CUADERNO DE CÁLCULOS FINANCIEROS Y NOCIONES DE GESTIÓN BANCARIA

Prof.: Ángel Eduardo de la Vega
Prof.: Gabriela Stefania Kagerer

Colección: Cuadernos de Cátedra

Editorial Universitaria

CUADERNO DE CÁLCULOS FINANCIEROS Y NOCIONES DE GESTIÓN BANCARIA

Prof.: Ángel Eduardo de la Vega
Prof.: Gabriela Stefania Kagerer

Facultad de Humanidades y Ciencias Sociales
Universidad Nacional de Misiones
(UNaM)

Editorial Universitaria
Universidad Nacional de Misiones

Editorial Universitaria
Universidad Nacional de Misiones

Comandante José Félix Bogado 2160
Tel-Fax: 03764-428601

Correos electrónicos:
direccion@editorial.unam.edu.ar

Página WEB: www.editorial.unam.edu.ar

Colección: Cuadernos de Cátedra
Coordinación de la edición: Claudio O. Zalazar
Preparación para la WEB: Francisco A. Sánchez

Kagerer, Gabriela Stefania
Cuaderno de cálculos financieros y nociones de gestión bancaria / Gabriela Stefania Kagerer; Angel Eduardo De la Vega. - 1a edición para el alumno - Posadas : EDUNAM - Editorial Universitaria de la Universidad Nacional de Misiones, 2017.
Libro digital, PDF - (Cuadernos de cátedra)

Archivo Digital: descarga
ISBN 978-950-579-435-5

1. Análisis de Costos. 2. Inflación. 3. Educación Superior. I. De la Vega, Angel Eduardo II. Título
CDD 332.1

ISBN: 978-950-579-435-5
Impreso en Argentina

Contenido

INTRODUCCION

La estructura de la Economía se desarrolla sobre el concepto de INTERES y del CREDITO. Por ello se debe estudiar las relaciones numéricas y matemáticas que dan origen los problemas en que intervengan el factor interés y el factor crédito.

La mayoría de los problemas financieros son de pensar, es decir, de utilizar la lógica común sin necesidad de aparatosos desarrollos.

La traducción de esa lógica a ecuaciones supone un ejercicio mental imprescindible para quien quiera encontrar una aplicabilidad real a los modelos matemáticos que se le presentan.

La mayoría de los problemas de pensar no son difíciles si se hacen dos cosas:

a) Elaborar un diagrama temporal, para visualizar el problema y

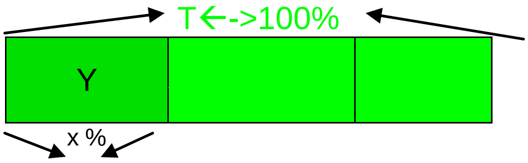
b) emplear una ecuación de valor, para hallar su solución.

La Matemática Financiera es una técnica de criterio que ha de salvar la rigidez formularia o la aridez de los números, que no siempre pueden adecuarse a los problemas económicos.

MATEMATICA FINANCIERA

Porcentaje: Se llama porcentaje o por ciento de una cantidad con respecto a otra a la razón o cociente entre la primera y la segunda, expresada en centésimos.
Ejemplo: El porcentaje de 8 con respecto a 20 es
8/20 = 0,40 en tanto por uno, o multiplicando por 100 es el 40%.

$$x\,\% = \frac{Y \times 100\,\%}{T}$$



x % : Porcentaje es un valor respecto de un 100%.
Y: Es un valor o tanto por ciento de un Total respecto a un porcentaje.
T: Es un valor total de cosas objetos o sujetos representado en un 100 %

<u>Determinar una cantidad que sea un tanto por ciento de otra cantidad dada</u>
Regla: *Para calcular directamente una cantidad que sea el porcentaje de otra dada, basta multiplicar dicho **(porcentaje)** por la cantidad dada*.
Ejemplo: Hallar el 12 % de 280
Téngase en cuenta que 12 % = 0,12; luego 12 % de 280 = 0,12 x 289 = 33,60

$$Y = \frac{T \times x\,\%}{100\%}$$

<u>Determinar una cantidad conociendo un porcentaje de la misma.</u>
Regla: *Para calcular el número cuyo porcentaje se conoce basta dividir la cantidad dada (Tanto por ciento) por dicho porcentaje*
Ejemplo: Calcular el número cuyo 22 % es 400

400/0,22 = 1.818,18

$$T = \frac{Y \times 100\,\%}{x\,\%}$$

Bonificación y Recargo

Se llama <u>bonificación</u> o <u>rebaja</u> a la disminución que sobre el precio de venta de una mercadería hace el vendedor, en tanto que <u>recargo</u> es el aumento que se hace sobre el precio de venta de un artículo
La bonificación o rebaja y el recargo se fijan generalmente como porcentaje del precio de la mercadería
Regla: *Para obtener un numero aumentado en un tanto por ciento del mismo basta multiplicarlo por la suma de uno (1) mas ese porcentaje en tanto por uno, y para disminuirlo en esa misma cantidad basta multiplicarlo por la diferencia de uno (1) menos el tanto por ciento fijado*
Ejemplo: a) Aumentar el 10 % sobre $ 500
$ 500(1+0,10) = $ 550.-
b) Aumentar el 5% sobre $ 92.
$ 92(1+0,05) = $ 96,60

c) Rebajar el 12% sobre el precio de $200.

$ 200(1-0,12) = $ 176

d) Rebajar el 6% sobre el precio de $ 600.

$ 600(1-0,06) = $ 564.

EJERCICIOS

1°) x%=¿?	**2°)** x%= 2,50%	**3°)** Y= 545 $	**4°)** x%= 12%	**5°)** T= 12.100 $
T= 1.250 $	T= 5.000 $	x% = 15%	T= 400 $	Y= 2.100
Y= 125 $	Y= ¿?	T= ¿?	Y= ¿?	x%= ¿?
6°) x%= 21%	**7°)** T= 6.390 $	**8°)** x%= ¿?	**9°)** T= ¿?	**10°)** Y= ¿?
Y= 21.000 $	x%= 30%	T= 7.000 $	x%= 10,50%	x%= 14%
T= ¿?	Y= ¿?	Y= 140 $	Y= 8.550 $	T= 10.000 $
11°) x%= 10,5%	**12°)** T= 62.390 $	**13°)** x%= ¿?	**14°)** T= ¿?	**15°)** Y= ¿?
Y= 10.500 $	x%= 20%	T= 70.000 $	x%= 1,50%	x%= 16,5%
T= ¿?	Y= ¿?	Y= 1400 $	Y= 855.000 $	T= 14.200 $

OPERACIONES FINANCIERAS SIMPLES Y COMPLEJAS

Definición:

Se denomina operación financiera toda acción que produzca –por desplazamiento en el tiempo- una variación cuantitativa del capital. Se dice entonces que dicho capital está sometido a un régimen financiero, constituyendo el estudio de sus leyes y la valuación de sus efectos cuantitativos, el objetivo del cálculo financiero.

En la vida real, la operación financiera se muestra como el cambio no simultáneo de bienes económicos, lo que lleva implícito la equivalencia entre el valor de los mismos respecto a un punto de referencia.

Clasificación:

Una primera clasificación de las operaciones financieras puede hacerse por su duración. Según sea inferior o superior a un año, se denomina de corto o largo plazo.

Si lo deseamos, podemos determinar la variación cuantitativa de un capital: Se trata de una operación financiera simple; y será compleja cuando se estudie la transformación de una sucesión de capitales en otro u otros, por desplazamiento en el tiempo, de sus elementos- ejemplo: Todos los créditos amortizables, hipotecarios, prendarios, etc.; la complejidad no es conceptual sino técnica.

Debemos tener presente que ciertas operaciones, idénticas en sus condiciones intrínsecas, pueden hallarse entre las simples, o entre las complejas, según las modalidades.

Para que puedan realizarse estas operaciones financieras complejas, se debe verificar el principio de equivalencia financiera, o sea, que en el momento del cálculo el capital o capitales que se sustituyen tiene que tener el mismo valor que su transformado o transformados, respectivamente. No tiene sentido hablar de equivalencia financiera sin fijar la ley y el punto de referencia.

Capitalización:

Todo capital sometido a un régimen de capitalización sufre una variación de su valor con el transcurso del tiempo, por lo tanto el capital, como dijimos, debe ser considerado como una función del tiempo (n), función esta que constituye la ley de variación del valor del capital.

La capitalización es una suma disponible de bienes, servicios o de moneda en un momento determinado.

Al capital se lo identifica en la práctica con la letra “**C**”, siendo “**C**” una constante.

El tiempo, la unidad de medida es el año, sin que esto signifique que no se pueda considerar cualquier otra unidad de tiempo. Al número de periodos de capitalización lo identificamos con la letra “**n**”.

Por período de capitalización entendemos la diferencia constante entre dos momentos sucesivos de la ley de capitalización, momentos que, en general, corresponden al instante en que los intereses se separan (interés simple) o acumulan (interés compuesto).

Interés:

En una operación comercial se denomina interés al beneficio que recibe una de las partes por haber dado en préstamo a la otra una determinada suma de dinero, durante un cierto tiempo.
El interés que se recibe por un capital de x pesos en cada período de tiempo recibe el nombre de razón o tanto por ciento.
Si dividimos la razón por 100 tenemos la tasa en tanto por uno.

$$i = \frac{R}{100} \quad \text{(tanto por uno)}$$

Monto:

Es la suma del capital "C_o" más el interés que el mismo produce. Es la diferencia de valor de capitales presentes y futuros, esta diferencia debe ser compensatoria. Es decir lo que usualmente se denomina tasa de interés no solo comprende "El precio por el alquiler del capital"; sino que está influenciada por diversos factores como ser:

	1. Interés propiamente dicho
Tasa de interés	2. Costo de las operaciones financieras
(Tiene 4 componentes	3. El Riesgo: (difícil de medir por los cambios financieros)
Identificadas)	4. Tasa real
	5. Devaluación monetaria

En la práctica se utilizan diferentes coeficientes que no se ajustan estrictamente a la certificación dada, y que se las menciona como "Tasas de interés".
Asimismo, con diversos aditamentos se usan conceptos que dan a la misma una definición económica y financiera.
Así tenemos conceptos como: efectiva, nominal, vencida, adelantada, proporcional, equivalente, real, etc.
En el desarrollo de los próximos capítulos se irán definiendo cada una de ellas.
Aclarando, la utilización de las tasas en entidades financieras (incluyendo bancos) pueden clasificarse en:
Activas: que es la que perciben las entidades por prestar dinero-
Pasivas: que es la que pagan las entidades a los depositantes de dinero.

METODOS DE CÁLCULO

La tasa de interés del período del préstamo:
La tasa de interés para un período dado, cualquiera haya sido la forma convencional utilizada para el cálculo, resulta siempre de relacionar: la diferencia entre lo realmente devuelto en el préstamo y lo realmente prestado, con esta última cantidad. Así:

$$\text{Tasa del período} = \frac{\text{Realmente devuelto} - \text{Realmente prestado}}{\text{Realmente prestado}}$$

$$\text{Tasa del período} = \frac{\text{Realmente devuelto}}{\text{Realmente prestado}} - 1$$

Ejemplo: prestamos $ 1.000.000.- y a los tres meses nos devuelven $ 1.230.000.-, la tasa del período del préstamo (trimestre) resulta:

$ 1.230.000 - $ 1.000.000 $ 230.000

$$\text{Tasa trimestral} = \frac{\text{------}}{\$\ 1.000.000} = \frac{\text{------}}{\$\ 1.000.000} - 1 = 0{,}23 \text{ trimestral}$$

En la técnica de nuestra materia por razones de simplicidad en la notación expresamos la tasa referida a un peso (tanto por uno) en lugar del porcentaje, que solo se conserva para el enunciado del problema y la interpretación de la solución.

Entre los métodos más comunes para calcular el interés están los llamados de interés simple, de interés compuesto y el descuento comercial o bancario.

INTERES SIMPLE

Préstamo a interés simple (I) es una operación comercial que significa ceder un capital monetario, por un cierto plazo, con la obligación de que se a devuelto al cabo de ese tiempo, pagando, además, un alquiler, llamado interés.

Capital (C_0) Toda cantidad invertida susceptible de sufrir una variación cuantitativa.

Tasa porcentual (R.) es el interés producido por $ 100 en un año.

Tasa unitaria (i) es el interés producido por $ 1 en un año.

Tiempo (T) ó (n.) es el periodo por el cual se coloca el capital, expresado en años, meses, días, etc.

Comparando con lo dado anteriormente. Interés simple es un Tanto por ciento (valor), obtenido de un capital al aplicar un porcentaje (%), visto anteriormente.

$$Y = \frac{T \times x\,\%}{100\%}$$

Aplicando los símbolos de interés propiamente dicho y haciendo **T** (Total) = $\mathbf{C_o}$ (Capital), Y (Tanto por ciento) = **I** (Interés), **x%** (porcentaje)= **R%** (Razón o porcentaje), y siendo el tiempo (**T**= 1), este caso es directo en el momento:

$$I = \frac{C_o \times R\,\%}{100\%}$$

Cuando existe un tiempo (**T**) de colocación o préstamo de un capital ($\mathbf{C_o}$), se aplica una formula obtenida por la regla de 3 compuesta:

$$I = \frac{C_o \times R\,\% \times T}{100\% \times ut}$$

<u>Nota:</u> El interés simple se calcula en periodos menores al año. La **ut** (unidad de tiempo), antes de la reforma financiera, se tomaba al año equivalente a 360 días, después de la reforma financiera a partir de 1.977, establece que deben relacionarse todas las operaciones a 365 días.

Nomenclaturas de las variables:

- **I:** Interés, valor en pesos de un porcentaje aplicado a un capital.
- $\mathbf{C_o}$**:** Capital, valor en pesos o monedas extranjeras.
- **R%:** Razón, similar a alícuotas, porcentajes, tasas.
- **T:** Tiempo en que se mantiene un capital (prestado o depositado).
- **ut:** Unidad de tiempo que debe ser homogéneo al Tiempo) y en función a R%-

Ej. Si R% es anual, la unidad de tiempo (ut) debe estar expresado en años (homogéneo) o su equivalente en tiempos subperiódicos (12 meses, 2 semestres, 3 cuatrimestres, 4 trimestres, 6 bimestres, 365 días), en función a R%, y el tiempo (T) homogéneo a la (ut). En el caso de interés compuesto, tanto el porcentaje como el tiempo deben estar expresados a la capitalización que se designe.

Homogéneo	Homogéneo	Homogéneo
R%= 12 % Anual	R%= 1% Mensual	R%= 12 % Anual
T= 30 días	T= 1 Mes	T= 1 Mes
ut= 365 días	ut= 1 Mes	ut= 12 Meses

De la formula de interés simple:

$$I = \frac{C \times R\,\% \times T}{100\% \times ut}$$

Si de la formula anterior expresamos la razón:

$$\frac{R\%}{100\%} = i \quad \text{(Tasa en tanto por 1)} \qquad \text{Ej.} \quad \frac{12\%\ \text{Anual}}{100\%} = 0{,}12 \ \text{anual } (i)$$

y

$$\frac{T}{ut} = n \quad \text{(Es el periodo)} \qquad \text{Ej.} \quad \frac{1\ \text{mes}}{12\ \text{meses}} = 0{,}083 \ \text{años } (n)$$

Si reemplazamos estas nuevas variables en la fórmula de interés obtenemos.

$$I = C_o.i.n$$

Hallar la fórmula derivada para cada caso, aplicando la propiedad recíproca, dando C.i.n=I
Y realizando los pasajes correspondientes miembro a miembro

Hallar el "C_o"	Hallar el "i"	Hallar el "n"
$C_o.i.n = I$	$C_o.i.n = I$	$C_o.i.n = I$
$C_o = \frac{I}{i.n}$	$i = \frac{I}{C_o.n}$	$n = \frac{I}{C_o.i}$

EJERCICIOS:

1) C = \$ 5.000.-	**2)** C = \$ 5.000.-	**3)** C = \$ 5.000.-	**4)** C = \$ 5.000.-
i = 0,03 mensual	i = 0,36 anual	i = 0,36 anual	i = 0,09 trimestral
n = 90 días	n = 3 meses	n = 90 días	n = 3 meses
I = ¿?	I = ¿?	I = ¿?	I = ¿?

EJERCICIOS:

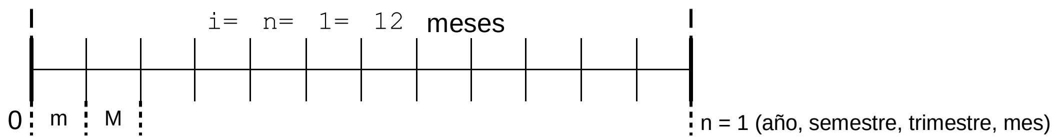
5) C = \$ 6.000.-	**6)** C = \$ 6.500.-	**7)** C = ¿?	**8)** C = \$ 4.000.-
i = 0,06 trimestral	i = ¿?	i = 0,24 anual	i = 0,06 trimestral
n = ¿?	n = 120 días	n = 2 trimestres	n = 6 meses
I = \$ 560.-	I = \$ 600.-	I = \$ 4.500.-	I = ¿?
9) C = \$ 6.000.-	**10)** C = \$ 6.500.-	**11)** C = ¿?	**12)** C = \$ 4.000.-
i = 0,12 semestral	i = ¿?	i = 0,14 semestral	i = ¿?
n = ¿?	n = 4 meses	n = 2 cuatrimestres	n = 2 trimestres
I = \$ 560.-	I = \$ 600.-	I = \$ 450.-	I = \$ 480.-

REDUCCIÓN DE TIEMPO

Reducción de tiempo "Mayor a Menor":
Se multiplica por la unidad del menor.
12 años a horas:
12 años x 12 meses = 144 meses

144 meses x 4 semanas = 576 semanas
576 semanas x 7 días = 4.032 días
4.032 días x 24 hs. = 96.768 horas
<u>Reducción de tiempo "Menor a Mayor":</u>
Se divide por la unidad del mayor
600.000 segundos a días:
600.000": 60" = $10.000^{mtos.}$
$10.000^{mtos.}$: $60^{mtos.}$ = 166,66 horas
166,66 horas : 24 horas = 6,94 días <> 7 días
Los 0,94 días se puede pasar a horas como se explica en la reducción de tiempo "Mayor a Menor".
0,9444 días x 24 horas = 22,566 horas

TASAS PROPORCIONALES



Según el valor de n (período) la tasa "i" va a ser definida al período consignado (año, semestre, trimestre, etc.). Normalmente se considera al período (n) igual a ***un año,*** cuya tasa periódica anual se simboliza con (i), llamada Tasa Nominal Anual (T.N.A.).
Si los cálculos de interés se realizan en tiempos menores al año, estos serían ***subperíodos*** que se simboliza con "m", en consecuencia la tasa periódica (i), se transforma en una ***tasa proporcional***, que es aquella que resulta de dividir la tasa periódica (i), por el numero de subperíodos que tiene el año: (m). A la tasa periódica (i), corresponde entonces la proporcional (i/m). Es decir a la tasa 8% anual, le hallamos la tasa semestral, tasa trimestral y tasa mensual de la siguiente manera:

Para el año: i = 0,08 anual
Para el semestre: i/m = 0,08/2 = 0,04 semestral
Para el trimestre: i/m = 0,08/4 = 0,02 trimestral
Para el mes: i/m = 0,08/12 = 0,006666... mensual

Si dividimos la tasa periódica anual (i), en subperíodos meses obtenemos las tasas proporcionales subperiódicas:

Si m = 12 meses = i/m = tasa mensual
Si m = 6 meses = i/m = tasa bimestral
Si m = 4 meses = i/m = tasa trimestral
Si m = 3 meses = i/m = tasa cuatrimestral
Si m = 2 meses = i/m = tasa semestral
Si m = 1 mes = i = tasa anual

Si $i \cdot n = i \cdot \frac{T}{ut}$ (Tiempo que se utiliza, homogéneo a ut) Ej. 24% anual $\cdot \frac{6 \text{ meses}}{12 \text{ meses}}$ = 12% semest.
(u t: unidad de tiempo de la tasa)
Que es una tasa proporcional semestral.

