

Universidad Nacional de Misiones. Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales. Doctorado en Ciencias Aplicadas

Doctorando
Mgter. José Luis MARTINEZ

Modelado matemático del transporte de agua y soluto en suelo no saturado mediante diferencias finitas

Tesis de Doctorado presentada para obtener el título de “Doctor en Ciencias Aplicadas”

Director
Dr. Mario Roberto ROSENBERGER

Co-Director
Dr. Carlos Enrique SCHVEZOV

Posadas, 2016



Esta obra está licenciada bajo Licencia Creative Commons (CC) Atribución-NoComercial-Compartir Igual 4.0 Internacional <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>



Universidad Nacional de Misiones
Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y
Naturales



**MODELADO MATEMÁTICO DEL TRANSPORTE DE AGUA
Y SOLUTO EN SUELO NO SATURADO MEDIANTE
DIFERENCIAS FINITAS**

Por Mgter. José Luis MARTINEZ

Tesis presentada a la Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales de la
Universidad Nacional de Misiones para optar al grado académico de
DOCTOR EN CIENCIAS APLICADAS

Posadas, República Argentina

2016

Director

Dr. Mario Roberto ROSENBERGER

Co-director

Dr. Carlos Enrique SCHVEZOV

TRIBUNAL EXAMINADOR (Resolución Consejo Directivo N°369/15)

Dr. Alejandro Rafael LESPINARD

Universidad Nacional de Villa María

Dr. Juan Carlos MICHALUS

Universidad Nacional de Misiones (FIO)

Dr. Miguel Eduardo SCHMALKO

Universidad Nacional de Misiones (FCEQyN)

DEFENSA ORAL Y PÚBLICA (Disposición N°009/16)

Posadas, 26 de febrero de 2016

**MODELADO MATEMÁTICO DEL TRANSPORTE DE AGUA Y SOLUTO EN
SUELO NO SATURADO MEDIANTE DIFERENCIAS FINITAS**

José Luis MARTINEZ

Lugar de desarrollo del trabajo de tesis
Programa de Materiales, Modelización y Metrología. FCEQyN. UNaM.

COMISIÓN DE SUPERVISIÓN (Resolución Consejo Directivo N° 161/13)

Dr. Gustavo SÁNCHEZ SARMIENTO	Universidad de Buenos Aires
Dra. Laura Ana RAMALLO	Universidad Nacional de Misiones
Dr. Néstor Raúl SIVIERO	Universidad Nacional de Misiones
Dra. Graciela GAVAZZO	Universidad Nacional de Misiones

CARRERA DE DOCTORADO EN CIENCIAS APLICADAS

Proyecto de Carrera N° 10933/11
Con reconocimiento de la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria
(CONEAU) N° 344/11.

AGRADECIMIENTOS

A la **Universidad Nacional de Misiones – Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales** por darme la oportunidad de ser mejor profesional.

Al **Dr. Mario R. ROSENBERGER** y **Dr. Carlos E. SCHVEZOV** por guiarme y alentarme durante la realización de este trabajo.

A los integrantes de la comisión de supervisión por sus valiosas contribuciones para el desarrollo de la tesis: **Dr. Gustavo SÁNCHEZ SARMIENTO, Dra. Laura A. RAMALLO, Dr. Néstor R. SIVIERO y Dra. Graciela GAVAZZO.**

A los miembros del tribunal examinador por el tiempo dedicado a la evaluación de la tesis y las observaciones realizadas previo a la defensa oral y pública: **Dr. Juan Carlos MICHALUS, Dr. Alejandro Rafael LESPINARD y Dr. Miguel Eduardo SCHMALKO.**

Al **Centro de Desarrollo e Innovación Tecnológica** dependiente del **Comité Ejecutivo de Desarrollo e Innovación Tecnológica** por permitirme la utilización de sus instalaciones para realizar el muestreo de suelo. También, por entregarme su apoyo y asesoramiento a través de sus miembros, especialmente del **Ing. Fidel GODOY.**

A los **colegas investigadores** por compartir sus experiencias y conocimientos.

A todos mi sincero agradecimiento.

RESUMEN

En este trabajo de tesis se propone un modelo matemático unidimensional para predecir el transporte de agua y soluto en el suelo, resolviendo numéricamente la ecuación de Richards (la cual describe el movimiento del agua) y la ecuación de advección-dispersión (la cual describe el movimiento del soluto). Debido a que estas ecuaciones son no lineales, su solución analítica no es posible excepto para casos especiales. Por este motivo, generalmente se utilizan aproximaciones numéricas. En la presente tesis, estas ecuaciones se resuelven numéricamente utilizando el método de diferencias finitas por ser un método versátil, de complejidad matemática moderada y de fácil aplicación a lenguajes de programación de alto nivel. El modelo utiliza la ecuación diferencial parcial de Richards expresada en términos del potencial matricial (capacidad de absorción de agua) como función de la profundidad y el tiempo. Se utilizó el método de diferencias finitas, imponiendo condiciones de contorno de Dirichlet y Neumann en suelo isotrópico y sin pendiente. Se modelaron contornos impermeables, drenaje libre y flujos de agua constantes. La aproximación se basó en un esquema modificado del método Crank-Nicolson; además, dentro de cada paso de tiempo se incorporó un proceso iterativo de refinamiento del potencial matricial, que finaliza cuando se cumple la condición de tolerancia impuesta de 10^{-9} . Se verificó el modelo con otros reportados en la literatura, evaluando conservación de la masa; y también, drenaje libre en la parte inferior del dominio. Se utilizaron diferentes tipos de suelo y condiciones de contorno. Se encontró buen acercamiento entre los resultados del modelo y los reportados en la literatura. Se verificó que la tasa de infiltración a tiempo infinito converge al valor de la conductividad hidráulica saturada. Se verificó que al imponer una condición de drenaje libre en el contorno inferior de dominios con diferentes profundidades, se obtuvieron resultados iguales excepto en la proximidad de ese contorno. Por tanto, los resultados del modelo de drenaje libre fueron independientes de la profundidad del suelo. Se comprobó conservación de la masa utilizando tres configuraciones para la conductividad hidráulica no saturada en medio paso: media aritmética, media geométrica y la media armónica, obteniendo un error relativo cercano al 10% y verificando que este valor disminuye cuando aumenta el valor del tiempo de simulación. Además, se realizaron dos ejercicios de validación comparando resultados experimentales con resultados de la simulación. En ambos casos se utilizó muestras no disturbadas para armar la columna experimental. Antes de estos ejercicios, se realizaron siete experimentos preliminares que permitieron lograr la puesta a punto del procedimiento experimental. El primer experimento presentó la mejor aproximación a los resultados del modelo matemático. Se concluyó que para un mejor acercamiento entre los resultados del modelo y los experimentales, es necesario realizar los ejercicios de validación con la misma muestra utilizada para la determinación de los parámetros del suelo, asegurando que los valores de conductividad saturada, humedad saturada y humedad residual sean los mismos que alimentan el modelo. Para resolver el movimiento del soluto, el modelo utiliza la ecuación diferencial de advección-dispersión expresada de forma mixta (en términos de humedad volumétrica y potencial matricial) como función de la profundidad y el tiempo. La aproximación se basó en un esquema modificado del método Crank-Nicolson. Se validó el modelo con otros encontrados en la literatura, utilizando diferentes tipos de suelo y condiciones de contorno. Se encontró buen acercamiento entre los resultados del modelo y la literatura.

ABSTRACT

In this thesis a one-dimensional mathematical model is proposed to predict water and solute transport in the soil. The model numerically solves the Richards equation (which describes the movement of water) and the advection-dispersion equation (which describes the movement of solute). Because these equations are nonlinear an analytical solution is not possible except for special simple cases. Therefore, numerical approximations are used. In this thesis, these equations are solved numerically using the finite difference method for being a versatile method of moderate mathematical complexity and easy to apply to programming on high level languages. The model uses the Richards partial differential equation expressed as a function of the matric potential (water absorption capacity), of the depth and of the time. The finite difference method was used, imposing boundary conditions of Dirichlet and Neumann in isotropic ground without slope. Contours impervious, of free draining and of constant water flows were modeled. The approach was based on a modified Crank-Nicolson scheme. In addition, within each time step an iterative process of refining the matrix potential, which ends when the condition imposed tolerance 10^{-9} , was incorporated for to deal with the nonlinear behaviour. The model was compared with others reported in the literature by evaluating conservation of mass. Different soil types and boundary conditions were used. Good approach between the model results and those reported in the literature was found. It was verified that the infiltration rate at infinite time converges to the value of the saturated hydraulic conductivity. It was found that by assuming a condition of free drainage in the bottom boundary of domains with different depths, the same results were obtained except in the vicinity of the contour. Therefore, the model results were independent of free-draining soil depth. Conservation of mass was tested using three configurations for unsaturated hydraulic conductivity in the middle step: arithmetic mean, geometric mean and the harmonic mean, getting an error on nearly 10% and verifying that this value decreases as the time value simulation. In addition, two validations comparing experimental results with the simulation results were performed. In both cases, undisturbed soil samples to build the experimental column were used. Before these experiments, seven preliminary exercises used for the tuning of the experimental procedure were performed. The first experiment showed the best approximation to the results of the mathematical model. It was concluded that a better approach between the model results and experimental, it is necessary to perform validation exercises on the same sample used for the determination of soil parameters, ensuring that the values of saturated conductivity, saturated moisture and residual moisture are the same as the model feed. To solve the movement of the solute, the advection-dispersion differential equation expressed in terms of volumetric moisture and matric potential as a function of depth and time was used. The approach was based on a modified scheme Crank-Nicolson method. This model and others founded in the literature were compared for validation purpose using different soil types and boundary conditions. Good approach between the model results and the literature was found with a strength dependence of the physical transport parameters as diffusivity and conductivity of species and the soil.

ESTRUCTURA DE LA TESIS

La presente tesis está conformada por seis secciones bien diferenciadas.

En la primera sección, se establece una descripción general del problema planteado y los objetivos generales y específicos de investigación.

En la segunda, se detallan las bases teóricas y antecedentes en torno al problema planteado. Se incluye la descripción del suelo como medio poroso; los fenómenos de transporte de agua y soluto en el suelo no saturado, definiendo las ecuaciones generales que gobiernan ambos movimientos; una breve reseña del método de diferencias finitas aplicado para la resolución de las ecuaciones de gobierno y el proceso de modelización considerado en este trabajo.

En la tercera sección, se presentan los materiales y métodos utilizados, definiendo los modelos matemáticos para el transporte de agua y soluto en el suelo no saturado, los experimentos de laboratorio realizados para validar el modelo de transporte de agua y la metodología de muestreo de suelo no disturbado que fue utilizada.

En la cuarta, se recopilan y analizan los resultados obtenidos, realizando análisis de convergencia y estabilidad de los modelos de agua y soluto; comparaciones con resultados de modelos de otros autores para agua y soluto; ensayos preliminares y experimentos de laboratorio para transporte de agua; validación del modelo de transporte de agua con los experimentos de laboratorio realizados; y otros análisis de sensibilidad del modelo de soluto.

En la quinta sección, se proponen aplicaciones de la tesis, resolviendo situaciones prácticas de mojado y secado del suelo. Para el mojado, se utilizan técnicas de riego por inundación y por goteo, durante cierto tiempo en un tipo de suelo determinado. Para el secado, se supone una situación de secado con evaporación y sin evaporación del suelo.

Finalmente, se presentan las conclusiones generales del trabajo de investigación y líneas para futuras investigaciones a partir del modelo matemático obtenido.

AGRADECIMIENTOS	I
RESUMEN.....	II
ABSTRACT	III
ESTRUCTURA DE LA TESIS.....	IV
1. INTRODUCCIÓN.....	1
1.1 OBJETIVO GENERAL	2
1.2 OBJETIVO ESPECÍFICOS.....	3
2. BASES TEORICAS Y ANTECEDENTES	4
2.1 EL SUELO COMO MEDIO POROSO	4
2.2 ANTECEDENTES RELACIONADOS A LA INFLUENCIA DEL AGUA EN LAS PROPIEDADES FÍSICAS DEL SUELO ..	5
2.3 MOVIMIENTO DEL AGUA EN EL SUELO.....	6
2.4 ANTECEDENTES RELACIONADOS A LA MEDIDA DE LA CURVA DE RETENCIÓN HÍDRICA	11
2.5 ECUACIÓN DE RICHARDS.....	12
2.6 ANTECEDENTES RELACIONADOS A MODELIZACIÓN DEL MOVIMIENTO DE AGUA EN EL SUELO	14
2.7 MOVIMIENTO DEL SOLUTO EN EL SUELO	17
2.8 ANTECEDENTES RELACIONADOS ECUACIÓN DIFUSIÓN Y ADVECCIÓN	20
2.9 MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS	23
2.10 PROCESO DE MODELIZACIÓN.....	26
3. MATERIALES Y MÉTODOS	29
3.1 CARACTERÍSTICAS DE LOS SUELOS UTILIZADOS.....	29
3.2 MOVIMIENTO DEL AGUA EN EL SUELO.....	35
3.2.1 Modelo matemático y ecuaciones de gobierno	35
3.2.2 Modelo numérico.....	35
3.3 TRANSPORTE DE SOLUTO EN EL SUELO	38
3.3.1 Modelo matemático y ecuaciones de gobierno	38
3.3.2 Modelo numérico.....	39
3.4 EXPERIMENTO EN LABORATORIO	41
3.5 MUESTREO DE SUELO NO DISTURBADO	44
4. RESULTADO Y DISCUSIÓN	46
4.1 MOVIMIENTO DEL AGUA EN EL SUELO.....	46
4.1.1 Análisis de convergencia y estabilidad del modelo.....	47
4.1.2 Comparación con modelo de Wendland.....	49

4.1.3	Comparación con experimentos de Miranda.....	49
4.1.4	Comparación con modelos de Celia y Wendland.....	53
4.1.5	Comparación con modelo de Neumann.....	56
4.1.6	Comparación con modelo de Mollerup	57
4.1.7	Comparación con modelo de Caviedes.....	59
4.1.8	Comparación con experimento teórico de Caviedes	60
4.1.9	Análisis de las comparaciones	62
4.1.10	Análisis de sensibilidad a los parámetros del suelo	63
4.2	EXPERIMENTOS.....	63
4.2.1	Ensayos preliminares.....	63
4.2.2	Experimentos	68
4.2.3	Comparación de experimentos con simulaciones.....	70
4.2.4	Discusión general, limitaciones del modelo y aplicaciones.....	71
4.3	TRANSPORTE DE SOLUTO.....	72
4.3.1	Verificación del modelo desarrollado.....	74
4.3.2	Análisis de sensibilidad del parámetro de amortiguamiento.....	76
4.3.3	Análisis de sensibilidad al coeficiente de difusión, Δz y Δt	77
4.3.4	Análisis entre diferentes tipos de suelos y condiciones de contorno del agua	78
4.3.5	Validación comparando con otros autores	79
5.	APLICACIONES DEL MODELO DE AGUA DESARROLLADO	81
5.1	MOJADO DEL SUELO.....	81
5.2	SECADO DEL SUELO	82
6.	CONCLUSIONES	85
6.1	LÍNEAS FUTURAS DE TRABAJO	85
7.	REFERENCIAS	87
8.	ANEXO.....	92
8.1	CÓDIGO COMPUTACIONAL (DIRICHLET).....	92
8.2	CÓDIGO COMPUTACIONAL (NEUMANN)	97

1. INTRODUCCIÓN

Una de las principales prioridades de un país es obtener alimentos de mejor calidad. Desde luego, esto implica un desarrollo en la agricultura en busca de implementar medidas innovadoras tendientes a proteger los cultivos (Navarro et al. 2007). Sin embargo, este crecimiento de la producción agrícola trae aparejado el desafío de aumentar la competitividad y los beneficios económicos de forma sustentable (Corrêa et al. 2006; Kumar et al. 2010). Por el contrario, las medidas tomadas para proteger los cultivos de los daños ocasionados por plagas, enfermedades o corregir la carencia de nutrientes del suelo, han convertido a las agriculturas campesinas en explotaciones agrícolas intensivas, debido a la aplicación de sustancias tóxicas (agroquímicos) que perjudican el medio ambiente (Alfaro Soto et al. 2007, Fantke et al. 2011; Molina 2012). Algunos estudios demuestran que menos del 0,3% del agroquímico aplicado alcanza la plaga objetivo y el resto impacta de alguna forma en el medio ambiente, contaminando suelo, aire y agua (Werf 1996); otras investigaciones reducen esta eficacia a menos del 0,1% (Arias et al. 2008). En este sentido, se evidencia una degradación creciente del suelo y una pérdida irrecuperable del mismo, ocasionando la imposibilidad futura de hacer un uso óptimo del recurso, además de la agricultura, en otras actividades productivas como la ganadería o recreación (Silva y Correa 2009).

El estudio de la contaminación del suelo es relativamente reciente, el mayor esfuerzo estaba concentrado en el estudio de la contaminación del agua y aire, debido a que la misma es más evidente que en el suelo. Esta nueva orientación en la investigación científica surge luego de comprobar que el uso indiscriminado de agroquímicos estaba afectando el suelo y consecuentemente la producción alimenticia (Fontúrbel et al. 2004). Los investigadores observan que los agroquímicos ingresan al suelo bajo dos formas principales: solución acuosa y de granulados aplicados directamente al suelo (Arias et al. 2008). Algunos estudios realizados demuestran que entre el 40 y 90% de la contaminación del agua superficial en campos agrícolas se debe a la manipulación de agroquímico, por ejemplo, derrames en las operaciones de llenado y enjuague de limpieza de equipos de pulverización, creando un alto riesgo de contaminación del suelo (De Wilde et al. 2009). También, se ha visto que los agroquímicos aplicados de forma intensiva en el suelo pueden contaminar aguas subterráneas a través de un proceso de lixiviación (Zhang y Ren 2003; Chica et al. 2006; Keesstra et al. 2012; Tediosi et al. 2012).

Por eso, el estudio cuantitativo del flujo de agua y transporte de soluto en suelo no saturado se convierte en un factor clave para la protección de la calidad del agua subterránea (Al-Barwani et al. 2000). El agua es un recurso natural imprescindible, del que cada vez se requiere un mayor consumo en las poblaciones urbanas y que cada vez resulta más escaso. En este sentido, la economía en el uso del agua en sistemas agrícolas constituye una prioridad fundamental dada su fuerte repercusión en el monto total de agua utilizada. Sin embargo, la producción agrícola, por exigencias de la economía de mercado, necesita cada vez más asegurar unos rendimientos mínimos para ser una actividad viable, y el riego se vuelve imprescindible para obtener una producción más regular y predecible de los cultivos. Afortunadamente, existe un caudal creciente de conocimientos y tecnologías disponibles que ayudan a incrementar la eficiencia en el uso del agua en la agricultura (Medrano et al. 2007). Se estima que un 70% del consumo mundial de agua se utiliza en la agricultura. No obstante, la mitad de esa cantidad no es consumida y se filtra a través del suelo pasando a formar parte de las aguas subterráneas o pasa a formar parte de las aguas superficiales por drenaje. Por tanto, una eficiencia del uso del agua, mediante prácticas y sistemas de riego y drenaje adecuados podrá reducir las pérdidas y la contaminación de otras aguas (Artieda 2008).

El porcentaje de humedad necesaria en el suelo se fija en función del cultivo y climatología. En el caso de cultivos leñosos debe estar entre 33% y 66% de la superficie cultivada tomada a la profundidad donde hay mayor densidad de raíces y que suele considerarse a 30 cm. Dado que el volumen de agua a aportar viene dado por las necesidades del cultivo, es importante aplicarlo con un caudal de emisión que no provoque pérdidas por percolación más allá de las necesarias para el lavado de sales, puesto que el agua que se pierde en esa forma además de aumentar innecesariamente el consumo, produciría una pérdida de nutrientes y contaminación de las aguas subterráneas (Arbat et al. 2003).

Para llevar el agua desde la fuente de abastecimiento a la parcela del usuario, es necesario conducirla por un sistema de canales y obras de control, que permiten su distribución entre las diferentes unidades, zonas y secciones de riego, hasta llegar a cada una de las parcelas que requieren del riego y concluye en la zona radicular de los cultivos. Este recorrido, durante el cual se producen diversas pérdidas que merman el aprovechamiento del agua, se considera dividido en tres tramos: red de conducción, red de distribución e interparcelario, y las parcelas. En cada uno de los tramos citados, las pérdidas se tratan y cuantifican de manera independiente, lo que da lugar a tres eficiencias: eficiencia de conducción, eficiencia de distribución y eficiencia de aplicación (Exebio et al. 2005).

Este fenómeno impulsó a la Ingeniería Ambiental a buscar nuevas tecnologías para la remediación ambiental de los suelos impactados por agroquímicos, motivada principalmente por las exigencias legales de orden ambiental, intereses comerciales, esfuerzos gubernamentales y no gubernamentales (Lenoir y Tornari 2004). Desgraciadamente, las técnicas de remediación son consideradas caras por el empresariado y, por lo tanto, poco implementadas; en algunos casos la remediación es aplicada en posiciones y tiempo incorrectos debido a la falta de conocimiento sobre la distribución espacial de agroquímico (Favero et al. 2007).

Buscando mejorar la toma de decisiones al momento de la remediación ambiental, se ha incrementado el uso de modelos matemáticos del transporte de agroquímicos en el suelo (Aparicio et al. 2011; Golfier et al. 2011; Hammou et al. 2011; Da Silva et al. 2012). La toma de decisiones también puede basarse en experimentos de laboratorio o de campo, pero las mismas se limitan al estudio de un número reducido de escenarios factibles. Además, los altos costos y gran cantidad de tiempo que insumen estos ejercicios, lo hacen inviable. En cambio, un modelo matemático permite predecir y calcular la movilidad del agroquímico en el suelo en diferentes escenarios medioambientales (Persicani et al. 1996; Zhang y Ren 2003; Bedos et al. 2009; Luo et al. 2012).

En este trabajo de tesis se propone un modelo matemático para predecir el transporte de agua y soluto en el suelo, resolviendo numéricamente la ecuación de Richards (movimiento de agua) y la ecuación de advección-dispersión (movimiento de soluto). Debido a que estas ecuaciones son no lineales, su solución analítica no es posible excepto para casos especiales. Por este motivo, generalmente se utilizan aproximaciones numéricas (Celia et al. 1990). En este trabajo, se resuelve numéricamente utilizando el método de diferencias finitas por ser un método versátil, de complejidad matemática moderada y de fácil aplicación a lenguajes de programación de alto nivel.

1.1 Objetivo general

El objetivo general de este trabajo es obtener un modelo matemático unidimensional para simular el flujo de agua y transporte de soluto en suelo no saturado.

1.2 Objetivo específicos

Los objetivos específicos son:

- Obtener un modelo unidimensional de flujo de agua en suelo no saturado.
- Obtener un modelo unidimensional de flujo de agua y transporte de soluto en suelo no saturado de una capa sin interacciones.
- Validar los modelos obtenidos con datos disponibles en la literatura y resultados obtenidos en experimentos de laboratorio.

2. BASES TEORICAS Y ANTECEDENTES

2.1 El suelo como medio poroso

El suelo es un medio poroso donde existe presencia simultánea de una matriz sólida y espacios vacíos (poros). Estos últimos están ocupados por uno o más fluidos (ej. agua y aire). El suelo puede ser dividido verticalmente en dos grandes zonas (ver [Figura 2.1](#)) en función de la proporción en que los poros se encuentran llenos de agua, siendo **zona saturada** aquella donde todo el espacio vacío está lleno de agua y **zona no saturada** (también llamada, “zona parcialmente saturada”, “zona de aireación” o “zona vadoza”) cuando una parte del espacio vacío tiene agua y el resto está ocupado por aire, conformando un sistema trifásico compuesto por sólidos, líquidos y gases ([Bucio y Anguas 2002](#); [Alfaro Soto 2008](#); [Bear y Cheng 2010](#), [Linares Forero 2012](#)).

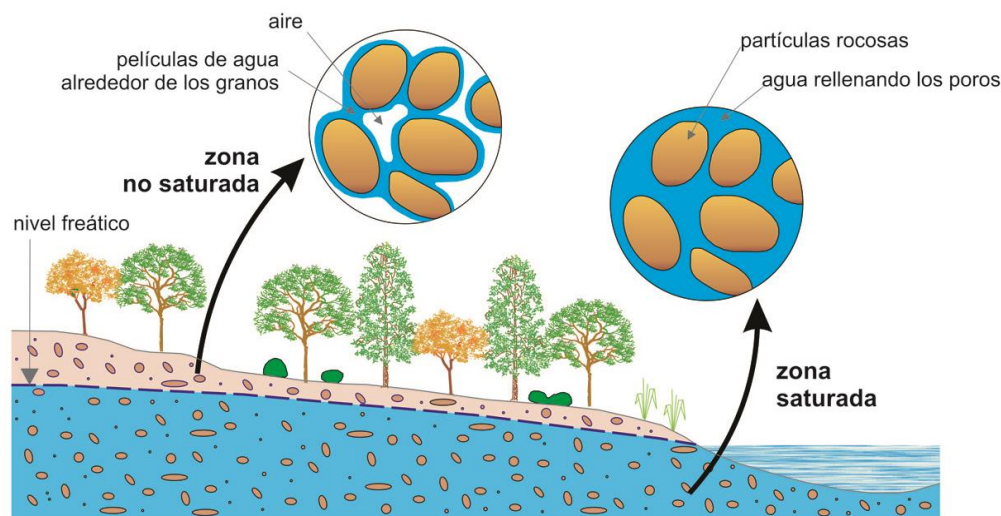


Figura 2.1: Representación esquemática de las zonas del suelo
(<https://medioambientedecalidad.wordpress.com/2013/02/07/suelo-y-subsuelo/>)

El movimiento de agua en el suelo ocurre tanto en sentido vertical como horizontal. En condiciones saturadas, el movimiento es predominantemente horizontal y en condiciones de no saturación, el flujo es preferentemente vertical ([Gabriels et al. 2006](#)). Luego de una precipitación, el agua se infiltra a través de la superficie del suelo, moviéndose fundamentalmente hacia abajo y especialmente por influencia de la gravedad, saturando todos los poros del suelo.

El suelo está compuesto por partículas minerales (arcilla, limo y arena) que tienen un amplio rango de tamaños, dando origen a distintas **clases texturales** del suelo; por ejemplo: un posible suelo con **textura franco arcilloso** surge por la combinación de 30% de arcilla, 40% de limo y 30% de arena; otro ejemplo, un posible suelo con **textura franco arcilloso limoso** surge por la combinación de 30% de arcilla, 60% de limo y 10% de arena (ver [Figura 2.2](#)). **Arcilla** es suelo constituido por agregados de silicatos de aluminio hidratados, procedentes de la descomposición de rocas que contienen feldespato, como el granito. Físicamente se considera un coloide, de partículas extremadamente pequeñas y superficie lisa. El diámetro de las partículas de la arcilla es inferior a 0,002 mm; **limo** es un sedimento clástico con diámetro de las partículas que varía de 0,0039 mm a 0,0625 mm; **arena** es un conjunto de partículas de rocas disgregadas. En geología se denomina arena al material compuesto de partículas cuyo tamaño varía entre 0,063 y 2 mm.

La distribución del tamaño de las partículas afecta a las propiedades del suelo, por ejemplo la permeabilidad y la retención de agua. El estudio del flujo del agua en la zona no saturada del suelo no puede llevarse a cabo sin conocer la distribución granulométrica del suelo. En general, las fracciones gruesas se determinan por tamizado y la diferenciación entre limos y arcillas se consigue fácilmente por densitometría (Morell et al. 1995; Cohen y Mualem 2011; Gallegos Fonseca et al. 2011; Rahimi y Byzedi 2012). Dentro de los sistemas de clasificación de suelos basados en la distribución de tamaño de las partículas, se encuentra el propuesto por el Departamento de Agricultura de Estados Unidos (USDA). Este triángulo textural (ver Figura 2.2) toma en cuenta el porcentaje de arcilla, limo y/o arena de una muestra de suelo (Bear y Cheng 2010).

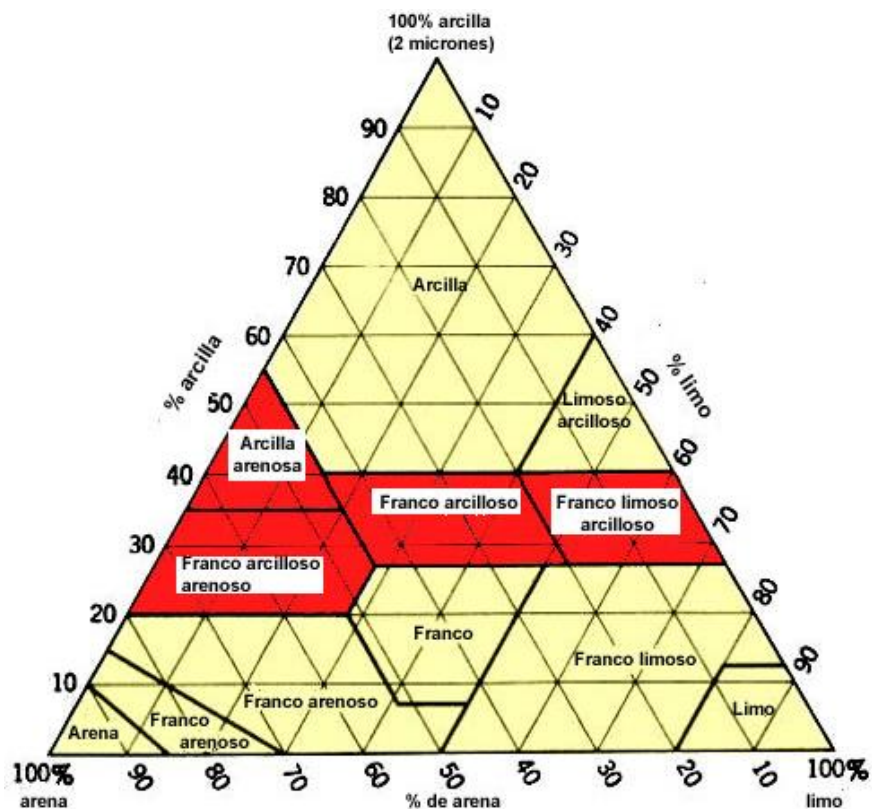


Figura 2.2: Diagrama triangular de las clases texturales básicas del suelo según USDA (ftp://ftp.fao.org/fi/CDrom/FAO_Training/FAO_Training/General/x6706s/x6706s06.htm)

2.2 Antecedentes relacionados a la influencia del agua en las propiedades físicas del suelo

Zamora Cardona y Cristancho (2008) investigaron el efecto de la humedad sobre una de las propiedades físicas del suelo: la densidad. Para hallar la densidad real siguieron el procedimiento de la norma colombiana INVIAS-128. El objetivo del experimento fue hallar el peso de agua destilada desplazada al introducir una muestra de suelo, obteniendo $2,65 \text{ g/cm}^3$ para arena y $2,70 \text{ g/cm}^3$ para arcilla inorgánica. Para hallar la densidad aparente siguieron el procedimiento de la norma colombiana INVIAS-14, el cual se basa en tener una muestra de suelo con un contenido de humedad conocido y encontrar el peso de esta muestra compactada ocupando siempre el mismo volumen del recipiente. Realizaron este procedimiento con distintos contenidos de humedad y valor de compactación del suelo. Encontraron una relación del comportamiento de la densidad aparente como función de la humedad para las distintas

compactaciones (ver [Figura 2.3](#)). Concluyeron que la densidad del suelo depende de la humedad y del grado de compactación.

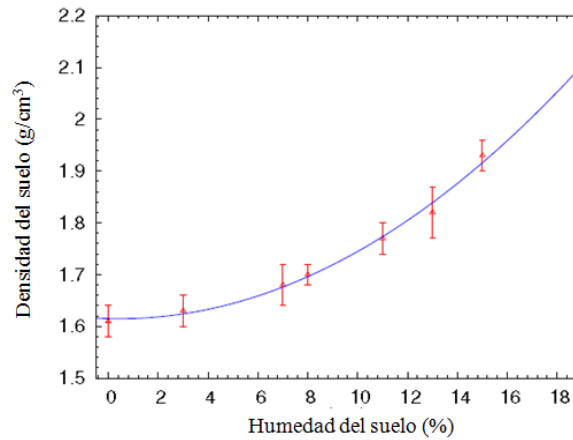


Figura 2.3: Comportamiento promedio de la densidad de arena compactada en función de la humedad según [Zamora Cardona y Cristancho \(2008\)](#)

2.3 Movimiento del agua en el suelo

Una de las principales leyes que gobiernan el movimiento del agua en el suelo bajo condiciones isotérmicas e isotrópicas, es la **ley de Darcy**. A partir de los experimentos realizados en 1856, el ingeniero hidráulico francés Henry Darcy llega a la ley empírica que lleva su nombre. Esta ley dice que el volumen de agua por unidad de tiempo que pasa a través de una columna homogénea de suelo de área constante es:

- proporcional al área transversal de la columna de suelo,
- proporcional a la diferencia en la elevación de nivel entre los reservorios de agua de entrada y salida,
- inversamente proporcional a la longitud de la columna de suelo.

$$Q = K_s A \frac{h_1 - h_2}{L} \quad (2.1)$$

Donde Q es el volumen de agua por unidad de tiempo que pasa a través de una columna homogénea de suelo [$\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$], K_s es la conductividad hidráulica saturada del suelo [$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$], A es el área transversal de la columna de suelo [m^2], h_1 y h_2 son la elevación del nivel del reservorio de agua de entrada y salida respectivamente [m] y L es la longitud de la columna de suelo [m] (ver [Figura 2.4](#)). También se puede escribir como:

$$q = K_s \frac{h_1 - h_2}{L} \quad (2.2)$$

Donde q es la densidad de flujo de agua [$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$].

En mecánica de fluidos se utiliza el número adimensional de Reynolds (Re) como criterio para distinguir entre flujo laminar que ocurre para velocidades bajas y flujo turbulento que ocurre para velocidades altas. Este número expresa la relación entre la fuerza inercial y de viscosidad que actúan en un fluido en movimiento. Todas las evidencias indican que la ley de Darcy es válida siempre y cuando el flujo sea laminar ([Álvarez et al. 1999](#); [Reyna, E. y Reyna, S. 2012](#)), para valores de Re entre uno y diez. En este rango la fuerza de viscosidad es predominante. Muchos de los flujos en zonas saturadas ocurren en este rango, excepto en las cercanías de puntos de bombeo de agua, pozos de recarga o manantiales ([Bear y Cheng 2010](#)).

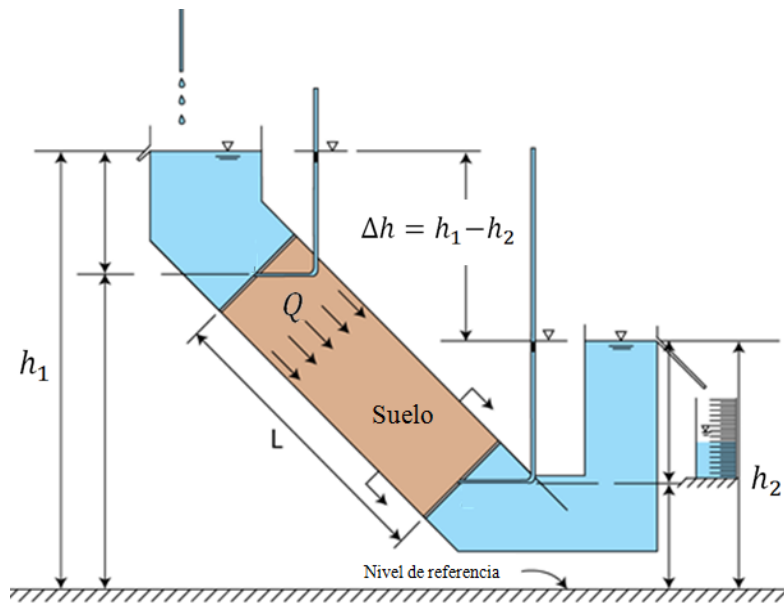


Figura 2.4: Esquema explicativo de la ley de Darcy (<http://nptel.ac.in/courses/105103026/3>)

La **conductividad hidráulica** es la propiedad del suelo que describe la facilidad con la cual los poros del suelo permiten el flujo de agua (Gabriels et al. 2006). Es afectada por la porosidad total, la distribución de poros, su tamaño y geometría. También, influye la viscosidad, densidad y gradiente hidráulico del agua. Además, varía según la clase textural y **estructura del suelo** (forma en que se agrupan las partículas individuales de arcilla, limos y arena, originando estructuras granulares, en bloques o laminares), y a cambios en el contenido de humedad del suelo. La gran variabilidad espacial presente normalmente en los suelos y la posible relación histerética agravan su determinación (Acevedo et al. 1979). El fenómeno de histéresis será explicado más adelante. Por estos motivos, la determinación *in situ* de la **conductividad hidráulica no saturada** (conductividad hidráulica en la zona no saturada del suelo) refleja de mejor forma las condiciones de campo. Los suelos arenosos, a diferencia de los arcillosos, tienen alta conductividad hidráulica, debido a la presencia de mayor cantidad de poros (Nissen et al. 2006).

La conductividad hidráulica de un suelo saturado es constante en el tiempo, ya que se asume que la totalidad del espacio poroso se encuentra colmado de agua. La misma alcanza su valor máximo cuando el suelo se encuentra saturado, en ese momento se llama conductividad hidráulica saturada. Para suelo saturado, la conductividad hidráulica (Álvarez et al. 1999) es:

$$K_s = \frac{k\rho g}{\mu} \quad (2.3)$$

Donde k es la permeabilidad intrínseca del suelo [m^2], ρ es la densidad del agua [$Kg.m^{-3}$], g es la gravedad [$m.s^{-2}$] y μ es la viscosidad dinámica del agua [$Kg.(m.s)^{-1}$].

Con base en la conductividad hidráulica saturada del suelo y utilizando modelos matemáticos se puede determinar la conductividad hidráulica no saturada (Mesquita et al. 2012), la cual varía en respuesta a los cambios de potencial matricial (Casanova et al. 2003; Zamora Cardona y Cristancho 2008). El **potencial matricial**, también llamado “potencial de succión” o “succión del suelo”, está relacionado con la capacidad de movilizar el agua existente en el suelo. La succión se debe principalmente a la presión del aire dentro del suelo. Por ese motivo, en estado de saturación no existe succión. Entre el suelo y el agua existen interacciones (químicas, térmicas, eléctricas) que pueden afectar el movimiento del agua. Sin

embargo, solo se considera significativo (Samper 1995) el efecto del potencial matricial (ψ) y el potencial gravitacional (z). El potencial matricial está asociado con el fenómeno de adsorción del agua en la superficie del suelo (Bear y Cheng 2010) y el potencial gravitacional está vinculado al trabajo necesario para desplazar el agua desde un punto de referencia a otro distanciado verticalmente. Este último es de mayor importancia en condiciones de saturación, ya que en éste estado los otros potenciales son nulos (Zamora Cardona y Cristancho 2008). Según Reichardt et al. (1993) y Coussy (2010) la ecuación de Darcy-Buckingham para suelos no saturados es:

$$\vec{q} = -K\nabla H \quad (2.4)$$

Donde: K es la conductividad hidráulica del suelo no saturado [$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$], generalmente tomada como una función de la humedad volumétrica del suelo θ [$\text{m}^3\cdot\text{m}^{-3}$] o del potencial matricial ψ [m]: $K(\theta)$ o $K(\psi)$, en su versión unidimensional es un escalar, K ; ∇H es el gradiente del potencial hidráulico [$\text{m}\cdot\text{m}^{-1}$], siendo el potencial hidráulico $H = \psi + z$, ψ es el potencial matricial [m], z es el potencial gravitacional [m], orientado positivamente hacia arriba, entonces si la altura de referencia es asumida como $z = 0$ en la superficie del suelo, se cumple para ese plano que $H = \psi$, en el caso unidimensional vertical $\nabla H = \frac{dH}{dx}$. El signo negativo en la Ec. (2.4) se debe a que \vec{q} es una magnitud vectorial, cuya dirección coincide con los H decrecientes, es decir, \vec{q} será positivo cuando ∇H es negativo (San Román et al. 2011).

Existe una relación inversa entre la humedad volumétrica del suelo θ [$\text{m}^3\cdot\text{m}^{-3}$] y el potencial matricial ψ [m]. La humedad del suelo θ se mide por el contenido volumétrico [$\text{m}^3\cdot\text{m}^{-3}$] de agua en el suelo o de forma gravimétrica [$\text{Kg}\cdot\text{Kg}^{-1}$] como la masa de agua por masa de suelo húmedo. Los valores de humedad están comprendidos entre 0, para un suelo totalmente seco, y un máximo que representa la saturación cuando todos los poros están llenos de agua (Castellón et al. 1995).

La relación entre la humedad del suelo y el potencial matricial, $\psi(\theta)$, se denomina **curva de retención hídrica** (también “curva de succión” o “curva característica”), (ver Figura 2.5). Esta curva muestra la cantidad de agua retenida por el suelo por presión necesaria para extraerla (Bear y Cheng 2010; Zavala et al. 2012). Esta relación, refleja la capacidad del suelo, o cualquier otro medio poroso, para retener el agua en función de la succión (tensión) ejercida. También se expresa como $\theta(\psi)$ o $\theta(pF)$, siendo pF el logaritmo del potencial matricial, expresado en centímetros de carga hidráulica equivalente y en valores absolutos. La humedad también puede ser expresada en grado de saturación y el potencial matricial en unidades de presión. El **grado de saturación** representa la proporción de vacíos (o espacios porosos) ocupada por el agua, y se define como la relación entre el volumen de agua y el volumen de vacíos. Varía entre 0 % (suelo seco) y 100 % (suelo saturado).

La curva de retención de agua del suelo presenta tres regiones (Pardo y Salinas 2006), las cuales están definidas en función del proceso de saturación del suelo:

- **Zona de saturación capilar.** El suelo se encuentra esencialmente saturado. El valor de la presión de entrada de aire del suelo es el valor de la succión que se debe exceder para que los poros más grandes del suelo comiencen a drenar y el aire empiece a ocupar los poros del suelo.
- **Zona de desaturación.** El agua que se encuentra dentro de los poros es desplazada por el aire fluyendo como líquido.
- **Zona de saturación residual.** El agua se mantiene fija y el movimiento de humedad principalmente ocurre como flujo de vapor.

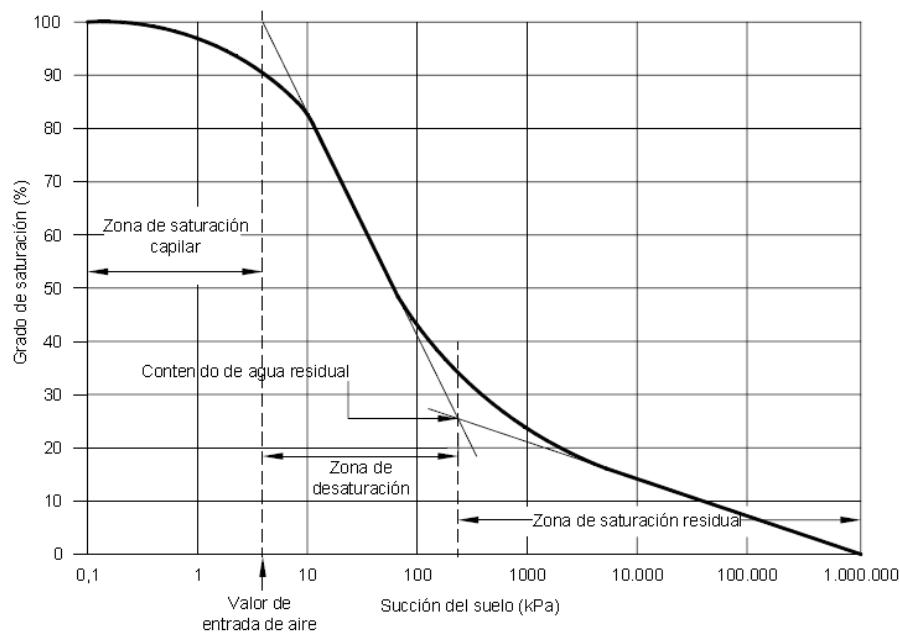


Figura 2.5: Regiones de la curva de retención hídrica (Sillers et al. 2001)

La curva de retención se puede determinar en campo o en laboratorio. Para la primera alternativa, se requiere la instalación de tensiómetros para el control del potencial del agua en el suelo y un dispositivo de medida de humedad en el mismo punto, debiendo tener ambos un volumen de suelo de referencia similar. Esta medición presenta dificultades técnicas y demanda gran cantidad de tiempo que motiva que su realización no siempre sea viable. Para la segunda, se utilizan equipos (por ejemplo la olla de Richards utilizada en esta investigación) que permiten soslayar las dificultades mencionadas y tener mayor control sobre las variables que intervienen.

La curva de retención hídrica es fuertemente no lineal y está afectada por el fenómeno de histéresis (Martínez Fernández 1995). Esta curva puede ser obtenida por medio del secado o mojado de una muestra de suelo. Se observa que la curva de secado difiere de la obtenida durante el mojado (ver Figura 2.6). Este fenómeno se llama histéresis y es atribuido fundamentalmente a tres causas (Bear y Cheng 2010).

La primera causa es llamada “efecto tintero”, por la configuración geométrica de los poros del suelo, donde conviven pasajes angostos y anchos. Durante el secado el radio de curvatura disminuye, ocasionando retención de agua en las zonas angostas, disminuyendo la velocidad del drenaje (ver Figura 2.7).

La segunda causa, llamada “efecto gota de lluvia”, es debido al hecho de que el ángulo de contacto es más grande en la traza de avance de una interfase aire-agua en un sólido que en el retroceso, a causa de variabilidad en los minerales que componen la superficie, la rugosidad del sólido y la gravedad.

La tercera causa de histéresis se debe al atrapamiento de aire que ocurre cuando una muestra inicialmente saturada se drena y luego se vuelve a mojar.

La **humedad residual**, o también “contenido de agua residual”, es el agua que se encuentra en los poros no interconectados y, por lo tanto, no es fácilmente extraíble, provocando que los incrementos de la succión no produzcan cambios significativos en la humedad del suelo (Pardo y Salinas 2006, Zamora Cardona y Cristancho 2008, Paradelo et al. 2009). Según Bear y Cheng (2010) es el agua que permanece en espacios vacíos del suelo incluso a presiones muy altas, formando una película delgada relativamente inmóvil.

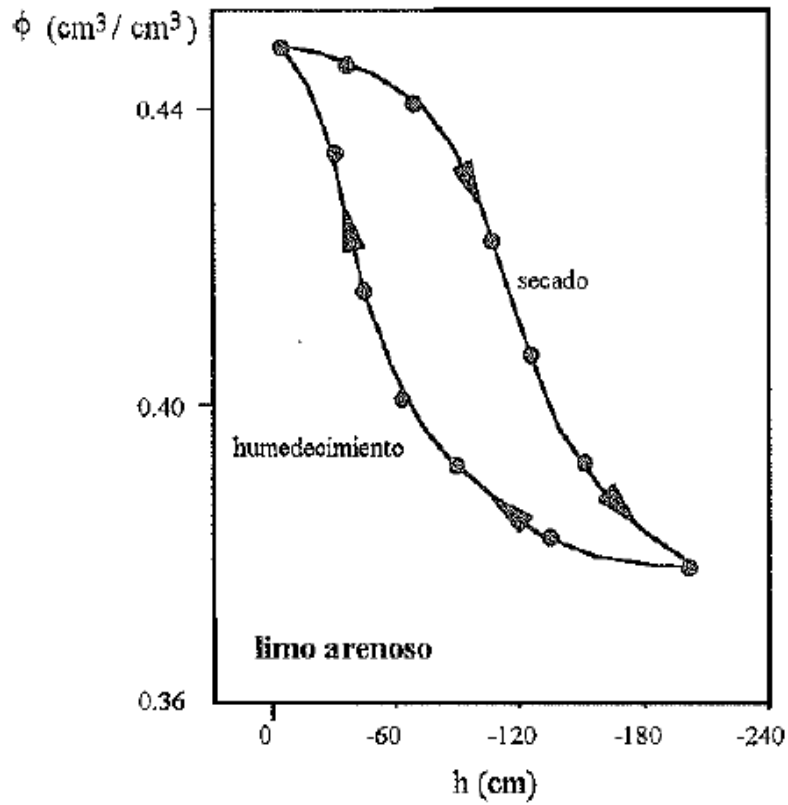


Figura 2.6: Fenómeno de histéresis en suelo arenoso (Morell et al. 1995). Se grafica humedad volumétrica en el eje vertical y potencial matricial en el eje horizontal

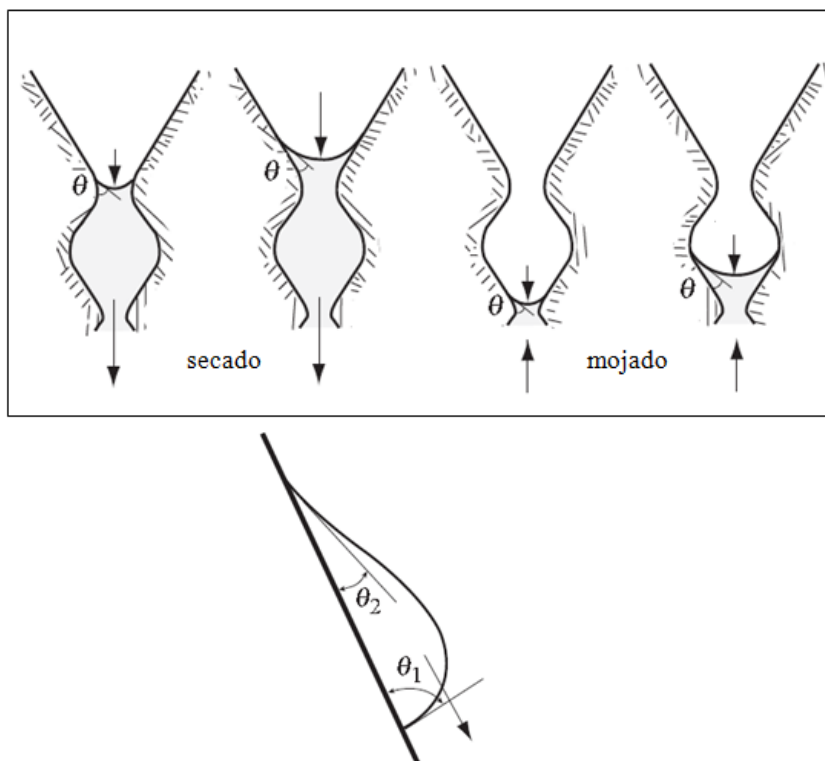


Figura 2.7: Causas de histéresis (Bear y Cheng 2010). Efecto tintero (arriba) y efecto gota de lluvia (abajo)

Entre los varios modelos matemáticos existentes que muestran la relación entre la humedad volumétrica del suelo θ [$\text{m}^3 \cdot \text{m}^{-3}$] y el potencial matricial ψ [m] (Neto et al. 2000), los propuestos por Brooks and Corey (1964) y Mualem – van Genuchten (1980) son los más populares (Assouline y Tartakovsky 2001). En la investigación realizada se optó por el modelo Mualem – van Genuchten (Caviedes et al. 2013) dada su extensa utilización en la literatura revisada, el modelo se describe por las siguientes ecuaciones:

$$\theta(\psi) = \begin{cases} \frac{\theta_s - \theta_r}{(1 + (\alpha|\psi|)^j)^m} + \theta_r & \psi \leq 0 \\ \theta_s & \psi > 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

$$S_e = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \quad (2.6)$$

$$K(\psi) = \begin{cases} K_s S_e^{0.5} \left[1 - \left(1 - S_e^{\frac{1}{m}} \right)^m \right]^2 & \psi \leq 0 \\ K_s & \psi > 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

$$m = 1 - \frac{1}{j} \quad (2.8)$$

Donde θ_r es el valor de humedad residual [$\text{m}^3 \cdot \text{m}^{-3}$], θ_s es el valor de humedad saturada [$\text{m}^3 \cdot \text{m}^{-3}$], K_s es la conductividad hidráulica saturada [$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$], α [m^{-1}], m y j son parámetros característicos de cada tipo de suelo y S_e es la saturación efectiva [$\text{m}^3 \cdot \text{m}^{-3}$].

