evitar la trasmisión de estereotipos, elementos racistas, sexistas, discriminatorios, etc. Tendría que fomentar los valores democráticos como el respecto por la diversidad, la tolerancia, la cooperación, el respecto por las ideas de sus pares, y el pensamiento crítico.
Conexiones intra e interdisciplinares	Se valora si la propuesta didáctica permite establecer relaciones entre la diferencial con los conceptos de cantidad, variable, función, límite, derivada, integrales y ecuaciones diferencial. Además, valora las conexiones con los conceptos de razón de cambio, tasa de variación, velocidad, aceleración, densidad variable, cambio total de un variable, costo marginal, entre otros temas de las ingenierías y las ciencias experimentales.