Entonces: $\mathbf{i \cdot \frac{T}{ut} = i/m}$ Si **i.n = i/m** implica que **n = 1/m** luego **m.n = 1** (periodo)

n es inversa de m ===> **n = 1/m ===>** $\mathbf{\frac{T}{ut} = \frac{1}{\frac{ut}{T}}}$

Periódica **a** proporcional

$$i.n \Rightarrow i.\frac{T}{ut} = \frac{i}{m}$$

Subperiódica **a** periódica

$$\frac{i}{m} \Rightarrow \frac{i}{m}.\frac{ut}{T} = i$$

PASAR UNA TASA PERIODICA i A UNA TASA SUBPERIODICA i/m

$i/m = i . T/ut$ 34% anual i a trimestral i/m

$$i/m = 34\%\ \text{anual}.\ \frac{1\ \text{trim.}}{4\ \text{trim.}} = 8{,}5\%\ \text{trimestral}$$

Tasa exacta tomando el año de 365 días

$$i/m = 34\%\ \text{anual}.\ \frac{90\ \text{días}}{365\ \text{días}} = 8{,}38\%\ \text{trimestral}$$

PASAR UNA TASA SUBPERIODICA i/m A UNA TASA PERIODICA i

$i = i/m . ut/T$ 8,5% trimestral i/m a anual i

$$i = 8{,}5\%\ \text{trimestral}.\ \frac{4\ \text{trim.}}{1\ \text{trim.}} = 34\%\ \text{anual}$$

Tasa exacta tomando el año de 365 días

$$i = 8{,}38\%\ \text{trimestral}.\ \frac{365\ \text{días}}{90\ \text{días}} = 34\%\ \text{anual}$$

MONTO A INTERES SIMPLE

El monto es un capital final C_n donde está incluido un interés, obtenido por una tasa en un cierto tiempo de un capital original C_o, es decir:

$C_n = C_o + I$ (1) Si **$I = C_o.i.n$ (2)** y reemplazamos (2) en (1) tenemos **$C_n = C_o + C_o.i.n$**

Sacando factor común C_o en el segundo miembro nos queda la siguiente fórmula de monto.

$$C_n = C_o\,(1 + i.n) \quad \text{(Fórmula de Monto Simple)}$$

FORMULAS DERIVADAS

HALLAR "C_o"

De la formula de monto simple, aplicamos la propiedad reciproca de la igualdad:

$C_o.(1 + i.n) = C_n$ y despejando el capital C_o, realizando pasaje de factores tenemos:

$$C_o = \frac{C_n}{(1+i.n)}$$

HALLAR "i"

$$C_o.(1 + i.n) = C_n$$

$$1 + i.n = \frac{C_n}{C_o} \Rightarrow i.n = \frac{C_n}{Co} - 1 \qquad i = \frac{\frac{C_n}{C_o} - 1}{n}$$

$$i = \frac{\frac{C_n - C_o}{C_o}}{n} \qquad i = \frac{C_n - C_o}{C_o\ n}$$

HALLAR "n"

$$C_o.(1 + i.n) = C_n$$

$$1 + i.n = \frac{C_n}{C_o} \Rightarrow i.n = \frac{C_n}{Co} - 1 \qquad n = \frac{\frac{C_n}{C_o} - 1}{i}$$

$$n = \frac{\frac{C_n - C_o}{C_o}}{i} \qquad n = \frac{C_n - C_o}{C_o\ i}$$

PROBLEMAS PARA RESOLVER

TRABAJO PRACTICO Nº 1

A) Monto a Interés simple y fórmulas derivadas:

1- El 15 de abril se colocan $ 32.000.- al 21% anual. Determine el total retirado el 15 de diciembre.

2- El 20 de mayo se efectuó un depósito de $ 25.000.- en una institución de crédito que paga el 24% anual de intereses. El día 28 de octubre se retira el capital depositado con sus respectivos intereses. A cuanto asciende esa suma.

3- El 15 de abril se colocan $ 20.000.- al 18% anual hasta el día 15 de octubre, cuando se empieza a abonar el 15% anual. ¿Cuál es el saldo de la cuenta el 15 de marzo del año siguiente?

4- ¿Cuál es el capital que en 10 meses produce un monto de $ 90.000.- si se colocó al 12% semestral?

5- ¿Calcule el capital que en 14,5 meses produjo un monto de $ 70.000.- si se colocó al 14% anual?

6- ¿Cuál es el capital que en 8 meses y 10 días produce un monto si estuvo colocado al 11% anual?

7- ¿Cuál es el capital que dio origen a $ 10.000 en 4 meses y 20 días al 20% anual de interés?

8- Un capital colocado al 20% anual produce, en 9 meses, $ 600 más de monto que si se lo coloca al 24% anual en 150 días. ¿Cuál es dicho capital?

9- Una computadora cuesta $ 1.800 al contado. Un comprador conviene en pagar $ 800 al contado y el resto a 60 días con un recargo del 7% sobre el precio de contado. ¿Cuánto debe abonar a los 60 días?

10- Un capital colocado al 24% anual durante 3 semestres produce un monto determinado. Si el capital fuese superior en $ 15.000 y se colocase durante un año al 20% anual, se obtendría un monto equivalente al duplo del monto anterior. ¿Cual es ese capital?

11- ¿Cuál es la tasa de interés semestral que en 1,5 años hace que $ 12.000 se convierta en $ 18.000?

12- ¿Cuál es la tasa semestral de interés que en 15 meses transforma a $ 35.000 en $ 45.000?

13- ¿A que tasa anual de interés fue colocado $ 42.000 para que en 15 meses se conviertan en $ 53.000?

14- Calcule la tasa de interés anual a la que estuvo colocado un capital que en 9 meses produjo $ 30.000 de interés

15- ¿De cuánto tiempo se disponen para reunir $ 29.500 si se tienen $ 25.000 que ganan 3% bimestral?

16- El 8 de marzo se depositan $ 16.000 que recibirán anualmente un rédito del 20% anual. ¿Cuánto se retirará el día 30 de septiembre, si el 18 de abril se han agregado $12.000 más en la cuenta?

17- Tres capitales suman $ 90.000.-. El primero es un 25% superior al segundo y este, colocado a interés simple al 8,75% anual produjo en 7 meses tanto como el tercero colocado al 7% anual en 10 meses. Calcular el importe de los tres capitales.

18- Una persona adquirió una cocina en $ 2.560. Realizó una entrega de $ 1.200 y acordó pagar el saldo en un pago único dentro de 3 meses con un incremento de $ 240. ¿Qué tasa mensual y anual de interés pagó el comprador?

19- A) Calcular el interés producido por $ 7.500 colocado al 22% semestral durante 10 meses.
B) Calcular el monto originado en dicho tiempo-

20- El 3 de febrero de 2.014 se colocaron en una institución $ 4.000 que abona el 24% anual.
A) Calcular el interés producido.
B) Calcular el monto originado.
C) ¿Cuánto tiempo debería permanecer depositado dicho capital si se quiere obtener un beneficio de 10% del capital original?

21- ¿Cuánto tiempo debe permanecer depositado un capital, al 7% anual para que origine un beneficio igual a la cuarta parte del mismo?

22- ¿Cuál es la tasa de interés que hace que $ 4.000 produzca $ 200 en 2 meses?

23- El 10 de enero de 2.014 se colocaron $ 1.000 en una institución que abona el 36% anual, el 8 de marzo se agregaron $ 500 más a la cuenta. A) ¿Cuánto se retira el día de la fecha? B) ¿Hasta que fecha debería permanecer depositado si se quisiera retirar $ 2.000?

24- El 8 de marzo se depositaron $ 16.000 que recibirán anualmente un rédito del 10%. ¿Cuánto se retira el 30 septiembre, si el 10 de junio se han agregado $ 10.000 más a la cuenta?

25- El 29/09/13, se depositaron $ 5.000 en una institución que abona el 7% anual, el 15/07/14, la tasa asciende al 8,5% anual hasta el día de la fecha. ¿De cuánto dinero se dispone hoy?

26- Juan realiza los siguientes depósitos: el 03/05/13, $ 200, el 05/08/13 $ 500 y el 02/01/14, $ 300, en una cuenta corriente que abona el 5,5% anual de interés. A) ¿Cuánto dinero tiene en la cuenta el día de la fecha? B) ¿Cuál es el saldo al día de la fecha, si el 4 de febrero de 2.014 se han retirado $ 800?

27- Por una computadora que cuesta U$s 1.800 de contado, se ofrece el siguiente plan de venta: una entrega de U$s 800 y U$s 700 a los 30 días. ¿Cuánto debe abonarse a los 60 días si se cobra el 5% mensual de interés?

28- Un capital de $ 1.500 colocado en plazo fijo a una tasa del 15% anual en un tiempo de 1 trimestre. ¿Qué interés se obtuvo y el monto?

29- ¿Cuál es el capital que dio un monto de $ 10,000 en 3 meses a una tasa del 12% semestral, y el interés obtenido?

INTERES COMPUESTO

En el interés compuesto, los intereses se calculan sobre el monto reunido hasta el final del periodo anterior, y dado que el monto es la acumulación de capital e interés resulta que en el régimen de capitalización a interés compuesto los intereses se calculan no solo sobre el capital inicial, sino que también se computan los intereses producidos por dicho capital en los períodos anteriores. Luego en el régimen de interés compuesto, los intereses producen interés.

MONTO A INTERES COMPUESTO

DEDUCCION DE LA FORMULA FUNDAMENTAL

Período n	Capital al inicio del período C_o	Interés del período $i.C_o$	Capital al final del período o monto $C_n = C_o + I$)
1	1	$1.i$	$(1 + i)$
2	$(1+i)$	$(1+i).i$	$(1+i)+(1+i).i=(1+i).(1+i)=(1+i)^2$
3	$(1+i)^2$	$(1+i)^2.i$	$(1+i)^2+(1+i)^2.i=(1+i)^2.(1+i)=(1+i)^3$
4	$(1+i)^3$	$(1+i)^3.i$	$(1+i)^3+(1+i)^3.i=(1+i)^3.(1+i)=(1+i)^4$
"	"	"	"
"	"	"	"
n	$(1+i)^{n-1}$	$(1+i)^{n-1}.i$	$(1+i)^{n-1}+(1+i)^{n-1}.i=(1+i)^{n-1}.(1+i)=(1+i)^n$
Fórmula del Monto a Int. Compuesto			$C_n=C_o(1+i)^n$

Primer período: El capital original se toma por **$ 1**, el interés del período es **i**, ya que la tasa **i** ha sido definida como el interés de $ 1, en un período. El monto será la suma del capital e interés. $C_n = (1+i)$.
Segundo período: El capital correspondiente es el monto del período anterior o sea: **(1+i)** se obtiene, multiplicando el capital (monto anterior) por la tasa de interés de o sea: **(1+i).i**; el monto es la suma de capital e interés o sea: **(1+i) + (1+i).i**; si se toma **(1+i)** como factor común queda $(1+i).(1+i) = (1+i)^2$, el resultado se aplicó el producto de potencias de la misma base que es igual a otra potencia de la misma base y el exponente es la suma de los exponentes dados.
Período n: Siguiendo el mismo razonamiento de los pasos anteriores llegamos al último período que es **n**. El capital al inicio del mismo es igual al monto al final del período anterior, o sea del período **n-1** y que es $(1+i)^{n-1}$.
La tasa de interés, multiplicada por el capital al inicio del período nos da los intereses del período. El capital final del último lo obtenemos sumando el capital al inicio del mismo más los intereses del período, o sea:

$$(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-1}. i =$$

Sacando factor común $(1+i)^{n.1}$, nos queda:

$$(1+i)^{n-1}. (1+i) = (1+i)^n$$

Por lo tanto, el monto a interés compuesto de **$ 1**, en **n** períodos a la tasa **i** es:

$$C_n = 1. (1+i)^n$$

Y si el capital, en lugar de $ 1, resulta ser C_o, nos queda:

$$C_n = Co. (1+i)^n$$

Donde el tiempo n, que indica además el número de períodos de capitalización, puede ser fraccionado.

La condición de aplicabilidad:
De la formula es que el número de períodos debe expresarse siempre en la misma unidad de tiempo que la expresada por la tasa. Si el valor de la tasa es anual, el tiempo deberá expresarse en años; si la tasa es semestral, el número de períodos debe tomarse en semestres; si la tasa es mensual, **n** debe tomarse en meses, y así todos los casos.

Suponiendo que el número de períodos esté expresado en una unidad de tiempo diferente a la de la tasa de interés, antes de aplicar la formula respectiva deberá modificarse el valor de **n** expresándolo en la misma unidad de tiempo que la tasa.
Conocido el monto, si deseamos conocer el interés no tenemos sino que restarle el capital.

Ej. 1)
Calcular cuál es el monto que se obtiene al depositar $ 1.000.000 al 43% de interés semestral, sabiendo que esa suma permanece depositada durante 4 semestres.

C_n= x $\qquad$ $C_n=C_o.(1+i)^n$
C_o= $ 1.000.000.- $\qquad$ C_n= $ 1.000.000 x $(1+0{,}43)^4$
i= 0,43 semestral $\qquad$ C_n= $ 1.000.000 x $(1+0{,}43)^4$ = $ 4.181.616.-
n= 4 semestres

Ej. 2)
Sea calcular el monto que producirá un capital de $ 2.500.000.- al 96% anual, en 5 años.
a) Capitalización anual b) Capitalización trimestral.

a) C_n= $ 2.500.000 x $(1{,}96)^5$ = $ 72.313.664.-
b) C_n= $ 2.500.000 x $(1{,}24)^{20}$ = $ 184.313.664.-
Como se puede observar, con el uso de tasas proporcionales, el monto aumenta a medida que es menor el período de capitalización.

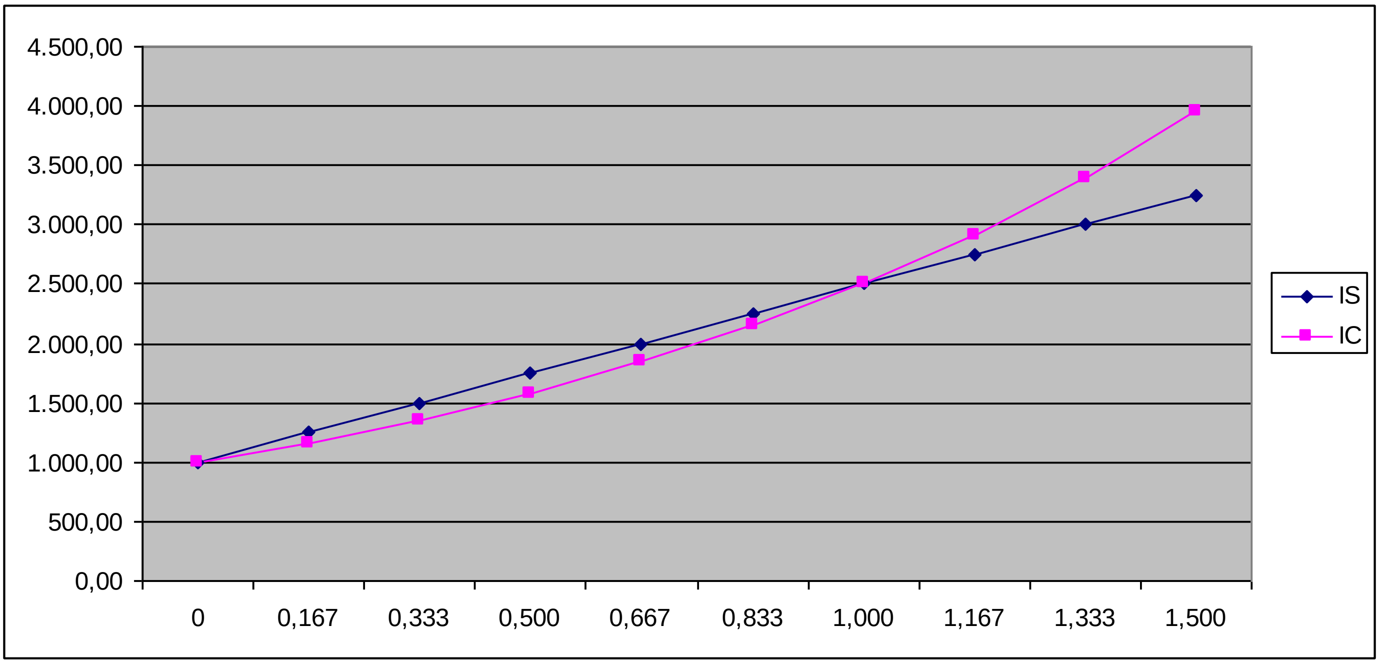
COMPARACION ENTRE EL MONTO SIMPLE Y COMPUESTO

Analíticamente:
Supongamos tener un capital originario de $ 10.000 colocado al 80 % anual de interés. Determinar el monto a interés simple y a interés compuesto que produce dicho capital para valores de n iguales a: 0;1/12;1/6;1/4;1/2;2/3;5/6;1;2;3.-

Para n =	**0**	**C_n = $**	**1.000,00**	**i =**	**150%**	**1,50**					
Simple	**$C_n = C_o.(1+i.n)$ =**	**$**	**1.000,00**	**(**	**1**	**+**	**1,50**	**x**	**0,00**	**) =**	**1.000,00**
Compuesto	**$C_n = C_o.(1+i)^n$ =**	**$**	**1.000,00**	**(**	**1**	**+**	**1,50**	**)**	**0,000**	**=**	**1.000,00**
Para n =	**0,167**	**C_n = $**	**1.000,00**	**i =**	**150%**	**1,50**					
Simple	**$C_n = C_o.(1+i.n)$ =**	**$**	**1.000,00**	**(**	**1**	**+**	**1,50**	**x**	**0,167**	**) =**	**1.250,00**
Compuesto	**$C_n = C_o.(1+i)^n$ =**	**$**	**1.000,00**	**(**	**1**	**+**	**1,50**	**)**	**0,167**	**=**	**1.164,99**
Para n =	**0,333**	**C_n = $**	**1.000,00**	**i =**	**150%**	**1,50**					
Simple	**$C_n = C_o.(1+i.n)$ =**	**$**	**1.000,00**	**(**	**1**	**+**	**1,50**	**x**	**0,333**	**) =**	**1.500,00**
Compuesto	**$C_n = C_o.(1+i)^n$ =**	**$**	**1.000,00**	**(**	**1**	**+**	**1,50**	**)**	**0,333**	**=**	**1.357,21**

Para n =	0,500		C_n = $	1.000,00	i =	150%	1,50								
														)	
Simple		$C_n = C_o.(1+i.n) =$				$	1.000,00	(	1	+	1,50	x	0,500	=	1.750,00
Compuesto		$C_n = C_o.(1+i)^n =$				$	1.000,00	(	1	+	1,50	)	^{0,500}	=	1.581,14
Para n =	0,667		C_n = $	1.000,00	i =	150%	1,50								
														)	
Simple		$C_n = C_o.(1+i.n) =$				$	1.000,00	(	1	+	1,50	x	0,667	=	2.000,00
Compuesto		$C_n = C_o.(1+i)^n =$				$	1.000,00	(	1	+	1,50	)	^{0,667}	=	1.842,02
Para n =	0,833		C_n = $	1.000,00	i =	150%	1,50								
														)	
Simple		$C_n = C_o.(1+i.n) =$				$	1.000,00	(	1	+	1,50	x	0,833	=	2.250,00
Compuesto		$C_n = C_o.(1+i)^n =$				$	1.000,00	(	1	+	1,50	)	^{0,833}	=	2.145,94
Para n =	1,000		C_n = $	1.000,00	i =	150%	1,50								
														)	
Simple		$C_n = C_o.(1+i.n) =$				$	1.000,00	(	1	+	1,50	x	1,000	=	2.500,00
Compuesto		$C_n = C_o.(1+i)^n =$				$	1.000,00	(	1	+	1,50	)	^{1,000}	=	2.500,00
Para n =	1,167		C_n = $	1.000,00	i =	150%	1,50								
														)	
Simple		$C_n = C_o.(1+i.n) =$				$	1.000,00	(	1	+	1,50	x	1,167	=	2.750,00
Compuesto		$C_n = C_o.(1+i)^n =$				$	1.000,00	(	1	+	1,50	)	^{1,167}	=	2.912,48
Para n =	1,333		C_n = $	1.000,00	i =	150%	1,50								
														)	
Simple		$C_n = C_o.(1+i.n) =$				$	1.000,00	(	1	+	1,50	x	1,333	=	3.000,00
Compuesto		$C_n = C_o.(1+i)^n =$				$	1.000,00	(	1	+	1,50	)	^{1,333}	=	3.393,02
Para n =	1,500		C_n = $	1.000,00	i =	150%	1,50								
														)	
Simple		$C_n = C_o.(1+i.n) =$				$	1.000,00	(	1	+	1,50	x	1,500	=	3.250,00
Compuesto		$C_n = C_o.(1+i)^n =$				$	1.000,00	(	1	+	1,50	)	^{1,500}	=	3.952,85

Gráficamente:



COMPARANDO EL MONTO SIMPLE Y COMPUESTO

Si tomamos un valor de "**i**" constante, y consideramos a "**n**" variable, asignando determinados valores resulta:

Si n = 0 el monto simple es igual al monto compuesto $C_{ns} = C_{nc}$

Si n = 1 también el monto simple es igual al monto compuesto, $C_{ns} = C_{nc}$

Si 0<n<1, resulta que el monto a interés simple es mayor que el interés compuesto $C_{ns}>C_{nc}$

Si n>1 resulta que el monto a interés simple es menor que el monto a interés compuesto.

$C_{ns}<C_{nc}$.

La fórmula del monto a interés simple es una función lineal, su representación gráfica es una recta. Y para el monto a interés compuesto es una curva ya que es una función exponencial.

En el gráfico se observa que las curvas se tocan en el origen para n = 0 y se cortan para n = 1 y para n > 1 la curva exponencial va aumentando según la variable n.

EJERCICIO PROPUESTOS

Calcular los siguientes ejercicios aplicando a cada uno interés simple y compuesto:

1.- C_n= $ 1.980.000.- n = 6 años i = 0,25 anual C_o= x simple y compuesto

2.- C_n= $ 3.250.000.- n = 6 años i = 0,85 semestral C_o= x; I = x simple

3.- C_o= $ 2.500.000.- n = 5 años i = 0,90 anual C_n= x simple y compuesto, capitaliz.semest.

4.-C_o= $ 3.000.000.- n = 5,5 años i = 0,90 anual C_n= x simple y compuesto, capitaliz.mensual.

5.-C_n= $ 1.800.000.- n = 4 años y 3 meses i = 0,0 anual C_o= x simple y compuesto, capitalización trimestral.

6.- Calcular la tasa nominal anual que, capitalizada por trimestres produce igual monto que el 90% efectivo anual.

7.- Calcular el mayor monto que puede obtenerse con un capital de $ 2.700.000.- que se coloca durante 3 años al 80% anual de interés.

8.- Calcular la tasa anual de interés que produce un monto igual al que se obtiene capitalizando bimestral al 75% nominal anual.