Este modelo es altamente no lineal y son las ecuaciones constitutivas que se utilizarán para modelar el movimiento de agua en suelo. Cada uno de los parámetros debe ser obtenido experimentalmente como se explica en las siguientes secciones.

2.4 Antecedentes relacionados a la medida de la curva de retención hídrica

Las determinaciones de la curva de retención hídrica ya se realizaban en la década del 80 con diferentes métodos y los últimos cambios encontrados se comentan a continuación.

Bucio et al. (2002) remarcaron la importancia del estudio de la curva característica del agua ante cambios de humedad en el suelo no saturado, para el análisis de la relación succión–humedad del suelo no saturado, y también sus aplicaciones para la determinación de otros parámetros del suelo que tienen influencia directa en las propiedades mecánicas para el soporte de estructuras y caminos.

Casanova et al. (2003) midieron la conductividad hidráulica en distintos suelos y verificaron que los tensioinfiltrómetros constituyen instrumentos que ofrecen una estimación simple y rápida de la conductividad hidráulica saturada del suelo.

Gabriels (2006) explicó que la selección del método e instrumento para medir la conductividad hidráulica va a depender del propósito de la medición. Uno de los parámetros con mayor variabilidad es la conductividad hidráulica, especialmente cuando la medición se realiza en muestras pequeñas como las muestras cilíndricas no alteradas, las cuales representan el método más tradicional y barato. Debido a la mayor variabilidad se prefiere hacer las determinaciones directamente en el campo, utilizando métodos como: pozo, pozo o barreno invertido. La utilización del infiltrómetro de tensión ha ganado popularidad para mediciones de la conductividad hidráulica saturada o cerca de saturación debido a que su uso es rápido, fácil y altera poco la superficie del suelo; sin embargo, presenta algunas limitaciones asociadas a la base teórica para el cálculo y a la necesidad de garantizar un estrecho contacto entre el infiltrómetro y el suelo. El infiltrómetro de doble anillo y el

permeámetro Guelph también han sido ampliamente utilizados con resultados satisfactorios.

Nissen et al. (2006) realizaron experimentos en varios tipos de suelos y observaron que los gradientes hidráulicos (diferencias de potencial entre estratos superiores e inferiores) fueron más notorios en aquellos suelos que presentaron una distribución menos uniforme de su porosidad en el perfil, concluyendo que esto explicaría el comportamiento más irregular de su conductividad hidráulica.

2.5 Ecuación de Richards

La combinación entre la ecuación de Darcy-Buckingham y la ecuación de conservación de masa en medios porosos da origen a la ecuación que gobierna el movimiento del agua en suelo no saturado, llamada **ecuación de Richards** (Pour et al. 2011). Esta ecuación puede ser escrita en varias formas donde la variable dependiente será el potencial matricial ψ [m] o la humedad volumétrica del suelo θ [$\text{m}^3 \cdot \text{m}^{-3}$] y las relaciones constitutivas entre estas permitirán la conversión de una forma en la otra.

Las tres formas estándares de la ecuación de Richards pueden ser escritas (Bastos de Vasconcellos y Amorim 2001) como función del potencial matricial Ec. (2.9), de la humedad Ec. (2.10) o mixta Ec. (2.11). En este trabajo se utiliza potencial matricial ya que permite obtener una solución continua en la transición del régimen no saturado al saturado (Caviedes et al. 2013). La forma unidimensional en la dirección vertical de las tres formulaciones mencionadas se muestran a continuación:

$$C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] - \frac{\partial K(\psi)}{\partial z} \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] - \frac{\partial K(\theta)}{\partial z} \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K(\theta) \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] - \frac{\partial K(\theta)}{\partial z} \quad (2.11)$$

Donde $C(\psi) = \partial \theta / \partial \psi$ es la capacidad específica del suelo [m^{-1}], θ es la humedad volumétrica [$\text{m}^3 \cdot \text{m}^{-3}$], ψ es el potencial matricial [m], $K(\psi)$ o $K(\theta)$ es la conductividad hidráulica no saturada [$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$], $D(\theta) = K(\theta) / C(\theta)$ es la difusividad no saturada [$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$], t es el tiempo [s], y z es la coordenada vertical (positivo hacia abajo) [m].

La ecuación de Richards es una ecuación parabólica no lineal que tiene solución analítica solamente para ciertos casos particulares. Hoy día se está trabajando en encontrar soluciones consistentes que sean eficientes y que tengan pequeños valores de error en el balance de masa. En la sección siguiente se comentarán sobre las técnicas numéricas usadas para resolver dicha ecuación.

La ecuación de Richards expresa la variación del contenido de agua en el suelo en función del tiempo y de la posición. Por ejemplo, para un evento de lluvia con suelo inicialmente seco (ver Figura 2.8), dependiendo de la intensidad de la lluvia, inicialmente el agua penetra fácilmente la superficie del suelo, se dice que aún no se ha alcanzado el tiempo de encharcamiento de la superficie ($t < t_e$). Luego, el tiempo de precipitación es igual al tiempo de encharcamiento ($t = t_e$) y la superficie del suelo se satura. Con la continuidad de la precipitación ($t > t_e$) la zona saturada se extiende en el perfil del suelo y el exceso de precipitación genera escurrimiento superficial, superando el punto de capacidad de campo del suelo, es decir por encima de la máxima cantidad de agua que el suelo puede retener.

Para una precipitación de intensidad constante p [$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$], cuando $t = t_e$, la tasa de infiltración TI [$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$] es igual a p y, cuando $t > t_e$, la capacidad de infiltración del suelo es

inferior a la intensidad de la lluvia, ocasionando que la infiltración acumulada IA [m] (ver Figura 2.9a) tenga un comportamiento lineal para un valor constante de precipitación (Castagnoli y Vargas Júnior 2008). Cuando $t < t_e$, la capacidad de infiltración del suelo es mayor que la intensidad de la lluvia. De esta forma, la TI es mayor a p (ver Figura 2.9b).

Este tipo de análisis de la tasa de infiltración y de la infiltración acumulada son importantes desde un punto de vista agronómico pues indican la disponibilidad del agua para ser aprovechado por las plantas.

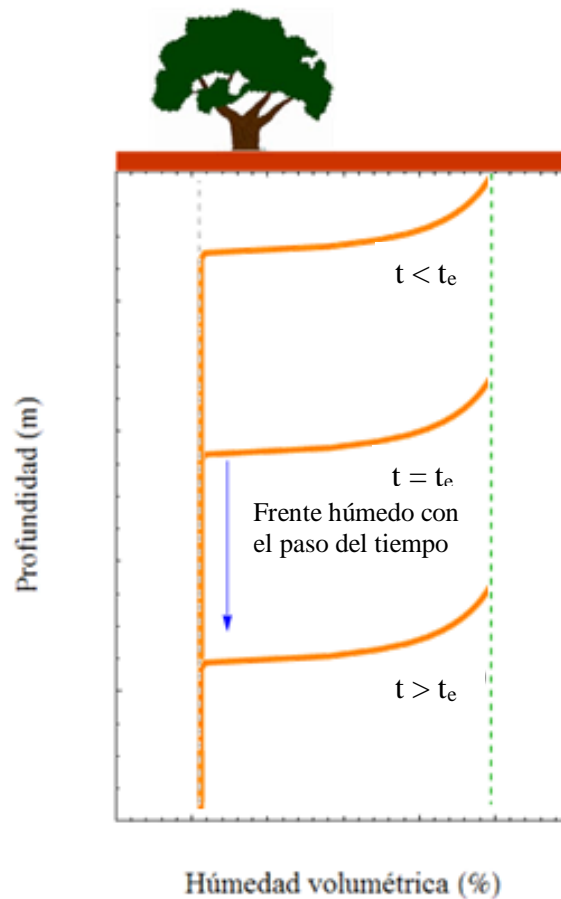


Figura 2.8: Esquema del movimiento del perfil del agua con respecto al tiempo

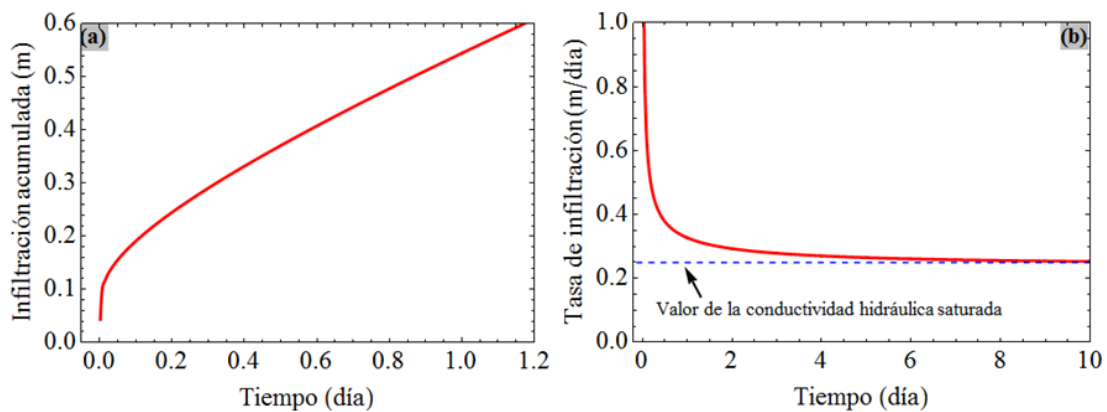


Figura 2.9: a) Infiltración acumulada y b) Tasa de infiltración para una precipitación de intensidad constante

2.6 Antecedentes relacionados a modelización del movimiento de agua en el suelo

Como se mencionó anteriormente la ecuación de Richards no tiene una solución analítica general sino que se utilizan métodos numéricos para resolverla. En los últimos años se han encontrado numerosos trabajos donde se proponen métodos numéricos diversos para obtener una solución consistente, en forma eficiente, con el menor error posible. En general estas técnicas se han aplicado a formulaciones unidimensionales verticales, ya que es la forma más útil desde un punto de vista de la aplicación, considerando que la extensa mayoría de los suelos de cultivos son planicies.

A continuación se describirán algunas de las contribuciones más destacadas tanto por la originalidad de la propuesta como por la claridad de la exposición, siempre considerando la precisión de los cálculos.

[Celia et al. \(1990\)](#) resolvieron numéricamente la forma mixta de la ecuación de Richards. Esto combina los beneficios inherentes a las formas basadas en la humedad y el potencial matricial, mientras se eluden los problemas asociados con cada una. Estos problemas incluyen poca precisión tanto en el balance de masa como en las soluciones en la forma basada en el potencial matricial y aplicación restringida a la zona no saturada en la forma basada en la humedad. Sin embargo, concluyeron que la formulación que asegure conservación de masa no es suficiente para garantizar buenos resultados. También, observaron que las soluciones numéricas utilizando el método de elementos finitos son peores a las obtenidas con el método de diferencias finitas. En ambos casos compararon los resultados de los modelos con datos experimentales, que no son descriptos completamente ni tampoco se explica cómo fueron realizados los experimentos.

[Romano et al. \(1996\)](#) desarrollaron un modelo numérico unidimensional para simular el flujo de agua en suelo no saturado de varias capas, resolviendo por el método de diferencias finitas la ecuación de Richards bajo la forma de potencial matricial. El algoritmo está basado en la conservación y continuidad de flujo del potencial matricial en la interface entre las capas consecutivas. Se destaca la importancia del método de cálculo de la conductividad hidráulica en la interfase de las capas de suelo, encontraron que usando una media geométrica se obtiene un valor de conductividad aceptable. El modelo fue validado con resultados de otros modelos numéricos (FDGM) y soluciones analíticas. La comparación mostró una disminución en el error de balance de masa utilizando el modelo propuesto. Sin embargo, el modelo no fue comparado con resultados experimentales.

[Kavetski et al. \(2001\)](#) presentaron un método de adaptación del tamaño del paso de tiempo controlando el máximo error relativo de la solución usando la formulación mixta de la ecuación de Richards. Este algoritmo presenta precisión de segundo orden, conserva la masa y conduce a una selección eficiente del paso de tiempo. Con esta técnica, la selección del paso de tiempo facilita la interacción con la aproximación espacial, permitiendo precisión y eficiencia computacional. La efectividad del método lo hace una aproximación adecuada para simulaciones numéricas de flujos no saturados. Sin embargo, de acuerdo a los autores la adaptación es muy sensible al tamaño del paso espacial, y para mejores soluciones se requiere reducidos valores de paso espacial. No se comparó los resultados del modelo con resultados experimentales.

[Miranda y Duarte \(2002\)](#) estudiaron el transporte de nitrato de calcio ($\text{Ca}(\text{NO}_3)_2 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$) diluido en una concentración de nitrato de $50 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$. Validaron su modelo matemático con experimentos de laboratorio utilizando tres tipos de suelos: arenoso (suelo 1), arcillo arenoso (suelo 2) y arcilloso (suelo 3). Determinaron perfiles experimentales de humedad para los tres

tipos de suelos y compararon con el resultado del modelo (ver [Figura 2.10](#)). Concluyeron que el modelo posibilitó prever la misma tendencia observada por los datos experimentales.

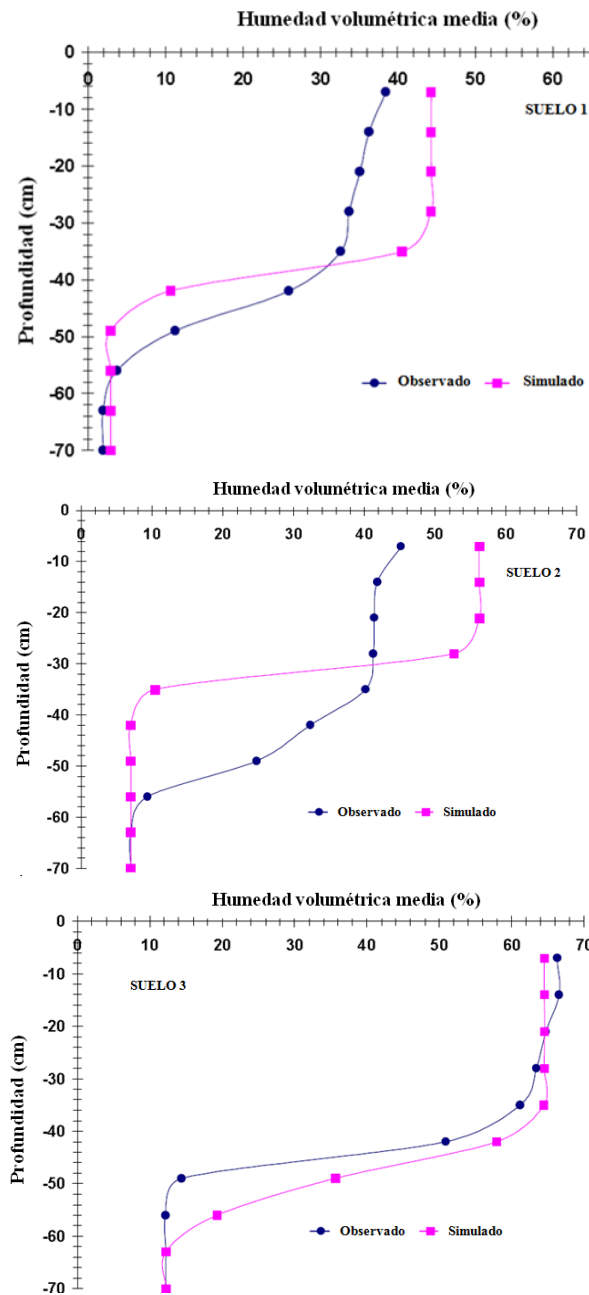


Figura 2.10: **Perfiles experimentales de humedad media de tres repeticiones y el resultado del modelo de Miranda y Duarte (2002) para los suelos 1, 2 y 3**

Cabe aclarar que los resultados del modelo se obtuvieron con un método de volumen finito y que se empleó un número mayor de nodos que en los experimentos, sin embargo se resaltan los puntos de comparación (cuadrados llenos) a la misma altura que los valores experimentales.

También, se puede observar que hay una diferencia apreciable entre los resultados del modelo y los experimentales. Como se verá en la revisión esto es una situación muy habitual dado la gran variabilidad del suelo, incluso en muestras pequeñas.

Miranda et al. (2005) estudiaron el movimiento del ión potasio en columnas de suelo no saturado, utilizando el modelo numérico unidimensional MIDI creado con el método de volúmenes finitos. Luego de las comparaciones con los resultados de sus experimentos en laboratorio, concluyeron que el modelo es capaz de simular de manera satisfactoria el perfil de humedad y el movimiento del ion potasio. Determinaron perfiles experimentales de humedad obtenidos en tres repeticiones (R1, R2 y R3) y compararon con el resultado del modelo MIDI (ver Figura 2.11). El modelo predice satisfactoriamente los experimentos pero con la dispersión esperada para estos casos de aproximación.

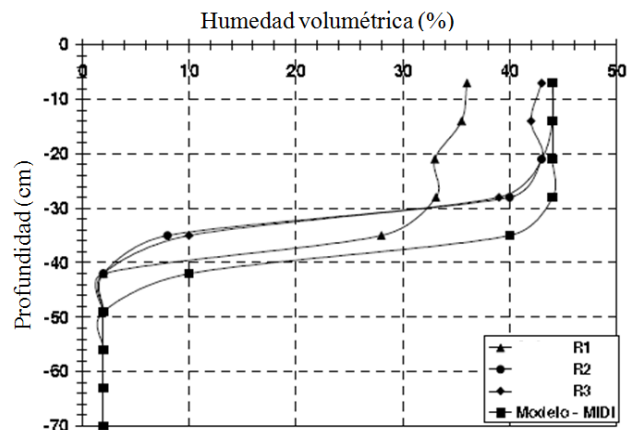


Figura 2.11: Perfiles experimentales de humedad obtenidos en tres repeticiones (R1, R2 y R3) y el resultado del modelo MIDI de Miranda et al. (2005)

Aquí también se observa una variación entre resultados experimentales realizados en idénticas condiciones.

Mollerup y Hansen (2012) desarrollaron un modelo basado en la ecuación de Richards escrita como series de potencias en $t^{1/2}$ y compararon los resultados con modelos de otros autores que utilizaron la técnica de elementos finitos para resolver la ecuación de Richards, considerando diferentes pendientes del suelo (γ). Concluyeron que los resultados obtenidos con el modelo presentan buen acercamiento con los resultados de otros autores (ver Figura 2.12). No compararon los resultados del modelo con resultados experimentales.

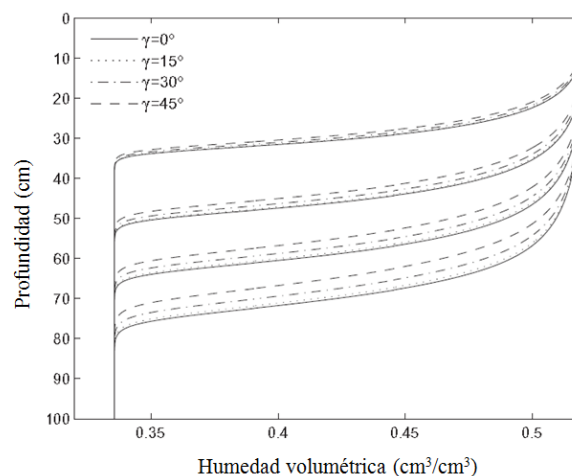


Figura 2.12: Perfiles de humedad para diferentes ángulos (γ) en función del tiempo. Los perfiles mostrados por Mollerup y Hansen (2012) son para los tiempos $t = 1/4, 2/4, 3/4$ y $1 \times t_e$ con $t_e = 4,77$ horas (tiempo de encharcamiento)

Exebio et al. (2005) explicaron que durante el relevamiento bibliográfico no encontraron una metodología contrastada de campo y de modelación matemática que permitiera evaluar la eficiencia en el uso del agua durante el proceso de infiltración. Desarrollaron una metodología basada en el uso de la ecuación de Richards en su forma bidimensional para estimar las pérdidas por infiltración en canales de tierra. Para la solución de dicha ecuación, aplicaron el método de elementos finitos, multiplicando la ecuación por una función de peso e integrándola, usando el teorema de Green. Para la integración en el tiempo del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias realizaron una aproximación en diferencias finitas. En general, observaron que los resultados obtenidos mediante la aplicación del mismo, a través de un modelo de simulación, son congruentes con las mediciones de campo y, por lo tanto, el modelo puede constituir una herramienta de apoyo en el diseño de los planes y programas de riego. No compararon los resultados del modelo con resultados experimentales.

Castagnoli y Vargas Júnior (2008) aplicaron un modelo numérico acoplado en tres dimensiones para el estudio conjunto del escurrimiento superficial acoplado a la infiltración en el suelo. Para la solución numérica del escurrimiento superficial trabajaron con un código computacional bajo el método de elementos finitos y para la infiltración utilizaron el modelo SWMS 3D (desarrollado por Simunek y otros en 1995) modificado. Concluyeron que este modelo acoplado es una herramienta válida para analizar las influencias de flujo subterráneo en el comportamiento de las aguas superficiales y viceversa. Hicieron una verificación del modelo comparándola con una forma analítica, sin embargo no dan información del nivel de los errores observados. Tampoco compararon los resultados del modelo con resultados experimentales.

Wendland y Pizarro (2010) resolvieron la ecuación de Richards unidimensional aplicando el método de elementos finitos. Para la aproximación espacial se utilizó una grilla adaptada y para la aproximación temporal se utilizó un esquema Euler explícito. Para la validación del modelo propuesto se utilizaron modelos numéricos de otros autores disponibles en la literatura. Concluyeron que el modelo fue capaz de prever el perfil del agua con buen desempeño en la zona no saturada del suelo. No se comparó los resultados del modelo con resultados experimentales.

Caviedes et al. (2013) resolvieron numéricamente la ecuación de Richards unidimensional utilizando el método de volúmenes finitos. Estudiaron cuatro esquemas de discretización del tiempo, de los cuales verificaron que solamente dos permitieron resolver correctamente la ecuación de Richards bajo condiciones no saturadas: un esquema explícito y uno implícito. Concluyeron que el esquema explícito no permite resolver la ecuación bajo condiciones saturadas y tampoco en la transición desde condición no saturada hacia la saturada. Mismas que el esquema implícito sí lo hace. También, verificaron que el esquema explícito es condicionalmente estable, mientras que el esquema implícito es incondicionalmente estable. En términos de eficiencia, el esquema explícito es mucho menos eficiente porque no permite pasos de tiempo grandes, mientras que el esquema implícito presenta precisión con grandes pasos de tiempo. No compararon los resultados del modelo con resultados experimentales.

2.7 Movimiento del soluto en el suelo

Los procesos que gobiernan el movimiento (o transporte) del soluto en el suelo son: advección, difusión y dispersión (Costa y Holanda de Castro 2007).

Usualmente estos procesos se manifiestan en soluciones líquidas. En toda solución el componente que se encuentra en mayor cantidad se denomina **solvente**, o también “disolvente”, y el que se encuentra en menor cantidad constituye el **soluto**. De esta forma, en

una solución formada por sal común (NaCl) disuelta en agua, el solvente es el agua y el soluto el NaCl. Si se mezclan 10 g de alcohol con 90 g de agua, el alcohol es el soluto y el agua es el solvente en la solución formada. Sin embargo, la definición de soluto y solvente es relativa y puede variar aún cuando se trate de las mismas sustancias mezcladas si éstas se encuentran en distintas proporciones. En las soluciones líquidas el soluto es en general ión o molécula (Bottani et al. 2006). Por ejemplo, Miranda et al. (2005) estudiaron el movimiento del ion potasio en columnas de suelo no saturado. En el caso de aguas subterráneas, el solvente es casi siempre agua y los componentes orgánicos e inorgánicos son los solutos (Batu, 2006).

La **advección** es el mecanismo de transporte ocasionado por el flujo de agua. En este proceso, el movimiento del agua provoca que el soluto presente en la misma se mueva en la dirección de las líneas de flujo sin alternar su concentración en la solución, con una velocidad, inicialmente, igual a la velocidad media del agua. La ecuación diferencial unidimensional de transporte por advección es la Ec. (2.12), donde C es la concentración del soluto [Kg.m^{-3}], t es el tiempo [s] y z es la coordenada vertical [m], v es la velocidad media del agua [m.s^{-1}], $v = q/\theta$ (De Wilde et al. 2009), donde q es la densidad de flujo de agua que es obtenida de la solución de las ecuaciones de Richards y Darcy [m.s^{-1}] y θ es la humedad volumétrica [$\text{m}^3.\text{m}^{-3}$].

Como consecuencia del gradiente de concentración de soluto en el agua, ocurre un transporte de soluto por **difusión**, donde el soluto disuelto en agua se mueve de un área de mayor concentración a un área menor concentración, buscando igualar la concentración en toda la masa de agua. La difusión del soluto es proporcional al gradiente de concentración, la cual puede ser expresada por la primera ley de Fick, Ec. (2.13), donde F es la densidad de flujo de difusión del soluto [$\text{Kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$], D_d es el coeficiente de difusión [$\text{m}^2.\text{s}^{-1}$] y $\frac{\partial C}{\partial z}$ es el gradiente de concentración de soluto [Kg.m^{-4}].

El proceso de difusión no puede ser separado de la dispersión en el flujo de agua a través del suelo. El término **dispersión** es frecuentemente utilizado para describir el mecanismo de transporte de soluto causado por variación en la velocidad (ver Figura 2.13). Experimentos de campo y de laboratorio han demostrado que el flujo dispersivo puede describirse por la ecuación Ec. (2.14), similar a la ecuación para flujo difusivo, donde F_{dip} es el flujo de dispersión del soluto [$\text{Kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$] y D_{disp} es el coeficiente de dispersión [$\text{m}^2.\text{s}^{-1}$]. La ecuación Ec. (2.14) está basada en el supuesto que el transporte dispersivo puede ser expresado de forma similar a la primera ley de Fick, Ec. (2.13). El signo negativo indica que el soluto se mueve hacia la zona de menor concentración. El coeficiente de dispersión es el componente más complejo y discutido para transporte de soluto en medios porosos (Batu, 2006).

La dispersión que ocurre en la dirección del flujo se llama dispersión longitudinal y la que ocurre en dirección perpendicular al flujo se llama dispersión transversal, son calculados con la Ec. (2.15) y Ec. (2.16), donde D_L es el coeficiente de dispersión hidrodinámica longitudinal [$\text{m}^2.\text{s}^{-1}$], D_T es el coeficiente de dispersión hidrodinámica transversal [$\text{m}^2.\text{s}^{-1}$], α_L es el coeficiente de dispersividad longitudinal [m], α_T es el coeficiente de dispersividad transversal [m], D^* es el coeficiente de difusión efectiva, $D^* = \omega D_d$, donde ω es el coeficiente de tortuosidad del suelo (adimensional). En líquidos, $\omega = 1$, entonces $D^* = D_d$. El valor del coeficiente de difusión para electrolitos es bien conocido. Algunos de los iones más comunes en aguas subterráneas (Na^+ , K^+ y Mg^{2+}) tienen coeficiente de difusión en el rango 1×10^{-9} a 2×10^{-9} m^2/s a 25°C . Los coeficientes dependen de la temperatura. A 5°C , por ejemplo, los coeficientes son 50% más pequeños. También, el valor de D^* se incrementa a mayores concentraciones. En medios porosos, ω es menor que 1, porque los iones recorren un camino más largo a través de la estructura del medio poroso (Batu, 2006). Por ejemplo, para el cloruro

Cl_2 en agua a 16°C , ω es 0,5 y $D_d = 1,26 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$, entonces $D^* = 6,3 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$. Cuando la concentración varía con el tiempo, se aplica la segunda ley de Fick, Ec. (2.17).

La combinación de las ecuaciones anteriores y la ecuación de conservación de masa da origen a la ecuación de advección – dispersión para transporte de soluto considerada en este trabajo (Harter et al. 2011), la cual puede ser expresada unidimensionalmente como la Ec. (2.18).

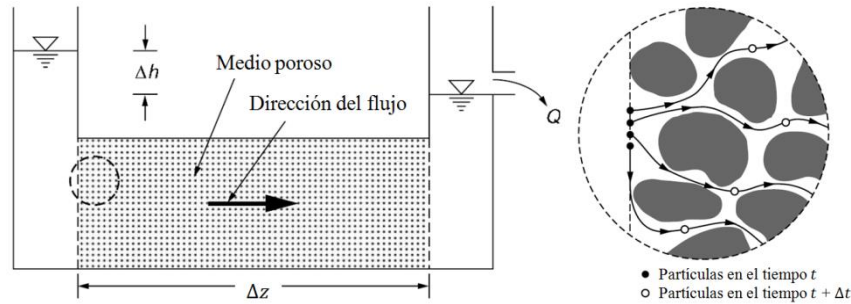


Figura 2.13: Mecanismo de transporte de soluto por dispersión en un flujo de agua unidimensional. Experimento de flujo unidimensional subterráneo (izquierda). Líneas de movimiento de las partículas de soluto entre los poros del suelo (derecha) (Batu, 2006).

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -v \frac{\partial c}{\partial z} \quad (2.12)$$

$$F = -D_d \frac{\partial c}{\partial z} \quad (2.13)$$

$$F_{disp} = -D_{disp} \frac{\partial c}{\partial z} \quad (2.14)$$

$$D_L = \alpha_L v + D^* \quad (2.15)$$

$$D_T = \alpha_T v + D^* \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D_d \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial \theta c}{\partial t} = -\frac{\partial qc}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\theta D \frac{\partial c}{\partial z} \right) \quad (2.18)$$

La difusión del soluto en el suelo se puede explicar mediante un experimento conceptual, donde el agua se mueve con una velocidad media v en la dirección z (ver Figura 2.14). Se asume que en tiempo inicial, $t = 0$, una línea recta abrupta divide el dominio en dos partes: una parte, $z < 0$, donde existe agua con soluto disuelto en una concentración $c = 1$ y otra parte, $z \geq 0$, donde existe agua con una concentración de soluto $c = 0$, originando un perfil abrupto de la concentración del soluto. Por tanto, basado en la ley de Darcy, calculando $L = vt$ podría ser posible conocer la posición del perfil abrupto en cualquier profundidad $z = L$ en el tiempo t . Sin embargo, en experimentos reales no se observa la existencia de un perfil abrupto. En su lugar, se observa una zona de transición gradual a través de la cual la concentración del soluto varía desde 1 hasta 0. Este modelo no considera la interacción entre el soluto y el suelo; es decir, no tiene en cuenta el proceso de **sorción**, donde las moléculas de soluto son adsorbidas por el suelo. El proceso inverso es llamado **desorción**. También se considera que los procesos químicos ocurren rápidamente, alcanzando el equilibrio químico. Para estudiar los efectos del proceso de sorción en el sistema, es necesario adicionar un término fuente-sumidero (*source-sink*) en la ecuación Ec. (2.18), que represente la masa de soluto adsorbida por unidad de volumen de solución por unidad de tiempo.

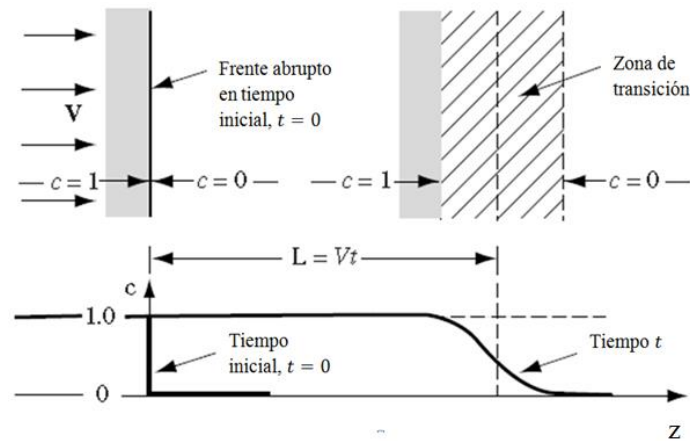


Figura 2.14: Difusión longitudinal de soluto. Esquema de una fotografía del frente húmedo en las posiciones a tiempo inicial y final “ t ” (arriba), y gráfico de concentración en función de la posición para los mismos casos (abajo) (Bear y Cheng 2010)

2.8 Antecedentes relacionados ecuación difusión y advección

Miranda y Duarte (2002) estudiaron el transporte de nitrato de calcio ($\text{Ca}(\text{NO}_3)_2 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$) diluido en una concentración de nitrato de 50 mg.L^{-1} . Se validó el modelo matemático con experimentos de laboratorio utilizando tres tipos de suelos: arenoso (suelo 1), arcillo arenoso (suelo 2) y arcilloso (suelo 3). Determinaron perfiles experimentales de contenido de nitrato para los tres tipos de suelos y compararon con el resultado del modelo (ver Figura 2.15). Concluyeron que el modelo posibilitó prever la misma tendencia observada por los datos experimentales.

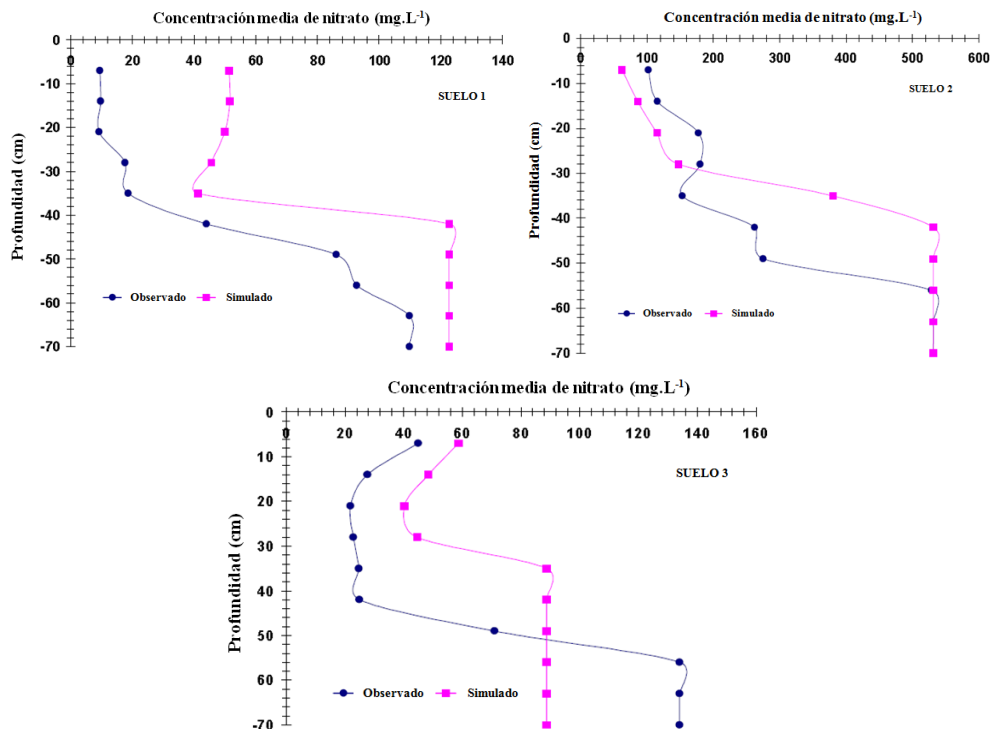


Figura 2.15: Perfiles experimentales de concentración de nitrato para la media de tres repeticiones y el resultado del modelo de Miranda et al. (2002) para los suelos 1, 2 y 3

Los resultados del modelo se obtuvieron con un método de volumen finito y se empleó un número mayor de nodos que en los experimentos, sin embargo se resaltan los puntos de comparación (cuadrados llenos) a la misma altura que los valores experimentales.

Se puede observar que hay una diferencia apreciable entre los resultados del modelo y los experimentales, aunque se observa un acompañamiento en la forma de los perfiles de concentración.

Miranda et al. (2005) estudiaron el movimiento del ion potasio en columnas de suelo no saturado, utilizando el modelo numérico unidimensional MIDI creado con el método de volúmenes finitos. Luego de las comparaciones con los resultados de sus experimentos en laboratorio, se concluyó que el modelo es capaz de simular de manera satisfactoria el perfil de humedad y el movimiento del ion potasio. Determinaron los perfiles experimentales de concentración de ion potasio obtenidos en tres repeticiones (R1, R2 y R3) y se comparó con el resultado del modelo MIDI (ver Figura 2.16). El modelo predice satisfactoriamente los experimentos pero con la dispersión esperada para estos casos de aproximación.

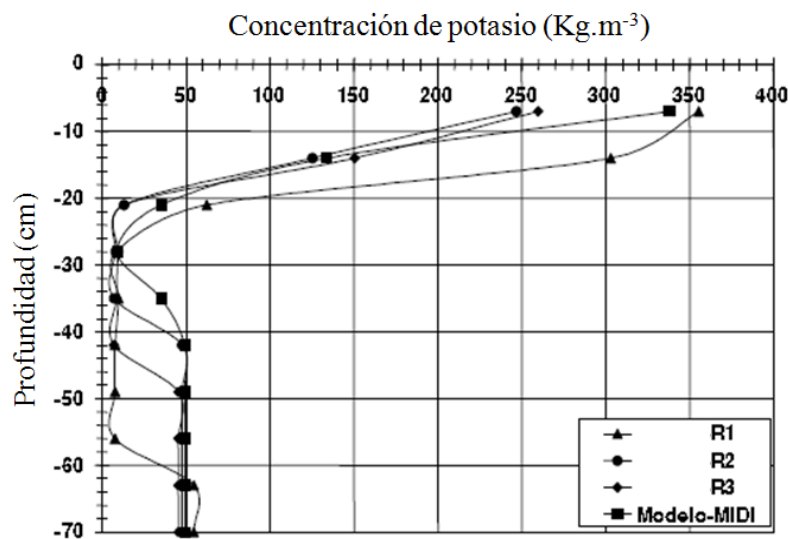


Figura 2.16: Perfiles experimentales de concentración de ion potasio obtenidos en tres repeticiones (R1, R2 y R3) y el resultado del modelo MIDI de Miranda et al. (2005)

Se observa una diferencia grande entre los resultados de los experimentos (repeticiones) aunque fueron realizados en las mismas condiciones. Por otro lado, comparando los resultados del modelo con los experimentales, hay diferencia pero se observa un acompañamiento en las forma de los perfiles de concentración.

Costa y Holanda de Castro (2007) propusieron un modelo numérico-analítico para reducir la inestabilidad numérica y las oscilaciones encontradas en los modelos numéricos tradicionales para resolver la ecuación de advección-dispersión. Desarrollaron un modelo mixto, numérico en relación al espacio y analítico en relación al tiempo. Se tuvo en cuenta la degradación química del soluto y la interacción con el suelo. Obtuvieron perfiles de concentración de soluto para diferentes tiempos de simulación (20, 100 y 300 días) y compararon con la solución analítica. Los resultados obtenidos con el modelo propuesto, comparados con otros modelos analíticos, presentan diferencias (ver Figura 2.17). Sin embargo, concluyeron que el método mixto es una herramienta adecuada y confiable. Al igual que en Miranda et al. (2005), se observa desviación en los resultados de los métodos numéricos, eso permite ver que el problema de transporte todavía no tiene una solución definitiva.

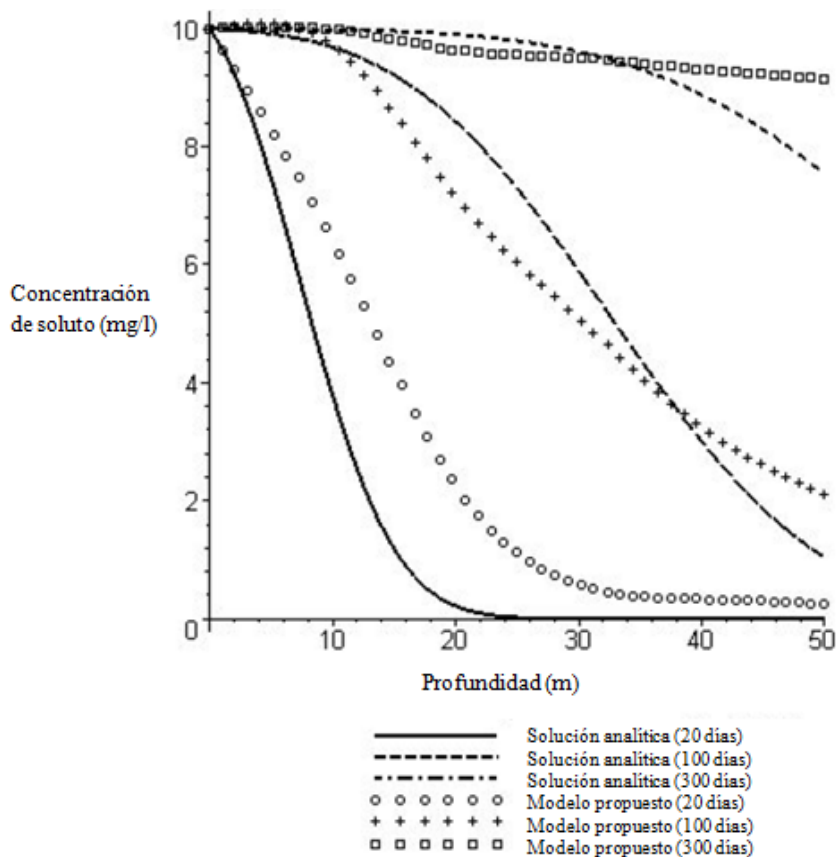


Figura 2.17: Perfiles de concentración de soluto para diferentes tiempos. Resultados del modelo analítico y propuesto por Costa y Holanda de Castro (2007)

Neumann et al. (2011) utilizaron diferentes modelos (QUICK, QUICKEST y ULTIMATE) para resolver numéricamente la ecuación de advección – dispersión. Los modelos QUICK y QUICKEST son dos esquemas de interpolación cuadrática, basados en métodos explícitos que utilizaron una aproximación de volumen de control para la discretización espacial y una aproximación en diferencias finitas para la discretización temporal. El modelo ULTIMATE es un esquema de disminución de variación total. Entre los diferentes ensayos realizados por Neumann et al. (2011), se utilizó el siguiente que luego será analizado en el capítulo 4. Representa un caso de infiltración de agua con soluto que no interacciona con el suelo (sin sorción) y sin reacción química, en una columna de suelo homogéneo, inicialmente seco y sin contener soluto. El problema está sujeto a condiciones de contorno superior de tipo Dirichlet e inferior de tipo Neumann para el agua y condiciones de contorno superior e inferior de tipo Dirichlet para el soluto. Se utiliza un suelo franco arcilloso limoso con los siguientes parámetros de las ecuaciones de Mualem–van Genuchten: $\alpha = 3,6 \text{ m}^{-1}$; $j = 1,56$; $K_s = 2,88194 \times 10^{-6} \text{ m.s}^{-1}$; $\theta_s = 0,43 \text{ m}^3.\text{m}^{-3}$; $\theta_r = 0,078 \text{ m}^3.\text{m}^{-3}$. La profundidad de la muestra de suelo es de 1 m y las condiciones iniciales y de contorno son:

$$\begin{aligned} \psi(z, t = 0) &= -1 \text{ m para } -1 \text{ m} \leq z \leq 0; \\ \psi(z = 0, t) &= 0 \text{ para } t > 0; \\ q(z = -1 \text{ m}, t) &= -K_s \text{ para } t > 0. \\ C(z, t = 0) &= 0 \text{ para } -1 \text{ m} \leq z \leq 0; \\ C(z = 0, t) &= 1 \text{ Kg.m}^{-3} \text{ para } t > 0; \\ C(z = -1 \text{ m}, t) &= 0 \text{ para } t > 0. \end{aligned}$$

Buscaron el perfil de concentración de soluto para diferentes tiempos de simulación (4,8; 9,6; 14,4; 19,2 y 24 horas) utilizando los modelos QUICK, QUICKEST y ULTIMATE. Los tres modelos numéricos convergen en la misma solución a las 24 horas y sin oscilaciones. Analizando la solución mostrada por Neumann, los perfiles de concentración de soluto están retrasados respecto al frente de humedad (ver Figura 2.18), estos resultados aparentemente erróneos no fueron explicados por Neumann. No pueden ser explicados por la ocurrencia de la interacción con el suelo dado que el modelo no contempla el proceso de sorción. Sin embargo, si se considera un proceso de dilución a escala microscópica del agua con soluto que ingresa al suelo con el agua sin soluto presente inicialmente, se llega a una explicación plausible de este fenómeno. Se debe observar que el suelo no está completamente seco ya que inicialmente posee un 25 % de agua. Esta explicación no ha sido abordada por Neumann y se realizará con el modelo a desarrollar en esta tesis.

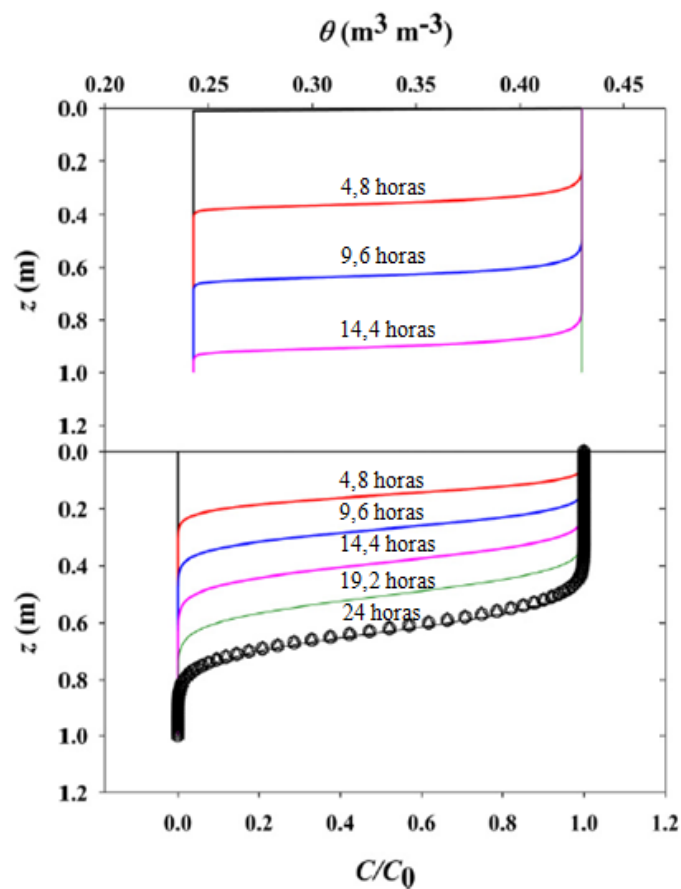


Figura 2.18: Perfiles de humedad (arriba) y de concentración de soluto (abajo) según Neumann et al. (2011)

2.9 Método de diferencias finitas

Debido a que la ecuación de Richards y la ecuación de advección-dispersión son no lineales, su solución analítica no es posible excepto para casos especiales. Por este motivo, generalmente se utilizan aproximaciones numéricas (Celia et al. 1990).