FORMULAS DERIVADA DE INTERES COMPUESTO

HALLAR "C_o"

De la formula de monto compuesto, aplicamos la propiedad reciproca de la igualdad:

$C_o \cdot (1 + i)^n = C_n$ y despejando el capital C_o, realizando pasaje de factores tenemos:

$$C_o = \frac{C_n}{(1+i)^n}$$

HALLAR "i"

$$C_o \cdot (1 + i)^n = C_n$$

$$(1+i)^n = \frac{C_n}{C_o} = \qquad 1+i = \sqrt[n]{\frac{C_n}{C_o}} = \qquad I = \sqrt[n]{\frac{C_n}{C_o}} - 1 =$$

HALLAR "n"

$$C_o \cdot (1 + i)^n = C_n$$

$$(1 + i)^n = \frac{C_n}{C_o} \Rightarrow \text{Log } (1 + i)^n = \text{Log } \frac{C_n}{C_o} \Rightarrow$$

$$n \cdot \text{Log } (1 + i) = \text{Log } C_n - \text{Log } C_o \Rightarrow$$

$$n = \frac{\text{Log } C_n - \text{Log } C_o}{\text{Log } (1 + i)} =$$

EJERCICIO PROPUESTOS

1-) C_o = $ 1.000.-
n = 5 años
i = 0,225 anual
C_n = ¿? Simple y Comp.

2-) C_n = $ 19.800.-
n = 6 años
i = 0,25 anual
C_o = ¿? Simple y Comp.

3-) C_n = $ 56.500.-
n = ¿? Simple y Comp.
i = 0,11 semestral
C_o = $ 27.700 .

4-) C_o = $ 100.000.-
n = 4 ½ bimestre
i = ¿? Simple y Comp.
C_n = $ 82.000.-

5-) C_n = $ 88.600.-
n = ¿? Simple y Comp.
i = 0,07 trimes.
C_o = $ 22.150.-

6-) C_n = $ 65.624.-
n = 25 meses
i = ¿? Simple y Comp.
C_o = $ 40.000.- .

7-) C_o = $ 1.000.- Capit. Mens.
n = 6 meses
i = 0,05 mensual
C_n = ¿? Simple y Comp.

8-) C_n = ¿? Simple y Comp.
n = 6 meses
i = 0,05 mensual
C_o = $ 1-000.- Capit. bimes.

9-) C_n = ¿? Simple y Comp.
n = 6 meses
i = 0,05 mensual
C_o =$ 1.000.- Capit. Trim.

10-) C_o = \$ 1.000.- Capit. Cuatri. **11-)** C_n = ¿? Simple y Comp. **12-)** C_n = ¿? Simple y Comp.

n = 6 meses | n = 6 meses | n = 6 meses

i = 0,05 mensual | i = 0,05 mensual | i = 0,05 mensual

C_n = ¿? Simple y Comp. | C_o = \$ 1-000.- Capit. semest. | C_o =\$ 1.000.- Capit. Anual.

Nota: A mayor subperíodos menor capitalización de monto.-

13-) C_o = \$ 4.500.- **14-)** C_n = 2.500.- **15-)** C_n = \$ 2.730.-

n = ¿? Simple y Comp. | n = ¿? Simple y Comp. | n = ¿? Simple y Comp.

i = 0,02 mensual | i = 0,00297 diaria | i = 0,30 anual

C_n = \$ 6.000.- | C_o = \$ 2-000.- | C_o =\$ 2.000.- .

Nota: Los montos compuestos se obtienen en menor tiempo que el interés simple.

PROBLEMAS DE MONTO A INTERES COMPUESTO

16-) ¿Cuál es el monto que se obtiene al colocar \$ 1.000.- al 3% bimestral durante 8 meses?
17-) Se deposita \$ 1.000.- en una institución donde se otorga el 14% anual, durante 5 meses. ¿Cuál es el interés producido en ese tiempo?
18-) Se deposita en una institución \$ 5.200.- al 7,8% anual, durante 180 días. ¿Cuál es el interés producido?
19-) Calcular en cuantos meses \$ 10,510.- se transforma en \$ 12.000.-, si estuvo colocado al 22% anual.
20-) ¿Cuánto debe permanecer depositado \$ 1.000.-, en una institución que otorga el 8% anual, para ganar \$ 300.- de interés?
21-) Se depositaron \$ 1.500.- el 20 de enero de 2.013, cuando se otorgaba 15% anual, desde el 25 de agosto del mismo año al 20 de febrero de 2.014, el 14% anual y desde entonces a la fecha el 11% anual ¿Cuánto retira al día de la fecha?
22-) ¿Cuál es la tasa semestral de interés que en 15 meses transforma a \$ 35.000.- en. \$45.000.-?
23-) ¿A que tasa anual de interés fue colocado \$ 42.000.- para que en 15 meses se conviertan en \$ 53.000?
24-) Calcule la tasa anual de interés a la que estuvo colocado un capital de \$ 153.000.- que en 9 meses produjo \$ 30.000.- de interés.
25-) ¿De cuanto tiempo se disponen para reunir \$ 29.500.- si tienen \$ 25.000.- que ganan 3% bimestral?
26-) Hace tres años se hizo un depósito en un banco al 5% anual, capitalización trimestral. A los 9 meses se modificó la tasa al 7% anual, capitalización trimestral. Si el saldo actual es de \$ 23.856. ¿Qué cantidad se depositó?
27-) ¿Calcular el monto que se obtendrá colocando \$ 8.000.- durante 2 años al 12% anual con capitalización a) anual b) bimestral c) trimestral d) mensual e) calcular el mayor monto que se puede obtener.
28-) a) ¿Qué capital al 5% mensual en 5 meses a producido a interés compuesto un monto que supera en \$ 1.000.- al que se hubiera obtenido a esa tasa de interés simple? b) ¿Qué tasa se debió usar a interés simple para que los montos fueran iguales?
29-) ¿Cuál es el importe a depositar hoy a fin de atender ciertos gastos, sabiendo que dentro de 2 años deberá desembolsar \$ 8.000.-; dentro de 4 años \$ 12.000.- y dentro de 8 años \$ 13.000.-. Efectuar la valuación considerando que se tendrá un interés del 15% anual con capitalización cuatrimestral, los tres primeros años y del 9% semestral con capitalización los restantes hasta finalizar el período.
30-) El 8 de marzo se depositaron \$ 16.000.- que recibirán anualmente el 7% anual. ¿Cuánto se retira el 30 septiembre, si el 10 de junio se han agregado \$ 10.000.- a la cuenta?

INTERES COMPUESTO

Es el valor o alquiler obtenido por un porcentaje llamado tasa de interés, aplicado a un capital, que sumados dan el monto. Se obtendrá las formulas de interés compuesto en función del capital $\mathbf{C_o}$ y en función del monto $\mathbf{C_n}$.

En función del Capital:

$I_c = C_n - C_o$ (Fórmula de interés compuesto) (1)

Si se tiene el valor del capital y no el del monto, se reemplaza la formula $C_n = C_o . (1+i)^n$ en (1)
Se tiene:

$I_c = C_o . (1+i)^n - C_o$ sacando factor común C_o queda $I_c = C_o . \{(1+i)^n - 1\}$

***Interés Compuesto en función del Capital*.**

Si se tiene el valor del monto y no del capital, se reemplaza $C_o = \dfrac{C_n}{(1+i)^n}$ en (1) se tiene:

$I_c = C_n - \dfrac{C_n}{(1+i)^n}$, sacando factor común C_n queda $I_c = C_o . \{(1 - \dfrac{1}{(1+i)^n}\}$

Interés Compuesto en función del Monto

PROBLEMAS DE INTERES COMPUESTO

1-) I_c = ¿? n = 10 años Co = \$ 2.000.- i = 0,04 anual Capitalización mensual

2-) ¿Cuál es el I_c de un capital que dio un monto \$ 1.500.-al cabo de 3,5 años al capitalizar trimestral al 2% trimestral?

3-) cual es el I_c de un capital que produjo un monto de \$ 1.000 al cabo de 5 años, 3 meses y 22 días al capitalizar semestralmente al 4,5 anual?

4-) ¿Cuál será el I_c de un capital \$ 1.000.- al cabo 7 años a una tasa de 0,03 anual capitalizando trimestralmente?

5-) Determinar el interés compuesto de un capital de \$ 500.000.- que fue colocado al 8% semestral durante 5 semestres.

6-) Determinar el interés de un capital que en 14 trimestres al 6% trimestral produjo un monto de \$ 4.521,80.

7-) I_c = ¿? n = 10 años C_o = \$ 2.900.- i = 0,12 anual Capitalización Trimestral

8-) I_c = ¿? n = 12 meses C_n = \$ 9.900.- i = 0,24 anual Capitalización anual

9-) I_c = ¿? n = 12 trimestres C_o = \$ 99.000.- i = 0,21 anual Capitalización trimestral

10-) I_c = ¿? n = 12 trimestres C_o = \$ 99.000.- i = 0,21 anual Capitalización mensual

TABLA PARA EL CALCULO DEL TIEMPO Y PARA LAS EQUIVALENCIAS DECIMALES

Número exacto de días entre dos fechas (años no bisiestos)
Nota; No se incluye el día inicial.
Los números de las líneas horizontales indican los días transcurridos entre cierto día del mes inicial y el mismo día del mes Terminal.

Desde el día del mes inicial	Al mismo día del mes Terminal											
	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
Ene	365	31	59	90	120	151	181	212	243	273	304	334
Feb	334	365	28	59	89	120	150	181	212	242	273	303
Mar	306	337	365	31	61	92	122	153	184	214	245	275
Abr	275	306	334	365	30	61	91	122	153	183	214	244
May	245	276	304	335	365	31	61	92	123	153	184	214
Jun	214	245	273	304	334	365	30	61	92	122	153	183
Jul	184	215	243	274	304	335	365	31	62	92	123	153
Ago	153	184	212	243	273	304	334	365	31	61	92	122
Sep	122	153	181	212	242	273	303	334	365	30	61	91
Oct	92	123	151	182	212	243	273	304	335	365	31	61
Nov	61	92	120	151	181	212	242	273	304	334	365	30
Dic	31	62	90	121	151	182	212	243	274	304	335	365

DESCUENTO COMERCIAL O BANCARIO

Sabemos que las variaciones de las sumas de dinero pueden ser hacia el futuro **(capitalización)** y hacia la época actual, partiendo de un valor futuro **(actualización)**.
Si se tiene un documento de crédito de N $ firmado por un tercero que vence dentro de n períodos, y se quiere disponer del dinero que el mismo representa antes del vencimiento, dicho documento debe descontarse.
De lo dicho se deduce que descuento es la diferencia entre el valor escrito en el documento llamado valor nominal, y el valor recibido por haberlo descontado antes de su vencimiento (valor actual).
Valor actual:
Si llamamos **N** al valor nominal del documento, exigible sólo el día del vencimiento, y llamamos **V** al valor actual, su diferencia es el descuento **D**. luego:

$$\mathbf{D = N - V}$$

Podemos apreciar que el valor nominal es un valor futuro, mientras que el valor actual es el valor que toma el documento en el momento en que se lo descuenta. En definitiva y dado que esta operación trata de determinar el valor actual de una nominal, se deduce que estamos en el mismo caso en el que se deba determinar el valor actual de una inversión de la cual se conocía su valor final o monto.
El descuento comercial o bancario, también llamado interés adelantado, es el interés simple calculado sobre el valor nominal o escrito de un documento, es decir, sobre la cantidad a devolver al vencimiento. Cuando se calcula sobre el capital prestado es llamado descuento racional o matemático.
Se define al descuento comercial como el interés simple del valor nominal.

Siendo $$I_s = \frac{C.\ R.\ T}{100.\ ut}$$ Interés simple de un capital $\mathbf{C_o}$

Es $$D_c = \frac{N.\ R.\ T}{100.\ ut}$$ Interés simple de un valor nominal **N**

Donde $\mathbf{D_c}$ = descuento comercial (equivale al interés simple)
N = valor nominal (equivale al capital cuyo interés se calcula).
Si se utiliza $\mathbf{i = R/100}$ **y** $\mathbf{n = T/ut}$
Resulta $\mathbf{Dc = N.\ i\ .\ n}$
Si **V** es el valor actual o importe a pagar o acreditar, resulta:

$$D = N - V \implies V = N - D$$

Como $D = N\ .\ i\ .\ n$ resulta $V = N - N\ .\ i\ .\ n$ Luego $\mathbf{V = N.(1 - in)}$

En esta fórmula podemos observar, que cuando $i\ .\ n = 1$, el paréntesis vale cero y entonces, cualquiera fuere el valor nominal del documento, el valor actual resulta nulo, y cuando $i.n > 1$, el valor actual resulta negativo. Situaciones absurdas, la última de las cuales llevaría al tenedor de un documento a pagar para que se lo descuente.
Los descuentos comerciales se utilizan para períodos cortos de tiempo, 30; 60; 90 días máximo. Al pasar mucho tiempo, el descuento como vimos puede ser alto, igualar al valor nominal o superar.

Ejemplo 1: Se descuenta un documento de $ 1.500.000- pagadero a los 91 días al 96% anual, con descuento bancario. Sin introducir sellados y otros gastos `posibles, calcular el descuento t el importe a acreditar en cuentas corrientes.

$$D = 1.500.000\ .\ 0{,}96\ .\ \frac{91\text{ días}}{365} = 359.014.-$$

V = 1.500.000 – 359.014 = 1.140.986.-
V = 1.500.000.(1-0,96 . 91:365) = 1.140.986.-

Ejemplo 2: Se descuenta un documento de $ 1.500.000 al 96% anual pagadero en 2 años; calcular el descuento y el valor actual.

D = 1.500.000 . 0,96 . 2 años = 2.880.000.-
V = 1.500.000 – 2.880.000 = - 1.380.000.-
Aquí resulta i por n mayor que uno, efectivamente 0,96 . 2 = 1,96.
Por esta razón el absurdo de un descuento mayor que el valor nominal y por tanto, un valor actual negativo.

FORMULAS DERIVADAS DE DESCUENTO COMERCIAL

$\mathbf{D = N\ .\ i\ .\ n}$ (formula del descuento); $$N = \frac{D}{i.n}$$ (Fórmula del valor nominal)

$n = \frac{D}{N.i}$ (fórmula del tiempo); $i = \frac{D}{N.n}$ (fórmula de la tasa)

$V = N \,.\, (1 - i.n)$ (Fórmula del valor actual) $N = \frac{V}{(1 - i.\,n)}$ (fórmula del valor actual)

$n = \frac{N - V}{N \,.\, i}$ (fórmula del tiempo) $i = \frac{N - V}{N \,.\, n}$ (fórmula de la tasa)

PROBLEMAS:

1-) Calcular el descuento que sufre un documento de $ 10.000.- que se descontó seis meses antes de vencer, al 5% trimestral.
2-) Calcular el valor nominal de un documento que, seis meses antes de vencer sufrió u descuento de $ 7.200 al 2,5 % mensual de interés.
3-) Calcular cuántos meses antes de vencer se descontó un documento de $ 72.000 al 4% bimestral, cuyo descuento comercial es de $ 20.160.
4-) Calcular la tasa mensual de interés a la cual se descontó un documento de $ 84.000, que en 10 meses antes de vencer se canjeó en $ 73.000.
5-) Calcular el valor recibido al descontar un documento de $ 82.000 a 4 meses antes de vencer al 2% mensual.
6-) Calcular el valor nominal de un documento que descontado 9 meses antes de vencer a 6 % trimestral se valuó en $ 52.000.
7-) Determinar cuánto tiempo antes de vencer se descontó un documento de $ 68.000 que al 2% mensual sufrió un descuento de $ 10.880.
8-) Determinar a que tasa de interés mensual se descontó un documento de $ 50.000 que 10 meses antes de vencer tenía un valor actual de $ 42.500.
9-) Calcular el descuento comercial de un documento de $ 40.000 descontado al 12% anual 7 meses antes de vencer.
10-) Determinar el descuento comercial de un documento de $ 50.000 que se negoció 6 meses antes de vencer al 24% anual.
11-) Calcular cuanto tiempo antes de vencer se descontó un documento de $ 72.000 que al 18% anual disminuyó su valor en $ 3.600-
12-) ¿Cuál es el valor nominal de un documento que en 9 meses con descuento comercial al 12% anual disminuye su valor a $ 7.560?
13-) ¿Cuál es el descuento que sufrirá un pagaré de $ 25.500 que es descontado al 18% anual 120 días antes de su vencimiento? ¿Cuál es su valor real?
14-) Se firma un documento al 2% mensual a 180 días y sufre un descuento de $ 600. ¿Qué importe recibe el deudor al formalizar la operación?
15-) ¿Cuántos días antes de su vencimiento fue descontado un pagaré de $ 8.000 al 5% trimestral, si el descuento fue de $ 500?
16-) ¿A que tasa porcentual fue descontada una obligación comercial de $ 12.000 si sufrió un descuento de $ 2.000 por 150 días?

VENCIMIENTO COMUN Y VENCIMIENTO MEDIO DESCONTADOS COMERCIALMENTE

En las transacciones comerciales es necesario, a veces, anticipar o postergar el pago de un documento de crédito, o reemplazar dos o más pagarés por uno, o bien sustituir un documento por varios otros.
Estas operaciones dan origen a distintos problemas, conocidos con el nombre de *vencimiento común* y *vencimiento medio*. En todos los casos rige el principio de equidad que establece: *Dos documentos son equivalentes, y por lo tanto pueden cambiarse, cuando, siendo distintos los capitales y distintos los tiempos, están colocados a la misma tasa y tienen el mismo valor actual en un determinado momento.*

Vencimiento común:
En los problemas de vencimiento común se reemplazan varios documentos por uno solo, siendo el total de los

valores nominales de los documentos a reemplazar distinto del valor nominal del documento único.
En el vencimiento común pueden tener lugar dos tipos de problemas:

a) *Determinar el valor nominal del documento único.*

Problema.- Una persona tiene tres pagarés al 12% anual por $ 4.000, $ 10.000, $ 20.000, que vencen, respectivamente, a los 90, 120 y 240 días. Se ha convenido entre las partes reemplazarlos por un documento único a 150 días, a la misma tasa. ¿Cuál es el valor nominal de la nueva obligación?

Solución
Se calculan primero los descuentos D^{I}, D^{II}, D^{III}, y luego los valores actuales V_1, V_2, V_3:
Dado que la tasa proporcional $\frac{i}{12} = \frac{0,12}{12} = 0,01$ mensual y que

$$n_1 = 90 \text{ días} = 3 \text{ meses}$$
$$n2 = 120 \text{ días} = 4 \text{ meses}$$
$$n3 = 240 \text{ días} = 8 \text{ meses}$$
$$n = 150 \text{ días} = 5 \text{ meses}$$

resulta

$$D^{I} = 4.000 \times 0,01 \times 3 = 120$$
$$D^{II} = 10.000 \times 0,01 \times 4 = 400$$
$$D^{III} = 20.000 \times 0,01 \times 8 = 1.600$$

Y por tanto

$$V^1 = 4.000 - 120 = 3.880$$
$$V^2 = 10.000 - 400 = 9.600$$
$$\underline{V^3 = 20.000 - 1.600 = 18.400}$$
$$V = V1 + V2 + V3 = 31.880$$

Este es el valor actual del nuevo documento, luego

$$N = \frac{V}{1 - in} \qquad N = \frac{31.880}{1 - 5 \times 0,01} \qquad N = 33.558$$

Por lo tanto, el valor nominal del nuevo documento que reemplaza a los tres pagarés es de $ 33.558.

b) *Determinar la fecha de vencimiento de la nueva obligación*.

Problema. – Una persona tiene un pagaré de $ 18.000 y otro de $ 10.000 que vencen a los 90 y 120 días, respectivamente.
Se ha convenido en sustituirlos por un documento único de $ 30.000, siendo la tasa de descuento del 18% anual. ¿Cuál es la fecha del vencimiento común?
Solución
Se calculan los descuentos D^{I} y D^{II} y los valores actuales de los documentos primitivos.
Dado que

$$i = \frac{0,18}{12} = 0,015 \text{ mensual}$$

$n_1 = 90$ días = 3 meses; $n_2 = 120$ días = 4 meses; $n = 150$ días = 5 meses
Resulta

$$D_I = 18.000 \times 0,015 \times 3 = 810 \dashrightarrow V_1 = 18.000 - 810 = \$\ 17.190$$
$$D_{II} = 10.000 \times 0,015 \times 4 = 600 \dashrightarrow \underline{V_2 = 10.000 - 600 = \$\ 9.400}$$
$$V = V_1 + V_2 = \$\ 26.590$$

Obtenido el valor actual del nuevo documento, resulta que el descuento (D_1) de esta obligación es

$D_1 = N - V$ reemplazando $D1 = 30.000 - 26.590 = \$\ 3.410$

Finalmente, calculamos el intervalo de tiempo n del documento único:

$$n = \frac{3.410 \times 36.000}{18 \times 30.000} = 227 \text{ días}$$ El vencimiento único es de 227 días de la fecha

Vencimiento medio:

Es el caso en que se desean reemplazar varios documentos por uno solo, siendo el valor nominal de la misma igual a la suma de los valores nominales de los documentos primitivos.
En el vencimiento medio interesa conocer la fecha del vencimiento del nuevo documento.