Un método numérico para resolver ecuaciones diferenciales parciales es el método de diferencias finitas, este método es usado por numerosos autores para modelar infiltración en suelos. En este, como en la mayoría de los métodos numéricos, el primer paso es reemplazar el modelo matemático, compuesto por ecuaciones diferenciales parciales, en términos de

variables discretas en función del tiempo y espacio (Cheng et al. 2006, Wu 2008, Bear y Cheng 2010). Luego, se define una grilla ortogonal a través del dominio modelado (ver Figura 2.19a). La grilla es obtenida dividiendo los ejes en segmentos, dibujando líneas paralelas a los ejes. Los segmentos sobre los ejes pueden ser iguales (grilla uniforme) o diferentes (grilla variable). En general, mayor densidad de las líneas son dibujadas cerca de la zona donde se desea obtener información detallada sobre el comportamiento de una variable de estado (ver Figura 2.19b).

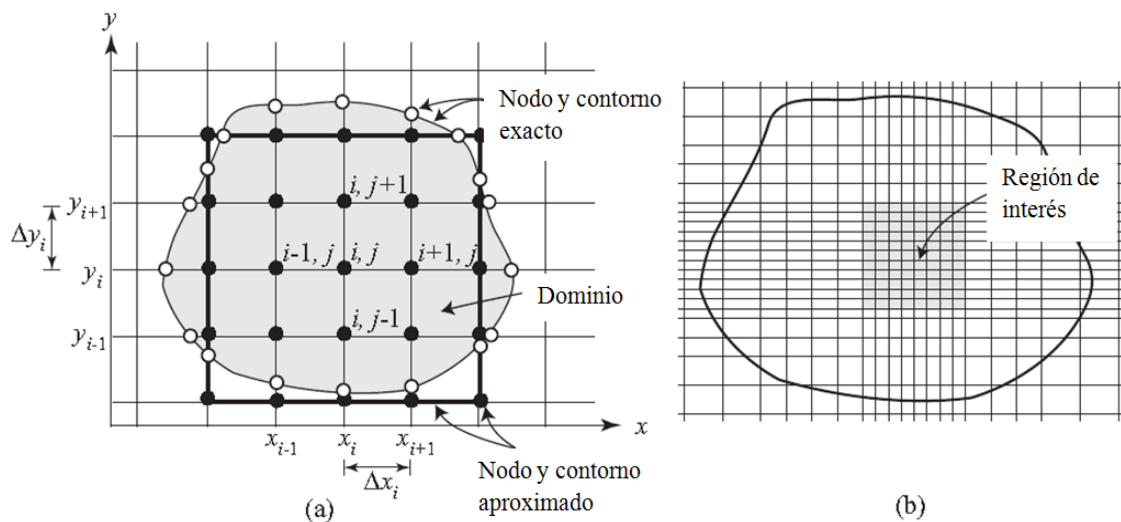


Figura 2.19: Grilla bidimensional para un dominio plano: a) Uniforme y b) Variable (Bear y Cheng 2010)

En un dominio en dos dimensiones, cada elemento de área $\Delta x_i \times \Delta y_i$ es llamado **celda** y el vértice de cada celda es llamado **nodo**. Las ecuaciones diferenciales parciales pueden ser aproximadas utilizando una ecuación aritmética que pueden ser: hacia adelante Ec. (2.19), hacia atrás Ec. (2.20) o centrada Ec. (2.21), siendo $O(\Delta x)$ el error de truncamiento de la aproximación (ver Figura 2.20). La aproximación en diferencia centrada entrega una mejor representación de la pendiente, porque tiene un error de truncamiento de mayor orden, por lo tanto numéricamente menor.

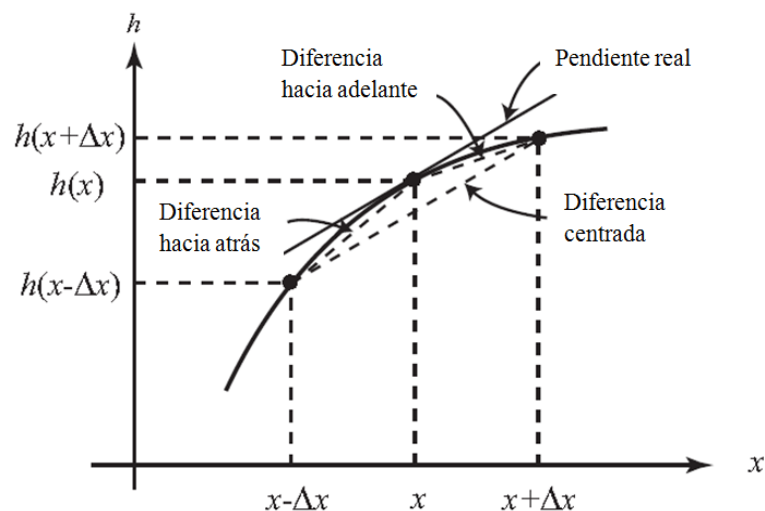


Figura 2.20: Interpretación geométrica de las aproximaciones de las diferencias hacia atrás, central y hacia adelante (Bear y Cheng 2010)

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{h(x+\Delta x, y) - h(x, y)}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{h(x, y) - h(x - \Delta x, y)}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{h(x+\Delta x, y) - h(x - \Delta x, y)}{2\Delta x} + O((\Delta x)^2) \quad (2.21)$$

Similarmente, es posible obtener la aproximación de una segunda derivada parcial utilizando una diferencia centrada, Ec. (2.22). Siguiendo la grilla de la Figura 2.19a, se denota $h_{i,j}$ en lugar de $h(x_i, y_i)$ y se asume que $\Delta x_{i-1} = \Delta x_i = \Delta x$, obteniéndose la Ec. (2.23). En base a estas ecuaciones de diferencias finitas es posible obtener la aproximación en cualquier punto (i, j) de la grilla, utilizando la Ec. (2.24). El error de truncamiento de esta ecuación es $O((\Delta x)^2) + O((\Delta y)^2)$. Se asume que el espaciado es igual tanto en la dirección x como en y ; por lo tanto, $\Delta x = \Delta y$, obteniendo la ecuación algebraica lineal Ec. (2.25) que representa el valor de una variable en un nodo de la grilla igual al promedio de los cuatro nodos vecinos. Para cada nodo del dominio donde el valor de la variable $h_{i,j}$ no es conocido a priori, le corresponde una ecuación del tipo Ec. (2.25). En consecuencia será necesario resolver un sistema de ecuaciones lineales, utilizando algún método de resolución como el de eliminación de Gauss.

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{h(x+\Delta x, y) - 2h(x, y) + h(x - \Delta x, y)}{(\Delta x)^2} + O((\Delta x)^2) \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{h_{i+1,j} - 2h_{i,j} + h_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \quad (2.23)$$

$$\frac{h_{i+1,j} - 2h_{i,j} + h_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{h_{i,j+1} - 2h_{i,j} + h_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} = 0 \quad (2.24)$$

$$h_{i,j} = \frac{1}{4}(h_{i+1,j} + h_{i-1,j} + h_{i,j-1} + h_{i,j+1}) \quad (2.25)$$

Una ecuación con derivadas parciales respecto al espacio y tiempo puede ser aproximada como la Ec. (2.26), donde el superíndice k indica el tiempo en el nodo $h_{i,j}^k$. Se asume que los valores de los nodos en el tiempo actual k son conocidos. Es decir que los valores $h_{i,j}^k, h_{i-1,j}^k, h_{i-2,j}^k$ son conocidos, mientras que se buscan los valores $h_{i,j}^{k+1}, h_{i-1,j}^{k+1}, h_{i-2,j}^{k+1}$. Existen tres diferentes esquemas para resolver la ecuación anterior, los más usuales son: explícito ($\varepsilon = 0$), implícito simple ($\varepsilon = 1$) y Crank-Nicolson ($\varepsilon = 1/2$). El primer esquema, ignora el término de la derivada espacial en el tiempo $k + 1$, resumiéndose en la Ec. (2.27), donde todos los valores del lado derecho son conocidos. Por lo tanto, es posible obtener $h_{i,j}^{k+1}$ en cada nodo de forma explícita sin necesidad de una solución simultánea de un sistema de ecuaciones lineales. Es muy simple de implementar; sin embargo, presenta estabilidad solo cuando se cumple la relación dada por la Ec. (2.28). El segundo esquema, utiliza solo el término de la derivada espacial en el tiempo $k + 1$, resumiéndose en la Ec. (2.29). Las ecuaciones algebraicas lineales en cada nodo forman un sistema que necesita ser resuelto simultáneamente por algún procedimiento iterativo. Es un esquema incondicionalmente estable; es decir, no hay restricción en el tamaño del paso de tiempo utilizado. El tercer esquema, toma el término de la derivada espacial en el tiempo $k + 1/2$, siendo el promedio de los términos de la derivada espacial en los niveles de tiempo k y $k + 1$. Este esquema es un caso especial de los esquemas implícitos Ec. (2.30), donde es necesario realizar una solución simultánea de las ecuaciones algebraicas lineales (Bear y Cheng 2010).

$$\frac{h_{i,j}^{k+1} - h_{i,j}^k}{\Delta t} = (1 - \varepsilon) \left[\frac{h_{i-1,j}^k - 2h_{i,j}^k + h_{i+1,j}^k}{(\Delta x)^2} + \frac{h_{i-1,j}^k - 2h_{i,j}^k + h_{i+1,j}^k}{(\Delta y)^2} \right] + \varepsilon \left[\frac{h_{i-1,j}^{k+1} - 2h_{i,j}^{k+1} + h_{i+1,j}^{k+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{h_{i-1,j}^{k+1} - 2h_{i,j}^{k+1} + h_{i+1,j}^{k+1}}{(\Delta y)^2} \right] \quad (2.26)$$

$$h_{i,j}^{k+1} = \left[\frac{h_{i-1,j}^k - 2h_{i,j}^k + h_{i+1,j}^k}{(\Delta x)^2} + \frac{h_{i-1,j}^k - 2h_{i,j}^k + h_{i+1,j}^k}{(\Delta y)^2} \right] \Delta t + h_{i,j}^k \quad (2.27)$$

$$\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \leq \frac{1}{2} \quad (2.28)$$

$$\frac{h_{i,j}^{k+1} - h_{i,j}^k}{\Delta t} = \left[\frac{h_{i-1,j}^{k+1} - 2h_{i,j}^{k+1} + h_{i+1,j}^{k+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{h_{i-1,j}^{k+1} - 2h_{i,j}^{k+1} + h_{i+1,j}^{k+1}}{(\Delta y)^2} \right] \quad (2.29)$$

$$\frac{h_{i,j}^{k+1} - h_{i,j}^k}{\Delta t} = 1/2 \left[\frac{h_{i-1,j}^k - 2h_{i,j}^k + h_{i+1,j}^k}{(\Delta x)^2} + \frac{h_{i-1,j}^k - 2h_{i,j}^k + h_{i+1,j}^k}{(\Delta y)^2} \right] + 1/2 \left[\frac{h_{i-1,j}^{k+1} - 2h_{i,j}^{k+1} + h_{i+1,j}^{k+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{h_{i-1,j}^{k+1} - 2h_{i,j}^{k+1} + h_{i+1,j}^{k+1}}{(\Delta y)^2} \right] \quad (2.30)$$

2.10 Proceso de modelización

Según [Bear y Cheng \(2010\)](#) un modelo puede ser definido como la versión simplificada de un sistema real que simula aproximadamente las relaciones de excitación-respuesta que son de interés. Un modelo predice el comportamiento futuro de un sistema investigado (ver [Figura 2.21](#)).

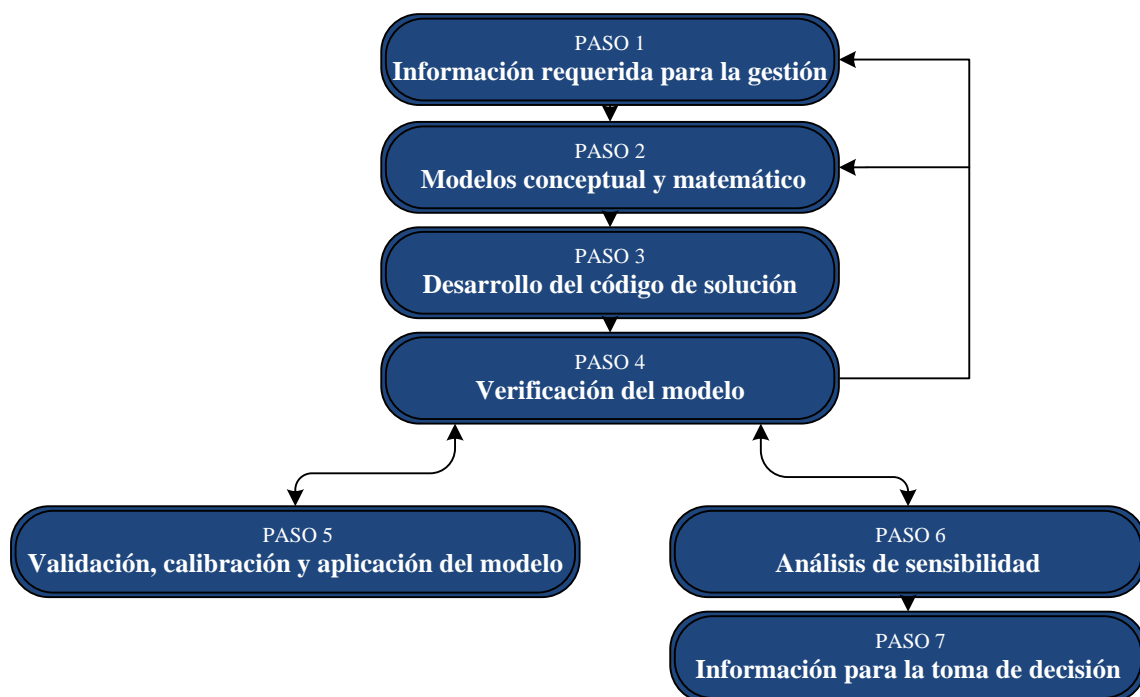


Figura 2.21: Diagrama de flujo que esquematiza el proceso de modelización

Paso 1. Información requerida para la gestión. Se necesita conocer información relevante para evaluar el éxito del plan seleccionado en busca de los objetivos deseados (ej. el costo de un proyecto, el periodo requerido para la remediación, calidad del agua bombeada, concentración de un químico relevante).

Paso 2. Desarrollo de modelos conceptual y matemático. El sistema real y su comportamiento pueden ser muy complicados, dependiendo de la cantidad de detalles necesarios para describirlos. El arte de la modelización es simplificar la descripción del sistema y su comportamiento en un grado que sea útil a los fines de la planificación y la toma de decisiones en casos específicos. Las simplificaciones son introducidas en la forma de supuestos que expresan el entendimiento del sistema y su comportamiento. Debido a que un modelo es una versión simplificada del sistema real, **no existe un único modelo para describirlo**. Diferentes supuestos resultarán en diferentes modelos, cada aproximación del dominio y su comportamiento es un camino diferente. El modelo conceptual se vale de un conjunto de supuestos que reducen el problema real y el dominio real a una versión simplificada satisfactoria desde el punto de vista de los objetivos de la modelización, el problema de gestión asociado y la información disponible. La selección de un modelo apropiado para un caso particular depende de tres factores principales: los objetivos de la investigación; los recursos disponibles para construir y resolver el modelo; y el marco regulatorio y legal.

El modelo conceptual es expresado en la forma de un modelo matemático, el cual posee:

- Ecuaciones que expresan los balances de las cantidades extensivas relevantes (ej. masa de fluidos, energía).
- Ecuaciones de flujo que relacionan las cantidades extensivas con las variables de estado relevantes del problema (ej. ley de Fick).
- Ecuaciones constitutivas que definen el comportamiento de las fases y especies químicas involucradas (ej. concentración de soluto).
- Fuentes y sumideros, frecuentemente referidos como funciones de fuerza de las cantidades extensivas relevantes.
- Condición inicial que describe el estado conocido del sistema en un tiempo inicial. Condiciones de contorno que describen la interacción del dominio con su medio ambiente a través de sus contornos comunes. La condición inicial especifica el valor de la variable dependiente (ej. $\psi(z, t)$) en todos los puntos del dominio en el tiempo inicial, por ejemplo: $\psi(z, 0) = \psi^{inicial}$, siendo ψ el potencial matricial [m]. Una condición de contorno que especifica el valor de la variable de estado en el segmento de contorno, es llamada condición de contorno de primer tipo o condición de contorno de Dirichlet, por ejemplo: $\psi(-L, t) = \psi_L$. La condición que especifica el gradiente de una variable escalar en el segmento de contorno, es llamada condición de contorno de segundo tipo o condición de contorno de Neumann, por ejemplo: $q(-L, t) = q_L$, siendo q densidad de flujo de agua [m.s⁻¹]. La condición de contorno que combina las condiciones de primer y segundo tipo es llamada condición de contorno de tercer tipo o condición de contorno de Robin.

Paso 3. Desarrollo del código de solución. El método de solución preferencial para un modelo matemático es uno analítico, que provee una solución general y puede ser aplicable a varios conjuntos de dominios y parámetros. Sin embargo, debido a la complejidad en muchos problemas de interés práctico, en general, es imposible una solución analítica. Esto significa que varios métodos son utilizados para transformar el modelo matemático en uno numérico, donde las ecuaciones diferenciales parciales son representadas por sus contrapartes numéricas. Para resolver el modelo numérico se requiere un programa de computadora o un código.

Paso 4. Verificación del modelo. Consiste en la comparación de soluciones obtenidas utilizando el código con soluciones obtenidas por métodos analíticos, siempre que tales soluciones sean posibles. Cuando la solución analítica no puede llevarse a cabo, la comparación es con soluciones obtenidas por otros códigos. En esta etapa se busca

convergencia y estabilidad del modelo. **Convergencia** significa que conforme el paso del tiempo y espacio tienden a cero, los resultados de la técnica se aproximan a la solución verdadera. **Estabilidad** significa que los errores en cualquier etapa del cálculo no son amplificados, sino que son atenuados conforme el cálculo avanza. Al respecto, es necesario asumir que las aproximaciones numéricas introducen errores en el análisis. Para muchos problemas de aplicación en ingeniería no se puede obtener la solución analítica; por lo tanto, no podemos calcular con exactitud los errores asociados con nuestros métodos numéricos. Los errores más comunes son los de redondeo y truncamiento. El **error de redondeo** se debe a que la computadora solo puede representar cantidades con un número finito de dígitos. El **error de truncamiento** representa la diferencia entre una formulación matemática exacta de un problema y la aproximación dada por un método numérico. Los errores asociados con los cálculos se pueden caracterizar observando su exactitud y precisión. La **exactitud** se refiere a qué tan cercano está el valor calculado con el valor verdadero. La **precisión** se refiere a qué tan cercano está el valor calculado con respecto a los otros (Chapra y Canale 1987).

Paso 5. Validación, calibración y aplicación del modelo. Es el proceso de asegurarse de que el modelo describe correctamente los procesos relevantes que afectan las relaciones de excitación-respuesta de interés en un grado aceptable de precisión. La única manera de validar un modelo es un experimento.

La calibración del modelo combina validación y estimación de parámetros para un problema específico de interés. Estas actividades normalmente se realizan de forma simultánea. La actividad de identificar los valores de los coeficientes del modelo se refiere al problema de estimación de los parámetros o problema inverso. Los parámetros del modelo pueden ser obtenidos desde la literatura, experimentos de laboratorio o experimentos en campo en pequeña escala.

Una vez que el modelo ha sido calibrado para un problema específico de interés, el modelo está listo para su uso.

Paso 6. Análisis de sensibilidad. Se evalúa el impacto de los cambios en los valores de los coeficientes del modelo sobre los resultados predichos por el modelo. Si estos efectos no son significativos (según el criterio del usuario del modelo), los valores predichos por el modelo son aceptados. Si los valores predichos por el modelo son sensibles a los cambios de los parámetros, es necesario reducir el grado de incertidumbre en los valores de estos parámetros.

Cuando los resultados varían en función del tiempo sin un patrón de comportamiento predecible (comportamiento azaroso), es conveniente realizar un estudio estadístico. En estos casos, los datos de entrada y salida del modelo son expresados en términos estadísticos, como la media y la desviación estándar.

Paso 7. Información para la toma de decisión. El resumen y las conclusiones deberían incluir información que se esperaba del modelo, incluyendo datos adicionales respecto a la precisión de la información. El reporte de las actividades de modelización puede ser parte del informe sobre la solución del problema de investigación, mencionadas como un apéndice o reporte separado.

3. MATERIALES Y MÉTODOS

3.1 Características de los suelos utilizados

Se utilizaron distintos suelos durante el avance del estudio. Para verificar el modelo desarrollado se utilizaron suelos que fueron empleados por otros autores en sus trabajos de investigación (ver [Tabla 3.1](#) y [Tabla 3.2](#)). Cada suelo presenta una curva de retención hídrica propia. La presión se expresa en metros de columna de agua, mH_2O , que es la unidad más frecuentemente usada en la disciplina (ver [Figura 3.1](#)).

Tabla 3.1: Suelos utilizados para verificar el modelo desarrollado

Suelo	Tipo	Autor
A	Limoso	Mollerup et al. 2012
B	Franco arcilloso limoso	Celia et al. 1990
C	Arenoso	Miranda et al. 2005
D	Franco arcilloso limoso	Neumann et al. 2011
E	Arenoso	Caviedes et al. 2013

Tabla 3.2: Parámetros de las ecuaciones de Mualem–van Genuchten para los suelos utilizados

Suelo	Parámetros de las ecuaciones de Mualem–van Genuchten
A	$\alpha = 1,15 \text{ m}^{-1}; j = 2,03; K_s = 3,65741 \times 10^{-5} \text{ m}\cdot\text{s}^{-1};$ $\theta_s = 0,520 \text{ m}^3\cdot\text{m}^{-3}; \theta_r = 0,218 \text{ m}^3\cdot\text{m}^{-3}$
B	$\alpha = 3,35 \text{ m}^{-1}; j = 2; K_s = 9,22 \times 10^{-5} \text{ m}\cdot\text{s}^{-1};$ $\theta_s = 0,368 \text{ m}^3\cdot\text{m}^{-3}; \theta_r = 0,102 \text{ m}^3\cdot\text{m}^{-3}$
C	$\alpha = 4,49 \text{ m}^{-1}; j = 3,6732; K_s = 1,515 \times 10^{-5} \text{ m}\cdot\text{s}^{-1};$ $\theta_s = 0,443 \text{ m}^3\cdot\text{m}^{-3}; \theta_r = 0 \text{ m}^3\cdot\text{m}^{-3}$
D	$\alpha = 3,6 \text{ m}^{-1}; j = 1,56; K_s = 2,88194 \times 10^{-6} \text{ m}\cdot\text{s}^{-1};$ $\theta_s = 0,43 \text{ m}^3\cdot\text{m}^{-3}; \theta_r = 0,078 \text{ m}^3\cdot\text{m}^{-3}$
E	$\alpha = 4,1 \text{ m}^{-1}; j = 1,964; K_s = 7,22 \times 10^{-6} \text{ m}\cdot\text{s}^{-1};$ $\theta_s = 0,35 \text{ m}^3\cdot\text{m}^{-3}; \theta_r = 0,02 \text{ m}^3\cdot\text{m}^{-3}$

Para poner a punto la técnica experimental, inicialmente se utilizó arena fina; luego, se utilizaron dos tipos de tierra (F y G) procedentes de diferentes espacios públicos de la ciudad de Posadas. La tierra F era de un color rojizo y con arena gruesa. La tierra G era de un color negro rojizo (ver [Tabla 3.3](#)).

Tabla 3.3: Suelos utilizados para poner a punto la técnica experimental

Experimento	Tipo de suelo	Humedad gravimétrica (%)
1°	Arena fina	No se midió
2°	Tierra F	36,1
3°	Tierra F	22,7
4°	Tierra F	6,1
5°	Tierra G	19,2
6°	Tierra G	19,2
7°	Tierra G	3,6

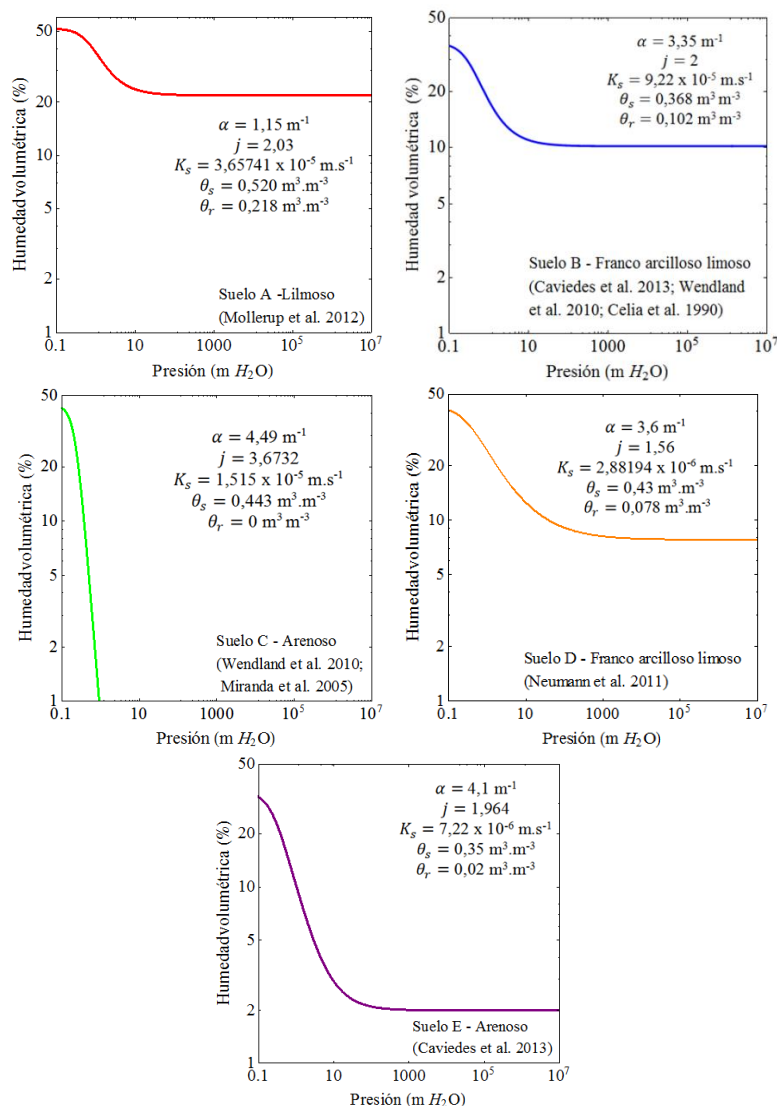


Figura 3.1: Curvas de retención hídrica de suelos utilizados para verificar el modelo desarrollado

Para realizar los ejercicios de validación, el suelo utilizado pertenece a la serie Naranjal, clasificado taxonómicamente como Kandiuulte Típico según el atlas de suelos del Instituto de Suelos - Instituto Nacional de Tecnología Agropecuaria (INTA) Castelar. Su composición granulométrica es 72% arcilla, 18% limo y 10% arena. El perfil típico de este suelo presenta seis horizontes con características diferentes. Para esta tesis se utilizó el horizonte Ap (ver [Tabla 3.4](#)).

La curva de retención hídrica de este suelo fue determinada experimentalmente por el Instituto de Suelos - INTA Castelar, utilizando el método de membrana de Richards. Las muestras de suelo fueron colocadas dentro de una cámara de presión llamada olla de Richards (ver [Figura 3.2](#)), que se encuentra cerrada en su parte inferior por una membrana de una determinada porosidad que solo permite el paso del agua. Las muestras de suelo previamente saturadas y pesadas fueron sometidas a distintas presiones mediante la inyección de aire. Presiones en aumento de: 0.01, 0.30, 0.61, 1.01, 3.36, 10.19, 20.39, 30.59, 50.98, 101.97, 152.96 mH₂O. Las presiones fueron aplicadas hasta alcanzar el punto de equilibrio de fuerzas, donde termina el desagüe de agua. Debido a que el suelo estudiado es arcilloso, esta etapa tomó varios días.

Tabla 3.4: Perfil del suelo Kandiuulte Típico (Instituto de Suelos - INTA Castelar, 2014)

Horizonte	Profundidad (cm)	Características generales
Ap	0-16	Claro suave; pardo rojizo oscuro (2,5YR3/4) en húmedo; arcillosa; bloques angulares medios, moderados que rompen a bloques débiles; firme; plástico y adhesivo; pH 4,71; húmedo; raíces comunes.
BA	16-40	Gradual suave; pardo rojizo oscuro (2,5YR3/4) en húmedo; arcilloso; bloques angulares medios, moderados; firme; plástico y adhesivo; pH 5,42; barnices arcillosos escasos; húmedo; raíces escasas; poros comunes y finos.
Bt1	40-98	Gradual suave; pardo amarillento oscuro (10R3/4) en húmedo; arcillosa; Bloques subangulares gruesos fuertes que rompen a bloques angulares medios, débiles; firme; plástico y adhesivo; pH 4,66; barnices arcillosos abundantes; húmedo; raíces escasas; poros comunes y finos; gravas escasas y finas.
Bt2	98-125	Claro suave; pardo amarillento oscuro (10R3/4) en húmedo; arcillosa; bloques angulares gruesos, fuertes que rompen a bloques medios, fuertes; firme, plástico y adhesivo; pH 4,31; barnices arcillosos abundantes y húmicos escasos; húmedo; escasas raíces; poros comunes y finos; gravas escasas y finas.
BC	125-185	Claro y suave; pardo amarillento oscuro (10R3/4) en húmedo; arcillosa; bloques sub angulares medios, moderados que rompen a bloques sub angulares medios débiles; firme; plástico y ligeramente adhesivo; pH 4,26; barnices arcillosos escasos; húmedo; poros abundantes y finos; ligeramente cementado.
R	220	Basalto

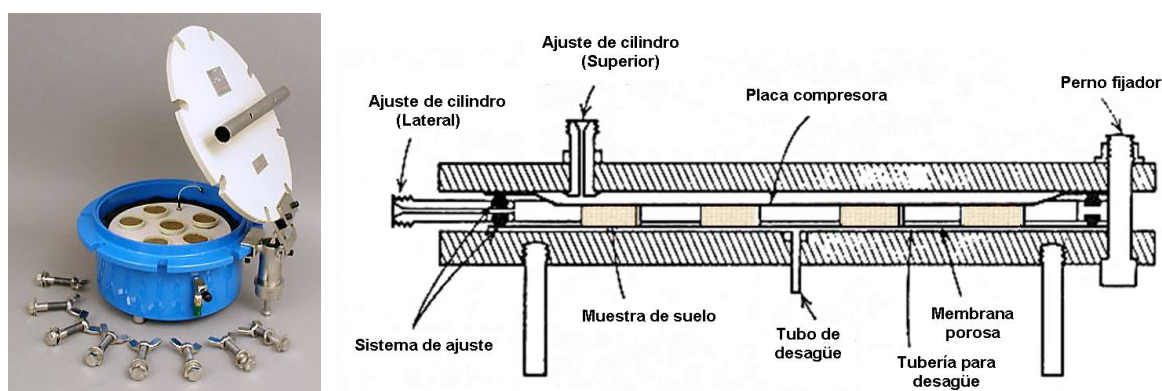


Figura 3.2: Olla de Richards, vista real – izq. (<http://www2.udec.cl/~rmatta/Suelos/procesos.htm>) y esquema con sus partes – der. (<http://edafologia2urjc.wikispaces.com/5.+Medida+del+agua>)

Luego se efectuaron los pesajes de las muestras de suelo. El volumen de agua retenido para cada presión aplicada fue: 39,12; 37,52; 37,89; 36,75; 35,92; 32,81; 30,31; 29,66; 28,21;

26,46; 28,55; 27,12 % (humedad volumétrica). Las determinaciones se realizaron con 2 a 30 repeticiones por muestra, los valores informados son los promedios y la desviación estándar promedio es 1,35. Los valores de cada una de las determinaciones con sus repeticiones se muestran en la [Tabla 3.4](#). La relación de presión y humedad volumétrica conforma la curva de retención hídrica del suelo estudiado (ver [Figura 3.3](#)).

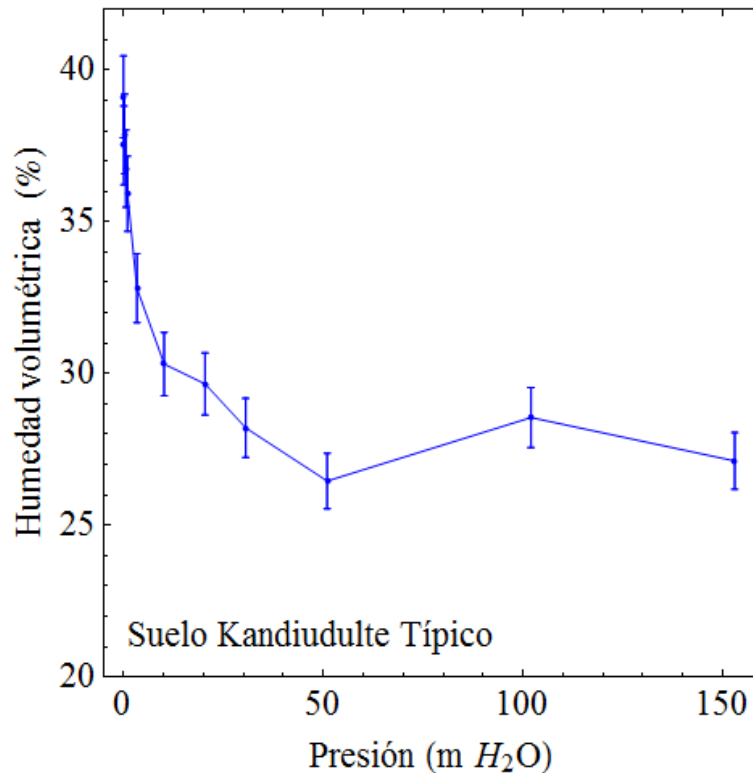


Figura 3.3: **Curva de retención hídrica obtenida experimentalmente (suelo Kandiuulte Típico).**
Desviación estándar promedio de 1,35 %

La conductividad hidráulica saturada también fue determinada experimentalmente por el Instituto de Suelos - INTA Castelar (ver [Figura 3.6](#)), utilizando el método de carga variable. Se utilizó un permeámetro de carga variable (ver [Figura 3.4](#)) donde las muestras de suelo son colocadas en una cámara de carga cerrada en la parte inferior y superior por un plato de una permeabilidad determinada que solo permite el paso del agua. El suelo se humedece desde la parte inferior hasta alcanzar la saturación. Se anota el nivel inicial de agua en el tubo de carga, luego de un periodo de tiempo se vuelve a tomar el nivel de agua en dicho tubo. La conductividad hidráulica saturada fue $2,06 \times 10^{-6}$ m/s. Para el cálculo se utilizó la siguiente expresión:

$$K_s = \frac{A_1}{A_2} \frac{L}{(t_2 - t_1)} \ln \left(\frac{h_1}{h_2} \right) \quad (3.1)$$

Donde K_s es conductividad hidráulica saturada [m/s], L es longitud de la columna de suelo [m], A_1 es área de la sección transversal del tubo de carga [m²], A_2 es área de la sección transversal del suelo [m²], t_1 es tiempo de la primera medición de nivel de agua [s], t_2 es tiempo de la segunda medición de nivel de agua [s], h_1 es nivel de agua en el tubo de carga en el tiempo t_1 [s], h_2 es nivel de agua en el tubo de carga en el tiempo t_2 [m].

Considerando los valores de presión, humedad volumétrica y conductividad hidráulica saturada, la curva de retención hídrica obtenida experimentalmente fue ajustada al modelo Mualem – van Genuchten utilizando el software RETC versión 6.02 creado por M. Th. van Genuchten, J. Simunek, F. J. Leij y M. Sejna en el año 2009. El software fue descargado del sitio web <http://www.pc-progress.com> en agosto del año 2014. La curva de retención hídrica del suelo Kandiudulte Típico presenta un comportamiento propio de suelos arcillosos (ver Figura 3.5).

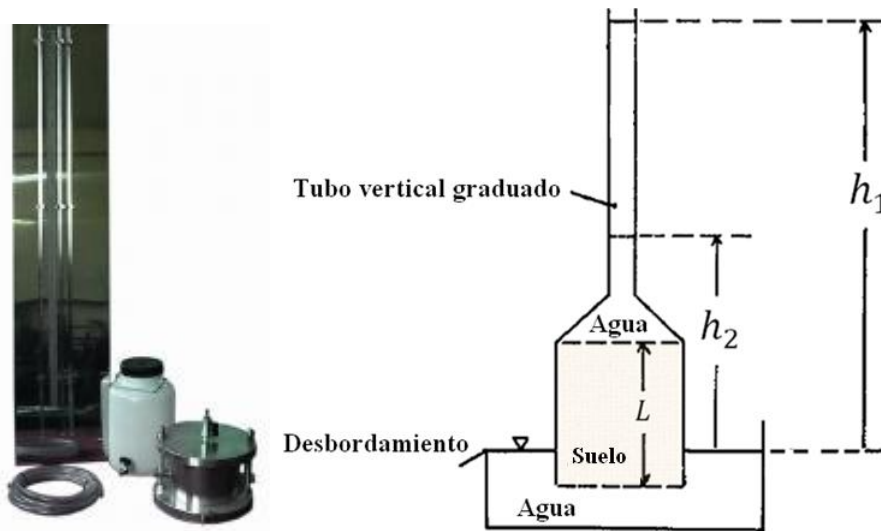


Figura 3.4: Permeámetro de carga variable, equipo real – izq. (<http://proetisa.com/proetisa-productos.php?ID=210>) y esquema del mismo – der. (Klute et al. 1986)

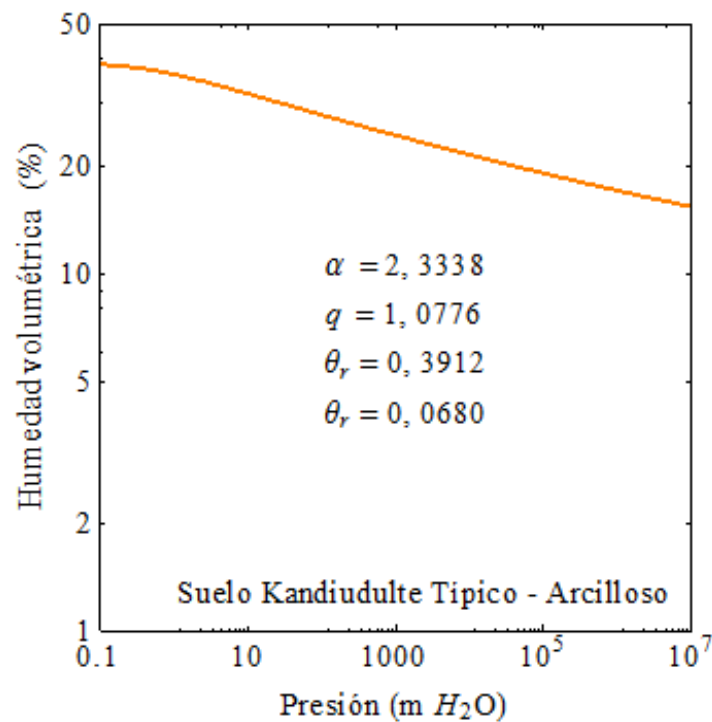


Figura 3.5: Curva de retención hídrica ajustada al modelo Mualem – van Genuchten (suelo Kandiudulte Típico)



Instituto de Suelos - Castelar
Grupo Calidad, Salud y Tecnología de Suelos
Análisis Físico de Laboratorio

SOLICITANTE/ DESTINATARIO:	José Luis Martínez	Recibida: 16/06/2014
PROYECTO:	---	Entregada: 06/09/2014
TEL/FAX:	(376) 4247712	Nº de hojas: 2/3
e-mail:	martinez_otros@gmail.com	

Determinaciones realizadas: **Constantes Hídricas (%)**

Nº Muestra/ Repeticiones	HUMEDAD VOLUMÉTRICA (volumen/volumen) para cada Presión (bares)											
	SAT.	0.01	0.03	0.06	0.10	0.33	1.00	2.00	3.00	5.00	10.00	15.00
2	36.73	36.05	36.08	34.89	34.04	31.50	29.41	28.65	27.36	26.02	28.60	26.90
8	40.62	36.60	36.58	35.47	34.45	30.95	28.74	27.82	28.55	27.14	28.59	27.25
5	41.82	36.33	36.36	35.49	34.75	31.77	29.48	29.30	27.94	26.27	28.51	27.43
20	38.00	37.46	37.98	37.08	36.27	33.00	30.29	30.10	28.24	26.25	28.49	27.18
3	37.30	35.27	35.76	34.72	34.08	31.49	29.38	28.96	27.34	25.75	28.63	27.39
17	37.42	37.15	37.69	36.19	35.24	32.30	30.38	29.90	28.45	26.30	28.62	26.93
11	36.35	35.91	36.31	35.65	35.15	32.42	30.04	29.02	27.68	26.06	28.17	27.46
30	39.5	37.8	38.8	37.8	36.9	33.7	31.0	29.9	27.9	26.4	28.9	26.49
21	39.07	37.10	37.77	36.64	36.03	33.43	30.77	30.48	28.89	27.15	28.4	27.0
15	42.40	39.80	39.96	38.44	37.30	33.06	29.95	29.04	27.18	25.23	28.49	27.14
28	39.40	39.35	39.70	38.65	37.69	34.26	31.18	30.35	28.62	26.84		
29	40.89	41.33	41.71	40.06	39.13	35.93	33.15	32.38	30.36	28.15		
Promedio	39.12	37.52	37.89	36.75	35.92	32.81	30.31	29.66	28.21	26.46	28.55	27.12

OBSERVACIONES:

- El Laboratorio no se responsabiliza por el uso incorrecto de los resultados entregados.
- Los resultados de humedad volumétrica fueron calculados en base al peso/volumen de los cilindros para conductividad, densidad aparente promedio = 1.49 Mg Tn-1.
- Las repeticiones a las presiones de 10 y 15 bares se realizaron con material disturbado y no se corresponden con la misma muestra no disturbada.

Ing. Agr. Patricia Carfagno
Ing. Agr. Maximiliano Eiza

Inst. de Suelos - CIRN, INTA Castelar
Las Cabañas y De los Reseros s/n.
(1712) Villa Udaondo, Hurlingham.
Provincia de Buenos Aires - Argentina.

COSTO TOTAL DE LAS DETERMINACIONES REALIZADAS

--- \$1365 ---

Figura 3.6: Determinaciones de humedad del Instituto de Suelos - INTA Castelar

3.2 Movimiento del agua en el suelo

3.2.1 Modelo matemático y ecuaciones de gobierno

El modelo matemático para el movimiento del agua en suelo, se construye a partir de la Ec. (3.2) Ecuación de Richards (Azizi Pour 2011; Harter et al. 2011; Kalinka y Ahrens 2011; Zha et al. 2013), que expresa la variación del contenido de agua en función del tiempo y de la posición. El contenido de agua puede ser expresado como humedad volumétrica θ o como potencial matricial ψ , donde la relación entre ellos está dada por la Ec. (3.3). En este trabajo se utiliza potencial matricial ya que permite obtener una solución continua en la transición del régimen no saturado al saturado (Caviedes et al. 2013). La ecuación de Richards en términos de potencial matricial con coordenada vertical que crece hacia arriba (Wendland y Pizarro 2010), puede ser expresada unidimensionalmente como:

$$C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K(\psi) \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + 1 \right) \right] \quad (3.2)$$

Donde $C(\psi) = \partial\theta/\partial\psi$ es la capacidad específica del suelo [m^{-1}], θ es la humedad volumétrica [$\text{m}^3.\text{m}^{-3}$], ψ es el potencial matricial [m], $K(\psi)$ es la conductividad hidráulica no saturada [$\text{m}.\text{s}^{-1}$], t es el tiempo [s], y z es la coordenada vertical [m].

Para la resolución de la ecuación de Richards es necesario especificar las relaciones constitutivas. En este trabajo se utilizan las ecuaciones de Mualem –van Genuchten (Bunsri et al. 2008; Ghanbarian Alavijeh et al. 2010; Dohnal et al. 2012; Caviedes et al. 2013):

$$\theta(\psi) = \begin{cases} \frac{\theta_s - \theta_r}{(1 + (\alpha|\psi|)^j)^m} + \theta_r & \psi \leq 0 \\ \theta_s & \psi > 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

$$S_e = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \quad (3.4)$$

$$K(\psi) = \begin{cases} K_s S_e^{0.5} \left[1 - \left(1 - S_e^{\frac{1}{m}} \right)^m \right]^2 & \psi \leq 0 \\ K_s & \psi > 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

$$C(\psi) = \begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial \psi} = -mj\alpha^j \frac{\theta_s - \theta_r}{(1 + \alpha^j |\psi|^j)^{m+1}} |\psi|^j \psi^{-1} & \psi \leq 0 \\ 0 & \psi > 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

$$m = 1 - \frac{1}{j} \quad (3.7)$$

Donde θ_r es el valor de humedad residual [$\text{m}^3.\text{m}^{-3}$], θ_s es el valor de humedad saturada [$\text{m}^3.\text{m}^{-3}$], K_s es la conductividad hidráulica saturada [$\text{m}.\text{s}^{-1}$], α [m^{-1}], m y j son parámetros característicos de cada tipo de suelo.

3.2.2 Modelo numérico

Para resolver numéricamente la Ec. (3.2) se utilizó un esquema de diferencias finitas implícito basado en un método de Crank-Nicolson modificado (Romano et al. 1998). El perfil del suelo fue discretizado en partes iguales de espesor Δz identificados por los nodos i , y un paso de tiempo variable Δt identificados por los superíndices l (ver Figura 3.7).

$$\begin{aligned}
c(\psi_i^l) \left(\frac{\psi_i^{l+1} - \psi_i^l}{\Delta t} \right) &= \frac{1}{\Delta z} \left[K \left(\psi_{i+\frac{1}{2}}^l \right) \left(\frac{\psi_{i+1}^{l+1} - \psi_i^{l+1}}{2\Delta z} + \frac{\psi_{i+1}^l - \psi_i^l}{2\Delta z} + 1 \right) + \right. \\
&\quad \left. - K \left(\psi_{i-\frac{1}{2}}^l \right) \left(\frac{\psi_i^{l+1} - \psi_{i-1}^{l+1}}{2\Delta z} + \frac{\psi_i^l - \psi_{i-1}^l}{2\Delta z} + 1 \right) \right] \quad (3.8)
\end{aligned}$$

Donde los subíndices $i \pm 1$, i , y $i \pm 1/2$ se refieren a la profundidad del suelo $z \pm \Delta z$, z , $z \pm \Delta z/2$, respectivamente. $K(\psi_{i+1/2}^l)$ y $K(\psi_{i-1/2}^l)$ son calculados tomando el promedio de los valores de la conductividad hidráulica no saturada de los nodos vecinos. Se probaron tres formas de obtener el promedio: media aritmética, media geométrica y media armónica.

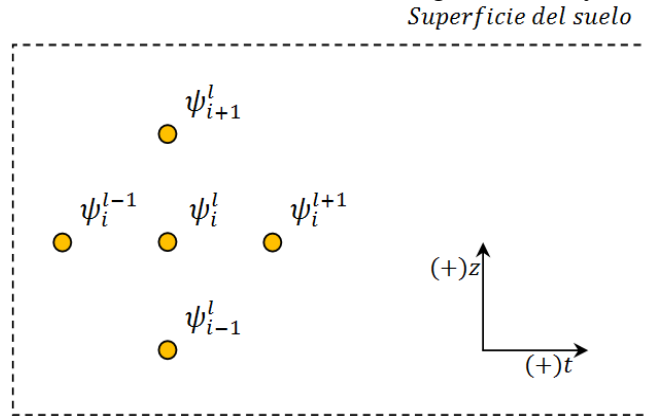


Figura 3.7: **Discretización del dominio**

Reordenando la Ec. (3.8) se tiene la siguiente relación general para nodo interior:

$$\begin{aligned}
-\frac{\Delta t}{c(\psi_i^l)2\Delta z^2} K(\psi_{i-1/2}^l) \psi_{i-1}^{l+1} + \left[\frac{\Delta t}{c(\psi_i^l)2\Delta z^2} \left(K(\psi_{i+1/2}^l) + K(\psi_{i-1/2}^l) \right) + 1 \right] \psi_i^{l+1} + \\
-\frac{\Delta t}{c(\psi_i^l)2\Delta z^2} K(\psi_{i+1/2}^l) \psi_{i+1}^{l+1} = + \frac{\Delta t}{c(\psi_i^l)2\Delta z^2} 2\Delta z \left(K(\psi_{i+1/2}^l) - K(\psi_{i-1/2}^l) \right) + \quad (3.9) \\
\frac{\Delta t}{c(\psi_i^l)2\Delta z^2} K(\psi_{i-1/2}^l) \psi_{i-1}^l - \left[\frac{\Delta t}{c(\psi_i^l)2\Delta z^2} \left(K(\psi_{i+1/2}^l) + K(\psi_{i-1/2}^l) \right) - 1 \right] \psi_i^l + \\
\frac{\Delta t}{c(\psi_i^l)2\Delta z^2} K(\psi_{i+1/2}^l) \psi_{i+1}^l
\end{aligned}$$

Las condiciones iniciales y de contorno (condiciones de Dirichlet) utilizadas para la resolución de la Ec. (3.2) son: $\psi(z,0) = \psi^{inicial}(z)$; $\psi(0,t) = \psi_0$ y $\psi(-L,t) = \psi_L$, $-L \leq z \leq 0$. Las condiciones de Neumann son: $q(0,t) = 0$ y $q(-L,t) = 0$ para flujo impermeable, y, $q(-L,t) = -K_s$ para drenaje libre. Las ecuaciones para los nodos de contorno pueden ser:

$$\psi_i^l = \text{Valor especificado (Dirichlet)} \quad (3.10)$$

$$q_i^l = \text{Flujo especificado (Neumann)} \quad (3.11)$$

A partir de la ecuación de Darcy-Buckingham, q_i fue aproximado usando una diferencia centrada para el potencial matricial, obteniéndose:

$$q_i^l = -K(\psi_i^l) \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + 1 \right) = -K(\psi_i^l) \left(\frac{\psi_{i+1}^l - \psi_{i-1}^l}{2\Delta z} + 1 \right) \quad (3.12)$$

Para resolver esta aproximación en los contornos se utilizaron nodos ficticios ubicados fuera del dominio de estudio. El flujo especificado puede tomar distintos valores: 0 (cero) para representar impermeabilidad, $-K_s$ (conductividad hidráulica saturada) para drenaje libre, una función o una constante. Incorporando a la Ec. (3.9), las ecuaciones (3.10) y (3.11) se obtiene el siguiente sistema tridiagonal de ecuaciones lineales. Además, se incorporó un parámetro G , que toma valor de cero cuando es contorno de Dirichlet, y vale 1 cuando es contorno de Neumann.

$$\begin{bmatrix} G a_n d_n + 1 & -a_n(b_n + c_n) G & 0 & \dots & 0 \\ -a_{n-1} c_{n-1} & a_{n-1} d_{n-1} + 1 & -a_{n-1} b_{n-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & -a_i c_i & a_i d_i + 1 & -a_i b_i & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & -a_2 c_2 & a_2 d_2 + 1 & -a_2 b_2 \\ 0 & \dots & 0 & -a_1(b_1 + c_1) G & G a_1 d_1 + 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \psi_n^{l+1} \\ \psi_{n-1}^{l+1} \\ \vdots \\ \psi_i^{l+1} \\ \vdots \\ \psi_2^{l+1} \\ \psi_1^{l+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +2\Delta z a_n e_n + 4\Delta z a_n b_n \left(-\frac{q_n}{K(\psi_n^l)} - 1 \right) + a_n(b_n + c_n)\psi_n^l - (a_n d_n - 1)\psi_n^l \\ + a_{n-1} 2\Delta z e_{n-1} + a_{n-1} c_{n-1} \psi_{n-2}^l - (a_{n-1} d_{n-1} - 1)\psi_{n-1}^l + a_{n-1} b_{n-1} \psi_n^l \\ \vdots \\ + a_i 2\Delta z e_i + a_i c_i \psi_{i-3}^l - (a_i d_i - 1)\psi_{i-2}^l + a_i b_i \psi_{i-1}^l \\ \vdots \\ + a_2 2\Delta z e_2 + a_2 c_2 \psi_1^l - (a_2 d_2 - 1)\psi_2^l + a_2 b_2 \psi_3^l \\ +2\Delta z a_1 e_1 + 4\Delta z a_1 c_1 \left(\frac{q_1}{K(\psi_1^l)} + 1 \right) - (a_1 d_1 - 1)\psi_1^l + a_1(b_1 + c_1)\psi_2^l \end{bmatrix} G + (1 - G) \times Valor \text{ esp.} \quad (3.13)$$

Donde:

$$a = \frac{\Delta t}{c(\psi_i^l) 2\Delta z^2} \quad (3.14)$$

$$b = K(\psi_{i+1/2}^l) \quad (3.15)$$

$$c = K(\psi_{i-1/2}^l) \quad (3.16)$$

$$d = K(\psi_{i+1/2}^l) + K(\psi_{i-1/2}^l) \quad (3.17)$$

$$e = K(\psi_{i+1/2}^l) - K(\psi_{i-1/2}^l) \quad (3.18)$$

Sobre el sistema de ecuaciones mencionado anteriormente se aplica el siguiente esquema de predictor/corrector:

$$[A_i^l] * [\psi_i^{l+1}] = [B_i^l] \quad (3.19)$$

$$[A_i^{l+1}] * [\psi_i^{(l+1)}] = [B_i^{l+1}] \quad (3.20)$$

⋮

$$[A_i^{(l+1)^{r-1}}] * [\psi_i^{(l+1)^r}] = [B_i^{(l+1)^{r-1}}] \quad (3.21)$$

En la etapa de predicción (Ec. (3.19)), las matrices $[A_i^l]$ y $[B_i^l]$ se obtienen con valores de potencial matricial en tiempo presente, ψ_i^l , obteniendo una solución en tiempo inmediato superior $[\psi_i^{l+1}]$. Esta solución ingresa nuevamente al sistema de ecuaciones para dar comienzo a la etapa de corrección (Ec. (20)), donde las matrices $[A_i^{l+1}]$ y $[B_i^{l+1}]$ se obtienen utilizando valores de potencial matricial en el tiempo inmediato superior ψ_i^{l+1} calculado en la

etapa predictora. Este proceso de corrección se realiza r veces (Ec. (3.21)) hasta cumplir con el criterio de tolerancia impuesto:

$$\frac{\psi_i^{(l+1)r} - \psi_i^{(l+1)r-1}}{\psi_i^{(l+1)r}} < 10^{-9} \quad (3.22)$$

La infiltración acumulada $IA(t)$ y la tasa de infiltración $TI(t)$ son magnitudes derivadas de $\psi(z, t)$. Ambas se calculan utilizando la ecuación de Darcy-Buckingham aproximada (Ec. (3.12)), afectando los nodos $n - 1$ y $n - 2$ (ver Figura 3.8) y siguiendo la aproximación:

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\psi_{n-1}^l - \psi_{n-2}^l}{\Delta z} \quad (3.23)$$

Para el cálculo de estas magnitudes se utilizaron las ecuaciones siguientes, donde: l_{max} es el número de iteración al tiempo donde se quiere conocer la infiltración acumulada:

$$TI(t) = -\sqrt{K(\psi_{n-1}^l) \cdot K(\psi_{n-2}^l)} \left(\frac{\psi_{n-1}^l - \psi_{n-2}^l}{\Delta z} + 1 \right) \Delta t \quad (3.24)$$

$$IA(t) = \sum_{l=0}^{l_{max}} -\sqrt{K(\psi_{n-1}^l) \cdot K(\psi_{n-2}^l)} \left(\frac{\psi_{n-1}^l - \psi_{n-2}^l}{\Delta z} + 1 \right) \Delta t \quad (3.25)$$

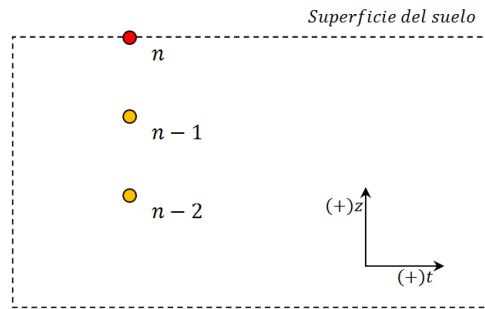


Figura 3.8: Nodos afectados en el cálculo de infiltración acumulada y tasa de infiltración

3.3 Transporte de soluto en el suelo

3.3.1 Modelo matemático y ecuaciones de gobierno

Para la implementación del modelo desarrollado, se creó un código computacional propio utilizando el software Wolfram Mathematica 8.0 (ver Anexo 1). Las simulaciones fueron calculadas en una computadora con procesador Intel® Core™ i3-2310 CPU@2.10GHz y 4 GB de memoria RAM.

La ecuación de advección – dispersión para transporte de soluto (Cai et al. 2011; Harter et al. 2011), puede ser expresada unidimensionalmente como:

$$\frac{\partial \theta C}{\partial t} = -\frac{\partial qC}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\theta D \frac{\partial C}{\partial z} \right) \quad (3.26)$$

Donde t es el tiempo [s], C es la concentración del soluto [$\text{g} \cdot \text{m}^{-3}$], q es la densidad de flujo de agua que es obtenida de la soluciones de las ecuaciones de Richards y Darcy [$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$], D es el coeficiente de dispersión [$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$], θ es la humedad volumétrica [$\text{m}^3 \cdot \text{m}^{-3}$], y z es la coordenada vertical [m].

3.3.2 Modelo numérico

Para resolver numéricamente la Ec. (3.26) se utilizó un esquema de diferencias finitas implícito basado en un método de Crank-Nicolson modificado.

El perfil del suelo fue discretizado en partes iguales de espesor Δz identificados por los nodos i , y un paso de tiempo variable Δt identificados por los superíndices l (ver Figura 3.7).

$$\begin{aligned}
 & \frac{\theta_i^{l+1} C_i^{l+1} - \theta_i^l C_i^l}{\Delta t} \\
 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{q_{i+1}^{l+1} C_{i+1}^{l+1} - q_{i-1}^{l+1} C_{i-1}^{l+1}}{2\Delta z} + \frac{q_{i+1}^l C_{i+1}^l - q_{i-1}^l C_{i-1}^l}{2\Delta z} \right) \\
 &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\theta_{i+1}^{l+1} D_{i+1}^{l+1} - \theta_{i-1}^{l+1} D_{i-1}^{l+1}}{2\Delta z} + \frac{\theta_{i+1}^l D_{i+1}^l - \theta_{i-1}^l D_{i-1}^l}{2\Delta z} \right) \frac{1}{2} \left(\frac{C_{i+1}^{l+1} - C_{i-1}^{l+1}}{2\Delta z} \right. \\
 &+ \left. \frac{C_{i+1}^l - C_{i-1}^l}{2\Delta z} \right) \\
 &+ \theta_{i+1/2}^l D_{i+1/2}^l \frac{1}{2} \left(\frac{C_{i+1}^{l+1} - 2C_i^{l+1} + C_{i-1}^{l+1}}{\Delta z^2} + \frac{C_{i+1}^l - 2C_i^l + C_{i-1}^l}{\Delta z^2} \right)
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Donde los subíndices $i \pm 1$, i , y $i \pm 1/2$ se refieren a la profundidad del suelo $z \pm \Delta z$, z , $z \pm \Delta z/2$, respectivamente.

Reordenando la Ec. (3.27) se tiene la siguiente relación general para nodo interior:

$$\begin{aligned}
 & +C_{i-1}^{l+1} \left(-\frac{q_{i-1}^{l+1}}{4\Delta z} + \frac{a_0}{16\Delta z^2} - \frac{\theta_{i+1/2}^l D_{i+1/2}^l}{2\Delta z^2} \right) + C_i^{l+1} \left(\frac{\theta_i^{l+1}}{\Delta t} + \frac{\theta_{i+1/2}^l D_{i+1/2}^l}{\Delta z^2} \right) + C_{i+1}^{l+1} \left(\frac{q_{i+1}^{l+1}}{4\Delta z} - \frac{a_0}{16\Delta z^2} - \right. \\
 & \left. \frac{\theta_{i+1/2}^l D_{i+1/2}^l}{2\Delta z^2} \right) = +C_{i-1}^l \left(\frac{q_{i-1}^l}{4\Delta z} - \frac{a_0}{16\Delta z^2} + \frac{\theta_{i+1/2}^l D_{i+1/2}^l}{2\Delta z^2} \right) + C_i^l \left(\frac{\theta_i^l}{\Delta t} - \frac{\theta_{i+1/2}^l D_{i+1/2}^l}{\Delta z^2} \right) + C_{i+1}^l \left(-\frac{q_{i+1}^l}{4\Delta z} + \right. \\
 & \left. \frac{a_0}{16\Delta z^2} + \frac{\theta_{i+1/2}^l D_{i+1/2}^l}{2\Delta z^2} \right)
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Las ecuaciones para los nodos de contorno pueden ser:

$$C_n^{l+1} = \text{Valor fijo del contorno superior (ccs)} \tag{3.29}$$

$$C_1^{l+1} = \text{Valor fijo del contorno inferior (cci)} \tag{3.30}$$

Con las ecuaciones (3.28), (3.29) y (3.30) se obtiene el siguiente sistema tridiagonal de ecuaciones lineales.

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} -\frac{a_{12}}{4\Delta z} + \frac{1}{16\Delta z^2} - \frac{a_{22}a_{32}}{2\Delta z^2} & \frac{a_{52}}{\Delta t} + \frac{a_{22}a_{32}}{\Delta z^2} & \frac{a_{42}}{4\Delta z} - \frac{a_{02}}{16\Delta z^2} - \frac{a_{22}a_{32}}{2\Delta z^2} & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -\frac{a_{1i}}{4\Delta z} + \frac{a_{0i}}{16\Delta z^2} - \frac{a_{2i}a_{3i}}{2\Delta z^2} & \frac{a_{5i}}{\Delta t} + \frac{a_{2i}a_{3i}}{\Delta z^2} & \frac{a_{4i}}{4\Delta z} - \frac{a_{0i}}{16\Delta z^2} - \frac{a_{2i}a_{3i}}{2\Delta z^2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -\frac{a_{1n-1}}{4\Delta z} + \frac{a_{0n-1}}{16\Delta z^2} - \frac{a_{2n-1}a_{3n-1}}{2\Delta z^2} & \frac{a_{5n-1}}{\Delta t} + \frac{a_{2n-1}a_{3n-1}}{\Delta z^2} & \frac{a_{4n-1}}{4\Delta z} - \frac{a_{0n-1}}{16\Delta z^2} - \frac{a_{2n-1}a_{3n-1}}{2\Delta z^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \\
 & \begin{bmatrix} C_1^{l+1} \\ C_2^{l+1} \\ \vdots \\ C_i^{l+1} \\ \vdots \\ C_{n-1}^{l+1} \\ C_n^{l+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ccs} \\ +C_{i-1}^{l+1} \left(\frac{a_{6i}}{4\Delta z} - \frac{a_{0i}}{16\Delta z^2} + \frac{a_{2i}a_{3i}}{2\Delta z^2} \right) + C_i^l \left(\frac{a_{7i}}{\Delta t} - \frac{a_{2i}a_{3i}}{\Delta z^2} \right) + C_{i+1}^l \left(-\frac{a_{8i}}{4\Delta z} + \frac{a_{0i}}{16\Delta z^2} + \frac{a_{2i}a_{3i}}{2\Delta z^2} \right) \\ \vdots \\ +C_{i-1}^l \left(\frac{a_{6i}}{4\Delta z} - \frac{a_{0i}}{16\Delta z^2} + \frac{a_{2i}a_{3i}}{2\Delta z^2} \right) + C_i^l \left(\frac{a_{7i}}{\Delta t} - \frac{a_{2i}a_{3i}}{\Delta z^2} \right) + C_{i+1}^l \left(-\frac{a_{8i}}{4\Delta z} + \frac{a_{0i}}{16\Delta z^2} + \frac{a_{2i}a_{3i}}{2\Delta z^2} \right) \\ \vdots \\ +C_{i-1}^{l+1} \left(\frac{a_{6n-1}}{4\Delta z} - \frac{a_{0n-1}}{16\Delta z^2} + \frac{a_{2n-1}a_{3n-1}}{2\Delta z^2} \right) + C_i^l \left(\frac{a_{7n-1}}{\Delta t} - \frac{a_{2n-1}a_{3n-1}}{\Delta z^2} \right) + C_{i+1}^l \left(-\frac{a_{8n-1}}{4\Delta z} + \frac{a_{0n-1}}{16\Delta z^2} + \frac{a_{2n-1}a_{3n-1}}{2\Delta z^2} \right) \\ \text{cci} \end{bmatrix} \tag{3.31}
 \end{aligned}$$

Donde:

$$a0 = \theta_{i+1}^{l+1} D_{i+1}^{l+1} - \theta_{i-1}^{l+1} D_{i-1}^{l+1} + \theta_{i+1}^l D_{i+1}^l - \theta_{i-1}^l D_{i-1}^l \quad (3.32)$$

$$a1 = q_{i-1}^{l+1} = -K(\psi_{i-1}^{l+1}) \left(\frac{\psi_{i+2}^{l+1} - \psi_{i-2}^{l+1}}{2\Delta z} + 1 \right) \quad (3.33)$$

$$a2 = \theta_{i+1/2} \quad (3.34)$$

$$a3 = D_{i+1/2} \quad (3.35)$$

$$a4 = q_{i+1}^{l+1} = -K(\psi_{i+1}^{l+1}) \left(\frac{\psi_{i+2}^{l+1} - \psi_i^{l+1}}{2\Delta z} + 1 \right) \quad (3.36)$$

$$a5 = \theta_i^{l+1} \quad (3.37)$$

$$a6 = q_{i-1}^l = -K(\psi_{i-1}^l) \left(\frac{\psi_{i+2}^l - \psi_{i-2}^l}{2\Delta z} + 1 \right) \quad (3.38)$$

$$a7 = \theta_i^l \quad (3.39)$$

$$a8 = q_{i+1}^l = -K(\psi_{i+1}^l) \left(\frac{\psi_{i+2}^l - \psi_i^l}{2\Delta z} + 1 \right) \quad (3.40)$$

Sobre el sistema de ecuaciones mencionado anteriormente se aplica el siguiente esquema de predictor/corrector:

$$[A_i^l] * [C_i^{l+1}] = [B_i^l] \quad (3.41)$$

$$[A_i^{l+1}] * [C_i^{(l+1)}] = [B_i^{l+1}] \quad (3.42)$$

⋮

$$[A_i^{(l+1)^{r-1}}] * [C_i^{(l+1)^r}] = [B_i^{(l+1)^{r-1}}] \quad (3.43)$$

En la etapa de predicción (Ec. (3.39)), las matrices $[A_i^l]$ y $[B_i^l]$ se resuelven con valores de concentración en tiempo presente, C_i^l , obteniendo una solución en tiempo inmediato superior $[C_i^{l+1}]$. Esta solución ingresa nuevamente al sistema de ecuaciones para dar comienzo a la etapa de corrección (Ec. (3.40)), donde las matrices $[A_i^{l+1}]$ y $[B_i^{l+1}]$ se resuelven utilizando valores de potencial matricial en el tiempo inmediato superior C_i^{l+1} . Este proceso de corrección se realiza r veces (Ec. (3.41)) hasta cumplir con el criterio de tolerancia impuesto:

$$\frac{C_i^{(l+1)^r} - C_i^{(l+1)^{r-1}}}{C_i^{(l+1)^r}} < 10^{-9} \quad (3.44)$$

La solución del sistema (3.31) presenta oscilaciones propias del método de aproximación empleado. Sin embargo, este inconveniente es resuelto mediante la implementación de una técnica de alisamiento (Tannehill et al. 1997), sumando a la matriz $[B_i^l]$ un amortiguador artificial que mantiene la precisión y estabilidad del método de aproximación. El amortiguador es $-\frac{w}{8}(C_{i+2}^l - 4C_{i+1}^l + 6C_i^l - 4C_{i-1}^l + C_{i-2}^l)$. A continuación el sistema de ecuaciones resultante:

$$\begin{bmatrix}
-\frac{a1_1}{4\Delta z} + \frac{a0_1}{16\Delta z^2} - \frac{a2_1 a3_1}{2\Delta z^2} & \frac{a5_1}{\Delta t} + \frac{a2_1 a3_1}{\Delta z^2} & \frac{a4_1}{4\Delta z} - \frac{a0_1}{16\Delta z^2} - \frac{a2_1 a3_1}{2\Delta z^2} & 0 & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & -\frac{a1_i}{4\Delta z} + \frac{a0_i}{16\Delta z^2} - \frac{a2_i a3_i}{2\Delta z^2} & \frac{a5_i}{\Delta t} + \frac{a2_i a3_i}{\Delta z^2} & \frac{a4_i}{4\Delta z} - \frac{a0_i}{16\Delta z^2} - \frac{a2_i a3_i}{2\Delta z^2} & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & -\frac{a1_{n-1}}{4\Delta z} + \frac{a0_{n-1}}{16\Delta z^2} - \frac{a2_{n-1} a3_{n-1}}{2\Delta z^2} & \frac{a5_{n-1}}{\Delta t} + \frac{a2_{n-1} a3_{n-1}}{\Delta z^2} & \frac{a4_{n-1}}{4\Delta z} - \frac{a0_{n-1}}{16\Delta z^2} - \frac{a2_{n-1} a3_{n-1}}{2\Delta z^2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix} *$$

$$\begin{bmatrix}
C_{i+1}^{l+1} \\
C_i^{l+1} \\
\vdots \\
C_i^{l+1} \\
\vdots \\
C_{i-1}^{l+1} \\
C_n^{l+1}
\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
+ C_{i-1}^l \left(\frac{a6_1}{4\Delta z} - \frac{a0_1}{16\Delta z^2} + \frac{a2_1 a3_1}{2\Delta z^2} \right) + C_i^l \left(\frac{a7_1}{\Delta t} - \frac{a2_1 a3_1}{\Delta z^2} \right) + C_{i+1}^l \left(-\frac{a8_1}{4\Delta z} + \frac{a0_1}{16\Delta z^2} + \frac{a2_1 a3_1}{2\Delta z^2} \right) + a9_1 \\
+ C_{i-1}^l \left(\frac{a6_i}{4\Delta z} - \frac{a0_i}{16\Delta z^2} + \frac{a2_i a3_i}{2\Delta z^2} \right) + C_i^l \left(\frac{a7_i}{\Delta t} - \frac{a2_i a3_i}{\Delta z^2} \right) + C_{i+1}^l \left(-\frac{a8_i}{4\Delta z} + \frac{a0_i}{16\Delta z^2} + \frac{a2_i a3_i}{2\Delta z^2} \right) + a9_i \\
+ C_{i-1}^l \left(\frac{a6_{n-1}}{4\Delta z} - \frac{a0_{n-1}}{16\Delta z^2} + \frac{a2_{n-1} a3_{n-1}}{2\Delta z^2} \right) + C_i^l \left(\frac{a7_{n-1}}{\Delta t} - \frac{a2_{n-1} a3_{n-1}}{\Delta z^2} \right) + C_{i+1}^l \left(-\frac{a8_{n-1}}{4\Delta z} + \frac{a0_{n-1}}{16\Delta z^2} + \frac{a2_{n-1} a3_{n-1}}{2\Delta z^2} \right) + a9_{n-1}
\end{bmatrix} \quad (3.45)$$

Donde:

$$a9 = -\frac{w}{8} (C_{i+2}^l - 4C_{i+1}^l + 6C_i^l - 4C_{i-1}^l + C_{i-2}^l) \quad (3.46)$$

Además, como esta amortiguación no es suficiente para evitar oscilaciones se realizó un suavizado del perfil de concentración obtenido como solución a cada tiempo t intermedio. El suavizado de la solución se realizó aplicando el cálculo de una mediana móvil en cada paso t , ese resultado es la corrección que se utiliza para iniciar el siguiente paso, $t+1$. La mediana móvil se calcula tomando de a tres elementos del vector con los valores de concentración y se reemplaza al primer valor por la mediana entre esos tres valores, luego se toman los tres elementos siguientes al reemplazado y se realiza el mismo procedimiento, así hasta llegar al antepenúltimo elemento del vector, los dos últimos valores del vector no se cambian, ya que están asociados al valor de la condición de contorno. Al finalizar todas la iteraciones, se aplica una suavización de la solución usando una media móvil estándar, tomando de a tres elementos del vector solución.

3.4 Experimento en laboratorio

Los experimentos se realizaron en el laboratorio del Instituto de Materiales de Misiones (IMAM), Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales (FCEQyN), Universidad Nacional de Misiones (UNaM). Los mismos fueron planificados y desarrollados para la investigación, todos los pasos fueron evaluados para garantizar la controlabilidad y reproducibilidad de los resultados. Así se fue perfeccionando la técnica gradualmente a lo largo de 7 ensayos preliminares.

Se utilizó una columna (tubo de PVC) de 33 cm de altura y 5 cm de diámetro. La columna fue dividida en 11 cilindros de 3 cm de altura. El cilindro superior (con menor volumen de suelo) solo tuvo la función de formar la lámina de agua (1 cm de espesor) sobre la superficie de la columna de suelo y no se midió su humedad. Los cilindros fueron enumerados para facilitar su identificación y evitar alteraciones de ubicación en la posterior manipulación (ver [Figura 3.9](#)).

La columna fue rellena con suelo disturbado (estructura del suelo modificada) y no disturbado (conserva la estructura original del suelo) dependiendo del tipo de experimento a realizar. A su vez, con suelo disturbado se utilizó suelo sin compactar y compactado. El relleno con suelo disturbado sin compactar se realizó volcando la tierra dentro de la columna armada, asegurando el asentamiento y apisonamiento de la tierra mediante pequeños golpes de la base de la columna contra la mesa de trabajo. El relleno con suelo compactado se realizó apasionando la tierra dentro de cada cilindro con la ayuda de un hierro macizo. El

volumen de suelo fue similar en todos los cilindros, excepto en el cilindro superior (con menor volumen). Para controlar el volumen de suelo, los cilindros fueron pesados en balanza digital. Cada cilindro compactado fue colocado sobre otro para formar la columna (ver [Figura 3.10](#) y [Figura 3.11](#)). El relleno con suelo no disturbado se realizó enterrando cada cilindro en el suelo (por debajo de la línea de vegetación).

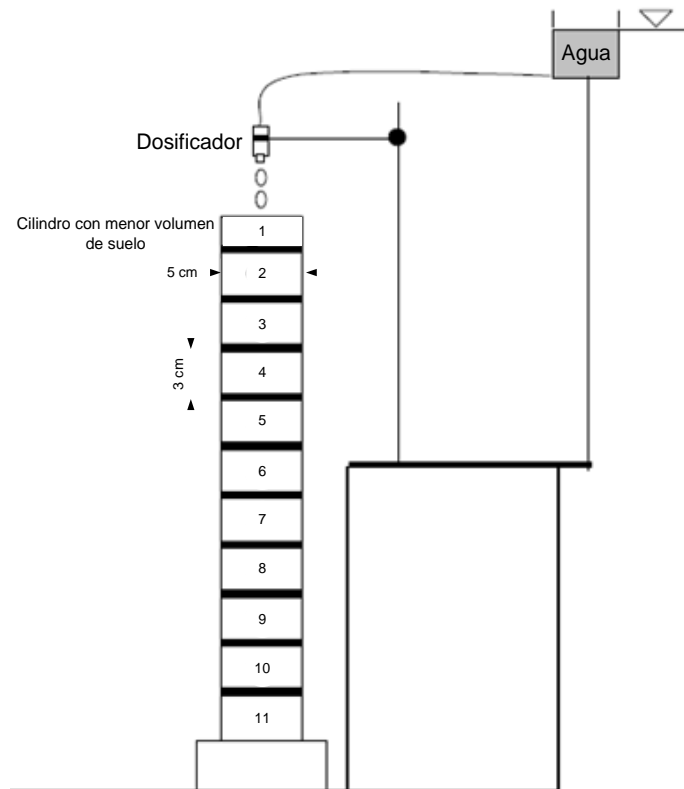


Figura 3.9: Representación esquemática de la columna y proceso de aplicación de agua



Figura 3.10: Compactado del suelo disturbado

Para unir cada cilindro y formar la columna se utilizó una cinta adhesiva. Debido a que el material de la columna (PVC) impedía visualizar el movimiento del agua fue necesario realizar varias pruebas para determinar el tiempo del experimento donde el agua no alcanzara el final de la columna. Se buscó que el agua quedara lejos de los extremos. Para sobrellevar este inconveniente, los cilindros fueron unidos de forma tal que la cinta adhesiva permitiera la salida de pequeñas gotas cuando el frente húmedo pasara por su lugar. Esto facilitó la tarea de estimar el movimiento del agua en la columna.

Luego de la formación de la columna, se aseguró su verticalidad mediante un nivel de burbuja. En la parte superficial del suelo se colocó un trozo de papel para lograr uniformidad de la caída del agua (ver [Figura 3.11](#)).

El proceso de infiltración comienza con un caudal alto para generar la lámina de agua sobre la parte superior del suelo. Luego, para mantener la lámina de agua generada, se disminuye el caudal progresivamente hasta finalizar el experimento. Los cambios de caudal son necesarios porque la velocidad de infiltración disminuye durante el experimento. El proceso de infiltración termina con la detención del goteo y retiro de la columna para separar los cilindros.



Figura 3.11: Columna preparada para el proceso de infiltración

La columna fue desmontada de forma horizontal sobre una mesa de trabajo, favoreciendo la separación de los cilindros y evitando que la infiltración continúe. Para la separación de los cilindros se cortó la cinta que los une mediante un cuchillo. Los cilindros se ubicaron dentro de bolsas plásticas para mantener la humedad. Se tomó una muestra cercana a 10 g de suelo de cada cilindro. Para ello, se utilizó una pequeña espátula de plástico que permitiera juntar una pequeña cantidad de suelo del centro del cilindro. La muestra de suelo de cada cilindro

fue esparcida sobre papel aluminio (ver [Figura 3.12a](#)). La determinación de la humedad en cada cilindro fue determinada por método gravimétrico.

Como la muestra se extrajo del centro del cilindro se asumió que el valor de humedad determinado se encuentra en la mitad del cilindro. Se pesaron las muestras de suelo sobre el papel aluminio y se dejó registro del peso húmedo. Luego, se secaron las muestras a 105°C hasta obtener un peso constante (ver [Figura 3.12b](#) y [Figura 3.12c](#)). Se aplicó la siguiente fórmula:

$$\% \text{ humedad (gravimétrica)} = \frac{\text{Peso húmedo (g)} - \text{Peso seco (g)}}{\text{Peso seco (g)}} \times 100 \quad (3.47)$$



Figura 3.12: a) Desmontado de la columna y toma de muestras. b) Secado de muestras. c) Pesado de muestras

3.5 Muestreo de suelo no disturbado

Se seleccionó una parcela ubicada dentro de las instalaciones del Centro de Desarrollo e Innovación Tecnológica (CeDITec) dependiente del Comité Ejecutivo de Desarrollo e Innovación Tecnológica (CEDIT), ciudad de Posadas, provincia de Misiones, Argentina. La parcela se encuentra en las coordenadas geográficas Latitud 27° 23' 38.076" Sur, Longitud 55° 58' 3.1074" Oeste (ver [Figura 3.13](#)).



Figura 3.13: Localización geográfica de la muestra de suelo no disturbada

Se seleccionó una parcela típica (3 m²) buscando la menor afectación antrópica posible (ver Figura 3.14a). Se preparó la parcela quitando la vegetación superficial hasta alcanzar el horizonte de suelo a los 15 cm de profundidad. Se enterraron los cilindros hasta cubrir su totalidad (Figura 3.14b). Se distribuyeron en la superficie de la zona preparada (Figura 3.14c). Se desenterraron asegurando mantener la estructura del suelo en cada cilindro (Figura 3.14d). Se quitaron los excedentes de los extremos y se envolvieron con papel aluminio para mantener su humedad (Figura 3.14e y Figura 3.14f). Luego los cilindros se colocaron en bolsas individuales dentro de una caja protegiéndolos con goma espuma (ver Figura 3.14g y Figura 3.14h).



Figura 3.14: Preparación de muestra de suelo no disturbado

En esas condiciones el suelo está listo para ser transportado ya sea para los análisis de propiedades físicas o para la construcción de la columna en laboratorio.

4. RESULTADO Y DISCUSIÓN

4.1 Movimiento del agua en el suelo

En este capítulo se aplicará el modelo desarrollado a siete problemas de aplicación utilizando los tipos de suelo presentados en la sección 3.1. Estos problemas fueron denominados aplicaciones.

La primera aplicación representa un caso de infiltración de agua en una columna de suelo homogéneo, inicialmente seco. Sujeto a condiciones de contorno superior e inferior de tipo Dirichlet. Utiliza el suelo B, la profundidad de la muestra de suelo es de 1 m y las condiciones iniciales y de contorno son:

$$\psi(z, t = 0) = -10 \text{ m para } -1 \text{ m} \leq z \leq 0;$$

$$\psi(z = 0, t) = -0,75 \text{ m para } t > 0;$$

$$\psi(z = -1 \text{ m}, t) = -10 \text{ m para } t > 0.$$

Esta aplicación se utilizará para realizar un análisis de sensibilidad de Δz y Δt , comparar con resultados de modelos de otros autores y proponer un promedio pesado para mejorar la aproximación del modelo desarrollado.

La segunda aplicación representa un caso de infiltración de agua en una columna de suelo homogéneo, inicialmente seco. Sujeto a condiciones de contorno superior e inferior de tipo Dirichlet. Se utiliza el suelo C, la profundidad de la muestra de suelo es de 0,70 m y las condiciones iniciales y de contorno son:

$$\psi(z, t = 0) = -0,686524 \text{ m para } -0,70 \text{ m} \leq z \leq 0;$$

$$\psi(z = 0, t) = -0,062476 \text{ m para } t > 0;$$

$$\psi(z = -0,70 \text{ m}, t) = -0,686524 \text{ m para } t > 0.$$

Esta aplicación se utilizará para comparar con resultados experimentales de otros autores y aplicar el promedio pesado propuesto.

La tercera aplicación representa un caso de infiltración de agua en una columna de suelo homogéneo, inicialmente seco. Sujeto a condiciones de contorno superior de tipo Dirichlet y condición de contorno inferior de tipo Neumann. Se utiliza el suelo D, la profundidad de la muestra de suelo es de 1 m y las condiciones iniciales y de contorno son:

$$\psi(z, t = 0) = -1 \text{ m para } 0 \leq z \leq 1 \text{ m};$$

$$\psi(z = 0, t) = 0 \text{ para } t > 0;$$

$$q(z = -1 \text{ m}, t) = -K_s \text{ para } t > 0.$$

Esta aplicación se utilizará para comparar con resultados de modelos de otros autores.

La cuarta aplicación representa un caso de infiltración de agua en una columna de suelo homogéneo, inicialmente seco. Sujeto a condiciones de contorno superior de tipo Dirichlet y condición de contorno inferior de tipo Neumann. Se utiliza el suelo A, la profundidad de la muestra de suelo es de 100 cm y las condiciones iniciales y de contorno son:

$$\psi(z, t = 0) = -200 \text{ cm para } 0 \leq z \leq 100 \text{ cm};$$

$$\psi(z = 0, t) = 0 \text{ para } t > 0;$$

$$q(z = 100 \text{ cm}, t) = -K_s \text{ para } t > 0.$$

Esta aplicación se utilizará para comparar con resultados de modelos de otros autores y analizar la influencia de la condición de drenaje libre.

La quinta aplicación representa un caso de infiltración de agua en una columna de suelo homogéneo, inicialmente seco. Sujeto a condiciones de contorno superior de tipo Dirichlet y condición de contorno inferior de tipo Neumann. Se utiliza el suelo E, la profundidad de la muestra de suelo es de 60 cm y las condiciones iniciales y de contorno son:

$$\psi(z, t = 0) = -150 \text{ cm para } 0 \leq z \leq 60 \text{ cm};$$

$$\psi(z = 0, t) = 0 \text{ para } t > 0;$$

$$q(z = 60 \text{ cm}, t) = -K_s \text{ para } t > 0.$$

Esta aplicación se utilizará para comparar con resultados de modelos de otros autores.

La sexta aplicación representa un caso de infiltración de agua en una columna de suelo homogéneo, inicialmente húmedo. Sujeto a condiciones de contorno superior e inferior de tipo Neumann. Se utiliza el suelo B, la profundidad de la muestra de suelo es de 1 m y las condiciones iniciales y de contorno son:

$$\psi(z, t = 0) = -0,20 \text{ m, } 0 \leq z \leq 1 \text{ m};$$

$$q(z = 0, t) = 0 \text{ para } t > 0;$$

$$q(z = -1 \text{ m}, t) = 0 \text{ para } t > 0.$$

Esta aplicación se utilizará para estudiar el balance de masa.

La séptima aplicación representa un caso de infiltración de agua en una columna de suelo homogéneo, inicialmente húmedo. Sujeto a condiciones de contorno superior e inferior de tipo Dirichlet. Se utiliza el suelo B, la profundidad de la muestra de suelo es de 1 m y las condiciones iniciales y de contorno son:

$$\psi(z, t = 0) = 0 \text{ para } -1 \text{ m} \leq z \leq 0;$$

$$\psi(z = 0, t) = 0 \text{ para } t > 0;$$

$$\psi(z = -1 \text{ m}, t) = -1,2668 \text{ m para } t > 0.$$

Esta aplicación se utilizará para realizar un análisis de sensibilidad de la humedad residual.

4.1.1 Análisis de convergencia y estabilidad del modelo

Se simuló la posición del frente húmedo para tres horas con datos de la primera aplicación. Se obtuvieron dos familias de curvas fijando Δt y Δz alternativamente. Primero, se fijó $\Delta t = 20$ s para distintos valores de Δz : 3,33 cm; 1,66 cm; 0,83 cm; 0,55 cm y 0,42 cm (ver [Figura 4.1a](#)). Luego, se fijó $\Delta z = 1,66$ cm para distintos valores de Δt : 30 s, 20 s, 10 s, 5 s y 1 s (ver [Figura 4.1b](#)).

Se observa que la forma del perfil de cantidad de agua es muy similar para los distintos valores de Δt y Δz utilizados, la mayor diferencia está en la zona de transición de potencial matricial alto a bajo, esta zona es conocida como zona de frente húmedo (ver [Figura 4.1](#)). La determinación precisa de la zona del frente húmedo y la cantidad de agua son relevantes para predecir el avance de los posibles contaminantes, por este motivo es la zona donde mayor énfasis se pone al momento de analizar la calidad del modelo.

Para $\Delta t = 20$ s, se comparó el error relativo entre: $\Delta z = 3,33$ cm y $\Delta z = 1,66$ cm, $\Delta z = 1,66$ cm y $\Delta z = 0,83$ cm, $\Delta z = 0,83$ cm y $\Delta z = 0,55$ cm; $\Delta z = 0,55$ cm y $\Delta z = 0,42$ cm. Se observó que el error relativo es máximo en la zona de frente húmedo $-0,20 \leq z \leq -0,10$ (ver [Figura 4.2a](#)). Aunque en la primera comparación el error relativo máximo aumenta, en las siguientes comparaciones presenta una disminución importante (ver [Figura 4.2b](#)).

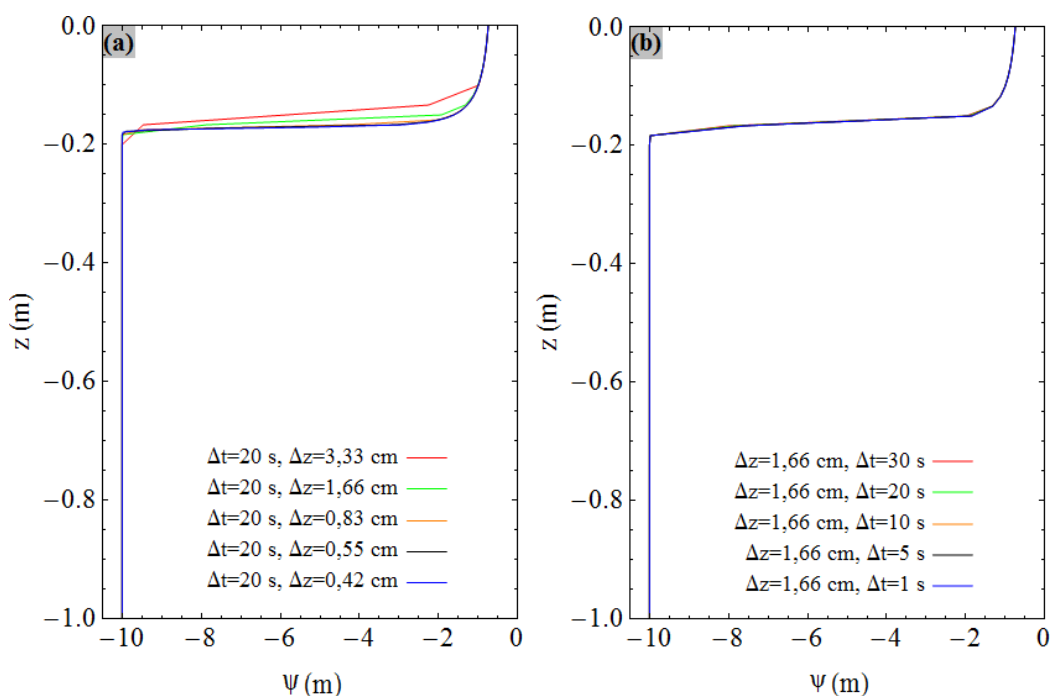


Figura 4.1: Posición del frente húmedo para tres horas con datos de la primera aplicación. (a) $\Delta t = 20$ s. (b) $\Delta z = 1,66$ cm. Para mejor visualización de los resultados se presentan gráficos con líneas continuas, utilizando interpolaciones lineales entre los valores obtenidos de las simulaciones

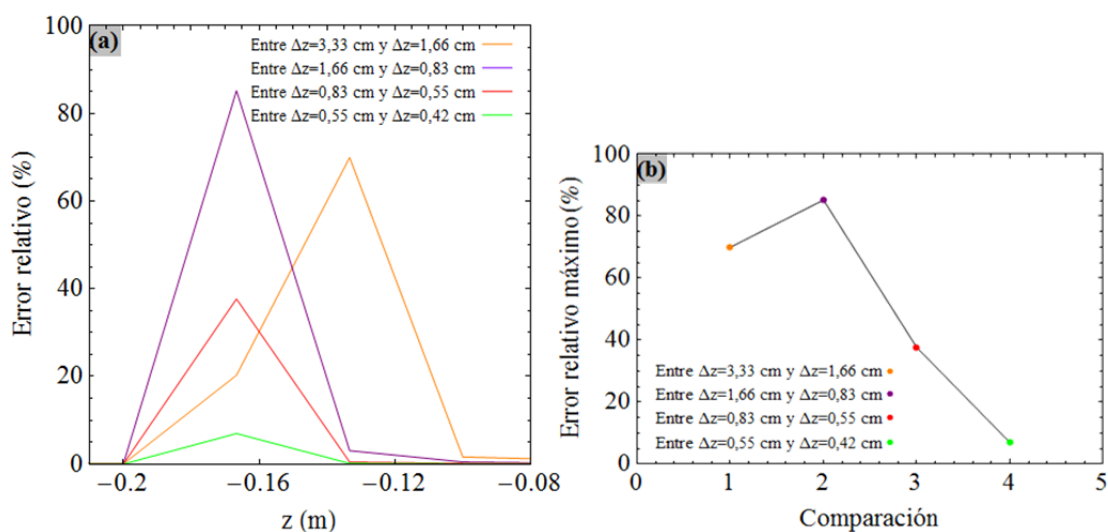


Figura 4.2: Comparación de error relativo para $\Delta t = 20$ s. (a) Error relativo en la zona de frente húmedo. (b) Comparación del error relativo máximo

Para $\Delta z = 1,66$ cm, se comparó el error relativo entre: $\Delta t = 30$ s y $\Delta t = 20$ s, $\Delta t = 20$ s y $\Delta t = 10$ s, $\Delta t = 10$ s y $\Delta t = 5$ s; $\Delta t = 5$ s y $\Delta t = 1$ s. También, se observó que el error relativo es máximo en la zona de frente húmedo $-0,20 \leq z \leq -0,10$ (ver Figura 4.3a). En este caso, se observó, que el error relativo presenta disminución en todas las comparaciones realizadas (ver Figura 4.3b).

Los resultados obtenidos permiten decir que el modelo matemático desarrollado es convergente, dado que el error relativo disminuye en sucesivas aproximaciones a medida que los valores del espaciamiento espacial y temporal disminuyen.

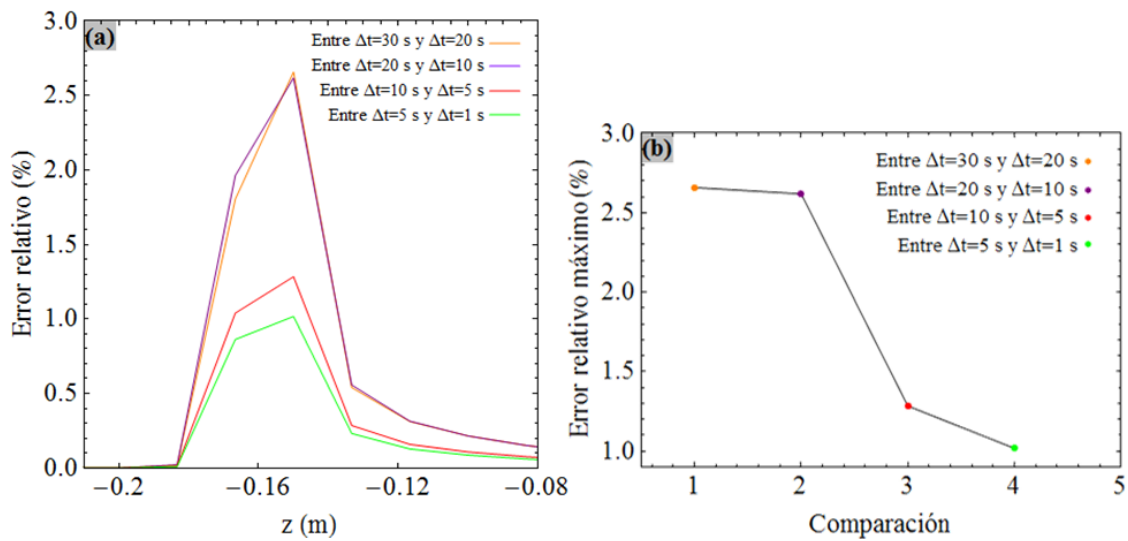


Figura 4.3: Comparación de error relativo para $\Delta z = 1,66$ cm. (a) Error relativo en la zona de frente húmedo. (b) Comparación del error relativo máximo

4.1.2 Comparación con modelo de Wendland

Se simuló utilizando los parámetros del suelo de la segunda aplicación, en este caso se obtuvo el perfil de cantidad de agua para 1,75 horas. Se obtuvo la familia de curvas fijando $\Delta t = 1$ s para distintos valores de Δz : 0,58 cm, 0,38 cm, 0,29 cm, 0,23 cm, 0,19 cm y 0,17 cm. Se muestra en primer lugar la comparación con los resultados del modelo obtenido por [Wendland y Pizarro \(2010\)](#) (ver [Figura 4.4a](#)). Se verificó que el error relativo máximo se produce en la zona de frente húmedo $-0,345 \text{ m} \leq z \leq -0,335 \text{ m}$ (ver [Figura 4.4b](#)). También, se comprobó que el error relativo máximo disminuye conforme Δz es menor. Contrariamente, el tiempo de CPU en simulación decrece conforme Δz es mayor (ver [Figura 4.4c](#)). Los resultados obtenidos permiten afirmar que el modelo matemático desarrollado es más sensible a los valores de Δz que a los de Δt para los valores usados.

4.1.3 Comparación con experimentos de Miranda

Se simuló el perfil de cantidad de agua para 1,75 horas con datos de la segunda aplicación. Utilizando $\Delta t = 1$ s y $\Delta z = 0,17$ cm se expresó la cantidad de agua de dos formas, una relaciona profundidad y potencial matricial (ver [Figura 4.5a](#)); y la otra, profundidad y humedad volumétrica (ver [Figura 4.5b](#)). Ambas se compararon con resultados experimentales de [Miranda et al. \(2005\)](#).

Al comparar los experimentos de [Miranda et al. \(2005\)](#) con la curva que relaciona profundidad y potencial matricial, se verificó que el error relativo tiene valores diferentes para cada experimento (ver [Figura 4.6a](#)). Al comparar con la curva que relaciona profundidad y humedad volumétrica, se observó valores similares entre los experimentos y mayores que los calculados con potencial matricial (ver [Figura 4.6b](#)). Ambos muestran el error relativo máximo en la región del frente húmedo $-0,40 \text{ m} \leq z \leq -0,30 \text{ m}$.

En la comparación anterior, se comprueba que los valores de error relativo pueden ser diferentes dependiendo si son calculados en términos de potencial matricial o humedad volumétrica. El error relativo promedio de los resultados calculados con potencial matricial es 75,10%, mientras que el error relativo promedio de los resultados calculados con humedad volumétrica es 72,60%. Por tanto, es necesario considerar este aspecto al momento de analizar errores y comparar modelos entre sí.