Problema. – Una persona tiene tres documentos al 18% anual: de $ 8.000, $ 10.000 y $ 18.000, que vencen, respectivamente, a los 30, 120 y 90 días.
Se ha convenido en sustituirlos por un documento único cuyo valor nominal sea la suma de los dados. ¿Cuál es la fecha del vencimiento medio?
Se calcula primero los descuentos D^{I}, D^{II} y D^{III}, para así determinar el descuento (D_1) del nuevo documento.
Dado que

$$\frac{i}{m} = \frac{0{,}18}{12} = 0{,}015 \text{ mensual}$$

n1 = 1 mes; n2 = 4 meses; n3 = 3 meses

$$D^{I} = 8.000 \times 0{,}015 \times 1 = 120$$
$$D^{II} = 10.000 \times 0{,}015 \times 4 = 600$$
$$D^{III} = 18.000 \times 0{,}015 \times 3 = 810$$
$$D1 = DI + DII + DIII = 1.530$$

Con este dato, y sabiendo que

$$N = 8.000 + 10.000 + 18.000 = 36.000$$

Se calcula (n) fecha de vencimiento medio

$$n = \frac{D_1}{N\,i}; \qquad n = \frac{153}{36.000 \times 0{,}015}$$ n = 85 días se extiende el Dto.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1)- ¿Qué descuento se hizo sobre un pagaré de $ 2.000 que fue descontado al 15% anual 180 días antes de su vencimiento? **R:** $ 150
2)- Calcular en que tiempo un documento de $ 1.000 al 24% anual sufrió un descuento de $ 26
R: 39 días
3)- Calcular el valor nominal de una letra de cambio que pagada a los 120 días de su vencimiento ha sufrido un descuento de $ 577 al 5,25% anual. **R:** 32.971
4)- ¿A que tanto por ciento se descontó una letra de $ 4.500 que por 48 días sufrió un descuento de $ 55,50? **R:** r = 9 ¼ %
5)- ¿Cuántos días antes de su vencimiento fue descontada una letra de cambio de $ 12.000 que sufrió un descuento de $ 300 a la tasa del 2% mensual? **R:** 38 días
6)- ¿Cuál será el valor efectivo de un pagaré cuyo valor nominal de $ 1.100 fue descontado al 1,5% mensual 120 días antes de la fecha de vencimiento? **R:** $ 1.034
7)- ¿Cuántos meses antes de su vencimiento fue descontada una letra de cambio de $ 8.000 que sufrió un descuento de $ 500 a la tasa del 2% mensual? **R:** 3 meses y 4 días
8)- Averiguar cuál era el valor nominal de una letra de cambio que sufrió un descuento de $ 18 al ser cancelada al 20% anual 9 meses antes de su vencimiento. **R:** $ 3.600

9)- ¿Cuál es el descuento que se debe deducir de un valor nominal de $ 1.500, pagando el documento 7 meses antes de su vencimiento, suponiendo la tasa igual al 6% mensual? **R:** $ 630

Vencimiento Común y Medio

10)- Se deben pagar $ 2.000 dentro de 3 meses, $ 3.500 dentro de 4 y $ 4-000 dentro de 7 meses. Se desea saber qué suma se debe pagar dentro de 2 meses en lugar de las tres indicadas, suponiendo la tasa porcentual del 6% mensual. **R:** $ 7.522,72
11)- ¿Cuánto será necesario abonar para conseguir una prórroga de 5 meses en el pago de $ 1.500 al 8% anual. **R:** $ 50
12)- Un comerciante posee tres documentos: uno de $ 1.800 a 45 días, otro de $ 900 a 90 días y otro de $ 3.600 a 120 días. Quiere dar en su reemplazo un pagaré por valor de $ 6.360. Determinar el vencimiento de dicho pagaré, siendo la tasa del 6% anual. **R:** n = 150 días
13)- M.T. ha adquirido una partida de libros por valor de $ 20.000 suscribiendo por ello tres documentos al 2% mensual: uno por $ 5.000 a 60 días de la fecha, otro por $ 6.000 a 140 días y el último por $ 9.000 a 180 días. Determinar el vencimiento medio correspondiente si se paga con un solo documento el importe total de la compra. **R:** n = 138 días
14)- Por la compra de cierta cantidad de papel se han dado pagarés de $ 5.000, $ 4.000 y $ 12.000, que vencen a los 2, 5 y 9 meses, respectivamente, descontados al 24% anual. Determinar la fecha en que deberán pagarse de una sola vez y a la misma tasa sin perjuicio para ninguna de las partes. **R:** 132 días
15)- Determinar el valor nominal de un pagaré con vencimiento a los 8 meses, dado en sustitución de los siguientes documentos: $ 8.400 por 65 días $ 5.300 por 110 días y $ 4.000 por 4 meses y 20 días. Se calcula el descuento al 6% anual. **R:** $ 18.144,27
16)- Tres letras formadas el 5 de abril tienen por valor nominal, respectivamente, $ 10.000, $ 20.000 y $ 6.000. el primer documento vence el 24 de junio, el segundo el 8 de julio y el tercero el 11 de septiembre. Se los quiere sustituir al suscribirlos por uno solo a 4 meses. Hallar su valor nominal si el descuento se calcula al 18 % anual. **R:** $ 36.417
17)- Habiendo comprado un estanciero el 5 de abril un lote de hacienda, dio en cambio un pagaré de $ 1.200 al 30 de abril y otro de $ 1.500 al 11 de octubre, siendo el 16% anual la tasa. El día del vencimiento del primero se resuelve reemplazar las dos obligaciones por un documento único por valor de $ 3.000. Calcular la fecha del vencimiento común. **R:** 305 días
18)- Si dos pagarés por $ 5.000 cada uno, a vencer a 45 y 105 días, respectivamente, son sustituidos por un documento único a 90 días, hallar el valor nominal de este último. (Descuento comercial al 2% mensual). **R:** $ 10.106
19)- Una deuda de $ 5.000 se cancela mediante una parte pagada en efectivo y el resto en dos documentos: uno de $ 1.500 a 180 días y el otro de $ 2.000 a 72 días. (Descuento comercial al 1,5% mensual) ¿Qué importe se debe abonar en efectivo? **R:** $ 1.707
20)- Reemplazar un documento de $ 1.000 descontado al 18% anual por 9 meses por otro de 12 meses. ¿Cuál es el valor nominal de la nueva obligación? **R:** $ 1.054,88

TASA DE DESCUENTO (ADELANTADA)

El descuento de un documento de crédito se puede determinar de otra forma, fijando la disminución o pérdida que sufre $ 1 en un periodo de tiempo y que llamaremos *tasa de descuento* (d) o *tasa adelantada*.
Vale decir, que se llama tasa de descuento a la deducción que se hace a un peso que debe ser pagado al cabo de un periodo.
Así, por ejemplo, si la tasa de descuento 100 d= 10% es anual quiere decir que por cada peso que figura en la obligación, pagadero al fin de 1 año, recibe al firmar la misma solamente 90 centavos:

$$V_1 = 1 - d = 1 - 0{,}10 = \$\ 0{,}90$$

Análogamente, $ 0,90 pagaderos al fin del 2ª período valen actualmente:

$$V_2 = 0{,}90 \times \$\ 0{,}90 = \$\ 0{,}81 \ \textbf{(*)}$$

(*) Bonificación o rebaja: Recordemos que para obtener una cantidad disminuida de un tanto por ciento de la misma basta multiplicarla por la diferencia entre 1 y el %. Ejemplo: el importe de \$ 500 rebajado en un 10% es

$$\$\ 500\ (1 - 10) = \$\ 500 \times 0{,}90 = \$\ 450$$

La suma de \$ 1.200 con la bonificación de un 5% se convierte en

$$\$\ 1.200 \times 0{,}95 = \$\ 1.140$$

Continuando en **(*)**:

\$0,81 pagaderos al final del 3er. Período valen actualmente

$$V_3 = \$\ 0{,}81 \times 0{,}90 = 0{,}729$$

\$ 0,729 pagadero al final del 4to período valen actualmente

$$V_4 = \$\ 0{,}729 \times 0{,}90 = \$\ 0{,}6561 <> \$\ 0{,}66, \text{etc.}$$

Es decir, si una persona firma una obligación de \$ 1, pagadero a 4 años cuya tasa de descuento porcentual sea 10% anual, esa persona recibirá del acreedor 66 centavos, aproximadamente, en el momento de concertarse la operación. (Obsérvese que los sucesivos descuentos son decrecientes en progresión geométrica de razón 1 – d = 0,90. Ello es debido que la actualización se efectúa sobre los saldos de la deuda primitiva).
Razonando de esta manera tratemos de hallar una formula para calcular el valor actual en función de la tasa de descuento.
Supongamos que N = \$ 1 y *d = tasa de descuento.*
\$ 1 pagadero al cabo del 1er. Período vale actualmente

$$V_1 = (1 - d)$$

\$ (1 - d) pagadero al cabo del 2º período vale actualmente

$$V_2 = (1 - d)\ (1 - d) = (1 - d)^2$$

\$ $(1 - d)^2$ pagadero al cabo del 3er. Período vale actualmente

$$V_3 = (1 - d)^2\ (1 - d) = (1 - d)^3$$

. . . .

y en general

\$ 1 pagadero al cabo de n períodos vale actualmente

$$V_n = (1 - d)^n$$

Si en lugar de tener \$ 1 como valor futuro a cancelar, se tiene un valor \$ N, entonces la fórmula del valor actual será

$$\mathbf{V = N\ (1 - d)^n}$$

Fórmula que expresa el valor actual de un capital en función de la tasa de descuento (*Tasa equivalente y tasa de descuento*: Recordemos que con la *tasa equivalente* se obtienen montos iguales en tiempos iguales, pero en distintos períodos de capitalización; en el *descuento* existe una tasa que produce los mismos valores actuales que la tasa nominal, partiendo de iguales valores nominales, siendo el tiempo el mismo y con distinto número de períodos de capitalización. Es la tasa de descuento).
Fórmulas derivadas: De la fórmula del valor actual se deducen las siguientes ecuaciones:

$$N = \frac{V}{(1 - d)^n}$$

$$\operatorname{Log}(1 - d) = \frac{\operatorname{Log} V - \operatorname{Log} N}{n}$$

$$n = \frac{\operatorname{Log} V - \operatorname{Log} N}{\operatorname{Log}(1 - d)}$$

Relación entre la tasa de descuento e interés (Adelantada y Vencida)

Tratemos de hallar la relación entre la tasa de descuento y la tasa de interés que aplicadas al mismo capital resulten equivalentes.
Expresando el valor actual de un capital N = 1 en función de la tasa de interés y de la tasa de descuento, pagable al cabo de un año, resulta:

$$V = \frac{1}{(1 + i)} \qquad\qquad V = 1 - d$$

Pero para que las tasas i y d sean equivalentes deben ser iguales los valores actuales respectivos, o sea

$$\frac{1}{1 + i} = 1 - d$$

Por tanto

Fórmula fundamental de equivalencia.

De esta expresión se obtienen

$$(1) \qquad d = \frac{i}{1 + i} \qquad\qquad i = \frac{d}{1 - d} \qquad (2)$$

de (1) se observa que la tasa de descuento es igual a la tasa de interés actualizada y también que

$$i = d\,(1 + i)$$

Es decir, que la tasa de interés es igual a la tasa de descuento capitalizada.
Las tasas (i) y (d) son desiguales pues se calculan sobre capitales financieros valuados en diferentes momentos de tiempo.
EJERCICIOS

1)- Calcular la tasa de interés si d= 20% mensual.

Solución

$$i = \frac{0,20}{1 - i} = \frac{0,20}{0,80}$$

➔ $i = 0,25$ o bien R= 25%

Claro está, que se verifica la fórmula de equivalencia

$$(1 - d).\,(1 - i) = 1$$
$$(1 - 0,20).\,(1 + 0,25) = 1$$

2)- Se firma una obligación por $ 1.000 pagadera al cabo de un mes a la tasa de descuento 10% mensual.
Supongamos que el tomador del dinero recibido invierte a la tasa de interés R= 25% mensual por mes. ¿Qué resultado obtiene?

a) Cálculo del dinero recibido

$V = N(1 - d)^n$

$V = 1.000(1 - 0,10)^1 = \$ 900$

b) Inversión de los $ 900 al 25%

$C_n = C(1 + i)n$

$C_n = 900(1 + 0,25)^1 = 1.125$

Por lo tanto, se beneficia con $ 125. si así vuelve a repetir la operación posibilita a dicho inversionista que “arme una bicicleta”. Esto sucede por cuanto la fórmula fundamental de equivalencia no se cumple

$$(1 – d). (1 + i) = 1$$

En este caso $(1 – 0,10) (1 + 1,25) > 1$

3)- Supongamos que se firma un documento de \$ 1.000 a la tasa de descuento d= 20% mensual y lo obtenido se coloca a la tasa de interés vencida R= 12% mensual.
V_a = 1.000(1 – 0,20) = \$ 800
C_n = \$ 800(1 + 0,12) = \$ 960 < \$ 1.000
No se puede armar el "bicicleteo". El principio de equivalencia no se cumple
(1 – 0,20) (1 + 0,12) < 1
4)- Calcular la tasa porcentual de descuento anual si N = \$ 900; V = \$ 550 y n = 5,5 años. Capitalización de los intereses, anual. R = 4,38% anual

A) Calcular el valor nominal, que descontados a interés compuesto tienen como valor actual:

1)- Valor actual \$ 1.000 descontados 10 años antes del de su vencimiento al 4% anual y capitalización anual. R= N = 1.480,24
2)- V= \$ 890 descontados 7 años antes del vencimiento al 3 ½% anual y capitalización anual.
R= N = \$ 1.132,33
3)- Un valor actual de \$ 1.000 descontados 20 meses antes de su vencimiento al 3,75% anual capitalización anual. R= N= 1.976,67
4)- \$ 7.000 descontados 2 años, 3 meses y 20 días antes de su vencimiento al 3 1/8% anual capitalizado anualmente. R= N= 7.514,70
5)- V= \$ 10.000 descontados 60 meses antes de su vencimiento al 3 ¼% anual y capitalizando anualmente. R= N= 11.734,10

B) Calcular el valor actual de un documento descontado con descuento compuesto y capitalización anual de:

6)- \$ 1.000 al 5% anual 6 años antes de su vencimiento. R = V= \$ 613,91
7)- \$ 9.200 al 3 ½% anual 6 años antes de su vencimiento. R = V = \$ 7.484,20
8)- \$ 8.200 al medio por ciento anual 1 año, 2 meses antes de su vencimiento R: v = \$ 8.152,33
9)- \$ 1.000 AL 8 ¼% anual 30 meses antes del vencimiento. R: V = \$ 820,20
10)-\$ 1.000 al 12% anual 6 años antes de su vencimiento y capitalización semestral. R: V = \$ 496,97

C) Calcular directamente el descuento compuesto de las obligaciones:

11)- \$ 800 a 10 años al 4% anual, capitalizando anualmente. R: D = \$ 259,55
12)- \$ 1.000 a 2 ½ años al 6% anual, capitalizando semestralmente R: 137,39
13)- \$ 9.200 a 4 años, 8 meses, 23 días, al 5 ¼% anual, capitalizando anualmente. R: D = \$1.978,83
14)- V = \$ 800; n = 10 años; R = 4% anual, capitalizando anualmente. R: D = \$ 3.841,95
15)- V = \$ 1.000; n = 21 ½%; R = 11%, capitalización semestral. R: 8.994,25

D) Calcular la tasa de interés compuesto anual a que fueron descontados los documentos de:
16)- \$ 400 que 10 años antes de vencimiento tenía un valor actual de \$ 300. R: R = 2,918%
17)- \$ 1.000 que 20 años antes de su vencimiento tenía un valor actual de \$ 850. R: R=0,816%
18)- \$ 2.000 que 2 años y 10 meses antes de su vencimiento tenía un valor actual de \$ 1.700.
R: R = 5,90%
19)- \$ 10.000 que 15 años antes de su vencimiento tenía un valor actual de \$ 8.000, capitalizando semestralmente. R: R = 1,476 anual
20)- \$ 10.000 1ue 12 ½ años antes de su vencimiento tenía un valor actual de \$ 8.000, capitalizando semestralmente. R: R = 1,794 anual

E) ¿Cuánto tiempo antes de su vencimiento fueron levantados con descuentos compuestos los documentos?:

21)- $ 2.000 que al 2 ½ % años tuvieron un descuento den $ 800.R: n= 20 años, 8 mes, 10 días
22)- $ 5.000 que al 3% anual tuvieron un descuento de $ 2.400. R: n= 22 años 1 mes, 12 días
23)- $ 1.000 que al 1,25% anual sufrieron un descuento igual a su 22%. R: n = 20 años
24)- $ 800 que al 5 1/8% anual sufrieron un descuento de $ 522. R: n = 21 años, 1 mes, 24 días
25)- $ 10.000 sabiendo que su valor efectivo es de $ 7.500 y la tasa 3,75% anual.
R: n = 7 años, 9 meses, 22 días
26)- El valor actual de $ 672 pagaderos dentro de un cierto tiempo es $ 126; si se han descontado a interés compuesto de 4 1/6% anual, hállese el tiempo. R: n = 41 años
27)- Un comerciante pide prestado $ 8.000 y el pagaré es renovado cada medio año con un aumento del 18% anual. ¿Qué tiempo transcurrirá para que la suma aumente a $ 80.000?
R: n >< 7 años

F) Calcular la tasa de interés correspondiente a las tasas de descuento:

28)- d = 0,03 R: i=0,03092 29)- d = 0,0525 R: i=0,0554 30)- d = 0,0175 R: i=0,0178
31)- d = 3 ½% R: i=0,03626 32)- d = 0,01 R: i= 0,010101 33)- d = 0,02 R: i=0,020408

G) Calcular las tasas de descuento correspondientes a las tasas de interés:

34)- i = 0,05 R: d=0,04762 35)- i = 0,025 R: d=0,02439 36)- i = 0,005 R:d=0,004975
37)- i = 0,10 R: d=0,090909 38)- i = 0,010101 R: d= 0,01 39)- i = 0,020408 R: d=0,02

FORMAS DE CAPITALIZACION

Retomando lo expresado y explicado en las páginas 6 y 7 (Ver), conocemos dos tasas una referida al período y otra al subperíodo.

Tasa Nominal:

En toda capitalización, los intereses correspondientes a cada período se liquidaban en la misma unidad de tiempo para la tasa de interés. Es decir, si la tasa era anual, el periodo de capitalización era el año; si la tasa de interés era trimestral, bimestral, mensual, la capitalización era trimestral, bimestral o mensual respectivamente.
En los problemas resueltos hasta el momento no mencionábamos el período de capitalización ya que sobreentendíamos que el mismo coincidía con el tiempo de la tasa. Es decir, dentro de cada período siempre había una sola capitalización recibe el nombre de **"capitalización periódica"** y la tasa de interés "i" recibe el nombre de tasa nominal.

Tasa Proporcional:

A partir de ahora, veremos otra forma de capitalizar los intereses llamada **"capitalización subperiódica"** y que se presenta en los casos en que hay más de una capitalización en cada período de tiempo indicado para la tasa, por ejemplo: puede tenerse la tasa de interés anual capitalizada por semestres; una tasa trimestral capitalizada mensualmente. Lo realmente importante de la capitalización subperiódica es la no coincidencia del periodo de capitalización con el tiempo en que está expresada la tasa.
En la capitalización subperiódica, se utiliza la "tasa proporcional" de interés cuando en cada subperíodo se toma una tasa igual a la anual dividida por el número de subperíodos y se indica con "m" a la cantidad de subperíodos, por ejemplo, si tenemos una tasa anual del 24% que se capitaliza trimestralmente, la tasa proporcional trimestral es igual a 6 % trimestral.

$$\frac{i}{m} = \frac{0{,}24}{4} = 0{,}06 \text{ Tanto por 1; si x 100\% = 6 \% trimestral}$$

Con la tasa proporcional nos da un monto mayor al que se obtiene con la tasa nominal periódica. Si se emplea la tasa proporcional, entonces la fórmula fundamental del monto a interés compuesto se modifica de la siguiente manera:

1) La tasa de interés será igual a la anual, dividida por el número de subperíodos.
2) El exponente del binomio será igual al exponente anual, multiplicado por la cantidad de subperíodos que hay en el año.

Resulta la formula del monto a interés compuesto con tasas proporcionales y capitalización subperiódica, de la siguiente manera:

$$C_n = C_o \cdot \left(1+\frac{i}{m}\right)^{n.m} \qquad (1)$$

Tasa efectiva:

Si deseamos capitalizar periódicamente y obtener un monto igual l que se obtiene con la tasa proporcional, tendremos que utilizar una tasa de interés periódica resulta ser algo mayor que la nominal "**i**". En efecto, si se usa la tasa nominal "**i**" se obtiene un monto menor que capitalizando con la tasa proporcional; por lo tanto, si se desea obtener un monto igual usando una tasa periódica, la misma debe ser algo mayor que "**i**".

Esta tasa de interés, que capitalizada una vez en el período nos da un monto igual al que se obtiene capitalizando subperiódicamente con la tasa proporcional a la nominal, recibe el nombre de tasa efectiva.

Si indicamos con "**i'**" a la tasa de interés efectiva, dado que el monto que la misma produce es igual al obtenido con la tasa nominal capitalizada proporcionalmente en forma subperiódica, resulta:

$C^n = C_o. (1 + i')^n$ Monto con tasa periódica efectiva

$C^n = C_o. (1 + i/m)^{m.n}$ Monto con tasa subperiódica proporcional

Por definición de tasa efectiva, el monto que la misma produce es igual al que produce la tasa subperiódica proporcional.