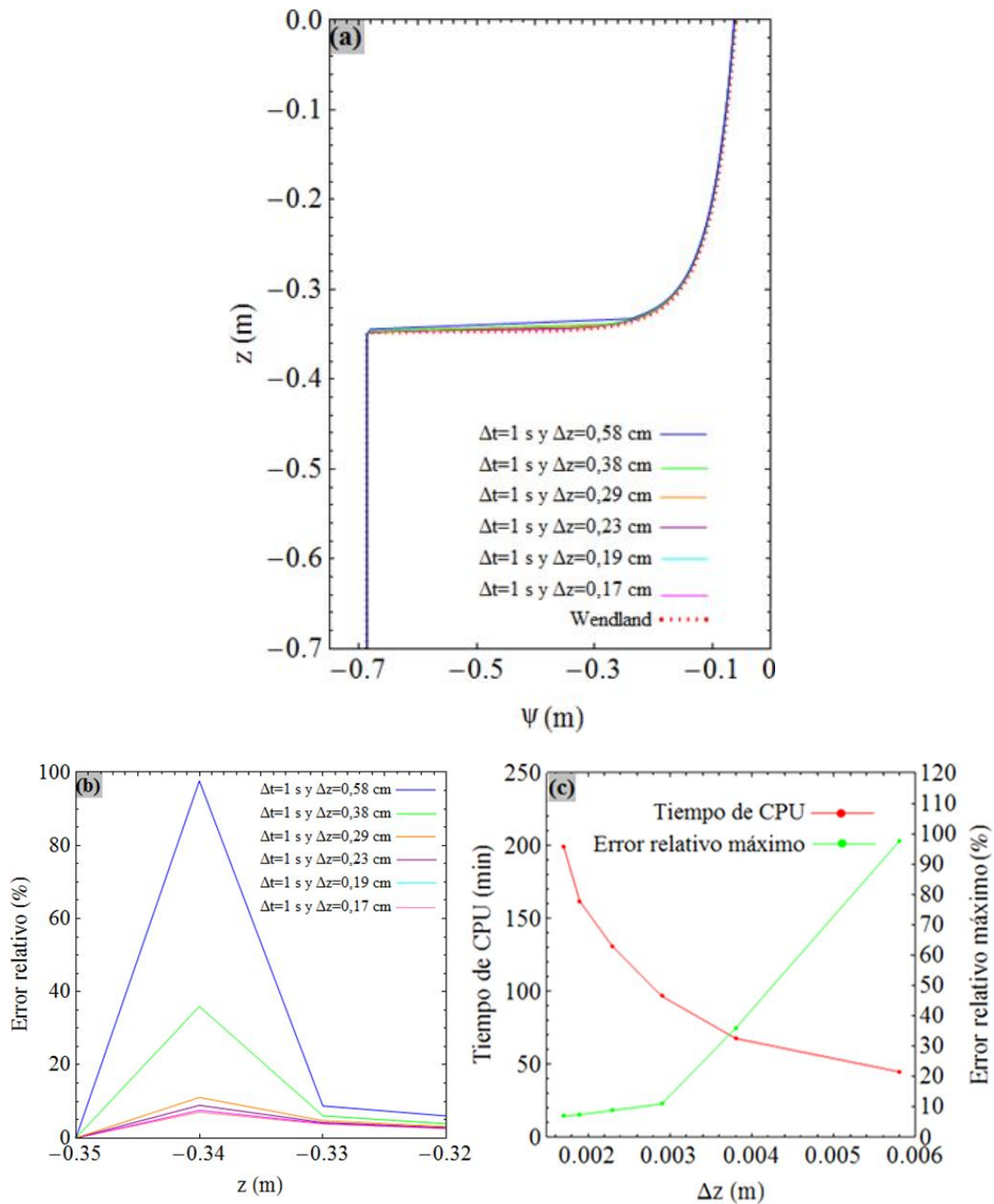


Figura 4.4: (a) Perfil de cantidad de agua para 1,75 horas con datos de la segunda aplicación ($\Delta t = 1$ s para distintos valores de Δz) (b) Error relativo máximo para distintos valores de Δz . (c) Tiempo de CPU y error relativo máximo para diferentes valores de Δz

Propuesta de promedio pesado para los resultados

A partir del perfil de cantidad de agua para 1,75 horas con datos de la segunda aplicación, utilizando $\Delta t = 1$ s, $\Delta z = 0,17$ cm, se implementó un procedimiento para promediar los resultados de la siguiente manera:

$$\psi_{i,n} = \frac{1}{(1+n)^2} \sum_{z=-n}^n (n+1-|z|) \psi_{i+z} \quad (4.1)$$

para $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ y para $n \leq i \leq i_{max} - n$, donde $i = 0, 1, 2, 3, \dots, i_{max}$

En este promedio pesado del potencial matricial se da mayor peso a los valores del potencial centrados en la posición i -ésima considerada, en cambio, para los valores de i cercanos a los contornos se conservan los valores sin promediar.

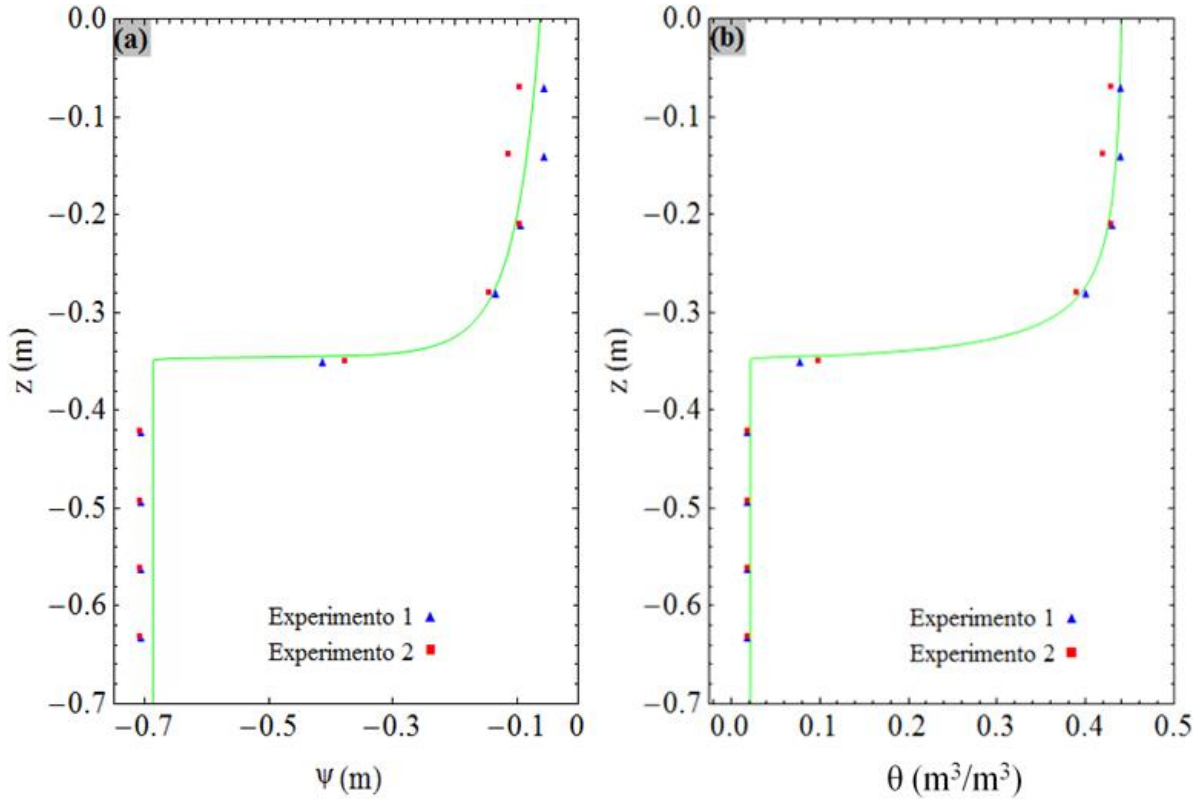


Figura 4.5: Perfil de cantidad de agua para 1,75 horas con datos de la segunda aplicación. (a) Curva que relaciona profundidad y potencial matricial. (b) Curva que relaciona profundidad y humedad volumétrica

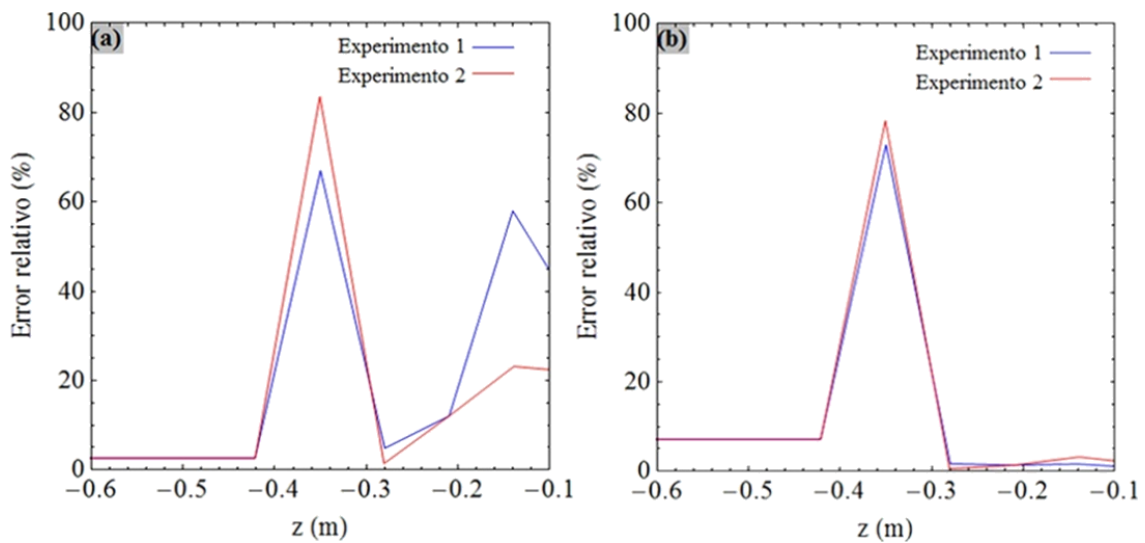


Figura 4.6: Comparación con resultados experimentales de [Miranda et al. \(2005\)](#). (a) Comparación con la curva que relaciona profundidad y potencial matricial. (b) Comparación con la curva que relaciona profundidad y humedad volumétrica

Se grafican los resultados del modelo promediado para tres valores de n : 0, 5 y 10, estos se comparan con los resultados experimentales de [Miranda et al. \(2005\)](#) (ver [Figura 4.7a](#)), se observó que el error relativo máximo contra uno de los experimentos siempre disminuye conforme aumenta n , en cambio, comparado con el otro, el error relativo máximo toma un valor mínimo a un cierto valor de n (ver [Figura 4.7b](#)).

Se observó que aislando la zona de frente húmedo $-0,40 \text{ m} \leq z \leq -0,30 \text{ m}$, para ambos experimentos, el error relativo máximo siempre disminuye al aumentar n . Se comprobó obteniendo las familias de curvas para ambos experimentos, fijando $\Delta t = 1 \text{ s}$ para distintos valores de Δz : 0,58 cm, 0,38 cm, 0,29 cm, 0,23 cm, 0,19 cm; 0,17 cm (ver [Figura 4.7c y 4.7d](#)).

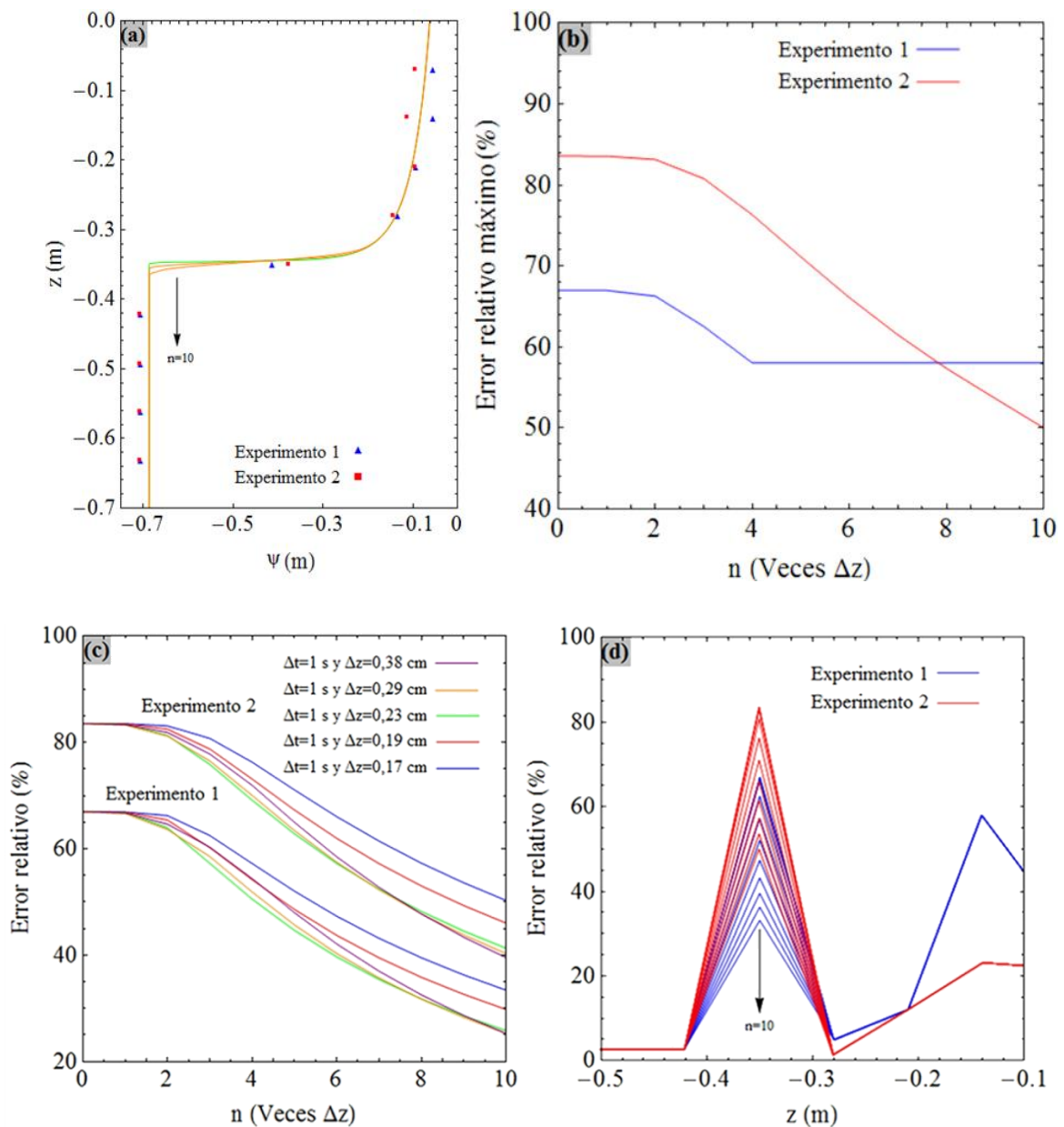


Figura 4.7: (a) Perfil de cantidad de agua para 1,75 horas con datos de la segunda aplicación, utilizando promedio pesado del potencial matricial. Comparación con dos de los resultados experimentales de [Miranda et al. \(2005\)](#): (b) toda la curva, (c) y (d) en zona de frente húmedo

Se obtuvieron valores de productos de n por Δz para distintos errores relativos y distintos Δz . En ambos experimentos, se observó similitud en los valores de este producto para Δz : 0,23 cm, 0,19 cm y 0,17 cm (ver [Tabla 4.1](#)). Por lo tanto, puede ser considerado una forma de mejorar los modelos particularmente para la zona del frente húmedo. El valor de n por Δz podría estar relacionado con el tipo de suelo o con algún aspecto de tipo experimental al momento de tomar las muestras. Al respecto se considera que es necesario realizar más análisis para poder hacer una generalización más fuerte.

Tabla 4.1: Valores de los productos de n por Δz (cm) para distintos errores relativos y distintos Δz . (a) Valores comparando con el experimento 1. (b) Valores comparando con el experimento 2.

(a)						(b)					
Δz (cm)	Error relativo (%)					Δz (cm)	Error relativo (%)				
	10	20	30	40	50		10	20	30	40	50
0,17	3	2,4	1,9	1,3	0,9	0,17	3,7	3,2	2,7	2,2	1,7
0,19	3,3	2,6	1,9	1,3	0,9	0,19	4,1	3,5	2,9	2,3	1,7
0,23	3,7	2,8	2	1,4	1	0,23	4,6	3,9	3,1	2,4	1,8
0,29	4,4	3,4	2,5	1,8	1,3	0,29	5,5	4,6	3,8	2,9	2,2
0,38	5,6	4,5	3,4	2,5	1,8	0,38	6,9	5,9	4,9	3,8	2,9

4.1.4 Comparación con modelos de Celia y Wendland

Se simuló el perfil de cantidad de agua y se encontró la posición del frente húmedo para 24 horas usando los parámetros de la primera aplicación.

Se obtuvieron las curvas para tres casos: i) $\Delta t = 50$ s y $\Delta z = 1,66$ cm; ii) $\Delta t = 50$ s y $\Delta z = 0,83$ cm; iii) $\Delta t = 5$ s y $\Delta z = 0,42$ cm y se compararon con los resultados de los modelos obtenidos por [Celia et al. \(1990\)](#) (ver [Figura 4.8a](#)). Se observó el menor error relativo para el caso iii, siendo seleccionado para el modelo propuesto (ver [Figura 4.8b](#)).

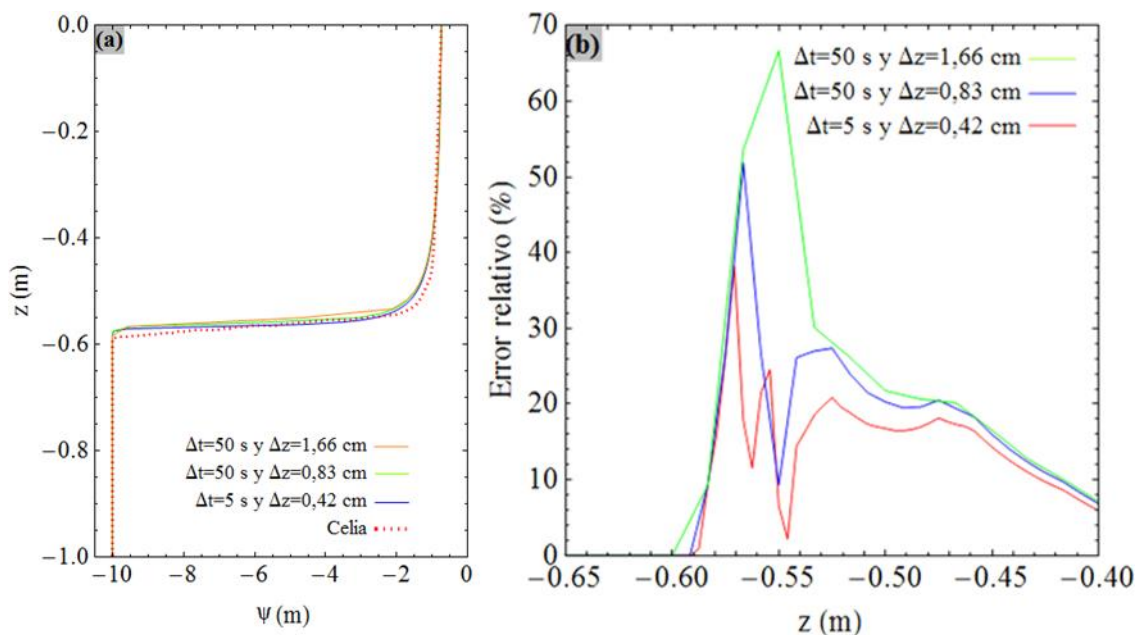


Figura 4.8: Perfil de cantidad de agua para 24 horas con datos de la primera aplicación. (a) Curvas para tres casos de comparación y resultados obtenidos por [Celia et al. \(1990\)](#). (b) Comparación del error relativo

El perfil de cantidad de agua para $\Delta t = 5$ s y $\Delta z = 0,42$ cm se comparó con resultados obtenidos por Celia et al. (1990) (ver Figura 4.9a) y con resultados obtenidos por Wendland y Pizarro (2010) (ver Figura 4.9b).

Se observó que el error relativo en la comparación del modelo propuesto con el modelo de Celia et al. (1990) es menor que el error relativo obtenido al comparar con el modelo de Wendland y Pizarro (2010). En ambos casos, el error relativo máximo se presentó en la zona del frente húmedo $-0,60 \text{ m} \leq z \leq -0,50 \text{ m}$ (ver Figura 4.9c).

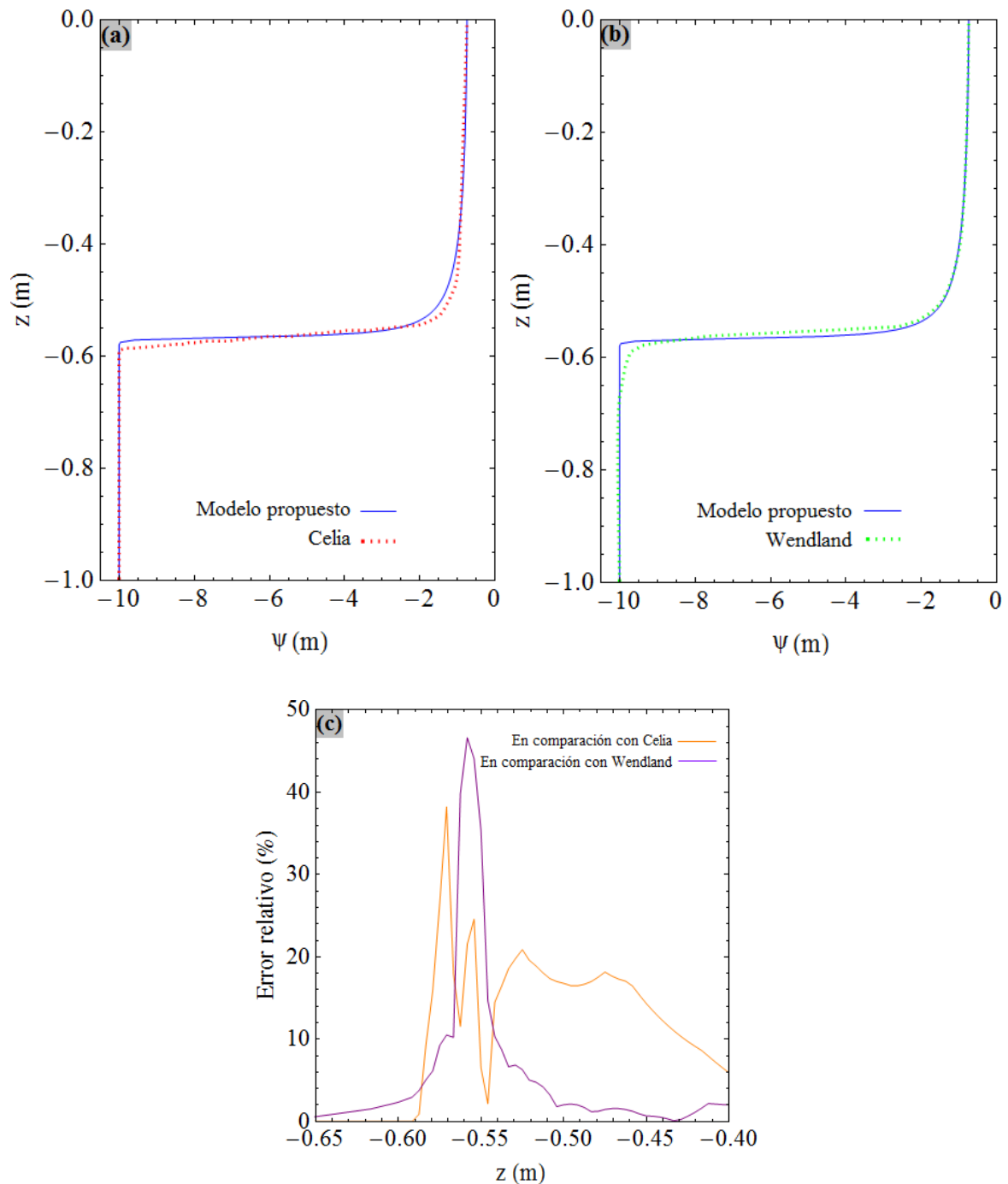


Figura 4.9: Perfil de cantidad de agua para 24 horas con datos de la primera aplicación ($\Delta t = 5$ s y $\Delta z = 0,42$ cm). Comparación con (a) Celia et al. (1990) y (b) Wendland y Pizarro (2010). (c) Error relativo en la comparación con Celia et al. (1990) y Wendland y Pizarro (2010)

Aplicación de promedio pesado en los resultados

El mismo tipo de promedio ponderado se utilizó en la primera aplicación para una simulación de 24 horas, utilizando $\Delta t = 5$ s, $\Delta z = 0,42$ cm. Al comparar con los resultados de Celia et al. (1990) y con Wendland y Pizarro (2010), fuera (ver Figura 4.10a) y dentro (ver Figura 4.10b) de la zona de frente húmedo $-0,58 \text{ m} \leq z \leq -0,52 \text{ m}$, se observó el mismo comportamiento: (i) el error relativo máximo disminuye hasta cierto valor de n y luego aumenta, (ii) el error relativo máximo se presenta en distintas profundidades (ver Figura 4.10c y 4.10d). Comparando con los resultados de Celia et al. (1990) se verificó una situación opuesta en la zona $-0,55 \text{ m} \leq z \leq -0,50 \text{ m}$: el error relativo aumenta cuando aumenta valor de n .

El resultado obtenido es similar, en algunos aspectos, al obtenido con la segunda aplicación. La similitud se observa en que la diferencia con los valores de referencia (en este caso dos modelos) va disminuyendo a medida que aumenta n , hasta alcanzar un valor mínimo, y luego la diferencia (error) aumenta nuevamente.

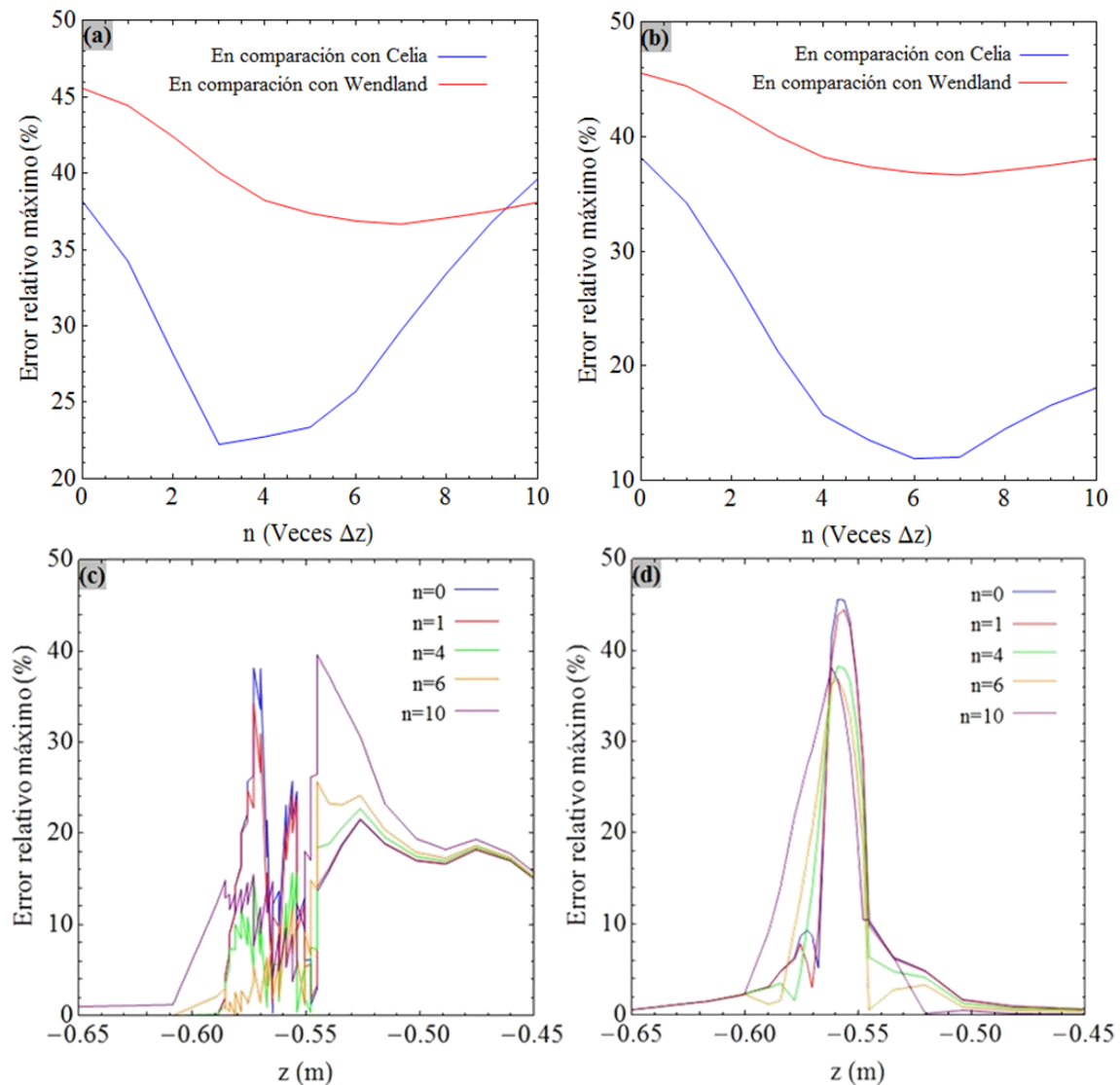


Figura 4.10: Comparación con los resultados de Celia et al. (1990) y con Wendland y Pizarro (2010), fuera (a) y dentro (b) de la zona de frente húmedo. Distribución del error relativo (c) en comparación con Celia et al. (1990) y (d) en comparación con Wendland y Pizarro (2010)

4.1.5 Comparación con modelo de Neumann

Con datos de la tercera aplicación se simuló el proceso de infiltración, permitiendo obtener el perfil de cantidad de agua y la posición del frente húmedo para 0,2 días.

Se obtuvo la curva para $\Delta t = 1$ s y $\Delta z = 0,2$ cm (ver Figura 4.11a) y se comparó con el resultado obtenido por Neumann et al. (2011). El error relativo máximo se presentó en la zona de frente húmedo $0,60 \text{ m} \leq z \leq 0,70 \text{ m}$ (ver Figura 4.11b).

Además, se observa una desviación del perfil de humedad en las cercanías del contorno inferior, esta desviación es hacia valores de humedad menores que los obtenidos por Neumann et al. (2011) y está asociada a la condición de contorno de drenaje libre impuesta. Los autores mencionados utilizaron una aproximación en volumen de control para la discretización espacial y diferencia finita para la discretización temporal (Δt desde 0,0001 d hasta 0,0008 d). Esta desviación será discutida más adelante en la sección 6.

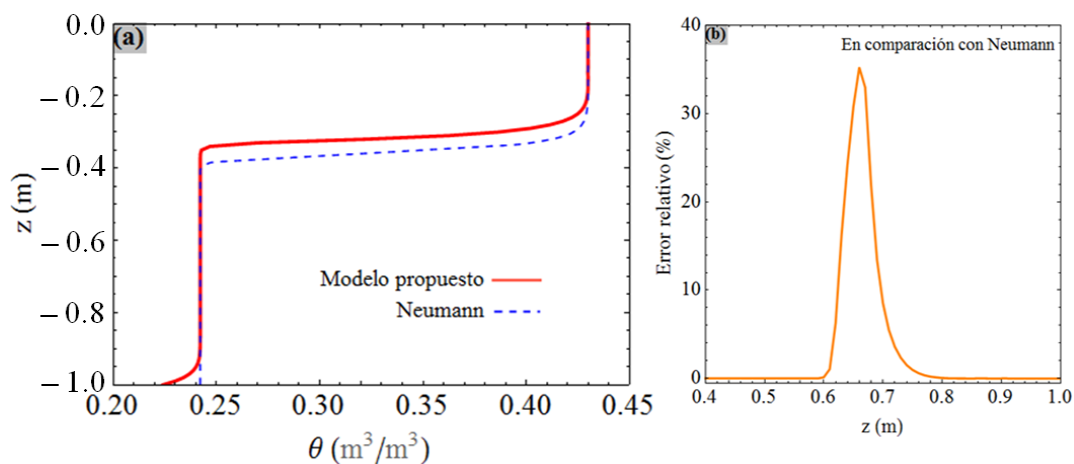


Figura 4.11: Comparación con de los resultados obtenidos con los de Neumann et al. (2011). (a) Perfil de humedad y (b) Error relativo circunscrito a la zona del frente húmedo

Se obtuvieron los perfiles de humedad para tiempos comprendidos entre 0 y 10 días, con $\Delta t = 0,002$ día y $\Delta z = 1$ cm. Con esos perfiles se calcularon la infiltración acumulada (ver Figura 4.12a) y la tasa de infiltración en función del tiempo (ver Figura 4.12b). A partir de 0,2 días la infiltración acumulada crece en forma constante. Cuando se alcanza el estado estacionario, la tasa de infiltración converge al valor de la conductividad hidráulica saturada ($K_s = 0,249 \text{ m.día}^{-1}$).

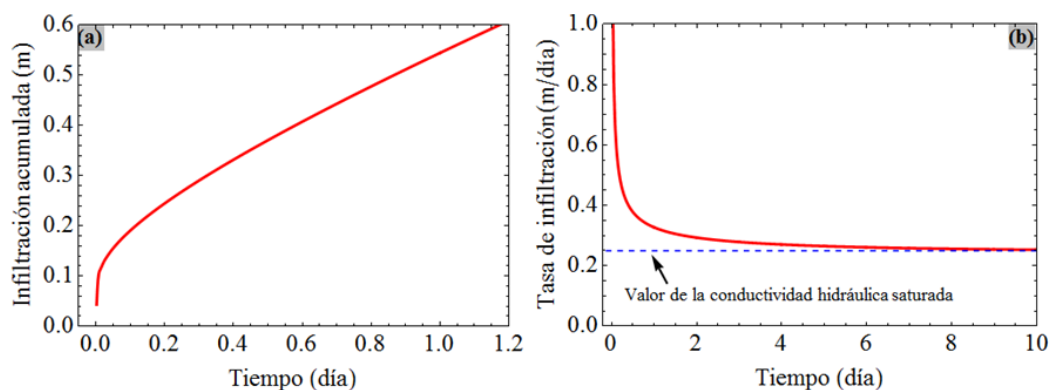


Figura 4.12: (a) Infiltración acumulada. (b) Tasa de infiltración. Posición con datos de la primera aplicación con $\Delta t = 0,002$ d y $\Delta z = 1$ cm

4.1.6 Comparación con modelo de Mollerup

Con datos de la cuarta aplicación se simuló el perfil de cantidad de agua y se encontró la posición del frente húmedo para 1,1925 horas. Se obtuvo la curva para $\Delta t = 1$ s y $\Delta z = 0,2$ cm (ver Figura 4.13a) y se comparó con el resultado obtenido por Mollerup y Hansen (2012). El error relativo máximo se presentó en la zona de frente húmedo $0,65 \text{ m} \leq z \leq 0,75 \text{ m}$ (ver Figura 4.13b).

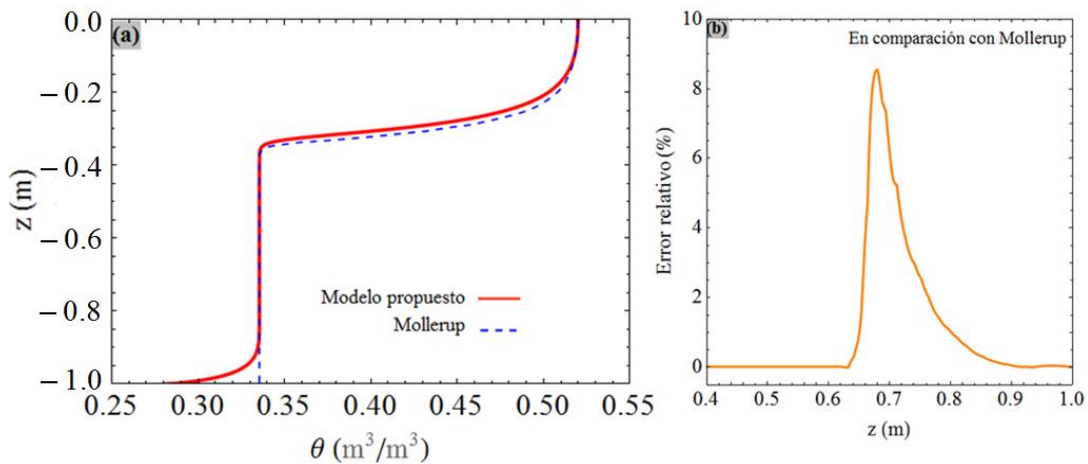


Figura 4.13: (a) Perfil de cantidad de agua para 1,1925 horas con datos de la cuarta aplicación. (b) Comparación circunscripta a la zona del frente húmedo con Mollerup y Hansen (2012) quien utilizó una aproximación en series de potencia

También aquí se observa una desviación del perfil de humedad en las cercanías del contorno inferior, esta desviación es hacia valores de humedad menores que la condición inicial del suelo. Esta desviación será discutida más adelante.

Se obtuvieron los perfiles de humedad para tiempos comprendidos entre 0 y 20 días, con $\Delta t = 1$ s y $\Delta z = 0,2$ cm. Con esos perfiles tomados cada 1 segundo se calcularon la infiltración acumulada (ver Figura 4.14a) y la tasa de infiltración en función del tiempo (ver Figura 4.15). A partir de 0.1 días la infiltración acumulada crece en forma constante (ver Figura 4.14a). Se comparó con el resultado obtenido por Mollerup y Hansen (2012). Al inicio de la infiltración acumulada, para tiempos entre 0 y 0,05 h los valores del error relativo son mayores al 10 %, entre 0,05 y 0,5 h el error es cercano a cero, y luego crece en forma constante con una pendiente baja (ver Figura 4.14b).

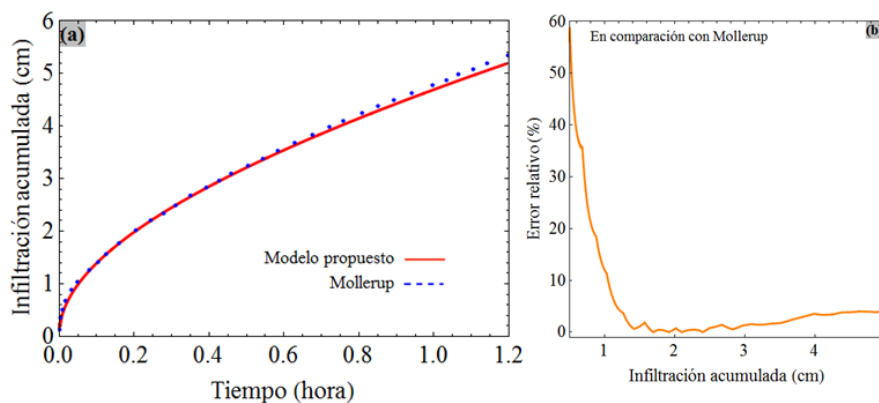


Figura 4.14: (a) Infiltración acumulada. Posición para 1,1925 horas con datos de la segunda aplicación con $\Delta t = 1$ s y $\Delta z = 0,2$ cm. (b) Comparación con Mollerup y Hansen (2012)

Cuando se alcanza el estado estacionario, la tasa de infiltración converge al valor de la conductividad hidráulica saturada ($K_s = 1,31667 \text{ cm h}^{-1}$) (ver [Figura 4.15](#)).

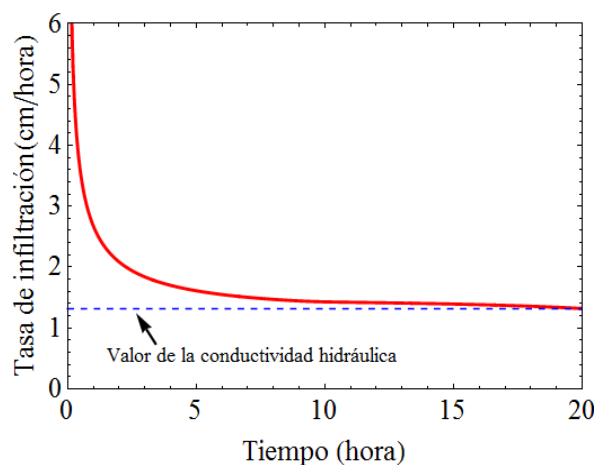


Figura 4.15: Tasa de infiltración. Posición para 1,1925 horas con datos de la segunda aplicación con $\Delta t = 1$ s y $\Delta z = 0,2$ cm

Para analizar la influencia de la condición de contorno de drenaje libre se simuló el perfil de humedad a un tiempo igual al 1,1925 h con valores de $\Delta z = 2,5$ cm y $\Delta t = 3$ s y se comparó con la simulación realizada anteriormente (con $\Delta z = 2$ cm y $\Delta t = 1$ s) se observó que al disminuir los valores de Δz y Δt la desviación aumenta. Por lo tanto, se concluye que esta desviación es introducida por el método y puede ser salvado empleando dos alternativas: (i) aumentar el dominio de estudio para que los desvíos no afecten la zona de interés; y (ii) utilizar valores de Δz y Δt adecuados para que la desviación sea mínima. Para estudiar el efecto de un dominio mayor, se analizó el caso para una profundidad de 5 m utilizando $\Delta t = 3$ s y $\Delta z = 2,5$ cm (ver [Figura 4.16](#)); y se comparó con los resultados obtenidos para un dominio de 1 m en iguales condiciones de simulación.

Se observó que los resultados del modelo de drenaje libre son independientes de la profundidad del dominio, notándose convergencia en los valores obtenidos y una consistencia física con el proceso de drenaje libre propiamente dicho.

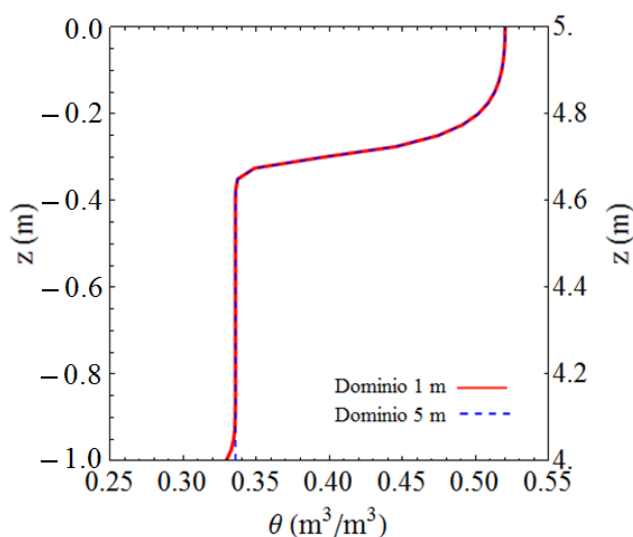


Figura 4.16: Comparación con los resultados obtenidos para un dominio de 1 m y 5 m

4.1.7 Comparación con modelo de Caviedes

Usando los parámetros de la quinta aplicación se simuló el perfil de cantidad de agua y se calculó la infiltración acumulada para 90 minutos.

Se obtuvo la curva para $\Delta t = 0,5$ s y $\Delta z = 0,2$ cm (ver Figura 4.17a) y se comparó con el resultado obtenido por Caviedes et al. (2013). El error relativo máximo se presentó al inicio de la infiltración acumulada < 10 min, luego el error relativo disminuye en la medida que transcurre la infiltración (ver Figura 4.17b).

Con los resultados tomados cada 1 segundo, se calculó la tasa de infiltración del modelo (ver Figura 4.18a) y se comparó con la calculada a partir de los valores de infiltración acumulada presentada por Caviedes et al. (2013) (Figura 4.18b).

El error relativo máximo entre la infiltración acumulada del modelo y la obtenida por Caviedes et al. (2013), se presentó al inicio de la infiltración < 10 min, luego el error relativo disminuyó en la medida que transcurrió la infiltración.

El error relativo es nulo cuando la tasa de infiltración converge al valor de la conductividad hidráulica saturada (ver Figura 4.19).

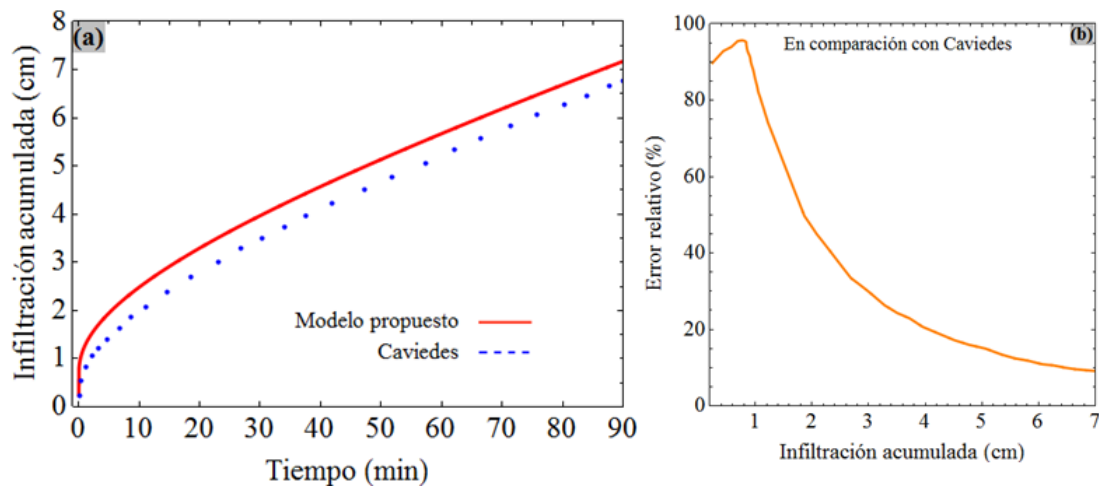


Figura 4.17: (a) Infiltración acumulada. Posición para 90 minutos con datos de la quinta aplicación con $\Delta t = 0,5$ s y $\Delta z = 0,2$ cm. (b) Comparación con Caviedes et al. (2013) quien utilizó una aproximación en volumen finito con $\Delta t = 1$ s, 10 s, 100 s, 600 s y $\Delta z = 1$ cm

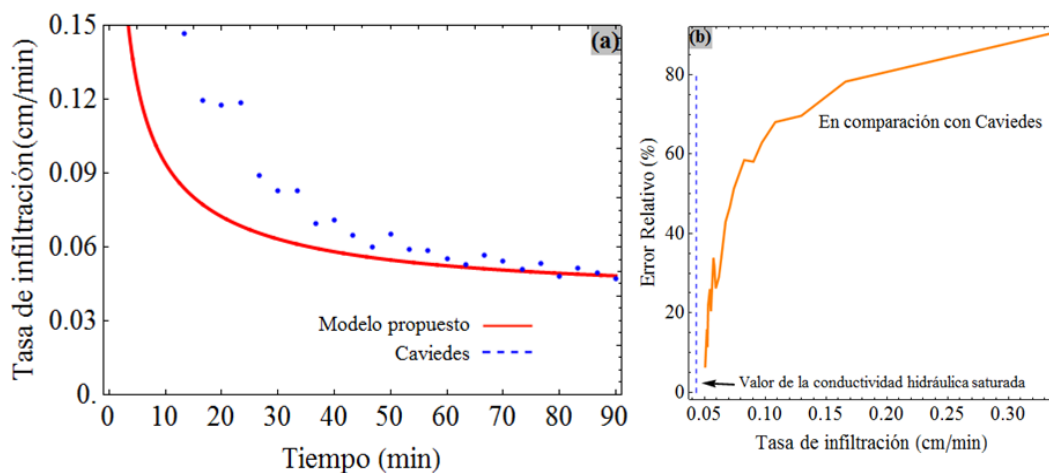


Figura 4.18: (a) Tasa de infiltración. (b) Comparación con Caviedes et al. (2013). Posición para 90 minutos con datos de la quinta aplicación con $\Delta t = 0,5$ s y $\Delta z = 0,2$ cm

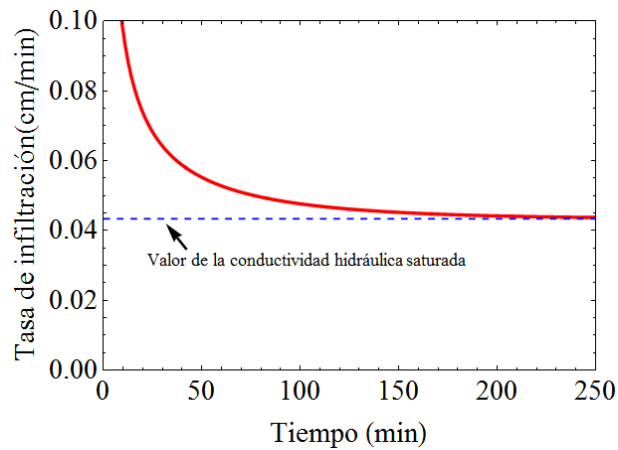


Figura 4.19: Tasa de infiltración en estado de saturación. Posición para 90 minutos con datos de la quinta aplicación con $\Delta t = 0,5$ s y $\Delta z = 0,2$ cm

Se puede verificar la consistencia física del modelo extendiendo la simulación hasta el estado estacionario, donde se observa que la tasa de infiltración converge al valor de la conductividad hidráulica saturada ($K_s = 0,04332$ cm.min⁻¹).

Los resultados del modelo desarrollado muestran buena aproximación con los resultados obtenidos por el modelo de [Caviedes et al. \(2013\)](#).

4.1.8 Comparación con experimento teórico de Caviedes

Usando los parámetros de la sexta aplicación se simuló el perfil de cantidad de agua, fijando $\Delta t = 1$ s para diferentes configuraciones de la conductividad hidráulica no saturada (diferentes formas para promediar la conductividad hidráulica no saturada en medio paso), tiempos de simulación y Δz . Los tiempos de simulación presentados corresponden a 0,5; 1 y 2 horas. Se calculó el Error Relativo de Masa (ERM) para cada caso (ver [Tabla 4.2](#) y [Figura 4.20](#)).

$$ERM = \frac{\text{cambio de masa}}{\text{masa inicial}} = \frac{(\sum_{i=1}^n \theta_i^t) / n - \theta_i^0}{\theta_i^0} \quad (4.2)$$

Tabla 4.2: Error relativo de masa utilizando diferentes configuraciones de la conductividad hidráulica no saturada, tiempos de simulación y Δz usando los parámetros de la sexta aplicación

Configuración conductividad hidráulica no saturada	Tiempo de simulación (h)	Δt (s)	Δz (cm)	Tiempo CPU (min)	Error relativo de masa (%)
Media geométrica	2	1	1	32	8,218
	1	1	1	-	8,953
	0,5	1	1	-	10,852
	2	1	0,5	75	8,296
	1	1	0,5	-	9,030
	0,5	1	0,5	-	10,915
Media aritmética	2	1	1	32	8,217
	1	1	1	-	8,953
	0,5	1	1	-	10,851
	2	1	0,5	78	8,296
	1	1	0,5	-	9,030
	0,5	1	0,5	-	10,915
Media armónica	2	1	1	35	8,217
	1	1	1	-	8,954
	0,5	1	1	-	10,852
	2	1	0,5	84	8,296
	1	1	0,5	-	9,030
	0,5	1	0,5	-	10,915

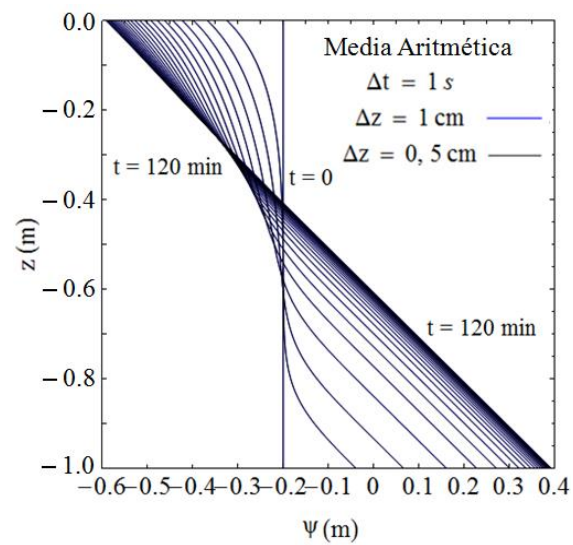
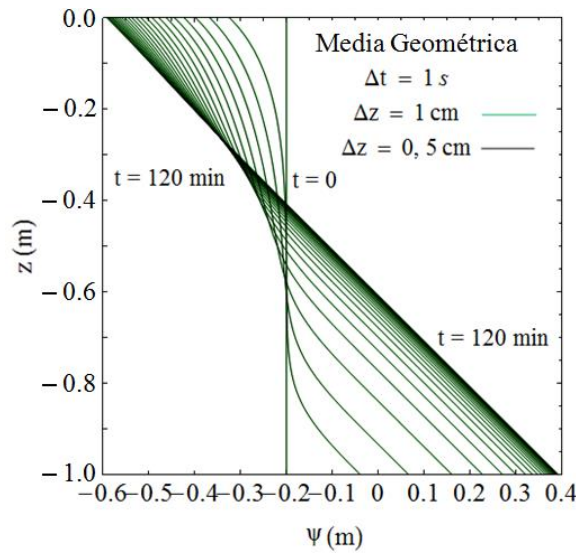
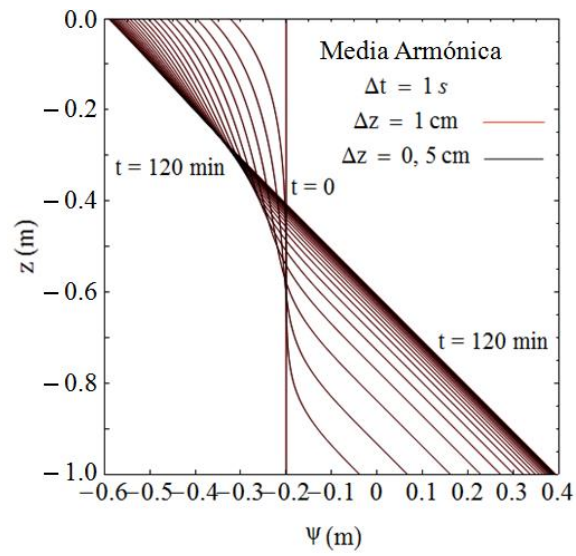


Figura 4.20: Perfil de cantidad de agua para diferentes configuraciones de la conductividad hidráulica no saturada, tiempos de simulación y Δz usando los parámetros de la sexta aplicación

Para observar el comportamiento en los instantes iniciales $< 0,5$ hora, se simuló el perfil de cantidad de agua. Se encontró la posición del frente húmedo fijando $\Delta t = 1s$, media geométrica en la configuración de la conductividad hidráulica no saturada, tiempos de simulación menores de 30 minutos con paso de 5 minutos, Δz de 1 cm y 0,5 cm. Se calculó el error relativo de masa para cada caso (ver [Tabla 4.3](#)). Se comprobó conservación de la masa utilizando tres configuraciones para la conductividad hidráulica no saturada en medio paso: media aritmética, media geométrica y la media armónica, obteniendo un error relativo cercano al 10% y verificando que este valor disminuye cuando aumenta el valor del tiempo de simulación.

Tabla 4.3: Error relativo de masa usando los parámetros de la cuarta aplicación para tiempos de simulación menores de 30 minutos con paso de 5 minutos

Configuración conductividad hidráulica no saturada	Tiempo de simulación (min)	Δt (s)	Δz (cm)	Error relativo de masa (%)
Media geométrica	5	1	1	13,937
	10	1	1	13,882
	15	1	1	13,318
	20	1	1	12,398
	25	1	1	11,539
	30	1	1	10,852
	5	1	0,5	13,937
	10	1	0,5	13,888
	15	1	0,5	13,343
	20	1	0,5	12,442
	25	1	0,5	11,595
	30	1	0,5	10,915

Analizando las curvas de perfil de humedad, se observa que a medida que transcurre el tiempo el agua desciende y el cambio es más apreciable en los extremos del dominio que en la región central. Luego, a los siete minutos aproximadamente, en la zona inferior se alcanza el valor de potencial matricial 0 (cero) y luego el potencial toma valores positivos, esto significa que el agua satura completamente los poros del suelo. A partir de ese momento la región inferior del suelo se va saturando paulatinamente, y al cabo de 45 minutos los 30 cm inferiores del dominio se encuentran completamente saturados de agua. Como la simulación se realizó hasta los 120 minutos, se puede observar que el modelo describe correctamente el proceso, incluso en condiciones de suelo saturado. Esto es deseable porque indica que puede ser utilizado para modelar procesos que involucren condiciones insaturadas como saturadas las cuales son muy frecuentes en las aplicaciones del mismo.

4.1.9 Análisis de las comparaciones

Los resultados presentados en las secciones 4.1.1 a 4.1.8, donde se utilizaron una amplia gama de tipos de suelos que van desde arenosos, limosos y hasta arcillosos, permiten concluir lo siguiente:

- El modelo desarrollado presenta buena aproximación con los modelos y experimentos de otros autores, siendo la zona de frente húmedo el rango de profundidad con mayor error relativo (ver [Figura 4.4](#), [4.5](#), [4.8](#), [4.9](#), [4.11](#) y [4.13](#)).
- El modelo desarrollado es convergente, comprobando que el error relativo máximo disminuye conforme Δz es menor (ver [Figura 4.1](#) y [4.2](#)). También, se observa que es más sensible a los valores de Δz que a los de Δt para los valores usados.
- Los resultados del modelo de drenaje libre fueron independientes de la profundidad del dominio, notándose consistencia física con el proceso de drenaje libre propiamente dicho (ver [Figura 4.16](#)).

- El modelo desarrollado conserva la masa, obteniendo un error relativo cercano al 10% (ver [Figura 4.20](#)).
- Cuando la solución alcanza estado estacionario, la tasa de infiltración converge al valor de la conductividad hidráulica saturada lo que es físicamente consistente con el fenómeno analizado (ver [Figura 4.12](#), [4.15](#) y [4.19](#)).

4.1.10 Análisis de sensibilidad a los parámetros del suelo

Se simuló la posición del frente húmedo para un minuto con datos de la séptima aplicación para $\Delta t = 1$ s y $\Delta z = 0,01$ m. Se obtuvieron tres familias de curvas variando en primer lugar la humedad residual dejando constantes los demás parámetros del suelo; luego, la humedad saturada dejando constantes los demás parámetros del suelo; y finalmente, la conductividad hidráulica saturada dejando constantes los demás parámetros del suelo. Las variaciones fueron: $\theta_r = 0, 10$ y $15 \text{ m}^3 \cdot \text{m}^{-3}$; $\theta_s = 0,268; 0,368$ y $0,468 \text{ m}^3 \cdot \text{m}^{-3}$; $K_s = 9,22 \times 10^{-5}; 9,22 \times 10^{-6}; 9,22 \times 10^{-7} \text{ m/s}$.

Se observó que al aumentar el valor de la humedad residual, el perfil presenta un frente húmedo más acentuado, es decir la variación de humedad es mayor en función de la profundidad. A pesar de eso, no tiene impacto significativo en la posición promedio del frente húmedo y por lo tanto se puede inferir que afecta muy poco al movimiento de agua en el suelo y por lo tanto la forma final de la curva (ver [Figura 4.21a](#)).

Se observó que al aumentar el valor de la humedad saturada, la posición del frente húmedo está en una posición más alta que en los demás casos al mismo tiempo de simulación (ver [Figura 4.21b](#)). Se observó que al aumentar el valor de la conductividad hidráulica saturada, la humedad del suelo avanza más rápidamente (ver [Figura 4.21c](#)).

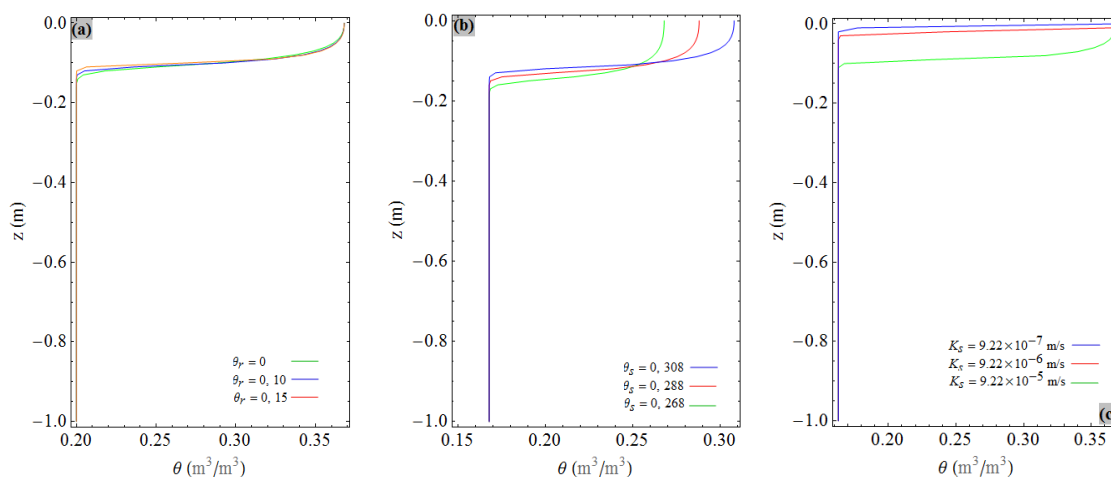


Figura 4.21: Análisis de sensibilidad de: (a) humedad residual [$\text{m}^3 \cdot \text{m}^{-3}$]. (b) humedad saturada [$\text{m}^3 \cdot \text{m}^{-3}$]. (c) conductividad hidráulica saturada [m/s]

4.2 Experimentos

4.2.1 Ensayos preliminares

Se realizaron siete ensayos preliminares que permitieron realizar la puesta a punto del procedimiento experimental, y así, avanzar en la validación del modelo matemático (ver [Tabla 4.4](#)). Inicialmente se utilizó arena fina para rellenar la columna; luego, se utilizaron dos tipos de tierra (A y B) procedentes de diferentes espacios públicos de la ciudad de Posadas. La tierra A era de un color rojizo y con arena gruesa. La tierra B era de un color negro rojizo.

Tabla 4.4: Ensayos preliminares

Experimento	Tipo de suelo	Estado	Compactación	Humedad gravimétrica inicial (%)	Tiempo del experimento (min)
1°	Arena fina	Disturbado	No	No se midió	0,5
2°	Tierra A	Disturbado	No	36,1	4
3°	Tierra A	Disturbado	No	22,7	1
4°	Tierra A	Disturbado	Si	6,1	60
5°	Tierra B	Disturbado	Si	19,2	70
6°	Tierra B	Disturbado	Si	19,2	30
7°	Tierra B	Disturbado	Si	3,6	10

En el primer ensayo preliminar se rellenó la columna con arena fina disturbada sin compactar. El ensayo tuvo una duración cercana a los 30 segundos y no se determinó contenido de humedad. La elevada velocidad de infiltración provocó saturación completa de la columna sin permitir formación de una lámina de agua en la superficie. Se utilizó un caudal de 90 ml/min. Para medir el caudal se llenó un vaso, previamente tarado, durante un minuto y luego fue pesado. Por la breve duración que tuvo el experimento, se consideró que los experimentos con arena no serían abordados fácilmente con la metodología prevista. Por tanto, se decidió repetir la experiencia utilizando tierra.

En el segundo ensayo preliminar se rellenó la columna con suelo disturbado sin compactar (Tierra A). El proceso de infiltración tuvo una duración de 4 minutos y se utilizó un caudal de 90 ml/min. Para la medición de humedad se tomaron los cilindros en grupos de dos (cilindro 1 + cilindro 2, cilindro 3 + cilindro 4, etc.), resultando cinco mediciones de humedad. Para retirar los cilindros, la columna se colocó en forma vertical y tuvo una duración de 4 minutos. La humedad del grupo cuatro (cilindro 8 + cilindro 9) fue baja, posiblemente el tiempo que se demoró en retirar los cilindros permitió que la infiltración pasará al cilindro siguiente. Por este motivo, la humedad del grupo cinco (cilindro 10 + cilindro 11) fue alta (ver [Figura 4.22](#)). Para evitar que la infiltración continúe durante el desmontado y obtener mayores puntos de medición en la zona de frente húmedo, se decidió realizar el desmontado de forma horizontal en la próxima experiencia y medir la humedad en cada cilindro.

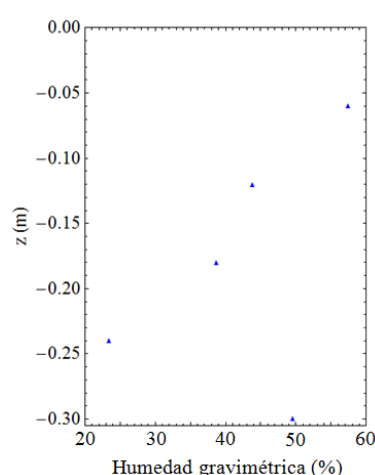


Figura 4.22: Resultados del segundo ensayo preliminar

En el tercer ensayo preliminar se rellenó la columna con suelo disturbado sin compactar (Tierra A). El proceso de infiltración tuvo una duración de 1 minuto y se utilizó un caudal de 90 ml/min. Para retirar los cilindros, la columna se colocó en forma horizontal y tuvo una

duración de 1 minuto. La posición horizontal de la columna facilitó su desarmado. La medición de humedad se determinó para cada cilindro (ver [Figura 4.23](#)). Para lograr un ensayo con mayor duración, se decidió repetir la experiencia utilizando suelo compactado.

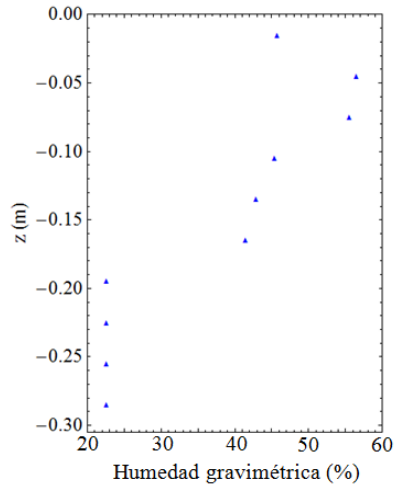


Figura 4.23: **Resultados del tercer ensayo preliminar**

En el cuarto ensayo preliminar se rellenó la columna con suelo disturbado compactado (Tierra A). Se utilizó suelo secado al aire. Para el secado, se colocó la tierra en una bandeja de madera en la sala del laboratorio con una humedad ambiente promedio de 70 % y por un tiempo de una semana. El peso de cada cilindro estuvo entre 50 g y 60 g. El proceso de infiltración tuvo una duración de una hora. Se comenzó con un caudal de 90 ml/min por 5 a 10 segundos. Luego, para mantener una lámina de agua de espesor constante, se disminuyó el caudal a 50 ml/min por 10 segundos. Posteriormente, hasta terminar el experimento, el caudal se disminuyó a 20 ml/min. Para retirar los cilindros, la columna se colocó en forma horizontal y tuvo una duración de 30 segundos. La medición de humedad se determinó en cada cilindro hasta donde se observó (sensorialmente) la llegada del frente húmedo (ver [Figura 4.24](#)). Se asumió que los cilindros siguientes al frente húmedo mantenían la humedad inicial. Para verificar esto último, se decidió repetir la experiencia midiendo todos los cilindros de la columna.

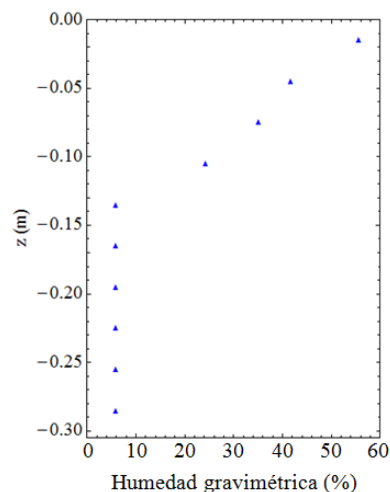


Figura 4.24: **Resultados del cuarto ensayo preliminar**

En el quinto ensayo preliminar se rellenó la columna con suelo disturbado compactado (Tierra B). El peso de cada cilindro estuvo entre 80g y 90g. El proceso de infiltración tuvo una duración de 1 hora y 10 minutos. Se utilizó la misma progresión de caudal que en el cuarto experimento. Para retirar los cilindros, la columna se colocó en forma horizontal y tuvo una duración de 20 segundos. La medición de humedad se determinó para cada cilindro (ver [Figura 4.25](#)). Considerando que el cilindro superior únicamente cumple la función de formar la lámina de agua en la superficie de la columna; y también, tiene un menor volumen de suelo que los demás (50% menos), se decidió repetir la experiencia sin medir el cilindro superior.

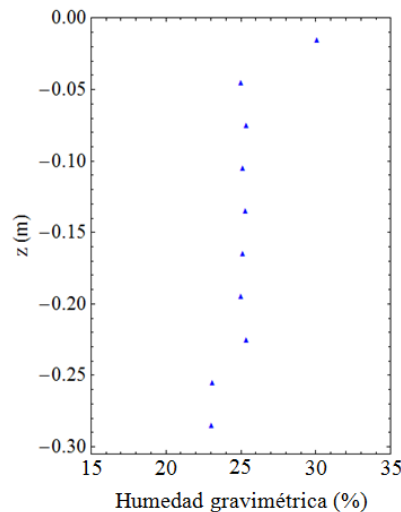


Figura 4.25: **Resultados del quinto ensayo preliminar**

En el sexto ensayo preliminar se rellenó la columna con suelo disturbado compactado (Tierra B). El peso de cada cilindro estuvo entre 80g y 90g. El proceso de infiltración tuvo una duración de 30 minutos. Se utilizó la misma progresión de caudal que en el cuarto experimento. Para retirar los cilindros, la columna se colocó en forma horizontal y tuvo una duración de 20 segundos. La medición de humedad no se determinó en el cilindro superior (ver [Figura 4.26](#)). Para lograr mayor amplitud entre el estado húmedo y seco, se decidió repetir la experiencia utilizando tierra seca (en estufa de laboratorio).

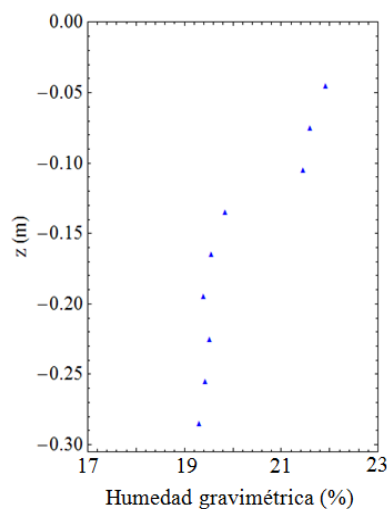


Figura 4.26: **Resultados del sexto ensayo preliminar**

En el séptimo ensayo preliminar se rellenó la columna con suelo disturbado compactado (Tierra B). Se utilizó suelo secado en horno. El peso de cada cilindro estuvo entre 50g y 60g. El proceso de infiltración tuvo una duración de 10 minutos y se utilizó la misma progresión de caudal que en el cuarto experimento. Para retirar los cilindros, la columna se colocó en forma horizontal y tuvo una duración de 20 segundos. La medición de humedad no se determinó en el cilindro superior. Debido a que los resultados obtenidos en este experimento fueron claros y son los esperados para el proceso de infiltración, se comparó con el resultado obtenido por el modelo matemático utilizando los datos de suelo de [Celia et al. \(1990\)](#) con una conductividad hidráulica de 1×10^{-4} m/s, $\theta_s = 30,02\%$ y $\theta_r = 3,62\%$ m/s (ver [Figura 4.27](#)). Se consideró que este ensayo permitió alcanzar el nivel de entrenamiento deseado en la metodología experimental que permitirá trabajar satisfactoriamente con suelo no disturbado.

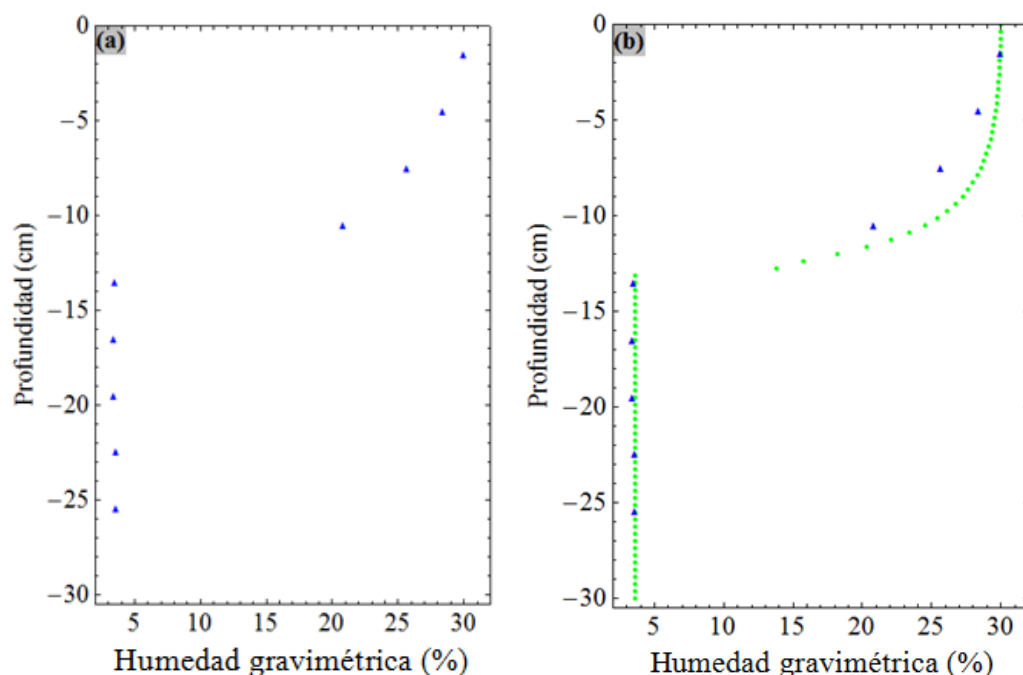


Figura 4.27: Comparación con el modelo matemático. (a) Resultados del séptimo ensayo preliminar. (b) Modelo matemático utilizando los datos de suelo de [Celia et al. \(1990\)](#) con una conductividad hidráulica de 1×10^{-4} m/s, $\theta_s = 30,02\%$ y $\theta_r = 3,62\%$

Durante la realización de los ensayos preliminares se puso a punto la metodología para la realización de estos ensayos ya sobre suelo real no disturbado, la misma consta de las siguientes acciones:

- 1° Cargar los cilindros con el suelo a estudiar.
- 2° Unir los cilindros con cinta. Colocar doble capa de cinta en los tres cilindros inferiores.
- 3° Calibrar la torre utilizando un nivel (instrumento), asegurando verticalidad.
- 4° Encontrar el caudal de agua que genera una lámina de agua en la superficie del suelo, utilizando un recipiente pequeño con muestra de suelo. Colocar en la parte superficial del suelo del anillo superior un trozo de papel para lograr uniformidad de la caída del agua.
- 5° Para determinar el valor del caudal encontrado: 1° bloquear la salida del gotero con el capuchón y colocar un recipiente previamente tarado, 2° dejar correr el agua durante un minuto, 3° bloquear la salida del gotero con el capuchón, retirar el

- recipiente con el agua recolectada y pesar en balanza. La diferencia de peso es la cantidad de agua en gramos o ml por minuto.
- 6° Introducir el goteo en la columna experimental. También, colocar en la parte superficial del suelo un trozo de papel para lograr uniformidad de la caída del agua.
 - 7° Dejar la infiltración por un tiempo determinado estimando que el agua llegue aproximadamente hasta la mitad de la columna experimental para alejarse de los contornos.
 - 8° Bloquear la salida del gotero con el capuchón y retirar la columna experimental.
 - 9° Colocar la columna experimental de forma horizontal sobre una mesa, favoreciendo la separación de los cilindros y evitando que la infiltración continúe.
 - 10° Separar los cilindros de la columna, cortando con un cutter la cinta que los une.
 - 11° Retirar los cilindros y ubicarlos dentro de una bolsa para mantener la humedad. Colocar sobre una mesa manteniendo el mismo orden que tienen en la columna. Etiquetar las bolsas.
 - 12° Extraer el suelo de cada cilindro y colocar en una bolsa (Se pierde aprox. 1,5 g de suelo que queda adherido en las paredes interiores de los cilindros que equivale a 1% del total del suelo del cilindro). Etiquetar cada bolsa.
 - 13° Tomar una muestra de aproximadamente 10g de cada bolsa.
 - 14° Esparcir la muestra sobre un plato de aluminio previamente tarado. Etiquetar el plato.
 - 15° Pesar el plato con el suelo en balanza. Registrar.
 - 16° Secar en mufla un tiempo determinado a 105 °C. Pasado ese tiempo, retirar y dejar enfriar.
 - 17° Pesar la muestra fría en balanza. Registrar.
 - 18° Repetir la tarea de secado y pesado hasta que el peso sea constante. Registrar.

4.2.2 Experimentos

Se realizaron dos ejercicios de validación comparando resultados experimentales con resultados de la simulación. En ambos casos se utilizó muestras no disturbadas para armar la columna experimental, el procedimiento de extracción de las mismas fue descrito en el Capítulo 3.

El primer experimento tuvo una duración de una hora y se realizó por triplicado (ver [Figura 4.28a](#)). Para el triplicado se emplearon tres columnas distintas, conformadas por anillos no reutilizados en otras repeticiones. La primera repetición es de color verde, la segunda de color azul y la tercera de color rojo. Las tres repeticiones se realizaron con un tiempo experimental de una hora.

Durante su realización se detectaron algunos problemas en dos de las repeticiones (color verde y azul): pérdidas de agua a través de las uniones de los cilindros (debido a pequeñas distorsiones de la forma cilíndrica producidas al momento de extraer la muestra) y canales preferenciales por raíces removidas (en el muestreo o armado de la columna experimental). Antes del segundo experimento se solucionaron los problemas mencionados anteriormente, mediante: colocación de pegamento en las uniones de los cilindros y utilización de muestras sin raíces.

El segundo experimento también se realizó por triplicado, siendo los tiempos de duración: 20 min para la primera repetición (color azul), 15 min para la segunda repetición (color verde) y 10 min para la tercera repetición (color rojo). Al comenzar con el experimento, se observó que la velocidad de infiltración era más alta que la del primer experimento y no sería posible continuar hasta completar una hora. Por tanto, para evitar que el agua llegara al último

cilindro de la columna, el segundo experimento se detuvo luego de 20 min. Posteriormente, para mejor diferenciación de humedad en la profundidad de la columna, se acortaron los tiempos a 15 y 10 min (ver Figura 4.28b). Debido a que el muestreo para el segundo experimento fue realizado días posteriores al muestreo para el primer experimento, luego de periodos de lluvias, originó que la humedad inicial de la muestra fuera más alta a la utilizada en el primer experimento.

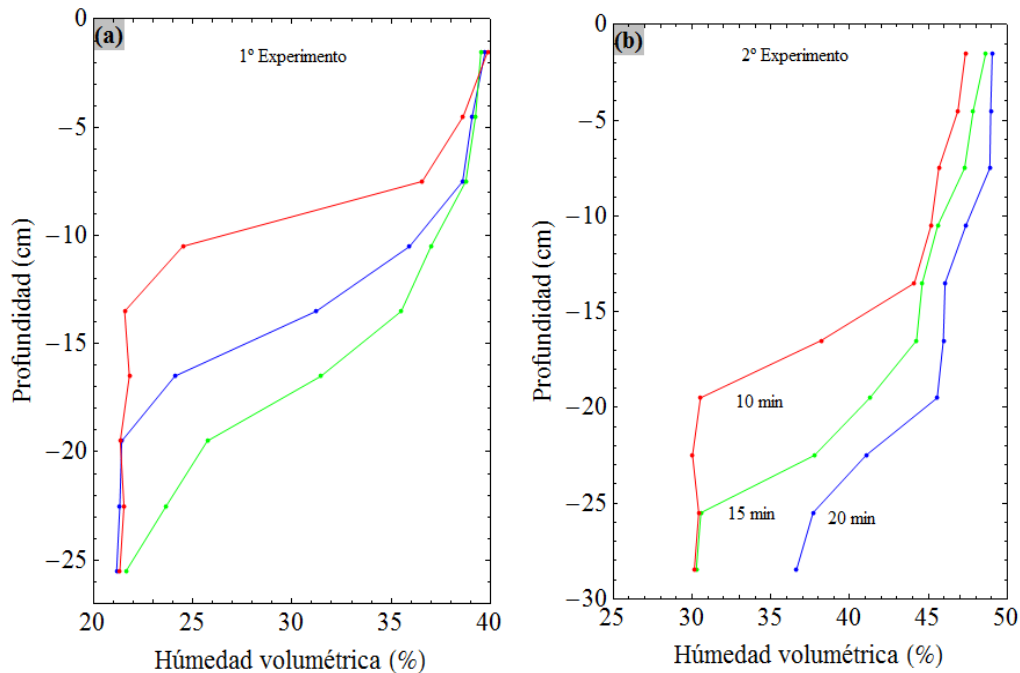


Figura 4.28: (a) Primer experimento. (b) Segundo experimento

Se determinó la densidad aparente (D_{Ap}) de la muestra mediante el método del cilindro, el valor obtenido fue $0,97 \text{ g.cm}^{-3}$. Para estas determinaciones se tomaron muestras del suelo que sería sometido a infiltración y se realizaron tres repeticiones por muestra. El método consistió en introducir un cilindro de volumen conocido en el suelo, enrasando el suelo con los bordes, secar la muestra en estufa a 105°C hasta peso constante y obtener su valor de la siguiente manera:

$$D_{Ap} [\text{g. cm}^{-3}] = \frac{\text{peso suelo seco [g]}}{\text{volumen del cilindro}[\text{cm}^3]} \quad (4.3)$$

El valor de la humedad gravimétrica fue multiplicado por la densidad aparente del suelo, obteniendo la correspondiente humedad volumétrica para cada muestra.

La principal dificultad encontrada en estas determinaciones en laboratorio fue la heterogeneidad del material: en su textura, estructura y humedad.

Se puede observar aquí la variabilidad de resultados encontrada en los resultados experimentales, aunque fueran hechas en idénticas condiciones. Estas diferencias ya fueron mostradas por algunos autores (ver Figura 2.10), pueden dificultar la comparación con las simulaciones y es posible que esto sea la razón por la que muy pocos investigadores realizan comparaciones de modelos con experimentos, ya que no es fácil obtener experimentos con buena repetitividad. Sin embargo en este trabajo se realizarán las comparaciones tal como se muestra a continuación.

4.2.3 Comparación de experimentos con simulaciones

Los resultados obtenidos experimentalmente fueron comparados con los resultados del modelo matemático.

El primer experimento estuvo sujeto a condiciones de contorno superior de humedad saturada lograda con una delgada película de agua, esto se puede representar con una condición de contorno de tipo Dirichlet, por lo tanto, se usó un valor de potencial cercano a cero. El extremo inferior fue mantenido a la condición inicial del suelo. Como el experimento fue diseñado para que el agua ingresada del extremo superior no alcance el extremo inferior, entonces se considera que la condición de contorno inferior también es de tipo Dirichlet.

Para el modelado se utilizó $\Delta z = 0,0027$ m y $\Delta t = 10$ s y parámetros del suelo que se muestran en la [Tabla 4.5](#), los cuales fueron medidos por INTA (ver capítulo 3). Los valores de humedad saturada y residual usados fueron: $\theta_s = 0,39705$ m³.m⁻³ y $\theta_r = 0,21379$ m³.m⁻³. La profundidad de la muestra de suelo fue de 0,27 m y las condiciones iniciales y de contorno fueron:

$$\begin{aligned}\psi(z, t = 0) &= -114405 \text{ m para } -0,27 \text{ m} \leq z \leq 0; \\ \psi(z = 0, t) &= -0,01 \text{ m para } t > 0; \\ \psi(z = -0,27 \text{ m}, t) &= -114405 \text{ m para } t > 0.\end{aligned}$$

Tabla 4.5: Parámetros de las ecuaciones de Mualem–van Genuchten para los suelos utilizados en los experimentos

Experimento	Parámetros del suelo de las ecuaciones de Mualem–van Genuchten
1° y 2°	$\alpha = 1,03220 \text{ m}^{-1}; j = 1,44617; K_s = 2,06019 \times 10^{-6} \text{ m.s}^{-1}$

Se observa que el resultado de la simulación coincide con la curva experimental del perfil de humedad que avanza más lentamente (curva roja). Ese perfil experimental se corresponde con el caso donde no se observaron pérdidas de agua entre los anillos de la columna. Considerando que los otros dos experimentos: el duplicado y el triplicado, presentaron pérdidas de agua entre los anillos de las columnas y flujo preferencial de agua a través de canales generados por la extracción de raíces, se asume que la primera repetición (curva roja) es la que mejor representa el avance de agua en el suelo, por ello la comparación entre modelo y experimento se realiza con esa primera repetición (ver [Figura 4.29a](#)). El modelo coincide con puntos importantes de la curva experimental, ocasionando que la misma presente un comportamiento similar. Asimismo, el modelo predice con una precisión aceptable la posición del frente húmedo, siendo para el experimento un error en la posición de 1,5 cm (la mitad del anillo) hacia arriba y hacia abajo.

El segundo experimento, de forma similar al primero, estuvo sujeto a condiciones de contorno superior e inferior de tipo Dirichlet.

Para el modelado se utilizó $\Delta z = 0,003$ m y $\Delta t = 1$ s y parámetros del suelo que se muestran en la [Tabla 4.5](#), los cuales fueron medidos por INTA (ver capítulo 3). Los valores de humedad saturada y residual usados fueron: $\theta_s = 0,48337$ m³.m⁻³ y $\theta_r = 0,30201$ m³.m⁻³. La profundidad de la muestra de suelo fue de 0,30 m y las condiciones iniciales y de contorno fueron:

$$\begin{aligned}\psi(z, t = 0) &= -9633 \text{ m para } -0,30 \text{ m} \leq z \leq 0; \\ \psi(z = 0, t) &= -0,01 \text{ m para } t > 0; \\ \psi(z = -0,30 \text{ m}, t) &= -9633 \text{ m para } t > 0.\end{aligned}$$

Se comparó el resultado de la simulación para un tiempo de 10 min con las curvas experimentales. Se observó una alta discrepancia en la predicción. En este caso, el modelo no coincide con puntos importantes de la curva experimental, ocasionando un comportamiento diferente, presentando similitud solamente en los extremos de la profundidad de la muestra. Esta diferencia es ocasionada por cambios simultáneos en los valores de conductividad hidráulica saturada, humedad saturada y humedad residual que presentó la muestra utilizada en el segundo experimento (ver [Figura 4.29b](#)).

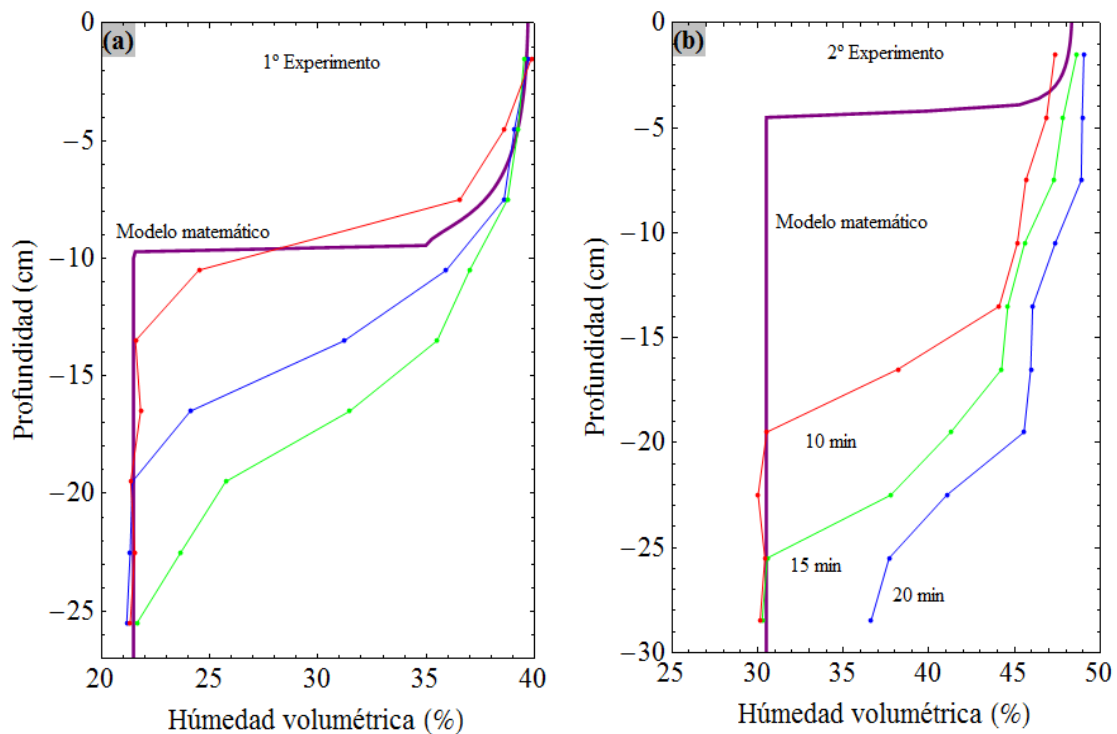


Figura 4.29: (a) Comparación con primer experimento. (b) Comparación con segundo experimento

El primer experimento presentó la mejor aproximación a los resultados del modelo matemático (ver [Figura 4.29a](#)). Mientras que en el segundo experimento, se observó que los resultados experimentales se alejaron de los resultados del modelo matemático (ver [Figura 4.29b](#)). Por tanto, es necesario realizar el ejercicio de validación con la misma muestra utilizada para la determinación de los parámetros del suelo, asegurando que los valores de conductividad hidráulica saturada, humedad saturada y humedad residual sean los mismos que alimentan el modelo.

4.2.4 Discusión general, limitaciones del modelo y aplicaciones

La resolución numérica de la Ecuación de Richards utilizando un esquema de diferencias finitas implícito basado en el método de Crank-Nicolson y aplicando un esquema de predictor/corrector, predice con buen desempeño el perfil del potencial matricial ψ (y su equivalente perfil de la humedad volumétrica θ) en la zona no saturada del suelo. La solución del modelo desarrollado presenta la forma sigmoide característica del movimiento vertical del agua en el suelo y una buena aproximación con la solución obtenida por otros autores.

Se han observado limitaciones relacionadas a la variabilidad del suelo, manifestada en los valores de los parámetros, los cuales pueden variar con el grado de humedad del mismo. Por

lo tanto, para el uso del modelo debería realizarse una medición previa, para que permita establecer los parámetros del suelo. Una manera de obtenerlos de manera rápida puede ser el ensamblado de una columna tal como la presentada en la sección 4.2, con el manejo adecuado del procedimiento experimental y la toma de muestra descritos en la sección 3.3. Se puede obtener fácilmente un valor aproximado de conductividad hidráulica saturada por comparación y calibración del resultado de ese experimento y la simulación, o bien por el ensayo de carga variable que se explicó en la sección 3. En la sección 4.10, se mostró que el valor de humedad residual tiene menor influencia en la forma del perfil de humedad. Sin embargo, el impacto de la humedad de saturación y del potencial hidráulico saturado es significativo. Esos valores obtenidos pueden utilizarse para alimentar el modelo y realizar las simulaciones.

El modelo matemático desarrollado es una herramienta útil para el uso eficiente del agua en la agricultura. Se puede racionalizar la operación de irrigación del suelo, definiendo el momento y cantidad de agua a ser aplicada (Corrêa et al. 2006). El contenido de humedad en el suelo es una variable fundamental en la agricultura y el modelo entrega información necesaria para el planeamiento de la irrigación en la producción agrícola (Almeida et al. 2005). La fase inicial del diseño de un sistema de riego localizado, consiste en fijar el caudal de los emisores, su separación y el número de emisores por planta para alcanzar un determinado porcentaje de suelo mojado. En la gestión eficiente del agua, por ejemplo el modelo permite contestar las siguientes cuestiones:

- ¿Cuánto tiempo es necesario regar por goteo una parcela de 10 m² plantada con cebolla?
- ¿Cuál es la humedad promedio del suelo luego del riego?
- ¿Cuánto es el consumo de agua en el riego?
- ¿Cuánto tiempo de secado necesita una parcela de 10 m² plantada con cebolla considerando la evaporación para alcanzar su humedad promedio inicial?

4.3 Transporte de soluto

En este capítulo se aplicará el modelo desarrollado a cinco problemas de aplicación utilizando los tipos de suelo presentados en la sección 3.1. Estos problemas fueron denominados “aplicaciones”.

La primera aplicación representa un caso de infiltración de agua con soluto que no interacciona con el suelo y sin reacción química, en una columna de suelo homogéneo, inicialmente saturado y sin contener soluto. El coeficiente de difusión es nulo. El problema está sujeto a condiciones de contorno superior e inferior de tipo Dirichlet para el agua y para el soluto. Utiliza el suelo D, la profundidad de la muestra de suelo es de 1 m y las condiciones iniciales y de contorno son:

$$\psi(z, t = 0) = 0 \text{ para } -1 \text{ m} \leq z \leq 0;$$

$$\psi(z = 0, t) = 0 \text{ para } t > 0;$$

$$\psi(z = -1 \text{ m}, t) = 0 \text{ para } t > 0.$$

$$C(z, t = 0) = 0 \text{ para } -1 \text{ m} \leq z \leq 0;$$

$$C(z = 0, t) = 1 \text{ Kg.m}^{-3} \text{ para } t > 0;$$

$$C(z = -1 \text{ m}, t) = 0 \text{ para } t > 0.$$

Esta aplicación se utilizará para realizar una comparación entre la solución analítica y la solución numérica para verificación del modelo. También, se utilizará para realizar el análisis de sensibilidad del parámetro de amortiguamiento de las oscilaciones.

La segunda aplicación representa un caso de infiltración de agua con soluto que no interacciona con el suelo y sin reacción química, en una columna de suelo homogéneo, inicialmente seco y sin contener soluto. El problema está sujeto a condiciones de contorno superior de tipo Dirichlet e inferior de tipo Neumann para el agua y condición de contorno superior e inferior de tipo Dirichlet para el soluto. Utiliza el suelo D, la profundidad de la muestra de suelo es de 1 m y las condiciones iniciales y de contorno son:

$$\psi(z, t = 0) = -1 \text{ m para } -1 \text{ m} \leq z \leq 0;$$

$$\psi(z = 0, t) = 0 \text{ para } t > 0;$$

$$q(z = -1 \text{ m}, t) = -K_s \text{ para } t > 0.$$

$$C(z, t = 0) = 0 \text{ para } -1 \text{ m} \leq z \leq 0;$$

$$C(z = 0, t) = 1 \text{ Kg.m}^{-3} \text{ para } t > 0;$$

$$C(z = -1 \text{ m}, t) = 0 \text{ para } t > 0.$$

Esta aplicación se utilizará para realizar una comparación entre la solución numérica del modelo y la solución de modelos propuestos por otros autores. También, se utilizará para analizar diferentes tipos de suelos y condiciones de contorno del agua.

La tercera aplicación representa un caso de infiltración de agua con soluto que no interacciona con el suelo y sin reacción química, en una columna de suelo homogéneo, inicialmente seco y sin contener soluto. El problema está sujeto a condiciones de contorno superior e inferior de tipo Dirichlet para el agua y para el soluto. Utiliza el suelo B, la profundidad de la muestra de suelo es de 1 m y las condiciones iniciales y de contorno son:

$$\psi(z, t = 0) = -10 \text{ m para } -1 \text{ m} \leq z \leq 0;$$

$$\psi(z = 0, t) = -0,75 \text{ m para } t > 0;$$

$$\psi(z = -1 \text{ m}, t) = -10 \text{ m para } t > 0.$$

$$C(z, t = 0) = 49,31 \text{ Kg.m}^{-3} \text{ para } -1 \text{ m} \leq z \leq 0;$$

$$C(z = 0, t) = 350 \text{ Kg.m}^{-3} \text{ para } t > 0;$$

$$C(z = -1 \text{ m}, t) = 49,31 \text{ Kg.m}^{-3} \text{ para } t > 0.$$

Esta aplicación se utilizará para realizar el análisis de sensibilidad al coeficiente de dispersión (dispersión y difusión). También, se utilizará para analizar diferentes tipos de suelos y condiciones de contorno del agua.

La cuarta aplicación representa un caso de infiltración de agua con soluto que no interacciona con el suelo y sin reacción química, en una columna de suelo homogéneo, inicialmente saturado y sin contener soluto. El problema está sujeto a condiciones de contorno superior e inferior de tipo Dirichlet para el agua y para el soluto. Utiliza el suelo A, la profundidad de la muestra de suelo es de 1 m y las condiciones iniciales y de contorno son:

$$\psi(z, t = 0) = -10 \text{ m para } -1 \text{ m} \leq z \leq 0;$$

$$\psi(z = 0, t) = -0,75 \text{ m para } t > 0;$$

$$\psi(z = -1 \text{ m}, t) = -10 \text{ m para } t > 0.$$

$$C(z, t = 0) = 49,31 \text{ Kg.m}^{-3} \text{ para } -1 \text{ m} \leq z \leq 0;$$

$$C(z = 0, t) = 350 \text{ Kg.m}^{-3} \text{ para } t > 0;$$

$$C(z = -1 \text{ m}, t) = 49,31 \text{ Kg.m}^{-3} \text{ para } t > 0.$$

Esta aplicación se utilizará para analizar diferentes tipos de suelos y condiciones de contorno del agua.

La quinta aplicación representa un caso de infiltración de agua con soluto que no interacciona con el suelo y sin reacción química, en una columna de suelo homogéneo, inicialmente seco y sin contener soluto. El problema está sujeto a condiciones de contorno superior e inferior de tipo Dirichlet para el agua y para el soluto. Utiliza el suelo B, la profundidad de la muestra de suelo es de 1 m y las condiciones iniciales y de contorno son:

$$\psi(z, t = 0) = -10 \text{ m para } -1 \text{ m} \leq z \leq 0;$$

$$\psi(z = 0, t) = -0,75 \text{ m para } t > 0;$$

$$\psi(z = -1 \text{ m}, t) = -10 \text{ m para } t > 0.$$

$$C(z, t = 0) = 49,31 \text{ Kg.m}^{-3} \text{ para } -1 \text{ m} \leq z \leq 0;$$

$$C(z = 0, t) = 350 \text{ Kg.m}^{-3} \text{ para } t > 0;$$

$$C(z = -1 \text{ m}, t) = 49,31 \text{ Kg.m}^{-3} \text{ para } t > 0.$$

Esta aplicación se utilizará para realizar el análisis de sensibilidad a los valores de Δz y Δt . Además, se utilizará en el análisis de sensibilidad a los parámetros del suelo.

4.3.1 Verificación del modelo desarrollado

Para verificar el modelo y analizar la estabilidad de la solución se trabajó con el problema teórico que se describe a continuación. En un proceso de infiltración de agua que alcanzó el estado estacionario donde el agua avanza a una velocidad de 1 m/día, es decir ingresa a razón de $0,43 \text{ m}^3(\text{agua})/\text{m}^3(\text{suelo})/\text{día}$. Esas condiciones se alcanzan en un suelo con conductividad hidráulica de $4,9768 \times 10^{-6} \text{ m/s}$. El suelo se encuentra en estado saturado y no hay frente húmedo distinguible. En determinado momento, se inyecta un soluto en el agua que ingresa por la parte superior a una concentración igual a 1 kg/m^3 . Considerando que no hay interacción del soluto con el suelo y que no hay dispersión ni difusión del mismo (el coeficiente D es cero) es de esperar que el perfil de soluto tenga un frente abrupto, tal como se describió en la sección 2.7, y luego de transcurridas 12 horas se espera que este frente abrupto alcance la mitad del dominio del suelo, es decir alcance la profundidad de 0,5 m, tal como se muestra en líneas de punto en la [Figura 4.30a](#). Esta solución se puede representar analíticamente por una función escalón que es lo que se usará para comparar con el resultado del modelo.