Luego $C_o.(1 + i')^n = C_o.(1 + i/m)^{m.n}$

Suponiendo C_o = $ 1 y que n = 1 período nos queda

$$1 + i' = (1 + i/m)^m$$

Despejando i' ---→ $\mathbf{i' = (1 + i/m)^m - 1}$ **(2)**

Como m es el número de veces que cada subperíodo está comprendido en el año, es decir que si tomamos un semestre m = 12/6, a su vez 6/12 es el semestre expresado en años, resulta ser en general:

$$\mathbf{m = 1/n}$$

de donde la fórmula (2) de tasa efectiva "i'", se puede escribirse así: reemplazando m por su igual 1/n:

$$i' = (1 + i.n)^{1/n} - 1 \qquad (3)$$

Tasa equivalente:

Al estudiar la capitalización subperiódica con tasa proporcional vimos que la misma producía un monto mayor que si se capitalizaba periódicamente con la tasa de interés nominal.

Dada tal circunstancia, nos habíamos propuesto encontrar una tasa de interés periódica que, capitalizada una sola vez en el período, nos diera un monto igual al que se obtendría con la capitalización subperiódica con tasa proporcional.
Ahora nos propondremos buscar una tasa de interés que, capitalizada subperiódicamente, nos dé un monto igual que el que se obtiene con la tasa nominal periódica. Esta nueva tasa de interés resultará algo menor que la tasa proporcional. En efecto, si se capitaliza subperiódicamente con tasa proporcional, se obtiene un monto mayor que capitalizando periódicamente con tasa nominal; entonces, si se desea capitalizar subperiódicamente y obtener un monto igual que el producido por la tasa nominal periódica, es lógico que deba usarse una tasa subperiódica menor que la proporcional. Esa nueva tasa de interés recibe el nombre de *tasa equivalente.*
De acuerdo con lo dicho, afirmamos que la capitalización subperiódica se realiza con la tasa equivalente cuando en cada subperiódo se utiliza una tasa de interés tal que al finalizar el plazo de colocación del capital, produce un monto igual que si se capitaliza periódicamente con la tasa nominal durante ese mismo plazo.
Si indicamos con i_m a la tasa equivalente, será por definición:

$$C_o \cdot (1 + i_m)^{m.n} = C_o.(1 + i)^n$$

Monto con tasa subperiódica equivalente **l** Monto con tasa periódica nominal

Si C = \$ 1 y n = 1 resulta que $(1 + i_m)^m = 1 + i$ es $(1 + im) = {}^{m}R(1 + i)$

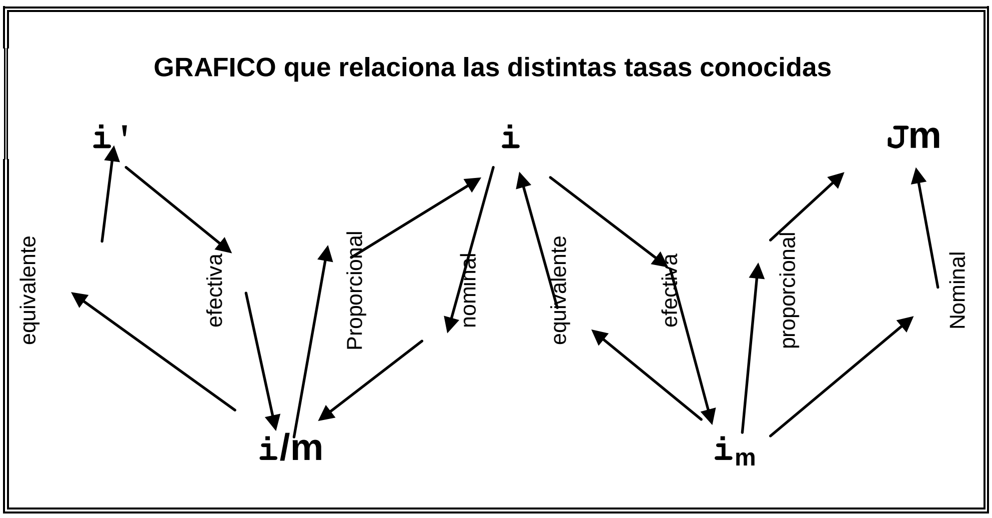
o bien $(1 + i_m) = (1 + i)^{1/m}$ despejando i_m nos queda

$$i_m = (1 + i)^{1/m} - 1 \qquad (4)$$

reemplazando m por su igual 1/n la fórmula queda: $\mathbf{i_m = (1 + i)^n - 1}$ **(5)**

Ejemplo:
Sea el 96% nominal. Hallar las tasas equivalente y proporcional, semestral y trimestral, y la efectiva de estas dos últimas.
a) $i_m = i_2 = (1 + 0,96)^{1/2} - 1 = 0,40$; $i_m = i_4 = (1 + 0,96)^{1/4} - 1 = 0,1832159$
b) $i/m = i/2 = 0,96/2 = 0,48$; $i/m = i/4 = 0,96/4 = 0,24$
c) $i' = (1,48)2 - 1 = 1,1904$; $i' = (1,24)4 - 1 = 1,36$

GRAFICO que relaciona las distintas tasas conocidas:



El fenómeno de la capitalización

La equivalencia de tasas que hemos visto anteriormente está referida al interés compuesto y en apariencia sólo es válida para las operaciones que se realizan con esa metodología de cálculo.
Pero no es así, la capitalización de los intereses se produce siempre, cualquiera fuere el procedimiento de cálculo, desde el momento en que las operaciones financieras exigen en todos los casos que los intereses se acrediten o se paguen (se debiten o se cobren).
Si la forma elegida es de interés compuesto, el interés se acredita periódicamente, produciéndose la capitalización.
Si se elige otra forma de cálculo, el interés se paga al término de la operación y el acreedor al recibirlo está en condiciones de reinvertirlo: la capitalización se ha producido.
De esta forma, el interés simple y el descuento bancario resultan un caso especial del interés compuesto: hay un solo período de capitalización, coincidente con el plazo de la operación financiera.
En razón de lo expuesto, elegimos la tasa efectiva anual de interés compuesto como tasa de comparación de todas las operaciones. La efectiva porque representa el verdadero rendimiento del capital en términos de moneda corriente, y la anual para poder referir todas las operaciones al mismo período de tiempo.

La tasa efectiva en una operación simple cualquiera:

Por ejemplo si se prestan $ 2.000.000.- a 6 meses y al cabo de dicho tiempo se conviene en devolver $ 2.900.000.- queda claro que el interés es de $ 900.000.- que representa el 45% semestral del capital prestado, si queremos hallar la anual debemos pensar que al cabo de otros 6 meses se dispone de $ 2.900.000.- para prestarlo en las condiciones anteriores y que el 45% representa en el segundo semestre $ 1.305.000.-.
Es decir, que el prestamista transformó su $ 2.000.000.- en $ 4.205.000.-. El $ 2.205.000.- de interés representa un rendimiento efectivo en el año del 110,25% sobre la inversión original.
Llevando a una fórmula, la tasa relativa al período del préstamo resulta de dividir el interés **I** sobre el capital prestado.
Para hallar la tasa efectiva, se sustituye el interés **(I)** por la diferencia entre lo efectivamente reintegrado **(R)** y lo efectivamente prestado **(P)**, es decir sin contar con la existencia de comisiones, impuestos, etc.

```
                      /____________ n ____________/
Gráficamente:      P  |-----------------------------------------| R
```

Simbolizando con **k** la tasa del período o plazo del préstamo, sería:

$$k = \frac{I}{P} = \frac{R - P}{P}$$

La tasa anual efectiva será, capitalizando m veces (número que puede ser reemplazado por la inversa del tiempo: 1/n).

$$i' = \left(1 + \frac{R - P}{P}\right)^{1/n} - 1 = \left(\frac{\cancel{P} + R - \cancel{P}}{P}\right)^{1/n} - 1$$

$$i' = \left(\frac{R}{P}\right)^{1/n} - 1 \qquad (6)$$

Ejemplo:
Calcular la tasa efectiva anual de un préstamo de $ 1.500.000, por el que al cabo de 65 días se reintegraron $ 1.750.000. el tiempo de la operación, medida en años es 65/365 y por lo tanto el exponente es 365/65.

$$i' = \left(\frac{1.750.000}{1.500.000}\right)^{365/65} - 1 = 1,376 \quad >>> 1,376 \times 100\% = 137,60\% \text{ T.E.A.}$$

La tasa efectiva en el interés simple:

Dejando de lado la fórmula anterior, puede hallarse una fórmula especial para usar con el método de interés simple (interés vencido); muestra que la tasa efectiva depende del plazo de la operación.
Aplicando los conceptos ya vistos, el capital prestado sería C el reembolso C + Cin

```
 /____________ n ____________/
C  I-----------------------------------------I C + C.i.n
P                                              R
```

$$K = \frac{R-P}{P} = \frac{\cancel{C_o} - C_o.i.n - \cancel{C_o}}{C_o} = \frac{C_o.i.n}{C_o} = i.n$$

De donde reemplazamos en la formula de tasa efectiva:

$$\mathbf{i' = (1 + i.n)^{1/n} - 1} \qquad \mathbf{(7)}$$

igual a la (3) como era de esperar.
<u>Ejemplo:</u> Calcular la tasa efectiva correspondiente al 110% nominal vencido: a) En operaciones a 30 días b) a 90 días c) a 180 días.

a) $i' = (1 + 1,10 \cdot 30/365)^{365/30} - 1 =$ 1,8665 tanto por uno => 186,65%
b) $i' = (1 + 1,10 \cdot 90/365)^{365/90} - 1 =$ 1,6466 " " => 164,66%
c) $i' = (1 + 1,10 \cdot 180/365)^{365/180} - 1 =$ 1,4080 " " => 140,80%

resultan entonces que la misma tasa del 110% nominal, aplicada a la fórmula de interés simple en distintos plazos produce tasas efectivas distintas.

La tasa efectiva en el descuento bancario:

Cuando se aplica la tasa de interés adelantada en la fórmula del descuento comercial o bancario, la suma realmente prestada es V = N – N.i.n, y la reembolsada N.

```
   /____________ n ____________/
  C  I-----------------------------------------I
V= N-N.i.n                                     N
  P                                            R
```

La tasa del período del préstamo será:

$$K = \frac{R-P}{P} = \frac{N - (N - N.i.n)}{N - N.i.n} = \frac{\cancel{N} - \cancel{N} + N.i.n}{N(1 - i.n)} = \frac{\cancel{N}.i.n}{\cancel{N}(1 - i.n)} = \frac{i.n}{1 - i.n}$$

La tasa efectiva anual:

$$i' = \left(1 + \frac{i.n}{1 - i.n}\right) - 1 = \left(\frac{1 - \cancel{i.n} + \cancel{i.n}}{1 - i.n}\right)^{1/n} - 1 =$$

$$i' = \left(\frac{1}{1 - i.n}\right)^{1/n} - 1 \qquad \textbf{(8)}$$

Aquí también la tasa efectiva depende del plazo de la operación pero se incrementa con el tiempo, por cuya causa se establecen tasas nominales decrecientes en los descuentos bancarios.

Ejemplos: Calcular la tasa efectiva anual que corresponde al 110% nominal de interés adelantado: a) operaciones a 30 días b) a 90 días c) a 180 días.

a) $i' = (1/1 - 1{,}10 . (30/365))^{365/30} - 1$ = 2,1675 tanto por uno => 216,75%
b) $i' = (1/1 - 1{,}10 . (90/365))^{365/90} - 1$ = 2,6081 tanto por uno => 260,81%
c) $i' = (1/1 - 1{,}10 . (180/365))^{365/180} - 1$ = 3,8819 tanto por uno => 388,19%

Tasas de interés vencidas y adelantadas equivalentes:

Las tasas nominales de interés simple (vencidas) tienen una tasa efectiva decreciente con el tiempo, y las de descuento bancario (adelantadas) crecen.

Estando autorizadas las entidades financieras a utilizar cualquiera de los dos métodos, es conveniente conocer cual es la tasa de interés vencido que equivale a una adelantada y viceversa.

Recordando que tasas equivalentes son aquellas que, para el mismo capital y en el mismo tiempo, con distintos métodos de cálculo o distintos períodos de capitalización, producen el mismo monto.

La fórmula del monto a interés simple es:

$$C_n = C. (1 + i.n)$$

La del valor nominal, que equivale al monto, en el descuento comercial se puede deducir de la:

$$N = \frac{V}{1 - i.n}$$

Llamando i_s a la tasa vencida e i_d a la de descuento y reemplazando N y V de la última fórmula por sus equivalentes C_n y C_o, respectivamente, por definición de tasas equivalente resulta:

igualando estas dos fórmulas:

$$C_o. (1 + i_s.n) = \frac{C_o}{1 - i_d.n} \quad \text{simplificando } C_o$$

$$(1 + i_s.n) = \frac{1}{1 - i_d.n}$$

$$i_s.n = \frac{1}{1 - i_d.n} - 1 = \frac{\cancel{1} - \cancel{1} + i_d.n}{1 - i_d.n} = \frac{i_d.n}{1 - i_d.n}$$

$$i_s = \frac{i_d.n}{(1 . i_d.n).n} \qquad \text{luego} \qquad \mathbf{i_s = \frac{i_d}{(1 - i_d.n)}} \qquad \textbf{(9)} \qquad \text{despejando } i_d\text{:}$$

$$i_s (1 - i_d.n) = i_d \qquad \text{luego } i_s - i_s.i_d.n = i_d$$

$-i_d - i_d.i_s.n = - i_s$ multiplicando por (-1) al primer y segundo miembro tenemos:

$i_s = i_d + i_d.i_s.n$ luego sacando factor común "i_d" => $i_s = i_d (1 + i_s.n)$

$$i_d = \frac{i_s}{1 + i_s.n} \qquad (10)$$

Las fórmulas (9) y (10) nos dicen con claridad que no es posible hallar una tasa de interés simple equivalente a otra de descuento comercial sin tener como dato el tiempo de la operación.
Es decir que existen tantas tasas equivalentes como plazos puedan convenirse.
Ejemplo: Calcular la tasa de descuento comercial que equivale al 110% anual de interés vencido: a) En operaciones a 30 días b) a 90 días c) a 180 días.

d) i_d = (1,10/ 1 – 1,10 . (30/365)) = 1,0088 tanto por uno => 100,88%
e) i_d = (1,10/ 1 – 1,10 . (90/365)) = 0,8653 tanto por uno => 86,53%
f) i_d = (1,10/ 1 – 1,10 . (180/365)) = 0,7131 tanto por uno => 71,31%

Ejemplo: Calcular las tasas de interés vencido equivalente al 205% adelantado: a) a 30 días b) a 90 días c) 180 días.
Rep: a) 114,92% b) 141,68 c) 217,75%

EJERCICIOS:

1ª) Calcular la tasa efectiva anual pasiva de un banco que paga el 100% nominal vencido, para operaciones: a) 1 30 días b) a 90 días c) a 180 días- Resp.: a) 161,44 b) 144,45 c) 125,45.
2ª) Calcular la tasa efectiva anual que cobra un banco que opera con intereses adelantados con los siguientes plazos y tasas nominales: a) 30 días, 83% b) 90 días, 77% c) 180 días, 70%-
Resp.: a) 136,24% b) 134,88% c) 1135,99%.
3ª) Un banco aplica la siguiente escala de tasas nominales para descuento de documentos de terceros: de hasta 30 días, el 106%, de 31 a 60 días, el 102%. Calcular la tasa efectiva anual resultante para: a) un documento a 28 días b) un documento a 45 días.
Resp. A) 202,10% b) 197,45%.
4ª) Un banco descuenta documentos con el 107% de interés adelantado a 90 días y desea transformar el sistema de liquidación pasando a interés vencido, sin modificar la tasa efectiva anual. ¿Qué tasa nominal debe aplicar?, hacer la comparación. Resp. i_s= 145,35%; i'_s= 246,34%; i_d= 107,00%; i'_d= 246,34%.
5ª) En qué banco es preferible depositar siendo que el A paga el 11% adelantado a 90 días, y el B que paga el 14,8% vencido para el mismo plazo.
6ª) Calcular la tasa efectiva anual correspondiente a una nominal del 6% anual que se paga en Caja Ahorro: a)con capitalización anual b) semestral c) trimestral. Resp. a) 6%; b) 6,9%; c) 7,499%.
7ª) Cálculo de la tasa equivalente de interés a) i= 0,24 anual capitalizable bimestral b) i= 0,12 semestral con capitalización mensual. Resp. a) i= 0,0365 bimestral; b) i= 0,019069 mensual.
8ª) N deposita una suma tal que, al 10,4% anual con capitalización trimestral de interés le permite retirar $ 52.000 en 3 años. Calcular la suma inicialmente depositada y la tasa efectiva de interés.

Simbología bancaria. El año civil:
El Banco Central de la Republica Argentina impuso en una época a las entidades financieras, entre otras disposiciones, la obligación de publicar las tasas efectivas anuales utilizadas en las operaciones financieras. De esta forma, se suponía que los inversores tendrían una referencia más exacta del rendimiento de su inversión que la que podían obtener cuando se utilizaba la tasa nominal anual con capitalización subperiódica.

En efecto, recordemos que la tasa efectiva es la que hace referencia a la verdadera tasa anual o periódica utilizada en una operación financiera, ya que la tasa nominal capitalizada subperiódicamente con tasa proporcional produce montos mayores que si se capitaliza una sola vez con tasa nominal, y la tasa anual que representa esa mayor capitalización subperiódica es la tasa efectiva, la cual indica el verdadero rendimiento de la expresada en el periodo anual.
Por todo ello el Banco Central obligó a publicar la tasa efectiva anual utilizada en las operaciones, por lo cual dictó una Resolución que, entre otros conceptos, decía: "a los fines del cálculo de la tasa de interés anual efectiva, deberá aplicarse la siguiente fórmula:"

$$\mathbf{i' = \{(1 + i \,.\, d/36500)^{(365/d)} - 1 \} \,.\, 100}$$

en la cual los signos representan:
i' = tasa de interés efectiva anual T.E.A.
i = tasa nominal anua T.N.A., contractualmente aplicada, expresada en tanto por ciento.
d = cantidad de días correspondientes a cada uno de los períodos de percepción de intereses. El divisor fijo se usa con 365 días. Pero, cuando los subperíodos se expresan en días fijos por lapsos mensuales, bimestrales, etc., se considerarán como de 30 días, de 60 días, etc., respectivamente.
Si se efectúa un readecuamiento de la expresión de la fórmula de la tasa efectiva desarrollada de acuerdo con nuestra nomenclatura, se vera que resulta ser equivalente a la simbología bancaria cuando se trabaja con subperiódos expresados en días por año civil) 365 días), al igual a todas las fórmulas donde se expresa el período "n".