Se aplicó el modelo al problema descrito, se simuló el perfil de concentración y se encontró la posición del frente de concentración para 12 horas usando los parámetros de la primera aplicación. Se obtuvo la curva para $\Delta t = 25 \text{ s}$, $\Delta z = 0,005 \text{ cm}$, $w = 0,001$ y se comparó con la solución analítica mostrada por [Neumann et al. \(2011\)](#) (ver [Figura 4.30a](#)). El error absoluto máximo se presentó en la zona del frente húmedo $0,40 \text{ m} \leq z \leq 0,60 \text{ m}$ (ver [Figura 4.30b](#)). Además, en la [Figura 4.30c](#) se muestra la solución del problema con el modelo propuesto usando el parámetro de amortiguación w (ver sección 3.3) igual a cero; con un suavizado final usando un método de envolvente y con promedio pesados (ver Ec. (4.1)).

En la comparación se puede observar que el frente húmedo calculado con el modelo propuesto usando el parámetro de amortiguamiento y el suavizado se acerca a la solución analítica esperada (ver [Figura 4.30c](#)). El gráfico de error absoluto porcentual muestra desvíos de hasta el 50 % en el entorno del escalón, esto es así dado el cambio abrupto de la solución analítica y la solución numérica siempre mostrará un cambio gradual de la función. Otros métodos de solución para este tipo de problemas acostumbran a expresar la solución en término de la función error la cual modela bien la discontinuidad de tipo escalón, sin embargo no es una función que resulte adecuada para otros situaciones de difusión más complejas ([Bear y Cheng 2010](#)).

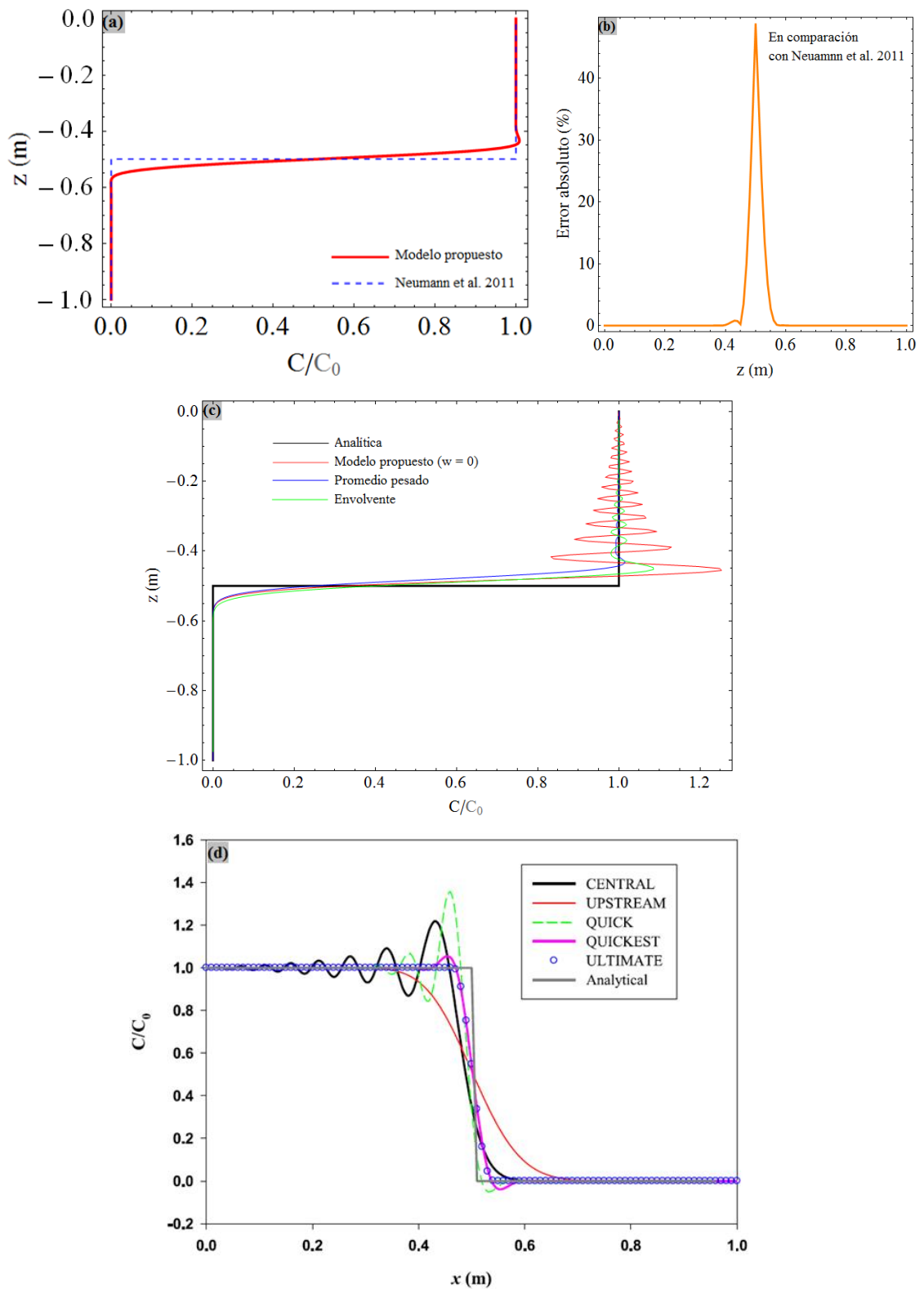


Figura 4.30: Perfil de cantidad de concentración para 12 horas con datos de la primera aplicación. (a) Curva de comparación y solución analítica mostrada por Neumann et al. (2011). (b) Error absoluto en la comparación. (c) Solución con el modelo propuesto ($w = 0$). (d) Métodos propuestos por Neumann et al. (2011)

Por otro lado, una solución diferente a la usada aquí es la propuesta por Leonard, quien desarrolló los métodos QUICK y QUICKEST que son métodos del tipo explícitos, y si bien dan soluciones con muy reducidas oscilaciones, tienen el inconveniente de ser condicionalmente estables (Neumann et al. 2011). El método propuesto aquí es un método implícito construido según un esquema del tipo de Cranck-Nicolson el cual es incondicionalmente estable. Otra propuesta para lidiar con las oscilaciones es realizar un suavizado basado en la normalización de los valores de la solución para situarlo entre los valores máximos y mínimos físicamente asignados por las condiciones de contorno, este es el caso del método ULTIMATE mostrado por Neumann et al. (2011), método que también es de tipo explícito y condicionalmente estable. Un método implícito que está disponible en la investigación de Neumann et al. (2011) consiste en considerar una difusión numérica artificial para estabilizar el problema (método de UPSTREAM), pero distorsiona en gran medida la solución en el entorno de la discontinuidad (ver Figura 4.30d).

El modelo desarrollado a diferencia del método de UPSTREAM es más exacto al momento de predecir la forma del frente de soluto a pesar del cambio abrupto.

4.3.2 Análisis de sensibilidad del parámetro de amortiguamiento

Para analizar la sensibilidad del modelo a cambios del parámetro de amortiguamiento w , se simuló la infiltración de agua con soluto desde la parte superior. El suelo es del tipo D (ver Tabla 3.1) y se encuentra saturado.

Se simuló el perfil de concentración y se encontró la posición del frente concentración para 3 horas usando los parámetros de la primera aplicación para $\Delta t = 25$ s y $\Delta z = 0,0055$ m. Se realizó el análisis de sensibilidad del parámetro w del amortiguador artificial, evaluando el valor que entrega la mejor aproximación del modelo. Se obtuvieron las curvas para tres casos: i) $w = 0$; ii) $w = 0,001$ y iii) $w = 0,01$ (ver Figura 4.31).

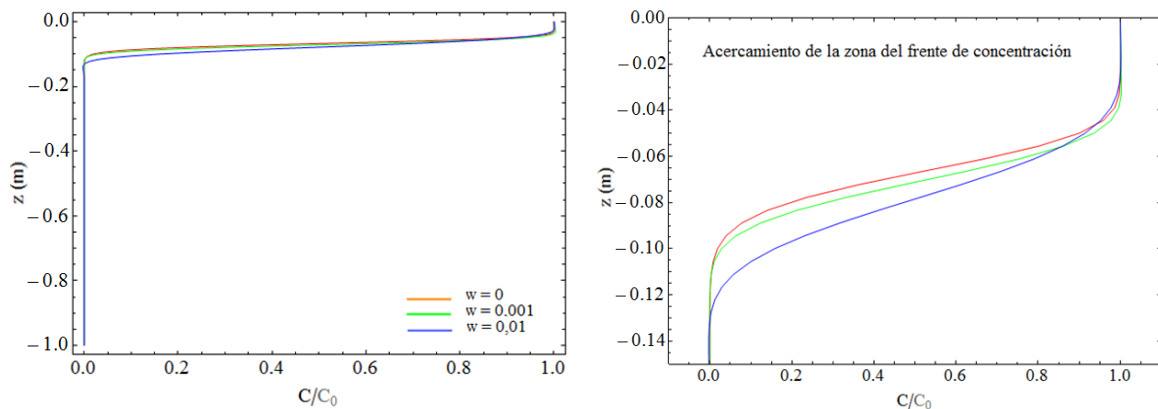


Figura 4.31: Análisis de sensibilidad del parámetro w del amortiguador artificial

Como el coeficiente de difusión es nulo, se espera que el cambio en el perfil de concentración de soluto sea abrupto, similar al caso de la Figura 4.30a. Las curvas obtenidas cumplen con ese requisito con un error relativo de 10 % para $w = 0,01$ y de 5 % para $w = 0,001$, ya que muestran que el cambio abrupto se extiende de los 95 cm hasta los 90 cm de profundidad en el mejor caso y este valor de error se considera aceptable. Además, cuando el parámetro de amortiguación w aumenta, la oscilación disminuye en la zona de alta concentración; al mismo tiempo, casi en la misma proporción, aumenta la oscilación en la zona de baja concentración, produciendo que la curva sea menos abrupta y por lo tanto alejándose de los valores esperados.

Se encontró que valores apropiados del coeficiente de amortiguamiento w estarían en torno al valor de 0,001.

4.3.3 Análisis de sensibilidad al coeficiente de difusión, Δz y Δt

Para analizar la sensibilidad del modelo a los cambios del coeficiente de difusión D , se simuló la infiltración de agua con soluto desde la parte superior. Las condiciones de contorno son las descritas para la tercera aplicación al inicio de esta sección; es decir, saturación en la parte superior y parcialmente seco en la inferior. El suelo es del tipo B (ver [Tabla 3.1](#)).

Con los resultados de la simulación se construyó y graficó el perfil de concentración de soluto en suelo y se encontró la posición del frente de concentración para 2 horas usando los parámetros de la tercera aplicación. Se realizó el análisis de sensibilidad del coeficiente de difusión, D , para $\Delta t = 25$ s, $\Delta z = 0,005$ cm y $w = 0,001$. Se obtuvieron las curvas para tres casos: i) $D = 0$; ii) $D = 6,2 \times 10^{-8} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ y iii) $D = 6,2 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. Se observa que para valores de D cercanos a cero se producen pequeños picos de oscilaciones que dan resultados mayores a la concentración de contorno superior. A medida que el coeficiente D aumenta dichos picos disminuyen, se amortiguan y se genera una curva suave y de comportamiento esperado. También, como se estimaba, se observa que en la medida que aumenta el valor de D , se incrementa el avance del transporte de soluto (ver [Figura 4.32](#)). Al comparar la posición del frente húmedo en la [Figura 4.32](#) con la posición del frente de soluto, se observa que el soluto se adelanta al frente húmedo y esto se puede explicar considerando que no hay interacción entre soluto y suelo (tal como fue contemplado en el modelo) y, además, el contenido de humedad inicial del suelo es bajo tal que no se diluye el soluto contenido en el agua que ingresa con el agua que ya posee el suelo.

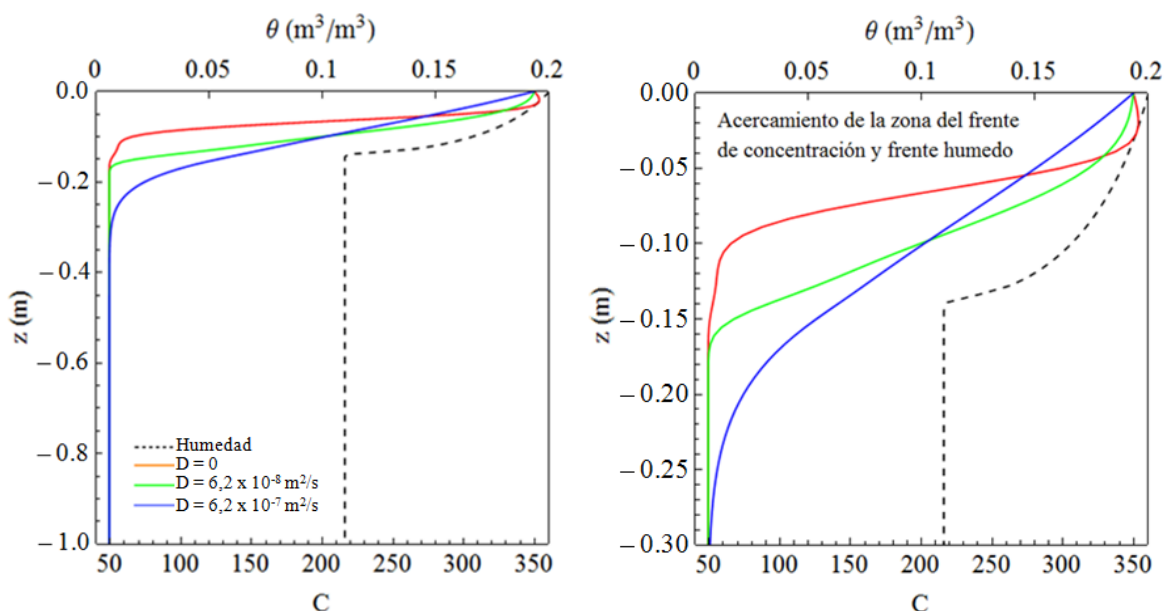


Figura 4.32: Análisis de sensibilidad del coeficiente de difusión

Para analizar la sensibilidad del modelo a los cambios de Δt y Δz se simuló la infiltración de agua con soluto desde la parte superior. Las condiciones de contorno son las descritas para la quinta aplicación al inicio de esta sección; es decir, saturación en la parte superior y parcialmente seco en la inferior. El suelo es del tipo A (ver [Tabla 3.1](#)).

Se simuló la posición del frente de concentración para 2 horas, utilizando $w = 0,001$ y $D = 6,2 \times 10^{-8} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. Se obtuvieron dos familias de curvas fijando Δt y Δz alternativamente.

Primero, se fijó $\Delta t = 20$ s para distintos valores de Δz : 0,005 m; 0,01 m y 0,025 m. Luego, se fijó $\Delta z = 0,01$ m para distintos valores de Δt : 10 s, 20 s y 30 s (ver Figura 4.33).

Se observa que la forma del perfil de cantidad de concentración es similar para los distintos valores de Δt y Δz utilizados, aunque se presenta más sensible respecto a Δz . La mayor diferencia está en la zona de frente de concentración donde la curva presenta un pico hacia la izquierda. Sin embargo, se observa que el modelo es convergente y que para los valores inferiores de Δz utilizados, las soluciones se acercan entre sí. Por lo tanto se puede decir que un valor de $\Delta z = 0,01$ m es suficiente para que la simulación entregue soluciones aceptables.

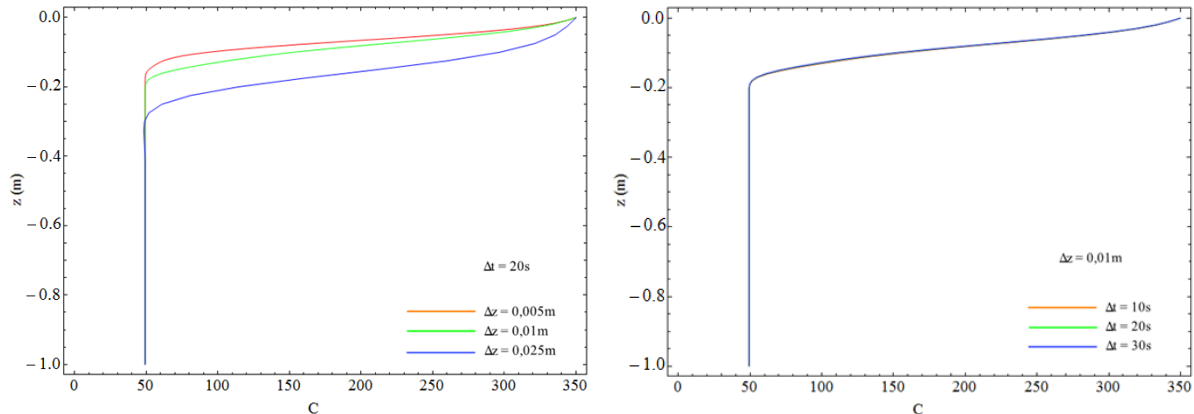


Figura 4.33: Análisis de sensibilidad de Δt y Δz

4.3.4 Análisis entre diferentes tipos de suelos y condiciones de contorno del agua

Tomando los resultados de las pruebas anteriores se contrasta ahora la respuesta del modelo a diferentes tipos de suelos para analizar si el mismo es estable. Para ello se simuló el perfil de concentración y se encontró la posición del frente concentración para 1 hora usando los parámetros de las aplicaciones: tercera (Suelo B) y cuarta (Suelo A).

Se obtuvieron los perfiles de concentración de soluto usando $D = 6,2 \times 10^{-8} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $\Delta t = 10$ s, $\Delta z = 0,01$ m y $w = 0,001$. Se observó que la curva presenta un comportamiento suave y conforme a lo esperado (ver Figura 4.34).

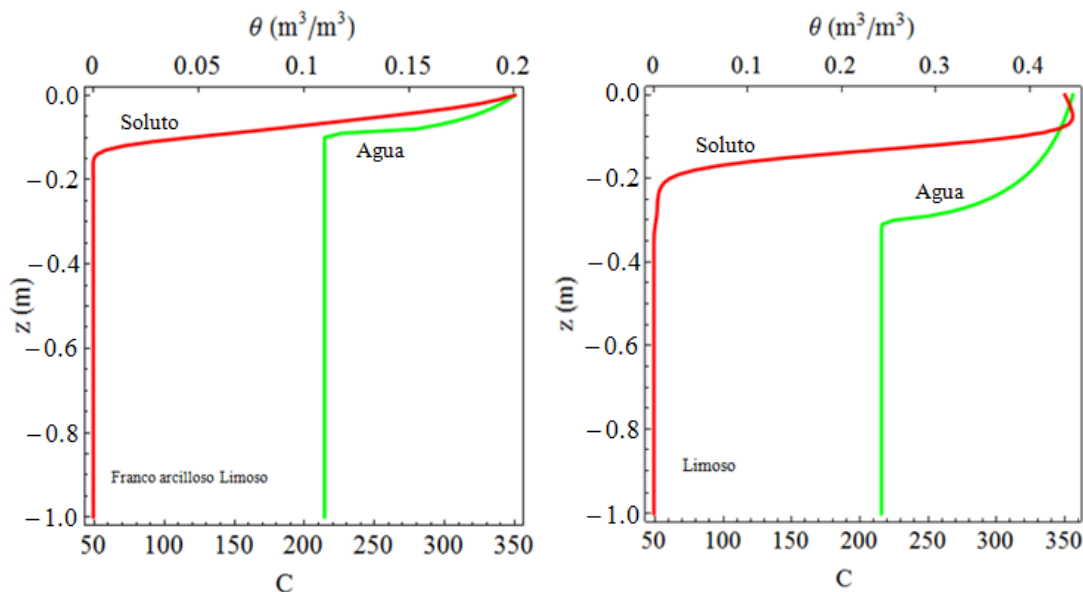


Figura 4.34: Comportamiento de la curva de soluto en distintos suelos

Se comparó la posición del frente de concentración para 1 hora usando los parámetros de la segunda aplicación (con condiciones de contorno de Neumann) y la tercera aplicación (con condiciones de contorno de Dirichlet) con $D = 6,2 \times 10^{-9} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ y $w = 0,001$ (ver Figura 4.35). Cuando las condiciones de contorno inferior del agua son de tipo Neumann, la curva de soluto presenta oscilaciones que se reflejan en la parte intermedia del intervalo. Por el contrario, para condiciones de contorno inferior del agua de tipo Dirichlet, la curva de soluto tiene un comportamiento suave y sin oscilaciones.

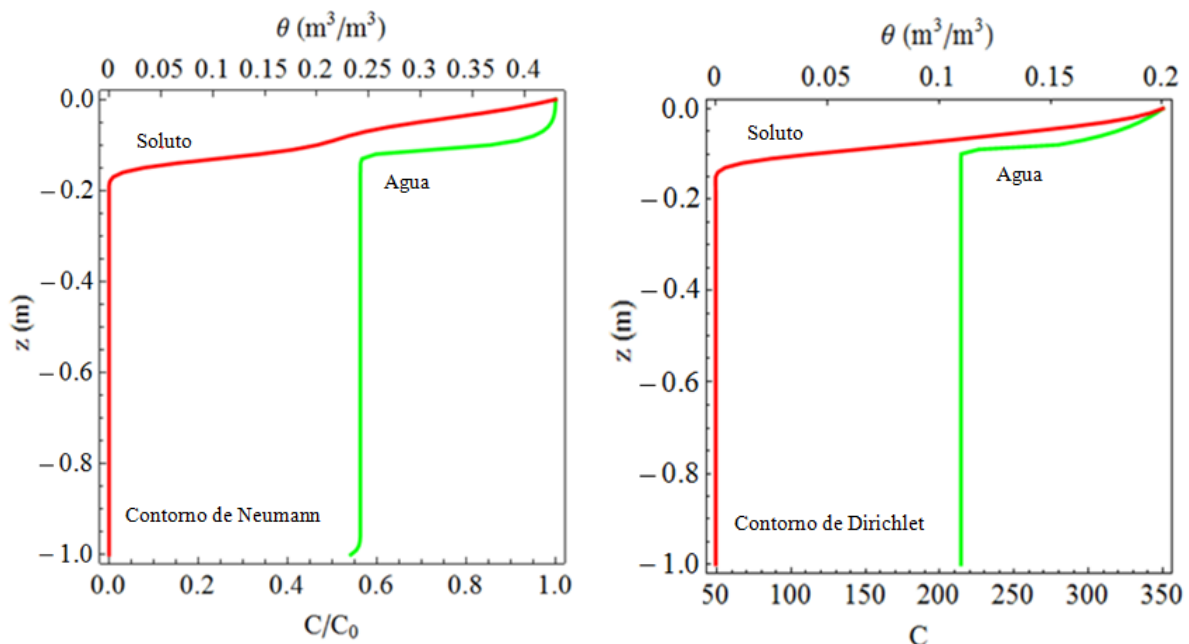


Figura 4.35: Comportamiento del soluto en diferentes condiciones de contorno de agua en la parte inferior; a la izquierda con condiciones de Neumann y a la derecha con condiciones de Dirichlet

4.3.5 Validación comparando con otros autores

Como se mencionó en la sección 2.8, existen pocos autores que hayan simulado difusión de soluto para infiltración de agua en suelo, tampoco hay disponible datos experimentales para realizar una buena validación, por eso se comparan los resultados del modelo propuesto con los resultados de los autores que fueron citados anteriormente y que brindan los datos suficientes para reproducir las condiciones que usaron.

Con datos de la segunda aplicación, se simuló el proceso de infiltración de agua con soluto ingresando desde el contorno superior. Se usaron las mismas condiciones (de contorno e iniciales) y tipo de suelo que los publicados por Neumann et al. (2011). Se calculó y obtuvo el perfil de concentración de soluto y la posición del frente de concentración para 4,8 horas. Se obtuvo la curva utilizando $\Delta t = 40 \text{ s}$, $\Delta z = 0,01 \text{ cm}$ y $D = 0$ (ver Figura 4.36a) y se comparó con el resultado obtenido por Neumann et al. (2011). La curva de perfil de soluto presenta una oscilación en la mitad del intervalo donde se produce el cambio. En ese punto es también donde se espera tener la mayor diferencia con el modelo de comparación. El error absoluto máximo se presentó en la zona del frente de concentración de soluto $0,70 \text{ m} \leq z \leq 0,90 \text{ m}$ (ver Figura 4.36b).

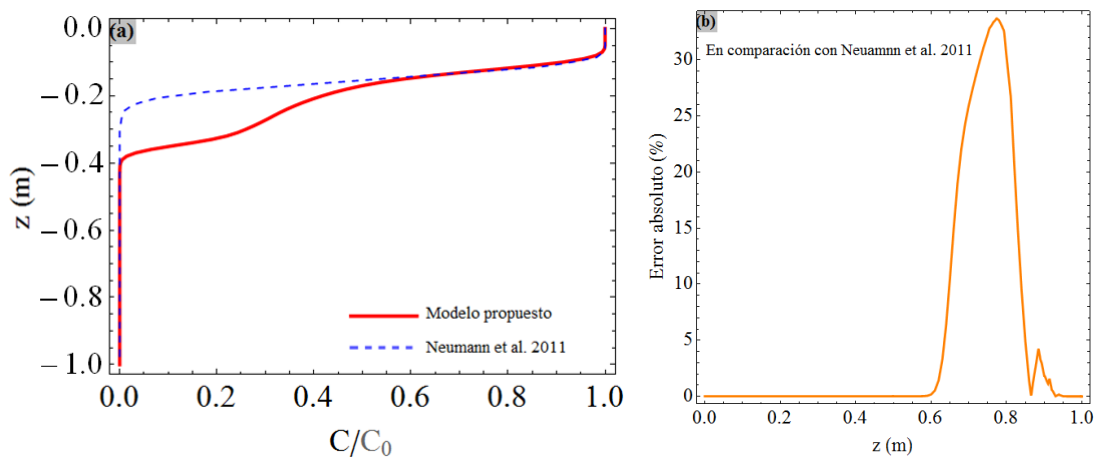


Figura 4.36: Perfil de cantidad de concentración para 4,8 horas con datos de la segunda aplicación. (a) Curva de comparación y resultados obtenidos por Neumann et al. (2011). (b) Error absoluto en la comparación

También, se observa que la desviación del perfil de humedad en las cercanías del contorno inferior, asociada a la condición de contorno de drenaje libre impuesta, es minimizada y eliminada en los resultados del perfil de concentración (ver Figura 4.37).

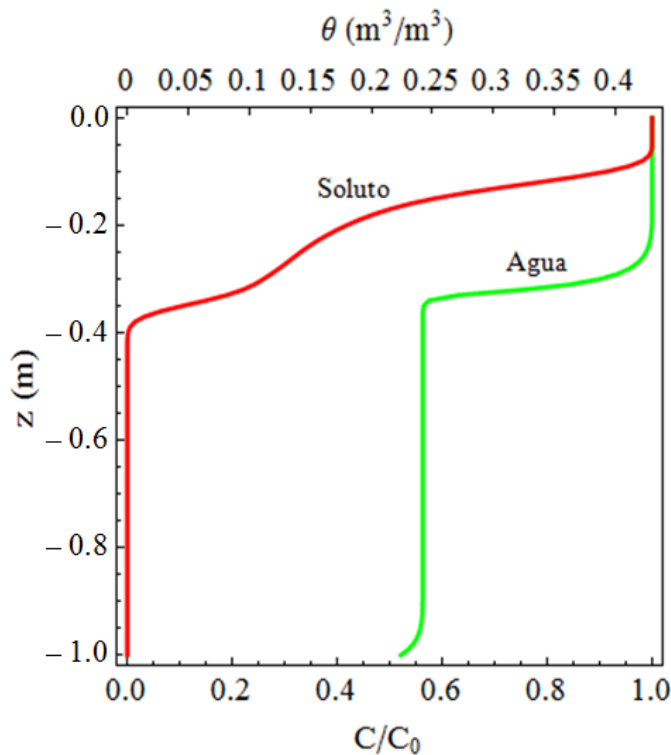


Figura 4.37: Perfil de cantidad de agua y concentración para 4,8 horas con datos de la segunda aplicación

Como resultado de esta comparación se destaca que el modelo obtenido reproduce el cambio en la concentración de soluto con un desvío en la región de mayor cambio, este desvío estaría asociado a oscilaciones en la solución que no alcanzan a amortiguarse suficiente y convenientemente, por lo que el modelo no da una solución completamente satisfactoria.

5. APLICACIONES DEL MODELO DE AGUA DESARROLLADO

El modelo matemático desarrollado es una herramienta útil para el uso eficiente del agua en la agricultura. Se puede racionalizar la operación de irrigación del suelo, definiendo el momento y cantidad de agua a ser aplicada (Correa et al. 2005, Arbat et al. 2009). El contenido de humedad en el suelo es una variable fundamental en la agricultura y el modelo entrega información necesaria para el planeamiento de la irrigación en la producción agrícola (Almeida et al. 2005). La fase inicial del diseño de un sistema de riego localizado, consiste en fijar el caudal de los emisores, su separación y el número de emisores por planta para alcanzar un determinado porcentaje de suelo mojado.

5.1 Mojado del suelo

Se analiza un escenario hipotético de riego del suelo por las técnicas de inundación y goteo (5 litros/h). En el riego por inundación, la superficie de la plantación se inunda con un manto de agua durante un cierto tiempo. El control del movimiento del agua superficial se realiza con pequeños diques, permitiendo que el agua se infiltre en el suelo. El manto de agua se puede representar por una condición de contorno de humedad constante en la superficie del suelo (condición de contorno de Dirichlet). En el riego por goteo, el agua se aplica mediante cañerías que la conducen directamente al pie de la planta a un caudal especificado, este caudal se puede representar por una condición de flujo especificado (condición de contorno de Neumann).

Se consideró 1 m² de suelo arcilloso inicialmente seco (30% de humedad) cultivado con cebolla, cuya raíz alcanza 15 cm de profundidad. Considerando que la cebolla tiene su raíz superficialmente hasta los 15 cm, es relevante saber la disponibilidad de agua en los primeros 15 cm del suelo cercanos a la superficie, el tiempo necesario de riego y el consumo de agua.

Para el modelado se utilizó $\Delta z = 0,5$ cm, $\Delta t = 1$ s y los siguientes parámetros del suelo de las ecuaciones de Mualem-van Genuchten: $\alpha = 1,03220$ m⁻¹, $j = 1,44617$ y $K_s = 2,06019 \times 10^{-6}$ m.s⁻¹, correspondiente al suelo Kandiuulte Típico. Los valores de humedad saturada y residual usados fueron: $\theta_s = 0,39705$ m³.m⁻³ y $\theta_r = 0,21379$ m³.m⁻³. La profundidad de la muestra de suelo fue de 60 cm. Las condiciones iniciales y de contorno utilizadas para el riego del suelo por inundación y goteo fueron:

$$\begin{aligned} \text{Por inundación: } \psi(z, t = 0) &= -5 \text{ m para } -0,60 \text{ m} \leq z \leq 0; \\ \psi(z = 0, t) &= 0 \text{ m para } t > 0; \\ q(z = 0,60 \text{ m}, t) &= -K_s \text{ para } t > 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Por goteo: } \psi(z, t = 0) &= -5 \text{ m para } -0,60 \text{ m} \leq z \leq 0; \\ q(z = 0, t) &= -1,38888 \times 10^{-6} \text{ m/s para } t > 0; \\ q(z = 0,60 \text{ m}, t) &= -K_s \text{ para } t > 0. \end{aligned}$$

Los resultados de las simulaciones se muestran en la [Figura 5.1](#).

En la [Figura 5.1.a](#) se muestra el perfil de humedad del suelo para riego por inundación. En dicha figura la primera línea de puntos corresponde a los 5 minutos y la continua a los 30 minutos, cada línea de trazos intermedia representa el perfil de humedad con un espaciado de 5 minutos de entre sí. Se observa que aproximadamente a los 30 minutos el frente húmedo alcanzó los 15 cm de profundidad. En ese momento la humedad volumétrica promedio del suelo es 36,41% (ver [Figura 5.1.c](#)) y el consumo de agua es de 10,8 litros (calculada a partir del gráfico de la [Figura 5.1.e](#)). La humedad volumétrica promedio del suelo fue calculada

considerando los valores de humedad en cada punto del frente húmedo, desde la superficie hasta los 15 cm de profundidad.

En la [Figura 5.1.b](#) se muestra el perfil de humedad del suelo para riego por goteo. En dicha figura la primera línea de puntos corresponde a los 15 minutos y la continua a los 90 minutos, cada línea de trazos intermedia representa el perfil de humedad con un espaciado de 15 minutos de entre sí. Se observa que aproximadamente a los 90 minutos el frente húmedo alcanzó los 15 cm de profundidad. En ese momento la humedad volumétrica promedio del suelo es 33,05% (ver [Figura 5.1.d](#)) y el consumo de agua es de 7,3 litros (calculada a partir del gráfico de la [Figura 5.1.f](#)).

En cuanto al tiempo de CPU utilizados para las simulaciones, se necesitó 5 minutos para inundación y 35 minutos para goteo.

5.2 Secado del suelo

Se analiza un escenario hipotético de secado del suelo, con dos variantes: un caso sin evaporación (frontera superior idealmente impermeable) y otro caso con evaporación (5 mm/día). Se consideró 1 m² de suelo arcilloso inicialmente húmedo producto del riego por inundación durante 30 minutos, cultivado con cebolla, cuya raíz alcanza 15 cm de profundidad. Sujeto a condiciones de contorno superior e inferior de tipo Neumann. Para el modelado se utilizó $\Delta z = 0,5$ cm, $\Delta t = 1$ s y los siguientes parámetros del suelo de las ecuaciones de Mualem–van Genuchten: $\alpha = 1,03220$ m⁻¹, $j = 1,44617$ y $K_s = 2,06019 \times 10^{-6}$ m.s⁻¹. Los valores de humedad saturada y residual usados fueron: $\theta_s = 0,39705$ m³.m⁻³ y $\theta_r = 0,21379$ m³.m⁻³. La profundidad de la muestra de suelo fue de 60 cm. Las condiciones de contorno utilizadas para el secado del suelo sin evaporación y con evaporación fueron:

$$\begin{aligned} \text{Sin evaporación: } q(z = 0, t) &= 0 \text{ para } t > 0; \\ q(z = 0,60 \text{ m}, t) &= -K_s \text{ para } t > 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Con evaporación: } q(z = 0, t) &= 1,157407 \times 10^{-7} \text{ m/s para } t > 0; \\ q(z = 0,60 \text{ m}, t) &= -K_s \text{ para } t > 0. \end{aligned}$$

En el secado sin evaporación el proceso ocurre por simple drenaje del agua. La condición inicial se tomó de la simulación presentada en la sección anterior para el caso de riego por inundación.

En [Figura 5.2.a](#) se muestra el perfil de humedad del suelo para secado sin evaporación y en las [Figura 5.2.b](#) el perfil de humedad del suelo para secado con evaporación. En ambas, la primera línea de puntos corresponde a los 5 minutos y la continua a los 30 minutos, cada línea de trazos intermedia representa el perfil de humedad con un espaciado de 5 minutos de entre sí. En la [Figura 5.2.c](#) se muestra el perfil de humedad del suelo para secado sin evaporación y con evaporación. Luego de 30 minutos de secado del suelo sin evaporación, a intervalos de 5 minutos, la humedad volumétrica promedio del suelo es 34,57%. En cambio, para el mismo tiempo de secado del suelo con evaporación la humedad volumétrica promedio del suelo es 34,50%.

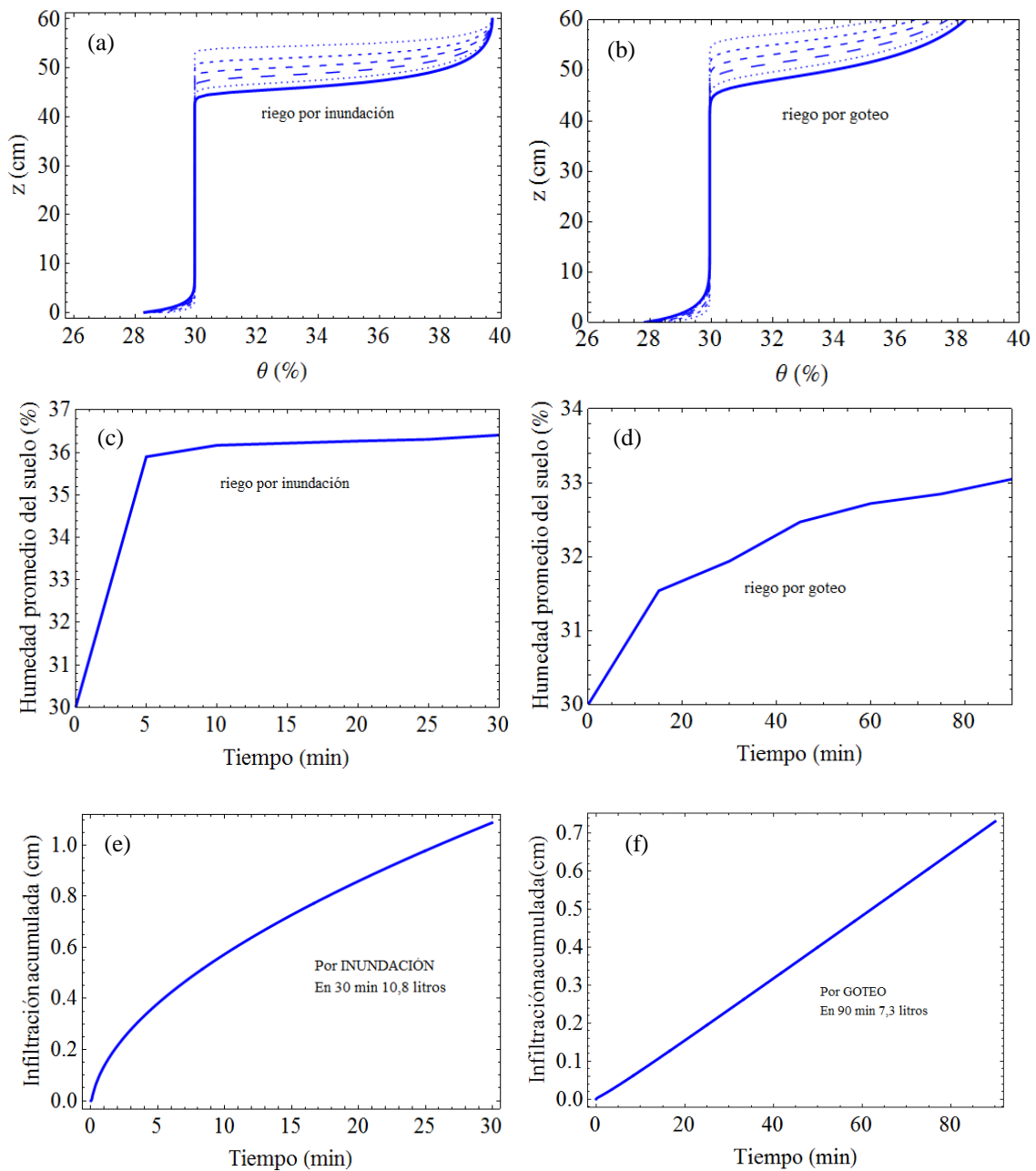


Figura 5.1: Mojado del suelo: a) Posición del frente húmedo en riego por inundación con avances cada 5 minutos (línea discontinua) hasta completar 30 minutos (línea continua). b) Posición del frente húmedo en riego por goteo con avances cada 15 minutos (línea discontinua) hasta completar 90 minutos (línea continua). c) Humedad volumétrica promedio del suelo durante el riego por inundación. d) Humedad volumétrica promedio del suelo durante el riego por goteo. e) Infiltración acumulada durante el riego por inundación. f) Infiltración acumulada durante el riego por goteo

Sin evaporación, la humedad volumétrica promedio del suelo regresa a su valor inicial (30%) luego de 150 minutos de haber detenido el riego, mientras que con evaporación lo hace luego de 140 minutos. Para la determinación de la humedad volumétrica promedio del suelo, se realizó un ajuste lineal y extrapolación de valores promedio obtenidos en simulación para 60 minutos de secado (ver Figura 5.2.d).

En cuanto al tiempo de CPU utilizados para las simulaciones, se necesitó 15 minutos para ambas variantes de secado.

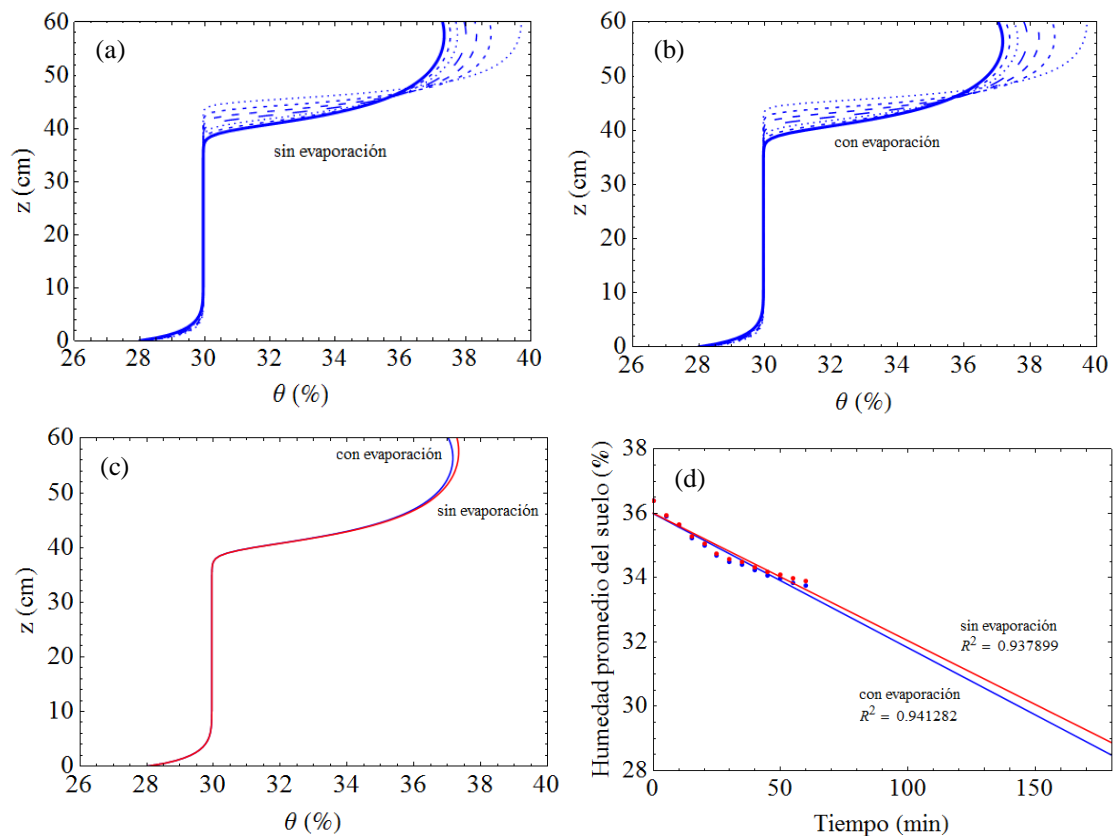


Figura 5.2: Secado del suelo luego del riego por inundación: a) Posición del frente húmedo en secado sin evaporación con avances cada 5 minutos (línea discontinua) hasta completar 30 minutos (línea continua). b) Posición del frente húmedo en secado con evaporación (5mm/día) con avances cada 5 minutos (línea discontinua) hasta completar 30 minutos (línea continua). c) Perfil de humedad del suelo para secado sin evaporación y con evaporación luego de 30 minutos. d) Humedad volumétrica promedio del suelo durante el secado sin evaporación (rojo) y con evaporación (azul)

Teniendo en cuenta los resultados anteriores, en términos de eficiencia en el uso del agua, el riego por goteo sería la técnica recomendada, implicando una disminución del consumo de agua del orden de 32%. Finalmente, cabe aclarar que estos ejercicios son ilustrativos y no agotan las posibilidades del modelo.

6. CONCLUSIONES

Se desarrolló un modelo matemático unidimensional para simular el flujo de agua y transporte de soluto en suelo no saturado. Este modelo fue implementado utilizando un código computacional propio diseñado en el software Wolfram Mathematica 8.0. Se utilizó la ecuación de Richards en términos de potencial matricial para obtener la distribución del agua en el suelo y la ecuación de advección-dispersión para describir el transporte del soluto en el suelo. Para la solución de estas ecuaciones se utilizó un esquema de diferencias finitas implícito basado en el método de Crank-Nicolson, aplicando un esquema de predictor/corrector. Se impusieron condiciones de contorno de Dirichlet y Neumann en suelo isotrópico y sin pendiente.

El modelo desarrollado fue comparado con resultados experimentales y de modelos de otros investigadores, utilizando diferentes tipos de suelo y condiciones de contorno.

El análisis de los resultados permite concluir que:

- El modelo predice con buen desempeño el perfil del potencial matricial y de concentración en la zona no saturada del suelo, presentando la forma sigmoide característica del movimiento vertical del agua en el suelo.
- El modelo es convergente, comprobando que el error relativo máximo disminuye conforme el paso de tiempo (Δt) y el paso espacial (Δz) son menores, siendo más sensible a los valores de Δz que a los de Δt .
- Los resultados del modelo de drenaje libre fueron independientes de la profundidad del dominio. El modelo cumple adecuadamente con la conservación de la masa (error relativo del orden de 10%). Cuando alcanza estado estacionario, la tasa de infiltración converge al valor de la conductividad hidráulica saturada lo que es físicamente consistente.
- La solución de la ecuación de advección-dispersión presenta oscilaciones propias del método de aproximación empleado. Este inconveniente fue resuelto mediante la implementación de una técnica de alisamiento, incorporando en el cálculo un amortiguador artificial que mantiene la precisión y estabilidad del método de aproximación.
- Los resultados del modelo de transporte de soluto presentan un comportamiento suave y conforme a lo esperado.
- La principal dificultad encontrada en la determinación de la densidad aparente del suelo en laboratorio fue la heterogeneidad del material: en su textura, estructura y humedad. Por eso, para lograr una comparación apropiada entre los resultados experimentales y los obtenidos por el modelo, es necesario realizar los experimentos con la misma muestra utilizada para la determinación de los parámetros del suelo, asegurando que los valores de conductividad saturada, humedad saturada y humedad residual sean los mismos que alimentan el modelo.
- El modelo matemático desarrollado es una herramienta útil para el uso eficiente del agua en la agricultura, permitiendo resolver escenarios simples de riego.

6.1 Líneas futuras de trabajo

Durante la obtención del modelo matemático propuesto en esta tesis se identificaron algunas líneas de acción para trabajos futuros:

- Desarrollar una versión del modelo más eficiente en cuanto al tiempo de CPU utilizado para las simulaciones; por ejemplo, incorporando un proceso de remallado para concentrarlo en la zona de mayor gradiente de agua y de esta forma reducir el

número de elementos de la malla.

- Adaptar el modelo para estudiar un perfil de suelo compuesto por capas de diferentes propiedades físicas.
- Validar el modelo de transporte de soluto con experimentos de laboratorio, utilizando suelo Kandiudulte Típico.
- Considerar en el modelo de transporte de soluto el efecto del fenómeno de sorción y de reacción química.
- Extender el cálculo del modelo para dominios bidimensionales y tridimensionales, lo que permitirá considerar suelos en pendientes o con irregularidades en la superficie o debajo de ella, lo que es muy habitual en la provincia de Misiones, Argentina.