Período	Subperíodo
$n = 1$	$m = 1/n$
Tasa periódica	Tasa subperiódica o proporcional
i = T.N.A.	i/m
$n = T/ut$	$m = ut/T$ ó
$n = d/ut$	$m = ut/d$

Dada una i/m proporcional hallar i periódica

$$i = \left(\frac{i}{m}\right) . \frac{365}{d}$$

Dada una i periódica pasar a una proporcional i/m

$$i/m = i \,.\, \frac{d}{365}$$

EJERCICIOS:

Completar los siguientes cuadros en función a los datos:

1

PLAZO "d"	"i" T.N.A.	"i/m" T.E.M	"i/m" Prop.	i' T.E.A.
15	25,00%	2,055%	1,027%	28,239%
30	26,00%	2,137%	2,137%	29,338%
45	26,50%	2,178%	3,267%	29,792%
60	27,00%	2,219%	4,438%	30,236%
90	27,50%	2,260%	6,781%	30,484%
120	28,00%	2,301%	9,205%	30,715%
180	29,00%	2,384%	14,301%	31,134%
365	32,00%	2,630%	32,000%	32,000%
		i/m = 30/365	i/m = d/365	I'={(1+i.d/365)(365/d}.100%

2

PLAZO "d"	"i" T.N.A.	"i/m" T.E.M	"i/m" Prop.	i' T.E.A.
7	15,00%			
15	18,00%			
23	20,00%			
30	22,00%			
45	22,50%			
60	24,00%			
90	25,00%			
120	27,00%			
		i/m = 30/365	i/m = d/365	I'={(1+i.d/365)(365/d}.100%

3

PLAZO "d"	"i" T.N.A.	"i/m" T.E.M	"i/m" Prop.	i' T.E.A.
15	22,00%			
30	22,00%			
45	22,00%			
60	22,00%			
90	22,00%			
120	22,00%			
180	22,00%			
365	22,00%			
		i/m = 30/365	i/m = d/365	i'={(1+i.d/365)(365/d}.100%

4

PLAZO "d"	"i" T.N.A.	"i/m" T.E.M	"i/m" Prop.	i' T.E.A.
15	10,00%			
30	15,00%			
45	16,00%			
60	20,00%			
90	21,00%			
120	21,50%			
180	23,00%			
365	24,00%			
		i/m = 30/365	i/m = d/365	i'={(1+i.d/365)(365/d}.100%

5

PLAZO "d"	"i" T.N.A.	"i/m" T.E.M	"i/m" Prop.	i' T.E.A.
15	29,444%			
30	29,622%			
45	29,801%			
60	29,982%			
90	30,349%			
120	30,721%			
180	31,484%			
365	34,000%			
		i/m = 30/365	i/m = d/365	i'={(1+i.d/365)(365/d}.100%

6

PLAZO "d"	"i" T.N.A.	"i/m" T.E.M	"i/m" Prop.	"i_m" Prop.	i' T.E.A.
15	20,00%	1,644%	0,822%	0,752%	22,040%
30	22,00%	1,808%	1,808%	1,648%	24,363%
45	22,50%	1,849%	2,774%	2,534%	24,849%
60	23,00%	1,890%	3,781%	3,462%	25,327%
90	23,50%	1,932%	5,795%	5,342%	25,664%
120	24,10%	1,981%	7,923%	7,357%	26,103%
180	25,00%	2,055%	12,329%	11,633%	26,586%
365	30,00%	2,466%	30,000%	30,000%	30,000%
		i/m = 30/365	i/m = d/365	$i_m=(1+i)^{(d/365)}-1$	$I'=\{(1+i.d/365)^{(365/d)}\}.100\%$

7

PLAZO "d"	"i" T.N.A.	"i/m" T.E.M	"i/m" Prop.	"i_m" Prop.	i' T.E.A.
15	100,00%				
30	100,00%				
45	100,00%				
60	100,00%				
90	100,00%				
120	100,00%				
180	100,00%				
365	100,00%				
		i/m = 30/365	i/m = d/365	$i_m=(1+i)^{(d/365)}-1$	$i'=\{(1+i.d/365)^{(365/d)}\}.100\%$

8

PLAZO "d"	"i" T.N.A.	"i/m" T.E.M	"i/m" Prop.	"i_m" Prop.	i' T.E.A.
15	13,000%				
30	13,100%				
45	13,150%				
60	13,300%				
90	13,550%				
120	13,650%				
180	13,850%				
365	14,000%				
		i/m = 30/365	i/m = d/365	$i_m=(1+i)^{(d/365)}-1$	$i'=\{(1+i.d/365)^{(365/d)}\}.100\%$

9

PLAZO "d"	"i" T.N.A.	"i/m" T.E.M	"i/m" Prop.	"i_m" Prop.	i' T.E.A.
15	10,458%				
30	11,386%				
45	12,314%				
60	13,245%				
90	14,220%				
120	15,210%				
180	16,324%				
365	18,000%				
		i/m = 30/365	i/m = d/365	$i_m=(1+i)^{(d/365)}-1$	$i'=\{(1+i.d/365)^{(365/d)}\}.100\%$

10

PLAZO "d"	"i" T.N.A.	"i/m" T.E.M	"i/m" Prop.	"i_m" Prop.	i' T.E.A.
15	9,550%				
30	10,590%				
45	11,400%				
60	11,940%				
90	12,510%				
120	13,590%				
180	14,800%				
365	18,000%				
		$i/m = 30/365$	$i/m = d/365$	$i_m=(1+i)^{(d/365)} - 1$	$I'=\{(1+i.d/365)^{(365/d)}\}.100\%$

CONTENIDO DE FORMULAS EN FUNCION DE LAS VARIABLES DE TASAS EN UN CUADRO

TASAS	i (T.N.A.)	i/m (Proporc .a i)	i_m (Equivl. a i)	i' (T.E.A)
i	$i = i$	$i/m = i.d/365$	$i_m=(1+i)^{(d/365)} - 1$	$i'=\{(1+i.d/365)^{(365/d)}-1\}$
i/m	$i = (i/m).365/d$	$i/m = i/m$		$i'=\{(1+i/m)^{(365/d)}-1\}$
i_m	$i=\{(1+i_m)^{(365/d)}-1\}$			
i'	$i_m=\{\sqrt[(365/d)]{(1+i')}-1\}.365/d$	$i_m=\sqrt[(365/d)]{(1+i')}-1$		$i' = i'$

EJERCICIOS:

Completar los siguientes cuadros en función a los datos:

1

PLAZOS	i (T.N.A.)	i/m (Proporc .a i)	i_m (Equivl. a i)	i'
30	**24,000%**			
45		**2,500%**		
60			**5,500%**	
90				**30,000%**

2

PLAZOS	i (T.N.A.)	i/m (Proporc .a i)	i_m (Equivl. a i)	i'
15				12,250%
23		0,850%		
30	12,000%			
60			2,000%	

3

PLAZOS	i (T.N.A.)	i/m (Proporc .a i)	i_m (Equivl. a i)	I'
30				32,755%
45				32,755%
60				32,755%
90				32,755%

4

PLAZOS	i (T.N.A.)	i/m (Proporc .a i)	i_m (Equivl. a i)	I'
30	27,258%			
60			4,096%	
90				31,778%
120		9,496%		

5

PLAZOS	i (T.N.A.)	i/m (Proporc .a i)	i_m (Equivl. a i)	I'
30	22,545%			
60	23,155%			
90	24,000%			
180	25,000%			

6

PLAZOS	i (T.N.A.)	i/m (Proporc .a i)	i_m (Equivl. a i)	I'
7			0,594%	
15				43,953%
23		2,285%		
30	36,458%			

COMPENDIO DE FORMULAS DE TASAS NOMINALES, EFECTIVAS, PROPORCIONALES, EQUIVALENTES, ADELANTADAS Y VENCIDAS

1ª- Conversión de tasas nominal anual vencida T.N.A. a tasa efectiva anual T.E.A.

$$i' = (1 + i.n)^{1/n} - 1$$ (En tanto por uno)

$$i' = [(1 + i\ .\ d/36500)^{(365/d)} - 1\ ]\ .\ 100$$ (Según B.C.R.A. en tanto por ciento)

donde: **i'** = Tasa efectiva anual; **i** = Tasa nominal anual vencida; **n** = d/365; **d** = días

2ª- Conversión de tasa anual adelantada T.N.A. a tasa efectiva anual T.E.A.

$$i' = \left(\frac{1}{1 - i.n}\right)^{1/n} - 1$$ (En tanto por uno)

$$i' = [(1/(1 - i\ .\ d/36500))^{(365/d)} - 1\ ]\ .\ 100$$

$$i_m = (1 + i)^n - 1 \qquad\qquad i_m = (1 + i)^{(d/365)} - 1$$

donde: i_m = Tasa proporcional equivalentes; **i** = Tasa nominal anual vencida; **n** = d/365; **d** = días

4ª- Tasas de interés –vencidas y adelantadas- equivalente

$$i_s = \frac{i_d}{(1 - i_d.n)} \qquad i_s = \frac{i_d}{(1 - i_d.\ d/36500)}$$ (dada la tasa adelantada, obtenemos la tasa equivalente vencida, en tanto por un y tanto por ciento)

$$i_d = \frac{i_s}{} \qquad i_d = \frac{i_s}{}$$ (dada la tasa vencida, obtenemos la tasa equivalente adelantada, en tanto por un y tanto por ciento)

$$(1 - i_s.n) \qquad\qquad (1 - i_s.\ d/36500)$$

5ª- Conversión de tasa nominal anual vencida a tasa T.N.A. a tasa efectiva mensual T.E.M.

$$i'_m = [(1 + i\ .\ d/36500)^{(30/d)} -1] . 100$$

i'_m = Tasa efectiva mensual

6ª- Conversión de tasa efectiva mensual T.E.M. a tasa efectiva anual T.E.A.

$$i' = [(1 + i'_m)^{(365/30)} -1] . 100$$

7ª- Conversión de tasa efectiva anual T.E.A. a tasa efectiva mensual T.E.M.

$$i'_m = [(1 + i)^{(365/30)} -1] . 100$$

8ª- Conversión de tasa efectiva mensual T.E.M. a tasa nominal anual T.N.A.

$$i = [(1 + i'_m)^{(d/30)} -1] . 36500/d$$

EJERCICIOS

Resolver los siguientes problemas considerando año comercial (360 años)

1º Calcular la tasa nominal anual que, capitalizada trimestralmente, produce igual momento que el 12% efectivo anual. R= 0,11488 anual

2º ¿Cuál es la tasa de interés anual que produce un monto igual que el 2,2% equivalente mensual?
R= 0,2984 anual

3º Calcular el mayor monto que puede obtenerse con un capital de $ 10.000 que se coloca durante 3 años al 24% anual. R= $ 20.544

4º Se a depositado la suma de $ 8.000 en un banco que paga el 24% anual capitalizable por trimestres. Calcular cuanto se retira en 3 años, y la tasa anual efectiva de interés.
R= $ 10.096; i' = 0,2624 anual

5º Calcular el valor del capital que, colocado al 20% anual capitalizable por trimestres, origina un monto de $ 120.000 en 4 años y 6 meses. Determinar, además, la tasa anual efectiva de interés.
R= $ 49.862; i' = 0,2155 anual

6º El Sr. A deposita $ 10.000 en un Banco que paga el 21% anual de interés con capitalización cuatrimestral. Luego de 3 puntos, razón por la cual A deposita $ 5.000 más, que también se capitalizan proporcionalmente en cada cuatrimestre. ¿Cuánto retira el Sr. A luego de 5 años?
R= $ 37.100

7º ¿Qué capital puedo juntar en dos años si hoy coloco $ 3.000 al 60% anual con capitalización mensual, y dentro de un año podré colocar $ 8.000 al 48% anual, capitalizable también mensualmente?
R= $ 22.484

8º Dentro de dos años debo saldar una deuda entregando $ 80.000. a tal efecto, pienso depositar $ 5.000 ahora, $ 10.000 dentro de 6 meses y $ 15.000 dentro de un año; espero cobrar el 60% anual, el 72% anual y el 84% anual, respectivamente, todos con capitalización mensual de intereses. Deseo saber cuánto debo agregar en el momento de cancelar la deuda, a efectos de poder completar la suma de $ 80.000-
R= $ 1.500

9º Para cancelar una deuda puedo optar por: a) pagar $ 15.500 dentro de 2 meses; o b) pagar $ 4.000 dentro de 1 mes, $ 7.000 dentro de 4 meses y $ 6.000 dentro de 6 meses. ¿Qué opción me conviene más si la tasa anual de interés es el 60% nominal con capitalización mensual?

R= la segunda opción

10º Una empresa deberá renovar maquinarias dentro de 6 meses, para lo cual necesitará disponer de $ 100.000 en ese momento. Con tal finalidad, prevé efectuar un depósito de $ 30.000 dentro de dos meses y otro depósito, a calcular, dentro de 4 meses. ¿Cuál ser-a el valor de ese depósito si el interés anual que espera cobrar en ambos casos es el 72% anual con capitalización mensual?

R= $ 55.292

<u>Resolver los siguientes problemas considerando año civil</u>

1º Para hacer una inversión a 7 días de plazo me ofrecen una tasa nominal anual del 20% en una entidad que llamaré "A". Busco otras alternativas y, entre ellas, encuentro en la entidad "B" la posibilidad de efectuar la misma inversión con una tasa efectiva anual del 22%. ¿En qué entidad me conviene efectuar la inversión?.

R= en "A"

2º He solicitado un préstamo de $ 10.000 a restituir dentro de 180 días, por el cuál me cobran un interés del 18% anual capitalizable cada 180 días. Deseo saber: a) el valor del monto que debo restituir en es fecha. b) a cuanto asciende la tasa de interés nominal anual del préstamo, si en el momento en que me lo otorgan me descuentan un 2% en concepto de gastos administrativos más 1% en concepto de sellados. c) cuál sería la tasa efectiva anual de interés de la situación del punto anterior.

R= a) $ 11.882,18 aprox. b) 21,34137% anual c) 23,1111%

3º) el día 5 de marzo me otorgaron un préstamo de $ 10.000 que restituiré con tres pagos iguales a efectuar los días 4 de abril, 4 de mayo y 3 de junio. Sabiendo que la tasa de interés nominal anual es el 18% con capitalización con 30 días, ¿Cuál es el valor de cada uno de los pagos?.

R= $ 3.432,45 aprox.

4º El Sr. Z pidió un préstamo de $ 10.000 que restituirá dentro de 90 días. La tasa de interés anual pactada fue del 24% nominal, capitalizable cada 30 días. Con los datos anteriores se solicita:
a) El cálculo del importe que el Sr. Z deberá restituir al vencimiento de su deuda, b) El cálculo de la tasa efectiva mensual del préstamo en el caso en el cual se le descuente al Sr. Z un 3% en concepto de gastos administrativos más 1% en conceptos sellados al momento de recibir el préstamo, recibiendo en consecuencia la suma de $ 9.600, c) ¿Cuál sería el costo mensual efectivo del préstamo, si al momento de recibirlo, el Sr. Z debe responder con 1,5% de gastos más un 1% de sellados, recibiendo en consecuencia la suma de $ 9.750?.

R= a) $ 10.603,53, b) 3,37% aprox., c) 2,837% aprox.

5º Suponga que Ud. está a cargo de una entidad financiera que, a los efectos del otorgamientos de préstamos, no puede cobrar más del 24% efectivo anual. Para un préstamo de $ 10.000 pactado a 30 días de plazo, ¿Qué importe aproximado en conceptos de gastos debería Ud. cobrarle al deudor cuando éste recibe su préstamo, a efectos de que el costo efectivo mensual de la operación le resulte del 2%?

R= % 21,20 aprox.

6º Se a estructurado un plan de financiación que consiste en abonar el 20% al contado, el 40% a los 90 días, y el saldo a los 150 días. Paralelamente, se ofrece una alternativa de pago que consiste en abonar un mayor porcentaje al contado, y el resto con un solo pago a los 150 días. Sabiendo que el interés pactado es el 2% para cada 30 días, se desea conocer cual es el porcentaje de la porción de contado que habría que abonar con la alternativa de pago supuesta.

R= 35,5%

7º Una entidad financiera cobra el 20% anual de interés adelantado para las operaciones que se realicen a un año de plazo. Se desea saber:

1. la tasa de interés equivalente a la anual, para operaciones que se realicen a un mes.
2. la tasa efectiva de interés equivalente a la anual, para operaciones que se realicen a cuatro meses.

R= a) 1,85% aprox.; b) 7,61% aprox.

CAPITALIZACION CONTINUA

Al estudiar la capitalización subperiódica con tasa proporcional hemos visto que a medida que aumenta la frecuencia de las capitalizaciones, aumenta el monto obtenido.
Si suponemos que entre dos capitalizaciones sucesivas existe un lapso infinitamente pequeño, ello implica que estamos tomando un valor de m muy grande, ya que, a medida que aumenta m, disminuye la diferencia de tiempo que hay entre dos capitalizaciones sucesivas.
Entonces, si m aumenta indefinidamente, la diferencia entre esas dos capitalizaciones sucesivas tiende a ser nula o, lo que es lo mismo, si m aumenta indefinidamente es porque estamos capitalizando intereses continuamente.
De acuerdo con lo dicho, la capitalización continua es aquella en la cual la cantidad de subperíodos aumenta la frecuencia de las capitalizaciones, aumenta el monto obtenido, corresponde demostrar que, a pesar de que m tiende a infinito, el valor del monto no aumenta indefinidamente, sino que el mismo aumenta hasta un cierto límite.
Para saber cuál es el límite de ese incremento del monto (cuando se capitaliza indefinidamente) procedemos así:
Teniendo

$$C_n = C_o \,.\, (1 + i/m)^{m.n}$$

Si multiplicamos y dividimos el exponente por i, es

$$C_n = C_o \,.\, (1 + i/m)^{(m/i).n.i}$$

Dividiendo por i el numerador y el denominador de la fracción i/m, resulta

$$C_n = C_o \,.\, [1 + (i/i)/(m/i)]^{(m/1).n.i} \quad \text{simplificando } i/i = 1$$

O bien

$$C_n = C_o \,.\, [(1 + (1)/(m/i))^{m/i}]^{ni} \qquad [1]$$

Si observamos la expresión encerrada en el corchete, vemos que la misma es un binomio cuyo valor limite para i/m tendiendo a infinito es el número **e.** Por lo tanto, si en la expresión

$$(1 + (1)/(m/i))^{m/i}$$

Consideramos que m → a infinito (esto es, que se capitaliza en forma continua) entonces, también i/m → infinito, con lo cual llegamos a la conclusión de que el mayor valor que dicha expresión puede tomar es **e**. Por lo tanto:

$$\lim_{m/i \to \text{inf.}} (1 + (1)/(m/i))^{m/i} = e$$

Dado que el valor del corchete es **e** cuando m tiende a infinito, en **[1]** nos queda

$$\underline{C_n} = C_o\, e^{n.i}$$

Expresión que indica el valor del monto en capitalización continúa.
Ejemplo:
Calcular el monto que produce un capital de $ 10.000, que fue colocado durante 4 años, al 12% nominal anual de interés, capitalizable en forma continua y en forma mensual con tasa proporcional.

a) En forma continua:

$$\underline{C_n} = C_o\, e^{n.i}$$

n = 4 años	$\underline{C_n} = 10.000 * 2,71828^{4.0,12}$
i = 0,12 anual	$\underline{C_n} = 10.000 * 2,71828^{0,48}$
C_o = $ 10.000	Log $\underline{C_n}$ = Log 10.000 + 0,48*Log 2,71828
$\underline{C_n}$ = x	Log $\underline{C_n}$ = 4 + 0,48*0,4343

$$Log\ \underline{C_n} = 4 + 0{,}20846$$
$$Log\ \underline{C_n} = 4{,}20846$$
$$\underline{C_n} = antilog\ 4{,}20846$$
$$\underline{C_n} = \$\ 16.161$$

b) En forma mensual

n = 4 años
i = 0,12 anual
C_o = $ 10.000
m = 12 meses
$\underline{C_n}$ = x

$$\underline{C_n} = C_o \ . \ [\ 1 + i/m\ ]^{m.n}$$
$$\underline{C_n} = 10.000 \ . \ [\ 1 + 0{,}12/12\ ]^{48}$$
$$\underline{C_n} = 10.000 \ . \ [\ 1 + 0{,}01\ ]^{4.12}$$
$$\underline{C_n} = 10.000 \ . \ [\ 1{,}01\ ]^{4.12}$$
$$\underline{C_n} = 10.000 \ . \ 1{,}612226$$
$$\underline{C_n} = \$\ 16.122{,}26$$

Si se capitaliza en forma continua o bien en forma proporcional mensual, los montos obtenidos no difieren en mucho, si el número de años no es muy elevado.
El valor $\underline{C_n}$ = 16.161 es el mayor valor que puede obtenerse al colocar $ 10.000 al 12% anual de interés en 4 años, cualquiera que sea el número de subperíodos de capitalización.

Tasa instantánea de interés

Según hemos visto, si se capitaliza en forma continua con la tasa i, se obtiene un valor del monto que resulta mayor que cualquier otro valor que se obtiene l capitalizar subperiódicamente con tasa proporcional en las mismas condiciones. Entonces, también podemos afirmar que el monto con capitalización continua con la tasa i resulta mayor que el monto con tasa efectiva, ya que el monto con tasa efectiva es igual al monto con tasa proporcional, y éste era menor que el monto continuo.
Es decir, que al ser

$$\mathbf{C_o\ e^{n.i} = C_o\ .\ (\ 1 + i/m\ )^{m.n}}$$

Y dado que

$$\mathbf{C_o\ .\ (\ 1 + i/m\ )^{m.n} = C_o\ .\ (\ 1 + i')^{n}}$$

Resulta

$$\mathbf{C_o\ e^{n.i} > C_o\ .\ (\ 1 + i')^{n}}$$

Si capitalizando en forma continua se desea obtener un monto igual al que se obtiene con la tasa efectiva, entonces debe tomarse una tasa de interés menor que i. esa tasa es la llamada *tasa instantánea* de interés y se indica con la letra griega delta δ.
Por lo tanto, se dice que la capitalización continua se hace con tasa instantánea cuando el monto que la misma produce es igual al monto que produce la tasa efectiva de interés (o la tasa nominal anual capitalizada proporcionalmente).

<u>Obtención de la tasa instantánea</u>

Teniendo

$$\mathbf{\underline{C_n} = C_o\ e^{n.\delta}} \quad \text{monto con tasa instantánea}$$

Y

$$\mathbf{C_n = C_o\ .\ (\ 1 + i')^{n}} \quad \text{monto con tasa efectiva}$$

Es, por definición de monto con tasa instantánea

$$\mathbf{C_o\ e^{n.\delta} = C_o\ .\ (\ 1 + i')^{n}} \quad \text{si Co = \$1 y n = 1 período}$$

Resulta

$$\mathbf{e^{\delta} = 1 + i'}$$

Aplicando logaritmos, es

$$\delta * \log e = \log(1 + i')$$

$$\delta = \log(1 + i') \,.\, (1/\log e) \qquad [1]$$

Y como

$$\log e = 0{,}4343$$

Será

$$(1/\log e) = 1/0{,}4343$$

O sea

$$(1/\log e) = 2{,}3026$$

Reemplazando este valor en [1] es

$$\delta = \log(1 + i') \,.\, 2{,}3026$$

Ejemplo1:

Calcular la tasa instantánea que produce un monto igual al que se obtiene con la efectiva del 12% anual.

$i' = 0{,}12$ T.E.A

$\delta = x$

$\delta = \log(1 + i') \,.\, 2{,}3026$

$\delta = \log(1 + 0{,}12) \,.\, 2{,}3026$

$\delta = 0{,}04922 \,.\, 2{,}3026$

$\boldsymbol{\delta = 0{,}1133}$

Ejemplo2:

Calcular la tasa instantánea de interés que corresponde al 12% nominal anual T.N.A. capitalizada mensualmente a la tasa proporcional.

I = 0,12 anual

M= 12 meses

$\delta = x$

$e^{\delta} = 1 + i' \qquad [1]$

Dado que no conocemos el valor de i', debemos calcularlo con los elementos suministrados por el problema.

Para ello, hacemos

$$i' = (1 + i/m)^m - 1$$

$$i' = (1 + 0{,}12/12)^{12} - 1$$

$$i' = 0{,}126825$$

Reemplazando el valor obtenido de i' en [1], es

$e^{\delta} = 1 + 0{,}126825$ y aplicando log.