7. REFERENCIAS

- Acevedo, E., *Interacciones suelo-agua-raíz en el proceso de absorción de agua por las plantas*. Boletín técnico. Facultad de Agronomía, Universidad de Chile, 44:17-25, 1979.
- Al-Barwani, H., Al-Lawatia, M., Balakrishnan, E. and Purnama A., Modeling flow and transport in unsaturated porous media: A review. *Science and Technology*, 265-280, 2000.
- Alfaro Soto, M., Geotecnia en suelos no saturados. *Revista Acad. Colomb. Cienc.*, 32: 471-481, 2008.
- Alfaro Soto, M., Kumayama, D. e Chang, H., Calibração de um reflectômetro para estudos do fluxo de água em solo não saturado. *Geociências*, 26: 357-368, 2007.
- Almeida, C., Oliveira, S. e Aparecida, M., Desempenho do tensiômetro, TDR e sonda de nêutrons na determinação da umidade e condutividade hidráulica do solo, *R. Bras. Ci. Solo*, 29:161-168, 2005.
- Álvarez, J., Isla, T., Cartón, A. y Bolado, S., Efecto de la velocidad de flujo en los parámetros de transporte de solutos. *Estudios de la Zona No Saturada del Suelo*, 157-161, 1999.
- Aparicio, V., Costa, J. y Gimenez, D., Comparación de tres modelos de transporte para estimar la velocidad y dispersión de solutos con datos de Br - medidos a campo en un suelo argiudol del sudeste de la provincia de Buenos Aires, Argentina. *Actas de las X Jornadas de investigación de la zona no saturada del suelo, Salamanca (España), Estudios de la Zona no Saturada del Suelo*, 10:139-144, 2011.
- Arbat, G., Barragán, J., Puig, J., Poch, R. y Ramírez de Cartagena, F., Evaluación de los modelos numéricos de flujo de agua en el suelo HYDRUS-2D y SIMDAS en riego localizado. *Estudios de la Zona No Saturada del Suelo*, 6:279-288, 2003.
- Arbat, G., Olivé, F., Roselló, A., Puig Bargaúes, A. y Ramírez de Cartagena, F., Distribución del agua en el suelo en riego por surcos alternos y no alternos en el cultivo de maíz. *Revista Estudios en la Zona no Saturada del Suelo*, 9: 1-8, 2009.
- Arias, M., López, E., Martínez, E., Simal, J., Mejuto, J. and García, L., The mobility and degradation of pesticides in soils and the pollution of groundwater resources. *Agriculture Ecosystems & Environment*, 123:247-260, 2008.
- Artieda, O., *Papel del suelo en el ciclo hidrológico*, Forum de sostenibilidad, área de edafología y química agrícola. Centro Universitario de Plasencia, Universidad de Extremadura, 2:19-31, 2008.
- Assouline, S. and Tartakovsky, D., Unsaturated hydraulic conductivity function based on a soil fragmentation process. *Water resources research*, 37:1309-1312, 2001.
- Azizi Pour, M., Mahmoodian Shoshtari, M. and Adib, A., G., Numerical solution of Richards equation by using of finite volume method. *World Applied Sciences Journal*, 14: 1838-1842, 2011.
- Bastos de Vasconcellos, C. e Amorim, J., *Numerical simulation of unsaturated flow in porous media using a mass-conservative model*. XVI congresso brasileiro de engenharia mecânica, proceedings of COBEM 2001, Fluid mechanics, 8:139-148, 2001.
- Batu, V., *Applied flow and solute transport modeling in aquifers*. Taylor & Francis Group, 2006.
- Bear, J. and Cheng, A., *Modeling groundwater flow and contaminant transport*. Springer, 2010.
- Bedos, C., Générmont, S., Le Cadre, E., Garcia, L., Barriuso, E. y Cellier, P., Modelling pesticide volatilization after soil application using the mechanistic model Volt'Air. *Atmospheric Environment*, 43: 3630-3639, 2009.
- Bottani, J., Odetti, H., Pliego, O. y Villarreal, E., *Química General*. Universidad Nacional del Litoral, 2006.

- Bucio, M. y Anguas, P., *Introducción a la mecánica de suelos no saturados en vías terrestres*. Secretaría de comunicaciones y transportes. Instituto mexicano del transporte. Publicación técnica N° 198. Sanfandila, 2002.
- Bunsri, T., Sivakumar, M. and Hagare, D., Numerical modeling of tracer transport in unsaturated porous media. *Journal of applied fluid mechanics*, 1: 62-70, 2008.
- Cai, J., Zhou, Z., and Huang, Y., Laboratory experiments on solute transport in a partial transfixion single fracture. *Journal of Hydrodynamics*, 23: 570-579, 2011.
- Casanova, M., Seguel, O., Abraham, J., Messing, I., Luzio, W. y Vera, W., Funciones de pedotransferencia para conductividad hidráulica en laderas de secano. *Revista de la ciencia del suelo y nutrición vegetal*, 3:42-48, 2003.
- Castagnoli, J. e Vargas Júnior, E., Análise numérica do acoplamento entre água superficial e água subterrânea. XV Congresso brasileiro de águas subterrâneas, 1-19, 2008.
- Caviedes, D., García, P., and Murillo, J., Verification, conservation, stability and efficiency of a finite volume method for the 1D Richards equation. *Journal of Hydrology*, 480:69-84, 2013.
- Celia, M., Bouloutas, E., and Zarba R., A general mass-conservative numerical solution for the unsaturated flow equation. *Water resources research*, 26:1483-1496, 1990.
- Chapra, S. y Canale, R., *Métodos numéricos para ingenieros*. McGRAW-HILL, 1987.
- Cheng, Z., Huan, G. and Ma, Y., Computational methods for multiphase flows in porous media. SIAM - Society for Industrial and Applied Mathematics Philadelphia, 2006.
- Chica, F., Londoño, L. y Álvarez, M., La zeolita en la mitigación ambiental. *Revista Lasallista de investigación*, 3:30-34, 2006.
- Cohen, M. and Mualem, Y., Steady convective flow in an unsaturated state dependent anisotropic soil profile: Analysis of the affected zone from a contaminating point source. *Journal of Hydrology*, 396: 12-23, 2011.
- Corrêa, M., A. Martinez, M., Costa, L., Ruiz, H., Corrêa, M. e Sampaio, S., Modelo numérico do transporte de água e soluto no solo: I – simulação da distribuição de umidade. *Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental*, 10:17-23, 2006.
- Costa, C. e Holanda de Castro, M., Uma metodologia numérico-analítica aplicada a problemas transparentes de transporte de contaminante. *Revista Brasileira de Recursos Hídricos*, 12:183-197, 2007.
- Coussy, O., *Mechanics and physics of porous solids*. WILEY, 2010.
- Da Silva, N., Lelis Neto, J., Teixeira, M., Cunha, F., Miranda, J. e Coelho, R., Distribuição de solutos em colunas de solo com vinhaça. *Irriga, Botucatu, Edição Especial*, 340-350, 2012.
- De Wilde, T., Mertens, J., Simunek, J., Sniegowksi, K., Ryckeboer, J., Jaeken, P., Springael, D. and Spanoghe, P., Characterizing pesticide sorption and degradation in microscale biopurification systems using column displacement experiments. *Environmental Pollution*, 157:463-473, 2009.
- Dohnal, M., Jelinkova, V., Snehota, M., Dusek, J. and Brezina, J., Tree-dimensional numerical analysis of water flow affected by entrapped air: Application of Noninvasive Imaging Techniques. *Vadose Zone J.*, 1-12, 2012.
- Exebio, A., Palacios, E., Mejía, E. y Ruiz, V., Metodología para estimar pérdidas por infiltración en canales de tierra. *TERRA Latinoamericana*, 23:213-223, 2005.
- Fantke, P., Charles, R., De Alencastro, L., Friedrich, R., and Jolliet, O., Plant uptake of pesticides and human health: Dynamic modeling of residues in wheat and ingestion intake. *Chemosphere*, 85:1639-1647, 2011.
- Favero, J., Muniz, A. e Dos Santos, R., Análise teórico-experimental da dispersão de poluentes líquidos em solos. *Eng. Sanit. Ambient*, 12:410-416, 2007.

- Fontúrbel, F., Ibáñez, C., Palomeque, S., Salinas, T. y Galleguillos, F., *Descontaminación y tratamiento de contaminantes en suelos*. Publicaciones Integrales, 2004.
- Gabriels, D., Lobo, D., y Pulido, M., Métodos para determinar la conductividad hidráulica saturada y no saturada de los suelos. *Venesuelos*, 14:7-22, 2006.
- Gallegos Fonseca, G., Leal Vaca, J. y Rojas González, E., Conductividad hidráulica de una arena limosa obtenida a partir de la curva característica. *Ingeniería Investigación y Tecnología*, 7:285-290, 2011.
- Ghanbarian Alavijeh, B., Liaghat A., Huang, G. an Van Genuchten, M., Estimation of the Van Genuchten soil water retention properties from soil textural data. *Pedosphere*, 20:456-465, 2010.
- Golfier, F., Quintard, M. and Wood, B., Comparison of theory and experiment for solute transport in weakly heterogeneous bimodal porous media. *Advances in Water Resources*, 34:899-914, 2011.
- Hammoua, H., Ginzburg, I. and Boulerhcha, M., Two-relaxation-times Lattice Boltzmann schemes for solute transport in unsaturated water flow, with a focus on stability. *Advances in Water Resources*, 34:779-793, 2011.
- Harter, T., Ginn, T., Onsoy, Y. and Botros, F., Richards equation - Based modeling to estimate flow and nitrate transport in a deep alluvial vadose zone. *Vadose Zone Journal*, 1-6, 2011.
- Instituto de Suelos - Instituto Nacional de Tecnología Agropecuaria, *Atlas de suelos: Unidad cartográfica UTt1*, 2014.
- Kalinka, F and Ahrens, B., A modification of the mixed form of Richards equation and its application in vertically inhomogeneous soils. *Adv. Sci. Res.*, 6:123-127, 2011.
- Kavetski, D., Binning, P. and Sloan, S.W., *Adaptive time stepping and error control in a mass conservative numerical solution of the mixed form of Richards equation*, *Advances in Water Resources*, 24:595-605, 2001.
- Keesstra, S., Geissen, V., Mosse, K., Piirainen, S., Scudiero, E., Leistra, M. and Schaik, L., Soil as a filter for groundwater quality. *Current Opinion in Environmental Sustainability*, 4:507-516, 2012.
- Klute, A., *Methods of soil analysis – Part 1: Physical and Mineralogical Methods*. American Society of Agronomy, 1986.
- Kumar, V., Guerrero, F., Tansel, B. and Reza Savabi, M., Hydro-physical characteristics of selected media used for containerized agriculture systems. *Agricultural Water Management*, 98:314-320, 2010.
- Lenoir, C. y Tornari, G., *Contaminación y tratamiento del suelo*. AES-DISAB SRL, 1-65, 2004.
- Linares Forero, J., Aplicación de un modelo unidimensional para flujo en suelos saturados y no saturados y transporte de herbicidas aplicación en zona centro de la provincia de Córdoba. Tesis de Maestría en Ciencias de la Ingeniería - Mención Recursos Hídricos, Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Universidad Nacional de Córdoba, 2012.
- Luo, Y., Spurlock, F., Gill, S., and Goh, K., Modeling complexity in simulating pesticide fate in a rice paddy. *Water Research*, 46:6300-6308, 2012.
- Martinez Fernández, J., Medida de curvas de retención de humedad en laboratorio y su estimación. *Avances de la zona no saturada del suelo*, 193-201, 1995.
- Medrano, H., Bota, J., Cifre, J., Flexas, J., Ribas, M. y Gulías, J., Eficiencia en el uso del agua por las plantas, *Investigaciones Geográficas*, 43:63-84, 2007.
- Mesquita, M., Testezla, R, Ramirez, J., de Deus, F. e Bizari, D., *Simulação matemática da perda de carga em camadas porosas de filtros de areia*. IV WINOTEC - Workshop

- international de inovações tecnológicas na irrigação, INOVAGRI – International meeting, 1-5, 2012.
- Miranda, J. e Duarte, S., Modelo para simulação da dinâmica de nitrato em colunas verticais de solo não saturado, *Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental*, 6:235-241, 2002.
- Miranda, J., Duarte S., Libardi P., e Folegatti M., Simulação do deslocamento de potássio em colunas verticais de solo não-saturado. *Eng. Agríc.*, 25:677-685, 2005.
- Molina de P., O., Review. Impacto ambiental de agroquímicos en los altos Andes merideños. *Visión gerencial*, 2:326-340, 2012.
- Mollerup, M. and Hansen, S., Power series solution for ponded infiltration on sloping surfaces. *Journal of Hydrology*, 464-465:431-437, 2012.
- Morell, I., Algunas consideraciones sobre la zona no saturada. *Avances en la investigación de la zona no saturada*, 1-32, 1995.
- Navarro, S., Vela, N. and Navarro, G., Review. An overview on the environmental behaviour of pesticide residues in soils. *Spanish Journal of Agricultural Research*, 5:357-375, 2007.
- Neto, D., Nielsen, D., Hopmans, J., Reichardt, K., Bianchi, O., Software to model soil water retention curves (SWRC, version 2.00). *Scientia Agrícola*, 57:1-4, 2000.
- Neumann, L.E., Simunek, J., and Cook F.J., Implementation of quadratic upstream interpolation schemes for solute transport into HYDRUS-1D, *Environmental Modelling & Software*, 26:1298-1308, 2011.
- Nissen, J., Quiroz, C., Seguel, O., Mac Donald, R. y Ellies, A., *Flujo Hídrico no Saturado en Andisoles*, 9-19, 2006.
- Paradelo, R., Rey, R., Moldes, A., y Barral, M., Estudio del comportamiento hídrico de lodos de serrado de pizarra y descripción mediante el modelo de Van Genuchten. *Boletín Geológico y Minero*, 120:61-68, 2009.
- Pardo, J. y Salinas, L., *Física, química y biología de suelos curva de retención de agua del suelo (SWRC): Análisis de estimaciones y ajustes*. Laboratorio de Geotecnia, Universidad Mayor de San Simón, Cochabamba, Bolivia, 1-14, 2006.
- Persicani, D., Siro, P., Gasparetti, G. and Bonvini, M., Comparison of measured and simulated atrazine mobility in two alluvial soils. *Soil Technology*, 9:281-298, 1996.
- Pour, M., Shoshtari, M. and Adib, A., Numerical solution of Richards equation by using of finite volume method. *World Applied Sciences Journal*, 14:1838-1842, 2011.
- Rahimi, A. and Byzedi, M., The evaluation and determining of soil infiltration models coefficients. *Australian Journal of Basic and Applied Sciences*, 6:94-98, 2012.
- Reichardt, K., Bacchi, O. e Villagra, M., *Estimativa de fluxos de agua em solos não saturados*. VIII. Física do solo - Nota, 52:83-87, 1993.
- Reyna, E y Reyna, S., Modelos analíticos y numéricos para la determinación de infiltración en presas de material suelto. Análisis de su uso y sensibilidad. *Mecánica Computacional*, 21:279-303, 2012.
- Romano, N., Brunone, B., and Santini, A., Numerical analysis of one dimensional unsaturated flow in layered soils. *Advances in Water Resources*, 21:315-324, 1998.
- Samper, F., Modelos de transporte de masa en medios no saturados. *Avances en la investigación en la zona no saturada*, 127-146, 1995.
- San Román, F., *Ley de Darcy. Conductividad hidráulica*. Departamento de geología, Universidad Salamanca, España, 1-11, 2011.
- Sillers, W., Fredlund, D. and Zakerzadeh, N. Mathematical Attributes of Some Soil-Water characteristic curve Models. *Geotechnical and Geological Engineering*, 19:243-283, 2001.
- Silva, S. y Correa, F., Análisis de la contaminación del suelo: revisión de la normativa y

- posibilidades de regulación económica. *Semestre Económico*, 12:13-34, 2009.
- Tannehill, J., Anderson, D. and Pletcher, R., *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*. Taylor & Francis, 1997.
- Tediosi, A., Whelan, M., Rushton, K., Thompson, T., Gandolfi, C. and Pullan, S., Measurement and conceptual modelling of herbicide transport to field drains in a heavy clay soil with implications for catchment-scale water quality management. *Science of the Total Environment*, 438:103-112, 2012.
- Wendland, E., e Pizarro, M., Modelagem computacional do fluxo unidimensional de água em meio não saturado do solo. *Eng. Agríc.*, 30:424-434, 2010.
- Werf, H., Assessing the impact of pesticides on the environment. *Agriculture Ecosystems & Environment*, 60:81-96, 1996.
- Wu, W., *Computational River Dynamics*. Taylor & Francis Group, 2008.
- Zamora Cardona, J. y Cristancho, F., *La humedad en las propiedades físicas del suelo*. Departamento de Física, Universidad Nacional de Colombia, 1-20, 2008.
- Zavala, M., Saucedo, H., Fuentes, C. y Bautista, C., Modelo de conductividad hidráulica dual para el movimiento del agua en suelos macroporosos. *Agrociencia*, 46:205-220, 2012.
- Zha, Y., Shi, L., Ye, M. and Yang, J., A generalized Ross method for two and three dimensional variably saturated flow. *Advances in Water Resources*, 54:67-77, 2013.
- Zhang, X. and Ren, L., Lattice Boltzmann model for agrochemical transport in soils. *Journal of Contaminant Hydrology*, 67:27-42, 2003.
- Medida del agua*. Recuperado el 20 de febrero de 2016 de <https://edafologia2urjc.wikispaces.com/5.+Medida+del+agua>
- Movement of Groundwater*. Recuperado el 20 de febrero de 2016 de <http://nptel.ac.in/courses/105103026/3>
- Permeámetro de carga variable*. Recuperado el 20 de febrero de 2016 de <http://proetisa.com/proetisa-productos.php?ID=210>
- RETIC for Windows. Recuperado el 13 de agosto de 2014 de <http://www.pc-progress.com/en/Default.aspx?retc>
- Retención de humedad del suelo*. Recuperado el 20 de febrero de 2016 de <http://www2.udec.cl/~rmatta/Suelos/procesos.htm>
- Suelo y subsuelo: confusiones, ambigüedades y embrollos legales*. Recuperado el 20 de febrero de 2016 de <https://medioambientedecalidad.wordpress.com/2013/02/07/suelo-y-subsuelo/>
- Textura del suelo*. Recuperado el 20 de febrero de 2016 de ftp://ftp.fao.org/fi/CDrom/FAO_Training/FAO_Training/General/x6706s/x6706s06.htm

8. ANEXO

A continuación se detalla el código computacional para la implementación del modelo de movimiento agua y soluto imponiendo condiciones de contorno de Dirichlet y Neumann. El software utilizado fue Wolfram Mathematica 8.0 y las simulaciones fueron calculadas en una computadora con procesador Intel® Core™ i3-2310 CPU@2.10GHz y 4 GB de memoria RAM. Los códigos fueron divididos en seis partes:

- 1° **Configuración del modelo:** profundidad del suelo, paso de tiempo, espacio entre nodos, conductividad hidráulica saturada, parámetros del suelo, humedad saturada, humedad residual, condiciones de contorno y condición inicial.
- 2° **Ecuaciones constitutivas y variables auxiliares del modelo:** capacidad hídrica del suelo, relación entre potencial matricial y humedad, conductividad hidráulica no saturada, saturación efectiva y coeficiente de difusión.
- 3° **Definición del sistema de ecuaciones lineales (matrices):** sistema de ecuaciones lineales para agua y soluto.
- 4° **Resolución del sistema matricial:** cálculo de las matrices de agua y soluto.
- 5° **Archivo de datos obtenidos:** preparación de la solución del sistema matricial para ser exportada en archivo (.dat).
- 6° **Representación gráfica de la solución:** gráfico de agua y soluto.

8.1 Código computacional (Dirichlet)

1° parte

```
prof=valorprof ; (* Profundidad del suelo *)
g=valorg ; (* Nodos interiores *)
tol=valoritol; (* Tolerancia en el error relativo *)
dt=valoridt;(* Paso de tiempo por iteración *)
dz=prof/ele;(* Espacio entre elementos *)
ele=g+1; (* Elementos *)
iter= valoriter;(* Iteraciones *)
ks=valorks;(* Conductividad hidráulica saturada *)
q=valorq;α=valora;m[q_]=1-1/q; (* Parámetros del suelo *)
θr=valorres; (* Humedad residual *)
θs=valorsat;(* Humedad saturada *)
ccs=valorccs; (* Condición de contorno superior agua*)
cci=valorcci; (* Condición de contorno inferior agua *)
ci=valorci; (* Condición inicial agua *)
ccsc=valorccsc; (* Condición de contorno superior soluto *)
ccic=valorccic; (* Condición de contorno inferior soluto *)
cic=valorcic; (* Condición inicial soluto *)
```

2° parte

```
(* Capacidad hídrica del suelo *)
c[ψ_,q_,α_,θr_,θs_,θ_,ks_]:= (m[q]q α^q (θr-θs)(-1)Abs[ψ]^(q-1))/(1+(α
Abs[ψ])^q)^(m[q]+1);
(* Relación entre potencial matricial y humedad *)
ψ[q_,α_,θr_,θs_,θ_,ks_]:=1/α (1/se[θr,θs,θ]^(1/m[q])-1)^(1/q);
(* Conductividad hidráulica no saturada *)
kgen[ψ_,q_,α_,θr_,θs_,ks_]:=ks (((α Abs[ψ])^q+1)^-m[q])1/2 (1-(1-(((α Abs[ψ])^q+1)^-
m[q])^(1/m[q]))^m[q])2;
```

```
(* Saturación efectiva *)
se[θr_,θs_,θ_]=(θ-θr)/(θs-θr);
(* Parámetros arbitrarios para el código de agua *)
hagen[i_]= dt/(c[i,q,α,θr,θs,θ,ks]*2*dz^2);
ja[i_]= jc[i] + jd[i ];
jb[i_]=jc[i]-jd[i];
jd[i_]=jc[i-1];
a0[i_]=hact[i+1]*a3[i]-hact[i-1]*a3[i]+hant[i+1]*a3[i]-hant[i-1]*a3[i];
(* Conductividad hidráulica no saturada redefinida para el código de soluto *)
kk[ψ_,q_,α_,θr_,θs_,ks_]:=ks (((α Abs[ψ])^q+1)^-m[q])1/2 (1-(1-(((α Abs[ψ])^q+1)^-m[q])^(1/m[q]))^m[q])2;
(* Parámetros arbitrarios para el código de soluto *)
a1[2]=kk[pact[1],q,α,θr,θs,ks]((pact[2]-pact[1])/dz+1);
a2[i_]=(hant[i]*hant[i+1])^1/2;
a3[i_]=valordif; (* Coeficiente de difusión *)
a4[g+1]=kk[pact[g+2],q,α,θr,θs,ks]((pact[g+2]-pact[g+1])/dz+1);
a5[i_]=hact[i];
a6[2]=kk[pant[1],q,α,θr,θs,ks]((pant[2]-pant[1])/dz+1);
a7[i_]=hant[i];
a8[g+1]=kk[pant[g+2],q,α,θr,θs,ks]((pant[g+2]-pant[g+1])/dz+1);
```

3º parte

```
(* Sistema de ecuaciones lineales para el agua *)
ma=Normal[SparseArray[{Band[{1,1}]→Append[Prepend[Array[ha,{g},2]*Array[ja,{g},2]+1,1],1],Band[{1,2}]→Prepend[-Array[ha,{g},2]*Array[jc,{g},2],0],Band[{2,1}]→-Array[ha,{g},2]*Array[jd,{g},2]},{g+2,g+2}]];
MatrixForm[ma];
as1=Array[ha,{g},2]*2dz*Array[jb,{g},2]+Array[ha,{g},2]*Array[jd,{g},2]*Array[sa,{g},1]-(Array[ha,{g},2]*Array[ja,{g},2]-1)*Array[sa,{g},2]+Array[ha,{g},2]*Array[jc,{g},2]*Array[sa,{g},3];
mb=Append[Prepend[Transpose[{as1}],{ccs}],{cci}];
MatrixForm[mb];
as2=Array[ha,{g},2]*2dz*Array[jb,{g},2]+Array[ha,{g},2]*Array[jd,{g},2]*Array[sb,{g},1]-(Array[ha,{g},2]*Array[ja,{g},2]-1)*Array[sb,{g},2]+Array[ha,{g},2]*Array[jc,{g},2]*Array[sb,{g},3];
mb2=Append[Prepend[Transpose[{as2}],{ccs}],{cci}];
MatrixForm[mb2];
sa[i_]:=Part[sol,i][[1]];
sb[i_]:=Part[solb,i][[1]];
ha[i_]:=Part[hao,i][[1]];
jc[i_]:=Part[jco,i];
sainicial=Transpose[{Prepend[Table[cci,{ele}],ccs]}];
solucion={ };
sol=sainicial;
AppendTo[solucion,sol];
(* Sistema de ecuaciones lineales para el soluto *)
Clear[sac,sbc,mac,mbc, hant, hact,pact,pant];
vece=valorve;
my=valormy;
```

```

w=valorw; (* Coeficiente de amortiguación *)
mac=Normal[SparseArray[{Band[{1,1}]→Append[Prepend[Array[a5,{g},2]/dt+(Array[a2,{g},2]*Array[a3,{g},2])/dz^2,1],1],
Band[{1,2}]→Prepend[Array[a4,{g},2]/(4 dz)-Array[a0,{g},2]/(16 dz^2)-
(Array[a2,{g},2]*Array[a3,{g},2])/(2 dz^2),0],
Band[{2,1}]→-(Array[a1,{g},2]/(4 dz))+Array[a0,{g},2]/(16 dz^2)-
(Array[a2,{g},2]*Array[a3,{g},2])/(2 dz^2)},{g+2,g+2}]];
MatrixForm[mac];
as1c=(Array[sac,{g},1]*(Array[a6,{g},2]/(4 dz)-Array[a0,{g},2]/(16
dz^2)+(Array[a2,{g},2]*Array[a3,{g},2])/(2 dz^2))+Array[sac,{g},2]*(Array[a7,{g},2]/dt-
(Array[a2,{g},2]*Array[a3,{g},2])/dz^2)+Array[sac,{g},3]*(-(Array[a8,{g},2]/(4
dz))+Array[a0,{g},2]/(16 dz^2)+(Array[a2,{g},2]*Array[a3,{g},2])/(2 dz^2))-w/8
(Array[sac,{g},0]-4 Array[sac,{g},1]+6 Array[sac,{g},2]-4
Array[sac,{g},3]+Array[sac,{g},4]));
mbc=Append[Prepend[Transpose[{as1c}],{ccsc}],{ccic}];
sac[0]=sac[1];
sac[Length[mbc]+1]=sac[Length[mbc]];
MatrixForm[mbc];
as2c=(Array[sbc,{g},1]*(Array[a6,{g},2]/(4 dz)-Array[a0,{g},2]/(16
dz^2)+(Array[a2,{g},2]*Array[a3,{g},2])/(2 dz^2))+Array[sbc,{g},2]*(Array[a7,{g},2]/dt-
(Array[a2,{g},2]*Array[a3,{g},2])/dz^2)+Array[sbc,{g},3]*(-(Array[a8,{g},2]/(4
dz))+Array[a0,{g},2]/(16 dz^2)+(Array[a2,{g},2]*Array[a3,{g},2])/(2 dz^2))-w/8
(Array[sbc,{g},0]-4 Array[sbc,{g},1]+6 Array[sbc,{g},2]-4
Array[sbc,{g},3]+Array[sbc,{g},4]));
mb2c=Append[Prepend[Transpose[{as2c}],{ccsc}],{ccic}];
sbc[0]=sbc[1];
sbc[Length[mb2c]+1]=sbc[Length[mb2c]];
MatrixForm[mb2c];
(* Conversión potencial matricial a humedad *)
θ[ψ_]:= (1+(Abs[ψ] α)^q)^-m[q] (-θr+θs+θr (1+(Abs[ψ] α)^q)^m[q]);
h=θ[pot];
sainicial=Append[Prepend[Transpose[{Table[cic,{j,ele+1}]}],{-17}],{-17}];
sainicial[[2]]={ccsc};
solucionc={ };
solc=sainicialc;
sac[i_]:=Part[solc,i+1][[1]];
sbc[i_]:=Part[solbc,i+1][[1]];
4º parte
(* Cálculo de matrices de agua *)
ejec=
Timing[
Monitor[mon=0;
Do[error={ };
hao=hagen[sol];
ko=Flatten[kgen[sol,q,α,θr,θs,ks]];
jco=Sqrt[ko*RotateLeft[ko]];
x=LinearSolve[ma,mb];
solb=sol;

```



```

sol=x;
hao=hagen[sol];
ko=Flatten[kgen[sol,q, $\alpha$ , $\theta r$ , $\theta s$ ,ks]];
jco=Sqrt[ko*RotateLeft[ko]];
x2=LinearSolve[ma,mb2];
ex2=Max[(Abs[x2[[2;;]]]-Abs[x[[2;;]])]/Abs[x2[[2;;]]];
sol=x2;
Monitor[mon2=0;
While[ex2>tol,
AppendTo[error,ex2];
hao=hagen[sol];
ko=Flatten[kgen[sol,q, $\alpha$ , $\theta r$ , $\theta s$ ,ks]];
jco=Sqrt[ko*RotateLeft[ko]];
x2=LinearSolve[ma,mb2];
ex2=Max[(Abs[x2[[2;;]]]-Abs[sol[[2;;]])]/Abs[x2[[2;;]]];
sol=x2; mon2++]
,mon2];
AppendTo[solucion,sol];
mon++,{iter}],
mon]];
(* Cálculo de matrices de soluto *)
AppendTo[solucionc,solc];
tiempo={{-1},{0}};
ejec=
Timing[
Monitor[mon=0 (* Paso de tiempo *);
Do[
errorc={};
AppendTo[tiempo,{Last[tiempo][[1]]+dt}];
hant[i_]:=h[[mon+3,i]];
hact[i_]:=h[[mon+4,i]];
pant[i_]:=pot[[mon+3,i]];
pact[i_]:=pot[[mon+4,i]];
xc=LinearSolve[mac,mbc];
solbc=solc;
solc=Join[{-aa},xc,{-aa}];
x2c=LinearSolve[mac,mb2c];
ex2c=Max[(Abs[x2c[[2;;]]]-Abs[xc[[2;;]])]/Abs[x2c[[2;;]]];
solc=Join[{-aa},x2c,{-aa}];
Monitor[mon2=0;
While[ex2c>tol,
AppendTo[errorc,ex2c];
x2c=LinearSolve[mac,mb2c];
ex2c=Max[(Abs[x2c[[2;;]]]-Abs[Most[Rest[solc[[2;;]]]])]/Abs[x2c[[2;;]]];
solc=Join[{-aaa},x2c,{-aaa}]; ++ mon2]
,mon2];
solc = Join[{{bb}, {ccsc}}, MovingMedian[solc[[2 ;; -2]], my],
Table[{cic}, {my - 2}], {{bb}}];

```

```
AppendTo[solucionc,solc];
++mon,{iter}],
mon]]];
```

5° parte

```
(* Archivo datos agua *)
s1=Prepend[solucion[[1;;,1;;,1;;],Partition[Range[0.,prof,prof/ele],1]];
s2=Partition[Flatten[s1],g+2];
Export["Datos de agua.dat",s2];
(* Archivo datos soluto *)
s1c=Prepend[solucionc[[1;;,2;;,g+3]],Partition[Range[0.,prof,prof/ele],1]];
s2c=Partition[Flatten[s1c],g+2];
Export["Datos de soluto.dat",s2c];
```

6° parte

```
(* Gráfico agua *)
pot=Import["Datos de agua.dat"];
pot=Prepend[pot,Range[0.,prof,prof/ele]];
lista1[ts1_]=Transpose[{pot[[Length[pot]]],pot[[1]]}];
 $\theta[\psi_]= (1 + (\text{Abs}[\psi] \alpha)^q) - m[q] (-\theta r + \theta s + \theta r (1 + (\text{Abs}[\psi] \alpha)^q) m[q]);$ 
phi=Flatten[Part[lista1[ts1]][[All,{1}]]];
hum=Table[ $\theta[\psi]$ ,{ $\psi$ ,phi}];
profu=Flatten[Part[lista1[ts1]][[All,{2}]]];
listaagua=Transpose[{hum,profu}];
neumannagua=ListPlot[listaagua,
PlotRange→All,AxesOrigin→{0,0},Joined→True,PlotStyle→Black,ImageSize→Medium,LabelStyle→Directive[17],
FormatType→Times,Frame→{{True,True},{True,True}},AspectRatio→7/10,FrameLabel→{" $\theta$  (m3/m3)", "z (m)"}]
(* Gráfico soluto *)
g=valorg;prof=valorprof ;ele=g+1;
pot=Import["Datos de agua.dat"];
pot=Prepend[pot,Range[0.,prof,prof/ele]];
soluto=Import["Datos de soluto.dat"];
listasoluto=Transpose[{soluto[[Length[soluto]]],pot[[1]]}];
repe=valorrep;
e1=listasoluto[[1;;,1]];
e13=e1;
Do[e4=Join[{e1[[1]]},MovingMedian[e13,3],{e1[[-1]]}];
e5=Join[{e1[[1]]},MovingAverage[e4,3],{e1[[-1]]}];
e13=e5,{repe}];
e6=Transpose[{e5,-listasoluto[[1;;,2]]}];
e7=Transpose[{e5,Reverse[-e6[[All,2]]}];
modelosolutow0=ListPlot[e7,
PlotRange→All,AxesOrigin→{0,0},Joined→True,PlotStyle→Black,ImageSize→Medium,LabelStyle→Directive[19],
FormatType→Times,Frame→{{True,True},{True,True}},AspectRatio→7/10,FrameLabel→{"C/C0", "z (m)"}]
```

8.2 Código computacional (Neumann)

1º parte

```
prof=valorprof ; (* Profundidad del suelo *)
g=valorg ; (* Nodos interiores *)
tol=valortol; (* Tolerancia en el error relativo *)
dt=valordt;(* Paso de tiempo por iteración *)
dz=prof/ele;(* Espacio entre elementos *)
ele=g+1; (* Elementos *)
iter= valoriter;(* Iteraciones *)
ks=valorks;(* Conductividad hidráulica saturada *)
q=valorq;α=valora;m[q_]=1-1/q; (* Parámetros del suelo *)
θr=valorres; (* Humedad residual *)
θs=valorsat;(* Humedad saturada *)
qzs=valorccs; (* Condición de contorno superior agua*)
qzi=valorcci; (* Condición de contorno inferior agua *)
ci=valorci; (* Condición inicial agua *)
ccsc=valorccsc; (* Condición de contorno superior soluto *)
ccic=valorccic; (* Condición de contorno inferior soluto *)
cic=valorcic; (* Condición inicial soluto *)
```

2º parte

(* Capacidad hídrica del suelo *)

```
ch[ψ_,q_,α_,θr_,θs_]:= {
  {\[Piecewise], {
    {(m [q]q α^q (θr-θs)(-1)Abs[ψ]^(q-1))/(1+(α Abs[ψ])^q)^(m[q]+1), ψ<0},
    {1×10-4, ψ≥ 0}
  }}
};
```

(* Conductividad hidráulica no saturada *)

```
k[ψ_,q_,α_,θr_,θs_,ks_]:= {
  {\[Piecewise], {
    {ks (((α Abs[ψ])^q+1)^-m[q])1/2 (1-(1-(((α Abs[ψ])^q+1)^-m[q])^(1/m[q]))^m[q])2,
    ψ≤0},
    {ks, ψ>0}
  }}
};
```

(* Parámetros arbitrarios para el código de agua *)

```
a[i_]= dt/(ch[sa[i],q,α,θr,θs]*2*dz^2);
```

```
c[i_]:= {
  {\[Piecewise], {
    {\[Sqrt](k[sa[i-1],q,α,θr,θs,ks]*k[sa[i],q,α,θr,θs,ks]), 2<i≤ g+3},
    {\[Sqrt](k[(qzi/k[Array[sa,2][[2]],q,α,θr,θs,ks]+1)*2dz+sa[i+1],q,α,θr,θs,ks]*k[sa[i],q,α,θr,θs,
    ks]), i==2}
  }}
};
```

```
b[i_]:= {
  {\[Piecewise], {
    {\[Sqrt](k[sa[i],q,α,θr,θs,ks]*k[sa[i+1],q,α,θr,θs,ks]), 2≤ i<g+3},
```

```

    {\\Sqrt}(k[sa[i],q,α,θr,θs,ks]*k[(-qzs/k[Part[Array[sa,{g+3}],g+3],q,α,θr,θs,ks)-
1)*2dz+sa[i-1],q,α,θr,θs,ks]), i==g+3
    }}
};

```

```

d[i_]=b[i]+c[i];

```

```

e[i_]=b[i]-c[i];

```

```

(* Parámetros arbitrarios para el código de soluto *)

```

```

a0[i_]:=hact[i+1]*a3[i]-hact[i-1]*a3[i]+hant[i+1]*a3[i]-hant[i-1]*a3[i];

```

```

a1[i_]=-k[hact[i],q,α,θr,θs,ks]((hact[i+1]-hact[i-1])/(2dz)+1);

```

```

a2[i_]=(hant[i]*hant[i+1])^1/2;

```

```

a3[i_]=valordif; (* Coeficiente de difusión *)

```

```

a4[i_]=-k[hact[i],q,α,θr,θs,ks]((hact[i+1]-hact[i-1])/(2dz)+1);

```

```

a5[i_]=hact[i];

```

```

a6[i_]=-k[hant[i],q,α,θr,θs,ks]((hant[i+1]-hant[i-1])/(2dz)+1);

```

```

a7[i_]=hant[i];

```

```

a8[i_]=-k[hant[i],q,α,θr,θs,ks]((hant[i+1]-hant[i-1])/(2dz)+1);

```

3° parte

```

(* Sistema de ecuaciones lineales para el agua *)

```

```

ma=Normal[SparseArray[

```

```

{

```

```

    Band[{1,1}]→(Array[d,1,2]*Array[a,1,2]+1),

```

```

    Band[{1,2}]→(Array[b,1,2]+Array[c,1,2])*-Array[a,1,2],

```

```

    Band[{1,1}]→(Prepend[Array[a,{g},3]*Array[d,{g},3]+1,1]),

```

```

    Band[{1,2}]→(Prepend[-Array[a,{g},3]*Array[b,{g},3],0]),

```

```

    Band[{2,1}]→(-Array[a,{g},3]*Array[c,{g},3]),

```

```

    Band[{g+2,g+1}]→(Part[Array[c,{g+3}],g+3]+Part[Array[b,{g+3}],g+3])*-

```

```

    Part[Array[a,{g+3}],g+3],

```

```

    Band[{g+2,g+2}]→(Part[Array[d,{g+3}],g+3]*Part[Array[a,{g+3}],g+3]+1)}, {g+2,g+2}

```

```

];

```

```

MatrixForm[ma];

```

```

cci1=(((Array[a,2]*4dz*Array[c,2])(qzi/k[Array[sa,2][[2]],q,α,θr,θs,ks]+1)+2dz*Array[a,2]*

```

```

Array[e,2])-(Array[sa,2]*(Array[a,2]*Array[d,2]-

```

```

1))+(Part[Array[sa,{3}],3]*(Array[b,2]+Array[c,2])*Array[a,2]))[[2]];

```

```

ccs1=(((Part[Array[a,{g+3}],g+3]*4dz*Part[Array[b,{g+3}],g+3])(-

```

```

qzs/k[Part[Array[sa,{g+3}],g+3],q,α,θr,θs,ks]-

```

```

1)+2dz*Part[Array[a,{g+3}],g+3]*Part[Array[e,{g+3}],g+3])+(Part[Array[sa,{g+2}],g+2]*P

```

```

art[Array[a,{g+3}],g+3]*(Part[Array[c,{g+3}],g+3]+Part[Array[b,{g+3}],g+3]))-

```

```

(Part[Array[sa,{g+3}],g+3]*(Part[Array[d,{g+3}],g+3]*Part[Array[a,{g+3}],g+3]-1));

```

```

as1=(Array[a,{g},3]*2dz*Array[e,{g},3]+Array[a,{g},3]*Array[c,{g},3]*Array[sa,{g},2]-

```

```

(Array[a,{g},3]*Array[d,{g},3]-

```

```

1)*Array[sa,{g},3]+Array[a,{g},3]*Array[b,{g},3]*Array[sa,{g},4]);

```

```

mb=Append[Prepend[Transpose[{as1}],{cci1}],{ccs1}];

```

```

MatrixForm[mb];

```

```

cci2=(((Array[a,2]*4dz*Array[c,2])(qzi/k[Array[sb,2][[2]],q,α,θr,θs,ks]+1)+2dz*Array[a,2]*

```

```

Array[e,2])-(Array[sb,2]*(Array[a,2]*Array[d,2]-

```

```

1))+(Part[Array[sb,{3}],3]*(Array[b,2]+Array[c,2])*Array[a,2]))[[2]];

```

```

ccs2=(((Part[Array[a,{g+3}],g+3]*4dz*Part[Array[b,{g+3}],g+3])(-

```

```

qzs/k[Part[Array[sb,{g+3}],g+3],q,α,θr,θs,ks]-

```

```

1)+2dz*Part[Array[a,{g+3}],g+3]*Part[Array[e,{g+3}],g+3])+(Part[Array[sa,{g+2}],g+2]*P
art[Array[a,{g+3}],g+3]*(Part[Array[c,{g+3}],g+3]+Part[Array[b,{g+3}],g+3]))-
(Part[Array[sb,{g+3}],g+3]*(Part[Array[d,{g+3}],g+3]*Part[Array[a,{g+3}],g+3]-1));
as2=(Array[a,{g},3]*2dz*Array[e,{g},3]+Array[a,{g},3]*Array[c,{g},3]*Array[sb,{g},2]-
(Array[a,{g},3]*Array[d,{g},3]-
1)*Array[sb,{g},3]+Array[a,{g},3]*Array[b,{g},3]*Array[sb,{g},4]);
mb2=Append[Prepend[Transpose[{as2}],{cci2}],{ccs2}];
MatrixForm[mb2];
sa[i_]:=Part[sol,i][[1]];
sb[i_]:=Part[solb,i][[1]];
sainicial=Append[Prepend[Transpose[{Table[ci,{j,ele+1}]}],{-17}],{-17}];
solucion={};
sol=sainicial;
AppendTo[solucion,sol];
tiempo={{-1},{0}};
(* Sistema de ecuaciones lineales para el soluto *)
Clear[sac,sbc,mac,mbc,hant,hact,pact,pant];
rep=valorrep;
vece=valorve;
my=valormy;
w=valorw; (* Coeficiente de amortiguación *)
mac:=Normal[SparseArray[{Band[{1,1}]→Append[Prepend[Array[a5,{g},2]/dt+(Array[a2,{
g},2]*Array[a3,{g},2])/dz2,1],1],
Band[{1,2}]→Prepend[Array[a4,{g},2]/(4dz)-Array[a0,{g},2]/(16dz2)-
(Array[a2,{g},2]*Array[a3,{g},2])/(2dz2),0],
Band[{2,1}]→-(Array[a1,{g},2]/(4dz))+Array[a0,{g},2]/(16dz2)-
(Array[a2,{g},2]*Array[a3,{g},2])/(2dz2)},{g+2,g+2}]];
MatrixForm[mac];
as1c:=(Array[sac,{g},1]*(Array[a6,{g},2]/(4dz)-
Array[a0,{g},2]/(16dz2)+(Array[a2,{g},2]*Array[a3,{g},2])/(2dz2))+Array[sac,{g},2]*(Arra
y[a7,{g},2]/dt-(Array[a2,{g},2]*Array[a3,{g},2])/dz2)+Array[sac,{g},3]*(-
(Array[a8,{g},2]/(4dz))+Array[a0,{g},2]/(16dz2)+(Array[a2,{g},2]*Array[a3,{g},2])/(2dz2))
-w/8 (Array[sac,{g},0]-4Array[sac,{g},1]+6Array[sac,{g},2]-
4Array[sac,{g},3]+Array[sac,{g},4]));
mbc=Append[Prepend[Transpose[{as1c}],{ccsc}],{ccic}];
sac[0]=sac[1];
sac[Length[mbc]+1]=sac[Length[mbc]];
MatrixForm[mbc];
as2c:=(Array[sbc,{g},1]*(Array[a6,{g},2]/(4dz)-
Array[a0,{g},2]/(16dz2)+(Array[a2,{g},2]*Array[a3,{g},2])/(2dz2))+Array[sbc,{g},2]*(Arra
y[a7,{g},2]/dt-(Array[a2,{g},2]*Array[a3,{g},2])/dz2)+Array[sbc,{g},3]*(-
(Array[a8,{g},2]/(4dz))+Array[a0,{g},2]/(16dz2)+(Array[a2,{g},2]*Array[a3,{g},2])/(2dz2))
-w/8 (Array[sbc,{g},0]-4Array[sbc,{g},1]+6Array[sbc,{g},2]-
4Array[sbc,{g},3]+Array[sbc,{g},4]));
mb2c=Append[Prepend[Transpose[{as2c}],{ccsc}],{ccic}];
sbc[0]=sbc[1];
sbc[Length[mb2c]+1]=sbc[Length[mb2c]];
MatrixForm[mb2c];

```

```
(* Conversión potencial matricial a humedad *)
 $\theta[\psi\_q]:=(1+(\text{Abs}[\psi] \alpha)^q)-m[q] (-\theta r+\theta s+\theta r (1+(\text{Abs}[\psi] \alpha)^q)m[q]);$ 
h= $\theta$ [pot];
sainicialc=Append[Append[Prepend[Transpose[{ Table[cic,{j,ele}]}],{-17}],{ccic}],{-17}];
solucionc={ };
solc=sainicialc;
sac[i_]:=Part[solc,i+1][[1]];
sbc[i_]:=Part[solbc,i+1][[1]];
```

4º parte

(* Cálculo de matrices de agua *)

```
ejec=
Timing[
Monitor[mon=0;
Do[error={ };
AppendTo[tiempo,{Last[tiempo][[1]]+dt}];
x=LinearSolve[ma,mb];
solb=sol;
sol=Join[{ {-15} },x,{ {-15} }];
x2=LinearSolve[ma,mb2];
ex2=Max[(Abs[x2[[2;]]]-Abs[x[[2;]])/Abs[x2[[2;]]];
sol=Join[{ {-15} },x2,{ {-15} }];
Monitor[mon2=0;
While[ex2>tol,
AppendTo[error,ex2];
x2=LinearSolve[ma,mb2];
ex2=Max[(Abs[x2[[2;]]]-Abs[Most[Rest[sol[[2;]]]])/Abs[x2[[2;]]];
sol=Join[{ {-1000} },x2,{ {-10000} }]; mon2++
,mon2];
AppendTo[solucion,sol];
mon++,{ iter },
mon]];
```

(* Cálculo de matrices de soluto *)

```
AppendTo[solucionc,solc];
tiempo={{ -1 },{ 0 }];
ejec=
Timing[
Monitor[mon=0 (* Paso de tiempo *);
Do[
errorc={ };
AppendTo[tiempo,{Last[tiempo][[1]]+dt}];
hant[i_]:=h[[mon+2,i]];
hact[i_]:=h[[mon+3,i]];
pant[i_]:=pot[[mon+2,i]];
pact[i_]:=pot[[mon+3,i]];
xc=LinearSolve[mac,mbc];
solbc=solc;
solc=Join[{ {-150} },xc,{ {-50} }];
x2c=LinearSolve[mac,mb2c];
```

```

ex2c=Max[(Abs[x2c[[2;;]]]-Abs[xc[[2;;]])/Abs[x2c[[2;;]]];
solc=Join[{{-150}},x2c,{{-50}}];
Monitor[mon2=0;
While[ex2c>tol,
AppendTo[errorc,ex2c];
x2c=LinearSolve[mac,mb2c];
ex2c=Max[(Abs[x2c[[2;;]]]-Abs[Most[Rest[solc[[2;;]]]])/Abs[x2c[[2;;]]];
solc=Join[{{-10}},x2c,{{-10}}]; mon2++
,mon2];
solc=Join[{{bb}},{ccsc}},MovingMedian[solc[[2;;-2]],my],Table[{{ccic}},{my-2}],{{bb}}];
AppendTo[solucionc,solc];
mon++,{iter}],
mon]];

```

5º parte

```

(* Archivo datos agua *)
s1=Prepend[solucion[[1;;,1;;]],Partition[Range[0.,prof,prof/ele],1]];
s2=Partition[Flatten[s1],g+2];
Export["Datos de agua.dat",s2];
(* Archivo datos soluto *)
s1c=Prepend[solucionc[[1;;,2;;,g+3]],Partition[Range[0.,prof,prof/ele],1]];
s2c=Partition[Flatten[s1c],g+2];
Export["Datos de soluto.dat",s2c];

```

6º parte

```

(* Gráfico agua *)
pot=Import["Datos de agua.dat"];
pot=Prepend[pot,Range[0.,prof,prof/ele]];
lista1[ts1_]=Transpose[{{pot[[Length[pot]]],pot[[1]]}}];
 $\theta[\psi_]:= (1+(Abs[\psi] \alpha)^q)-m[q] (-\theta r+\theta s+\theta r (1+(Abs[\psi] \alpha)^q)m[q]);$ 
phi=Flatten[Part[lista1[ts1]][[All,{1}]]];
hum=Table[ $\theta[\psi]$ ,{ $\psi$ ,phi}];
profu=Flatten[Part[lista1[ts1]][[All,{2}]]];
listaagua=Transpose[{{hum,profu}}];
neumannagua=ListPlot[listaagua,
PlotRange→All,AxesOrigin→{0,0},Joined→True,PlotStyle→Black,ImageSize→Medium,LabelStyle→Directive[17],
FormatType→Times,Frame→{{True,True},{True,True}},AspectRatio→7/10,FrameLabel→{" $\theta$  (m3/m3)","z (m)"}]
(* Gráfico soluto *)
g=valorg;prof=valorprof;ele=g+1;
pot=Import["Datos de agua.dat"];
pot=Prepend[pot,Range[0.,prof,prof/ele]];
soluto=Import["Datos de soluto.dat"];
listasoluto=Transpose[{{soluto[[Length[soluto]]],pot[[1]]}}];
repe=valorrep;
e1=listasoluto[[1;;,1]];
e13=e1;
Do[e4=Join[{{e1[[1]]}},MovingMedian[e13,3],{e1[[-1]]}];
e5=Join[{{e1[[1]]}},MovingAverage[e4,3],{e1[[-1]]}];

```

```
e13=e5,{repe}];
e6=Transpose[{e5,-listasoluto[[1;:,2]]}];
e7=Transpose[{e5,Reverse[-e6[[All,2]]]}];
modelosolutow0=ListPlot[e7,
PlotRange→All,AxesOrigin→{0,0},Joined→True,PlotStyle→Black,ImageSize→Medium,LabelStyle→Directive[19],
FormatType→Times,Frame→{{True,True},{True,True}},AspectRatio→7/10,FrameLabel→{"C/C0","z (m)"}]
```


El proyecto dentro del cual se desarrolló la presente Tesis Doctoral fue financiado con recursos propios del doctorando y realizado en las instalaciones del Instituto de Materiales de Misiones (IMAM) - <http://www.imam-conicet.gob.ar/>