$\delta = 0{,}05185 \,.\, 2{,}3026 \qquad \delta = 0{,}119389$

EJERCICIOS

Resolver las siguientes situaciones referidas a la capitalización continua.

a) Cálculo del monto con capitalización continua:

1)- $C_o = 1.000$; n= 2 años; $i = 0{,}22$ anual
R = $ 1.552,71

2)- $C_o = 1.200$; n= $3^{1/2}$ años; $i = 0{,}12$ semestr.
R = $ 2.779,66

3)- $C_o = 2.500$; n= 3 años 9 meses; $i = 0{,}08$ trimes.
R = $ 8.300

4)- $C_o = 1.500$; n= 2 años 8 meses; $i = 0{,}04$ bimest.
R = $ 2.844,73

5)- $C_o = 3.000$; n= 4 años 4 meses; $i = 0{,}04$ cuatrim.
R = $ 9,666

b) Cálculo de la tasa instantánea:

2)- $i' = 0{,}22$ anual; $\delta = x$
R = $\delta = 0{,}19885$

3)- $i' = 0{,}24$ semestr.; $\delta = x$
R = $\delta = 0{,}11333$

4)- $i' = 0{,}08$ cuatrim.; $\delta = x$
R = $\delta = 0{,}76952$

5)- $i' = 0{,}06$ trimest.; $\delta = x$
R = $\delta = 0{,}058278$

6)- $i' = 0{,}04$ bimest.; $\delta = x$
R = $\delta = 0{,}039213$

7)- $i' = 0{,}05$ bimest.; $\delta = x$

1)- $i' = 0,24$ anual; $\delta = x$
R = δ = 0,21510

R = δ = 0,048792

8)- $i' = 0,21$ anual; capitaliz. cuatrimest.; $\delta = x$
R = δ = 0,202951

9)- $i' = 0,24$ anual; capitaliz. Mensual; $\delta = x$
R = δ = 0,23762

10)- $i' = 0,24$ anual; capitaliz. Trimestr.; $\delta = x$
R = δ = 0,11653

NUMERO INDICE

Introducción:

Al paso de los años los números índices han llegado a ser cada vez más importantes para la administración como los indicadores de las cambiantes actividades económicas o de negocios; de hecho, su uso se ha convertido en el procedimiento de más amplia aceptación.
Los números índices, constituyen un sencillo artificio para compensar lo términos de una o varias series cronológicas; considerando esta última como una sucesión de observaciones de una variable tomada en instantes sucesivas.
En muchos problemas de economía interesa combinar, mediante un promedio adecuadamente definido de varios índices simples para obtener un índice con el que se trata de reflejar la evolución de una magnitud no fácil de definir concretamente, por ejemplo: coste de vida, nivel de salarios, comercio exterior, financieros, económicos etc.
El número índice: Se define como una medida diseñada para poner de relieve cambios en una variable relacionadas con respecto al tiempo, situación geográfica, ingreso o cualquier otra característica.
Este tipo de número puede definirse también como un valor relativo con base igual a 100% o un múltiplo de 100%, tal como 1, 10 ó 100, que permite medir que tanto una variable ha cambiado con el tiempo.
Calculamos un número índice encontrando el cociente del valor actual entre un valor base. Luego multiplicamos el número resultante por 100, para expresar el índice como un porcentaje. Este valor final es el porcentaje relativo. El número índice para el punto base en el tiempo siempre es 100, y se considera un mes que tenga 31 días, para que el cociente en el mes y restándole 1 al mismo, de una tasa efectiva mensual en tanto por uno, que multiplicada por 100% de una tasa porcentual (T.E.M.)

$$\text{T.E.M. \%} = \left(\frac{\text{Índice actual (mes de 31 días)}}{\text{Índice base (100)}} - 1\right) \times 100\%$$

También: Un número índice es una medida estadística que tiene como finalidad comparar una variable o magnitud económica con el tiempo.
Los números índices miden el tamaño o la magnitud de algún objeto en un punto determinado en el tiempo, como el porcentaje de una base o referencia en el pasado.
Los números índices son importantes concernientes a las actividades de negocios y económicos pueden clasificarse en tres tipos:

1) Índices de precios
2) Índices de cantidades
3) Índices de valores en algún punto anterior en el tiempo (período base) y usualmente el período actual

Cuando solamente está comprendido un solo producto o mercancía, el índice se llama índice simple, en tanto que una corporación que comprende un grupo de elementos, recibe el nombre de número compuesto. Los números índices les ofrecen una forma de medir tales cambios.

- El índice de precios compara niveles de precios de un período a otro. El índice de precios al consumidor (IPC) y el índice de precios nivel general (IPNG), mide los cambios globales de precios de una variedad de bienes de consumo y de servicios, y se le utiliza para definir el costo de vida.
- El índice de cantidad mide que tanto cambia el número o la cantidad de una variable en el tiempo.
- El índice de valor mide los cambios en el valor monetario total; es decir, mide los cambios en el valor en pesos de una variable, combina los cambios en precio y cantidad para presentar un índice con más información.

Que son, cuál es su utilidad y como se obtiene:

Cuando analizamos las condiciones socioeconómicas y financieras de una región, de una provincia, de un país, reiteradamente nos encontramos ante la situación de tener que valorar la evolución en el tiempo o en el espacio de variables numéricas, referida a aspectos diversos de la realidad. Es habitual que debamos encontrar respuestas a preguntas del tipo:

1. ¿En cuánto se incrementó el costo de vida durante el último año?
2. ¿Cuál fue el aumento del precio de la harina en el último mes?
3. ¿Es mayor o menor la producción de Té en Misiones en relación con la de Corrientes?
4. ¿Ascendió el número de visitantes al Parque Nacional Iguazú respecto al año anterior?
5. ¿Crecieron las ventas de la empresa durante el último trimestre?
6. ¿Crecieron o decrecieron las tasas activas y pasivas oficiales y privadas de Entidades Financieras?
7. Etc.

Los Índices: Son medidas estadísticas que sirven para comparar magnitudes de una o más variables en un período (o lugar) dado, con la magnitud de esa misma o mismas variables en otro período (o lugar) de referencia llamado base.
Según el número de variables con las que se trabaja en la construcción de un número índice, se los puede agrupar en dos grandes capitulo:

- Números índices Simples: Se construyen para medir cambios o variaciones (a través del tiempo o del espacio) de una sola variable (Tasas activas o pasivas, tasas en general).
- Números índices Compuestos: Miden los cambios conjuntos de dos o mas variables (I.P.C. o I.P.N.G.; I.P. de la Construcción. Etc.).

Tomando en cuenta la metodología utilizada su construcción y cálculo, los índices compuestos se diferencian en índices de agregados y del promedio de relativos, pudiendo a su vez clasificarse cada uno de ellos en no ponderados y ponderados.
Las formulas de los índices cuyo uso es más generalizado en la práctica: Índices relativos simples, Índices compuesto agregado no ponderado, índice del promedio de relativos no ponderado, *índices de Laspeyres* e *índices de Passche*.
Con respecto a los índices financieros, de las tasas activas y pasivas, calculadas por las Entidades Financieras, según las incidencias de la inflación, del costo financiero del dinero, el riesgo crediticio. Por lo tanto se elaboran los índices financieros en base a las tasas aparentes obtenidas.
El Banco Central de la República Argentina (B.C.R.A) también elabora índices en función de las tasas efectivas mensuales (30 días) o diarias, como índices de actualización de préstamos, índices para la justicia.
El Banco Macro S.A. en Misiones utiliza un promedio de tasas activas (Mix de tasas de Empresas seleccionadas mas 6 puntos), para elaborar un índice, que utiliza el Circulo del Colegio de Abogados, etc., que les sirve para actualizar (Capitalización) de valores monetarios de fechas pasadas, a la fecha actual.
Los sucesivos índices se calculan, habiéndose fijado índice 100 como base para el 1er día de un mes de 31 días, y la tasa correspondiente mensual (T.E.M.) expresada en tanto por uno **i = TEM%/100%**, se aplica el coeficiente de capitalización $(1 + i)^n$, que multiplica a la base = 100 = IA_d; $IA_d = 100*(1 + i)(0/30)$, siendo n = d/30 (un mes de unidad de tiempo 30 días y **d** los días en que se mantiene la tasa correspondiente o su variación dentro del mes, o los días del mes considerado si no varía), en el siguiente mes respecto a la del mes base $IA_1 = 100*(1+ i)^0 * (1 + i_1)^{(d/30)}$, en el segundo mes $IA_2 = 100*(1+ i)^0 * (1 + i_1)^{(d/30)} * (1 + i_2)^{(d/30)} . . . . .* (1 + i_d)^{(d/30)}$ y así susecivamente, como vemos es una productoria por los coeficientes de capitalización correspondiente, cambiando la "i" según la variación de la tasa.
Los índices se pueden elaborar con tasas diarias, mensuales o anuales.

ELABORACION DE INDICES CON TASAS ACTIVAS T.E.M.

DIAS	MESES	INDICE	T.E.M.	CALCULOS n= d/30	
	dic-14	100,0000	2,00%	IA1 = 100,0000*(1+0,0200)(0)30) =	100,0000
31	ene-15	102,3259	2,25%	IA1 = 102,3259*(1+0,0225)(31)30) =	102,3259
28	feb-15	105,6647	3,50%	IA1 = 105,6647*(1+0,0350)(28)30) =	105,6647
31	mar-15	109,5977	3,60%	IA1 = 109,5977*(1+0,0360)(31)30) =	109,5977
30	abr-15	112,8856	3,00%	IA1 = 112,8856*(1+0,0300)(31)30) =	112,8856
31	may-15	117,2043	3,70%	IA1 = 117,2043*(1+0,0250)(31)30) =	117,2043

Si se realiza el cociente entre los índices y se le resta uno (1), se obtiene la tasa relativa del período considerado y si se multiplica por 100%, se obtiene el porcentaje del período (mensual, trimestral, semestral etc.).
Ejemplo:

$$i = \frac{\text{Índice actual}}{\text{Índice base}} - 1 = \text{(tasa del período)}$$

$$i = \frac{112{,}8856\ \text{(Abr/15)}}{102{,}3259\ \text{(Ene/15)}} - 1 = 0{,}1031976\ \text{trimestral tanto por uno}$$

Si multiplicamos por 100% i % = 0,103175 * 100% = 10,31976 % trimestral
Como vemos es una productoria y no una suma de las tasas -> i % = 3,50%+3,60%+3,00% = 10,10% trimest.
10,32% > 10,10%
Dada una tasa efectiva mensual T.E.M. (30 días) pasar tasa diaria aplicando $i_{diaria} = (1 + i)^{(1/30)} - 1$
Para calcular los índices diarios se usa $(1 + i)_{diaria} = (1 + i)^{(1/30)}$ coeficiente diario

INDICES DIARIOS DE TASAS ACTIVAS MES DE ENERO/15			
DIAS	INDICES DIARIOS		T.E.M.
1	100,000000		
2	100,066031		2,00%
3	100,132105		2,00%
4	100,198222		2,00%
5	100,264384		2,00%
6	100,330589		2,00%
7	100,396838		2,00%
8	100,463130		2,00%
9	100,529467		2,00%
10	100,595847		2,00%
11	100,662271		2,00%
12	100,728739		2,00%
13	100,795251		2,00%
14	100,861806		2,00%
15	100,928406		2,00%
16	100,995049		2,00%
17	101,061737		2,00%
18	101,128469		2,00%
19	101,195244		2,00%
20	101,262064		2,00%
21	101,328928		2,00%
22	101,395836		2,00%
23	101,462788		2,00%
24	101,529785		2,00%

25	101,596825		2,00%
26	101,663910		2,00%
27	101,731039		2,00%
28	101,798213		2,00%
29	101,865431		2,00%
30	101,932693		2,00%
31	102,000000		2,00%

INDICES DIARIOS DE TASAS ACTIVAS MES DE MAYO/15			
DIAS	INDICES DIARIOS		T.E.M.
1	100,000000		
2	100,066031		2,00%
3	100,132105		2,00%
4	100,206399		2,25%
5	100,280748		2,25%
6	100,355153		2,25%
7	100,429613		2,25%
8	100,504127		2,25%
9	100,578698		2,25%
10	100,663480		2,56%
11	100,748335		2,56%
12	100,833260		2,56%
13	100,932660		3,00%
14	101,032157		3,00%
15	101,131752		3,00%
16	101,231446		3,00%
17	101,331238		3,00%
18	101,431128		3,00%
19	101,536042		3,15%
20	101,641064		3,15%
21	101,746195		3,15%
22	101,851435		3,15%
23	101,956784		3,15%
24	102,062241		3,15%
25	102,180990		3,55%
26	102,299876		3,55%
27	102,418901		3,55%
28	102,538064		3,55%
29	102,657366		3,55%
30	102,778461		3,60%
31	102,899698		3,60%

INCIDENCIA DE LA INFLACION

Nosotros ya sabemos que el objetivo básico de la matemática financiera es estudiar la variación de las sumas de dinero a través del tiempo, y que esa variación se produce por la acción de la tasa de interés y del transcurso del tiempo. No obstante, cabe observar que en estas consideraciones está implícito el concepto de *moneda constante*, el cual indica que los bienes económicos valen una determinada cantidad constante de dinero a través del tiempo, lo que es razonablemente cierto en una economía no inflacionaria. En efecto, si no hubiera inflación, entonces una suma de dinero determinada debería permitir adquirir siempre la misma cantidad de un cierto bien o producto. Pero todos sabemos que en una realidad inflacionaria ello no ocurre, ya que a través del tiempo es necesario disponer de más dinero para adquirir un mismo bien o producto.

Y a esta altura estaría bien preguntarnos cómo incide esa pérdida de valor adquisitivo del dinero en toda la estructura financiera de una persona o empresa, a lo cual podríamos responder diciendo que ello dependerá de los resultados de la comparación entre el tipo de interés que se cobra por el dinero colocado y la tasa de inflación registrada en ese mismo período. En efecto, el rendimiento real de una inversión será positivo si esa inversión se colocó a una tasa de interés superior a la tasa de inflación; inversamente, si la tasa de interés ganada por la inversión es inferior a la tasa de inflación registrada, entonces el rendimiento real habrá sido negativo. En consecuencia, si a igual tasa de interés ganada corresponde igual tasa de inflación, entonces el rendimiento real de la inversión no existió, o sea que fue nulo.
De estos conceptos se deduce la necesidad de definir la tasa de inflación y el rendimiento real de la inversión, ya que ambos se relacionan con la tasa de interés que nosotros ya conocemos.

Tasa de inflación

Definiremos a la tasa de inflación "θ" como el porcentual, tomado en tanto por uno como cualquier otra tasa, que indica que indica la magnitud de la pérdida de valor adquisitivo del dinero durante un período determinado.
Si bien este dato es susceptible de ser determinado por las partes que intervienen en una contratación cualquiera, en general está dado por organismos oficiales a través de números índices que permiten modificar una suma de dinero a través del tiempo para que recupere el valor adquisitivo que perdió por efectos de la inflación. Este proceso adquirir la misma cantidad de bienes o productos que se puedan adquirir la misma cantidad de bienes o productos que se puedan adquirir con el capital primitivo en el momento inicial, recibe el nombre de indexación. En consecuencia, se comprenderá que este proceso de ajuste por efectos de la inflación no es una compensación por utilizar capital ajeno, que es el concepto del interés, sino que es un ajuste de la cifra inicial que pretende reflejar el mismo poder adquisitivo que esa suma de dinero tenía antes del ajuste. Lógicamente que, luego de ese ajuste, corresponderá calcular los intereses que se pagan por la utilización del capital ajeno.
También se lo define como la variación relativa producida, en un período determinado, en un índice apropiado para medir el nivel de los precios. Puede ser positiva o negativa.
Estos índices son confeccionados estadísticamente en base a los precios de un cierto conjunto de bienes, asignando al momento inicial, una base igual a 100 y siguiendo a partir del mismo, su evolución como un indicador de la inflación. En un momento "n" tendríamos.

$$\theta_{(0,n)} = \frac{Y_{(n)} - Y_{(0)}}{Y_{(0)}} = \frac{Y_{(n)}}{Y_{(0)}} - 1 \quad \text{de donde resulta}$$

$$1 + \theta_{(0,n)} = \frac{Y_{(n)}}{Y_{(0)}} \qquad \text{luego} \quad Y_{(n)} = Y_{(0)} * [1 + \theta_{(0,n)}]$$

$$\frac{1}{1 + \theta_{(0,n)}} = \frac{Y_{(0)}}{Y_{(n)}} \qquad \text{luego} \quad Y_{(0)} = Y_{(n)} \frac{1}{1 + \theta_{(0,n)}}$$

Siendo:
$Y_{(0)}$ = índice del momento inicial (base)
$Y_{(n)}$ = índice del momento n
$\theta_{(0,n)}$ = tasa de inflación entre el momento base y el momento n
$[1 + \theta_{(0,n)}]$ = factor de corrección monetaria (lleva valores de 0 a n, capitalización)

$$\$n = \$0*[1 + \theta_{(0,n)}]$$

$[1 + \theta_{(0,n)}]^{-1}$ = factor de corrección monetaria (trae valores de n a 0, actualización)

$$\$n = \$0*[1 + \theta_{(0,n)}]^{-1} \quad \text{o bien} \quad \$n = \frac{\$0}{1 + \theta_{(0,n)}}$$

Tasa de desvalorización de la moneda $\lambda_{(0,n)}$

Es la variación en el poder adquisitivo, en un periodo determinado, sufrida por la unidad monetaria en su relación con un índice de precios.

$$1 - \lambda_{(0,n)} = \frac{Y_{(0)}}{Y_{(n)}} = \frac{1}{1 + \theta_{(0,n)}}$$

$$\lambda_{(0,n)} = 1 - \frac{Y_{(0)}}{Y_{(n)}} = 1 - \frac{1}{1 + \theta_{(0,n)}} = \frac{\cancel{1} + \theta_{(0,n)} - \cancel{1}}{1 + \theta_{(0,n)}} = \frac{\theta_{(0,n)}}{1 + \theta_{(0,n)}}$$

$$\boldsymbol{\lambda_{(0,n)} = \frac{\theta_{(0,n)}}{1 + \theta_{(0,n)}}}$$

Es decir que puede expresarse como la tasa de descuento equivalente a la tasa de inflación.

Tasa real

Llamaremos tasa real o rendimiento real de una inversión a valor "$\mathbf{i_{(r)}}$" que, expresado en tanto por uno como cualquier tasa de interés, nos permite medir el verdadero rendimiento de una inversión de capital cuando existe inflación. Así se comprenderá que, cuando la tasa de interés cobrada por los depósitos es mayor a la tasa de inflación registrada, se habrá tenido un rendimiento positivo; si la tasa cobrada fue menor que la de inflación, el rendimiento habrá sido negativo; y si la tasa cobrada fue igual a la tasa de inflación, el rendimiento habrá sido nulo.

Por consiguiente, siendo" $\boldsymbol{\theta}$" la tasa de inflación y "$\mathbf{i_{(r)}}$" la tasa real o rendimiento real de una inversión, se presentan las siguientes situaciones "$\mathbf{i_{(r)}}$":

a)- Si $i > \theta$, entonces tendremos: rendimiento positivo → $\mathbf{i_{(n)}} > 0$
b)- Si $i < \theta$, entonces tendremos: rendimiento negativo → $\mathbf{i_{(a)}} < 0$
c)- Si $i = \theta$, entonces tendremos: rendimiento negativo → $\mathbf{i_{(a)}} = 0$

A continuación veremos un ejemplo en el cual se propone determinar un monto, partiendo de un capital inicial que sufre un ajuste por inflación y gana a su vez un interés sobre esa suma ajustada.

Ejemplo 1

Tengo un capital d $ 10.000, colocado durante 1 mes en un banco que paga el 1% mensual real de interés luego del ajuste del capital por efectos de la inflación que, en este supuesto, es del 9% mensual.

Siendo" $\boldsymbol{\theta}$" la tasa de inflación, y siendo "$\mathbf{i_{(r)}}$" la tasa real de interés o rendimiento real de la inversión, tendremos:

n = 1 mes
$i_{(r)}$ = 0,01 mens.
C_o = $ 10.000
θ = 0,09 mens.
$\underline{C_n}$ = x

1ª) paso:
Cálculo del capital ajustado antes de computar los intereses de la colocación.
Ese capital ajustado, que indicaremos con C_a, es un monto con tasa q en un mes, o sea:

$$C_a = C_o . (1 + \theta)^1$$

$$C_a = 10.000 * (1 + 0,09) = 10.000 * 1,09 = 10.900$$

2ª) paso:
Cálculo del monto total. El monto total C_n está dado por la colocación al 1% Mensual del capital ya ajustado por la inflación, y que llamamos C_a

$$C_n = C_a . (1 + i_{(r)})1$$

$$C_n = 10.900 * (1 + 0,01) = 10.900 * 1,01 = 11.009$$

Este monto de $ 11.009 es el total retirado después de 1 mes, al ajustarse un 9% por inflación y colocado al 1% de interés real.

* *Observación importante:* El presente problema se podría haber resuelto en un solo paso, aplicándole al Capital inicial la tasa de inflación y la tasa real juntas, o sea:

$$C_n = \mathbf{C_o . (1 + \theta)} * (1 + i_{(r)}) \quad \textbf{capital ajustado} \qquad [1]$$

$$C_n = \mathbf{10.000 * (1 + 0,09)} * (1 + 0,01) = 10.000 * 1,09 * 1,01 = \mathbf{10.900} * 1,01 = \mathbf{11.009}$$

Nótese que los $ 10.900 obtenidos en el primer cálculo constituyen un monto que incluye en su valor solamente el recupero del poder adquisitivo de los $ 10.000 originales. En consecuencia, se supone que con los $ 10.900 obtenidos se pueden adquirir los mismos bienes o productos que se podían adquirir con los $ 10.000 originales en el momento inicial. Solo a partir de este ajuste se aplica el interés que se paga por la utilización del capital y que se observa en el segundo paso del ejemplo, llegando a un monto final de $ 11.009.
Continuando en el mismo ejemplo. Calcularemos ahora la tasa de interés la cual se deberían haber colocado los $ 10.000 originales para que se produjeran en un mes el monto obtenido de $ 11.009.

n = 1 mes
i = x
C_o = $ 10.000
C_n = $ 11.009

$C_n = C_o. (1 + i)^1$ [2]

$11.009 = 10.000*(1 + i)$

$\dfrac{11.009}{10.000} = (1 + i)$

$1,1009 = (1 + i)$ la propiedad. Reciproca $(1 + i) = 1,1009$

$i = 1,1009 - 1$

luego $i = 0,1009$ o sea, el 10,09% mensual

Del desarrollo de todo el ejemplo se deduce que resultará lo mismo:

- Colocar el capital inicial directamente al 10,09% mensual, ajustar previamente el
- Capital con el 9% de inflación y aplicarle el 1% rendimiento real de interés.

Con esto queda demostrado que para cada "$i_{(r)}$" y "θ" habrá un "i" correspondiente. Y, viceversa, para un "i" y un "θ" dados, habrá un "$i_{(r)}$" que mida directamente el rendimiento real de una inversión cuando existe inflación.
En consecuencia, observando las igualdades [1] y {2] podemos expresar que:

$$\mathbf{C_o. (1 + \theta)} * (1 + i_{(r)}) = C_o. (1 + i)^1$$

Y para Co= $ 1, será:

$$\mathbf{(1 + \theta)} * (1 + i_{(r)}) = (1 + i)^1$$

O bien

$$\mathbf{(1 + i_{(r)}) = \frac{(1 + i)^1}{(1 + \theta)}}$$

Esta relación nos permite calcular el verdadero rendimiento de una inversión al comparar la tasa de interés i obtenida por el capital colocado, con la tasa θ de inflación registrada en ese mismo período, obteniendo un rendimiento positivo, negativo o nulo, según resulte i > q, i < q o bien i = q, respectivamente.
O sea:
a)- Si $i > \theta$, entonces tendremos: rendimiento positivo → $i_{(r)} > 0$
b)- Si $i < \theta$, entonces tendremos: rendimiento negativo → $i_{(r)} < 0$
c)- Si $i = \theta$, entonces tendremos: rendimiento negativo → $i_{(r)} = 0$

<u>Ejemplo 2</u>
Calcular el rendimiento real obtenido por una inversión de un capital que gana un 7% mensual con una tasa inflacionaria del 5%.

$i_{(r)}$ = x
θ = 0,05
i = 0,07

$$(1 + i_{(r)}) = \frac{(1 + i)}{(1 + \theta)} \qquad (1 + i_{(r)}) = \frac{(1,07)}{(1,05)}$$

$$(1 + i_{(r)}) = 1,019048$$

$i_{(r)}$ = 0,019048 rendimiento positivo

<u>Ejemplo 3</u>
Ídem para i = 0,075 y q = 0,10

$i_{(r)}$ = x
θ = 0,10
i = 0,075

$$(1 + i_{(r)}) = \frac{(1 + i)}{(1 + \theta)} \qquad (1 + i_{(r)}) = \frac{(1,075)}{(1,10)}$$

$0{,}977273 - 1 = (1 + i_{(r)})$

$i_{(r)} = -0{,}022727$ rendimiento negativo

Ejemplo 4

Ídem para i = 0,08 y q = 0,08

$i_{(r)} = x$

$\theta = 0{,}08$

$i = 0{,}08$

$$(1 + i_{(r)}) = \frac{(1 + i)}{(1 + \theta)} \qquad (1 + i_{(r)}) = \frac{(1{,}08)}{(1{,}08)}$$

$1 - 1 = (1 + i_{(r)})$

$i_{(r)} = 0$ rendimiento nulo

El valor que toma i (Tasa aparente)

En este momento ya estamos en condiciones en condiciones de comprender que el valor que toma la tasa i irá aumentado nominalmente, a medida que crecen los guarismos de inflación. Y ello es así porque, de lo contrario, los recursos destinados a las operaciones financieras se destinarían a otros tipos financieros más rentables, razón por la cual las entidades financieras que deseen captar más fondos deberán abonar intereses superiores al porcentual registrado de inflación: en consecuencia, se ofrecerán mayores tasas de interés a medida que se verifiquen porcentuales mayores de inflación.

Todo esto implica, de algún modo, que cuando existe inflación la tasa de interés es elevada por que incluye no solamente la retribución que se paga a terceros por el uso del capital, sino que además compensa a ese capital por su perdida de poder adquisitivo. Así, cuando el rendimiento real de una inversión es positivo significa que la tasa de interés contiene a la tasa de inflación; en cambio, si el rendimiento real es negativo significa que el interés que se paga al que prestó su capital no llega a compensar la perdida de valor adquisitivo de ese capital.

De todo esto se deduce que la tasa i es nominalmente elevada si se utiliza en contextos inflacionarios, y será nominalmente baja si se utiliza en países no sujetos a inflación. Por ello es que, cuando nos referimos a la inflación, la tasa i suele llamarse “tasa aparente”.

A continuación desarrollaremos un ejemplo en el cual el interés pagado por la colocación es nominalmente bajo, porque el capital depositado se ajusta por inflación antes de calcular los interese, con lo cual se corrige el inconveniente de la pérdida de valor adquisitivo del capital y se lo equipara a una colocación que se realiza en un contexto no inflacionario, ya que el interés que se cobra con posterioridad al ajuste es el rendimiento real de la inversión.

Ejemplo 5

Un capital de $ 10.000 se coloca durante 1 año por el régimen de depósitos indexados. Calcular el total que se retira al final del año, sabiendo que la tasa anual de inflación es del 80% y que el interés real que se paga por la inversión es del 7% anual.

$n = 1$ mes

$i_{(r)} = 0{,}01$ mens.

$C_o = \$ 10.000$

$\theta = 0{,}09$ mens.

$C_n = x$

1ª) paso:

Cálculo del capital ajustado por inflación

$C_a = C_o . (1 + \theta)^1$ $\qquad C_a$ = capital ajustado

:

$C_a = 10.000 * 1{,}80$

$\mathbf{C_a = 18.000}$

2ª) paso:

Cálculo del monto de inversión

$C_n = C_a . (1 + i_{(r)})^1$

$C_n = 18.000 * 1{,}07$

$\mathbf{C_a = 19.260}$

Obsérvese que el cálculo del monto total se podría haber efectuado en forma directa partiendo del capital inicial, o sea:

$$C_n = \mathbf{C_o. (1 + \theta)} * (1 + i_{(r)}) \quad \textbf{capital ajustado}$$

$$C_n = \mathbf{10.000 * (1 + 0{,}80)} * (1 + 0{,}07) = 10.000 * 1{,}80 * 1{,}07 = \mathbf{18.000} * 1{,}07 = \mathbf{19.260}$$

Ejemplo 6

¿Cuál es la tasa de interés anual a la que debería haberse colocado al capital del ejemplo anterior para obtener igual monto en idénticas condiciones?

C_o = \$ 10.000

C_n = \$ 19.260

n = 1 año

i = x

$$C_a = C_o. (1 + i)^1$$

$$19.260 = 10.000 * (1 + i)$$

$$\frac{19.260}{10.000} = (1 + i)$$

$1{,}9260 = (1 + i)$ la propiedad. Reciproca $(1 + i) = 1{,}9260$

$$i = 1{,}9260 - 1$$

luego $i = 0{,}9260$ o sea, el 92,60% mensual

De estos dos ejemplos se deduce que:

- Es indiferente colocar el capital al 92,60% que ajustarlo con el 80% de inflación más un interés real del 7% anual.
- La tasa de interés pagada es:
  1. 92,60% anual en una supuesta economía con 80% de inflación.
  2. 7% real anual en una economía:
     - no inflacionaria, o bien
     - inflacionaria, pero con el capital inicial ajustado por inflación.

Ejemplo 7

Un capital se colocó al 108% anual nominal con capitalización mensual de intereses. Se desea saber cual es el rendimiento real de la inversión, si la tasa anual de inflación ha sido del 175%.

1ª paso:

Cálculo de la tasa anual efectiva de interés

$$(1 + i/m)^m = 1 + i'$$

$$(1 + 1{,}08/12)^{12} = 1 + i'$$

$$(1 + 0{,}09)^{12} = 1 + i'$$

$$(1{,}09)^{12} = 1 + i'$$

$$i' = (1{,}09)^{12} - 1$$

$$i' = 2{,}81267 - 1$$

$$i' = 1{,}81267$$

Luego la Tasa efectiva anual es del 181,267%

Obsérvese que fue necesario calcular la tasa efectiva anual de interés debido a que la colocación se hizo con el régimen de capitalización subperiódica, lo que significa que es lo mismo colocar un capital al 108% nominal anual, capitalizable mensualmente que colocado al 181,267% efectivo anual. Para este cálculo fue necesario usar la tasa efectiva anual de interés porque la tasa θ de inflación es anual y porqué, al haber capitalización subperiódica con tasa proporcional, el verdadero interés que gana el capital está dado por i' y no por i.

2ª paso:

Cálculo del rendimiento real.

En principio, sabemos que el rendimiento real es positivo por ser $i > \theta$. Para calcular el valor de $i_{(r)}$ emplearemos la relación antes estudiada, sabiendo que el valor de la tasa de interés es de 1,81267 y el valor de la tasa de inflación es de 1,75.

$i_{(r)}$ = x

θ = 1,75

i = 1,81267

$$\frac{(1 + i)}{(1 + \theta)} = (1 + i_{(r)}) \qquad \frac{(1 + 1{,}81267)}{(1 + 1{,}75)} = (1 + i_{(r)})$$

$$\frac{(1 + 1{,}81267)}{(1 + 1{,}75)} = (1 + i_{(r)}) \qquad 1{,}022789 = (1 + i_{(r)})$$

$i_{(r)} = 0{,}022789$ rendimiento positivo

Tasas activas y pasivas:

Como señalamos oportunamente la existencia de intermediarios financieros hace que existan tasas referidas a las operaciones de depósitos (tasas pasivas) y a las operaciones de colocación de fondos (tasas activas).
La entidad financiera para la determinación de su tasa activa parte de la tasa pasiva abonada y en base a ella obtiene la tasa pasiva abonada y en base a ella obtiene la tasa que cubre la tasa que cubre sus costos financieros y luego determinará su Spread considerando los costos operativos, la incidencia impositiva, su margen de beneficios así como las expectativas sobre el desenvolvimiento del mercado.

(1) **Spread**

Lo podemos definir como la diferencia entre la tasa activa y la tasa activa y la tasa pasiva (costo del dinero).
Si definimos

S Spread
TA Tasa Activa
TP Tasa Pasiva
TCF Tasa de costo financiero del dinero
TRA Tasa real activa
TRP Tasa real pasiva

Podemos hacer

$$S(1) = TA - TP \qquad \text{donde consideramos } TP = TCF$$

$$S(2) = \frac{1 + TA}{1 + TP} - 1$$

(2) El spread y la inflación
En S(1) se nota que la misma sufre la influencia de la inflación.
Si partimos de S(1) = TP – TP, y hacemos

$$TA = (1 + TRA)*(1 +\theta) - 1$$
$$TP = (1 + TRP)*(1 +\theta) - 1 \qquad \text{resulta}$$
$$S(1) = [(1 + TRA)* (1 +\theta) - 1] - [(1 + TRP)* (1 +\theta) - 1]$$

Cambiando de signo el 2º término y sacando factor común $(1 +\theta)$

$$S(1) = (1 +\theta)*[(1 + TRA) - (1 + TRP)]$$
$$\mathbf{S(1) = (1 +\theta)*[TRA - TRP]}$$

Se verifica que a medida que crece la inflación debe reducirse el Spread (en términos nominales) para mantener igual rentabilidad.

Si en cambio analizamos

$$S(2) = \frac{1 + TA}{1 + TP} - 1 \qquad \text{vemos que}$$

$$S(2) = \frac{1 + [(1 + TRA)*(1 +\theta) - 1]}{1 + [(1 + TRP)*(1 +\theta) - 1]} - 1 =$$

$$= \frac{(1 + TRA)*(1 +\theta)}{(1 + TRP)*(1 +\theta)} - 1 = \frac{(1 + TRA)}{(1 + TRP)} - 1$$

$$= \frac{(1 + TRA) - (1 + TRP)}{(1 + TRP)} \qquad \mathbf{S(2) = \frac{TRA - TRP}{1 + TRP}}$$

Fórmula que no sufre la influencia de la inflación. El Spread surge como el valor actual, en términos de tasa real pasiva, de la diferencia de tasas reales.

Ejemplo:
Determinar el Spread sabiendo que la tasa pasiva es del 100%, la activa del 120% y la inflación del 95%, en cuánto variará si la inflación desciende al 20% y se mantienen iguales tasas reales.

$$S(1) = TA - TP = 1{,}20 - 1 = 0{,}20$$

$$S(2) = \frac{1 + TA}{1 + TP} - 1 \qquad S(2) = \frac{1 + 1{,}20}{1 + 1} - 1 = 0{,}10$$

Teniendo en cuenta la inflación.

$$i_{(r)} = \frac{(1 + i)}{(1 + \theta)} - 1$$

$$TRA = \frac{(1 + TA)}{(1 + \theta)} - 1 = \frac{1 + 1{,}20}{1 + 0{,}95} - 1 = 0{,}128205$$

$$TRP = \frac{(1 + T0)}{(1 + \theta)} - 1 = \frac{1 + 1{,}00}{1 + 0{,}95} - 1 = 0{,}025641$$

Los nuevos niveles serían

$$S(1) = (1 + \theta)*[TRA - TRP]$$
$$S(1) = 1{,}20*[0{,}128205 - 0{,}02564] = 0{,}1231 \text{ (disminuye)}$$

$$S(2) = \frac{TRA - TRP}{1 + TRP} - 1 = \frac{0{,}128205-0{,}025641}{1{,}025641} - 1 = \frac{0{,}102564}{1{,}025641} - 1 = 0{,}10 \text{ (no varía)}$$

Determinación de la Tasa del Costo Financiero del Dinero:

El Banco Central de la Republica Argentina tenía establecido en el sistema financiero a través de la Cuenta de Regulación Monetaria un esquema operacional que comprende conjuntamente con la fijación de efectivos mínimos (encaje), tasas de compensación por los efectivos mínimos constituidos sobre los depósitos a interés y tasas de cargo sobre los depósitos a la vista. (Ver ley21572 y circulares del Banco Central de la Republica Argentina RF 5, RF 335, etc.).
Esa cuenta debería ser neutra, aunque en la realidad, no lo ha sido por diversos factores económicos y de política monetaria.
Teniendo en cuenta que en la determinación de la tasa de costo financiero (base de la tasa activa) debe producirse una igualación entre ingresos y egresos financieros, consideraremos:

E: efectivo mínimo
CP: capacidad prestable (1 – E)
TC’: tasa de compensación del B.C.R.A. (referida a 30 días) TC*(30/365)
TP’: tasa nominal pasiva del período TP*(d/365)
TCF’: tasa nominal, costo financiero del periodo TCF*(d/365)
d: plazo en días

resulta

$$CP*TCF' = CP*TP' + E\,\{TP' - [(1 + TC')^{(d/30)} - 1]\} \qquad \text{reemplazamos } CP = (1 - E)$$

$$TCF' = \frac{(1 - E)*TP' + E\,\{TP' - [(1 + TC')^{(d/30)} - 1]\}}{1 - E} \qquad (1)$$

Esta fórmula puede simplificarse para 30 días o anualizarla y luego en base a la tasa efectiva anual obtener las tasas de costo para los distintos plazos.

Siendo d = 30 días

$$TCF' = \frac{TP' - E*TP' + E*TP' - E*TC'}{1 - E} = \frac{TP' - E*TC'}{1 - E}$$

$$\text{Y anualizada} \qquad TCF = \frac{TP - E*TC}{1 - E} \qquad (2)$$

Ambas fórmulas (1) y (2) son análogas pero no equivalentes por distinto criterio en la capitalización de la tasa de compensación.

Ejemplo: En el supuesto de un encaje del 30%. ¿Cuál será el costo financiero, en una operación de 90 días, si la tasa pasiva es del 95% y la de compensación del 7% mensual.

De (1)

$$TCF' = \frac{(1 - E)*TP' + E\,\{TP' - [(1 + TC')^{(d/30)} - 1]\}}{1 - E} \qquad (1)$$

$$TCF' = \frac{(1 - 0{,}30)*(0{,}95.90/365) + 0{,}30\,\{0{,}95.90/365 - [(1 + 0{,}07)^{(90/30)} - 1]\}}{1 - 0{,}30} \qquad (1)$$

TVF' = 0,23819 = 0,24 TCF = 0,23819. 365/90 = 0,9660 nominal anual

De (2)

$$\text{Y anualizada} \qquad TCF = \frac{TP - E*TC}{1 - E} \qquad (2)$$

$$TCF = \frac{0{,}95 - (0{,}07.365/30)*0{,}30}{1 - 0{,}30} = 0{,}992143 \text{ nominal anual}$$

Siendo el TCF = a 90 días de

0,992143. 90/365 = 0,244 = 0,24 trimestral

Asimismo podemos tomar en cuenta:

a) Impuesto a los Ingresos Brutos (IB), que gravan la diferencia entre ingresos y egresos.

$$(IB).\ [TCF.\ (1 - E) - (TP - TC.\ E)]$$

b) Contribución al Instituto de Servicios Sociales Bancarios (ISSB). Se calcula sobre los ingresos y no lo abonan las compañías financieras

$$(ISSB).\ TCF.\ (1 - E)$$

En consecuencia (2) queda

$$TCF.\ (1 - E) = TP - E.\ TC + (ISSB).TCF\ (1 - E) + (IB).[TCF.\ (1 - E) - (TP - TC.\ E)]$$

$$TCF = \frac{(TP - E.\ TC).\ (1 - IB)}{(1 - E).\ (1 - IB - ISSB)}$$

Y el Spread Neto o sea calculado sobre la parte de capital prestable neto de efectivo mínimo y de cargas

$$S_n = S_1.\ (1 - E).\ (1 - IB - ISSB)$$

Ejemplo:

Con los datos del ejemplo anterior y recordando que (IB) = 4,1% y (ISSB) = 2%, recalcular la tasa de Costo Financiero

$$TCF = \frac{(0{,}95 - 0{,}30.\ 0{,}07.365/30).\ (1 - 0{,}041)}{(1 - 0{,}30).\ (1 - 0{,}041 - 0{,}020)} = 1{,}013274$$

o se un aumento sobre la anterior del 2,13% por incidencia de las cargas.

EJERCICIOS

Forma de calcular la tasa de inflación en base a los indicies de precios al consumidor, financiero y/o:
La tasa de inflación θ del mes enero se determina haciendo el cociente del índice correspondiente al mes de enero sobre el del mes de diciembre anterior y de la misma manera se puede determinar la tasa de inflación correspondiente a cada mes.

$$\theta = \frac{\text{Índice de enero}}{\text{Índice diciembre}} - 1$$

La tasa de inflación del bimestre enero-febrero se determina haciendo el cociente del índice correspondiente al mes de diciembre anterior.

$$\theta = \frac{\text{Índice de febrero}}{\text{Índice diciembre}} - 1$$

La tasa de inflación del año considerado 2.014 se determina haciendo el cociente del índice correspondiente al mes de diciembre/14, l mes de diciembre/13.

$$\theta = \frac{\text{Índice diciembre/14}}{\text{Índice diciembre/13}} - 1$$

La tasa de inflación θ media mensual del bimestre enero-febrero, por ejemplo se determina.

$$\theta = (1 + \text{índ.Feb/índ. Dic})^{(30/60)} - 1$$

La tasa media mensual del año por ejemplo se determina.

$$\theta = (1 + \text{índ.Dic-14/índ. Dic-13})^{(30/365)} - 1$$

La tasa anual es, asimilando a la de interés, un efectiva. La mensual media, una equivalente (proporcional).

1ª- Conociendo que los índices de precios al consumidor del 1ª trimestre de 1.980 fueron: DIC7 79 = 40.900,5; ENE 80 = 42.980,4; FEB 80 = 45.279,8; MAR 80 = 47.903,5. Hallar:

a) La tasa mensual de inflación en base a dichos índices.
b) La tasa del trimestre total y promedio.
c) La tasa anual de inflación.

2ª- Conociendo que los índices de precios al consumidor de 1.984, en los meses mencionados, fueron: DIC 83 = 243,8; ENE 84 =256,0; FEB 84 = 264,7; DIC 84 = 686,6. Hallar:

a) La tasa de inflación de los meses enero y febrero.
b) La tasa media mensual del primer bimestre.
c) La tasa anual de inflación.
d)

3ª- Si la inflación de: enero fue del 2,1%; febrero 3,5% y marzo 5,4%. Calcular :

a) La tasa de inflación del primer trimestre del año.
b) La tasa media mensual del período.

4ª- Una persona depositó $ 10.000 al 20% anual de interés a un año de plazo. Si la tasa de inflación del período fue del 18%, ¿Qué tasa real de rentabilidad tuvo?, ¿Cuál fue el interés real en el período?

5ª- Un automóvil en el mes de enero costaba % 20.000 y en diciembre del mismo año $ 23.000. El índice de precios de enero 256,0 y diciembre 686,6. Determinar en términos reales en que momento el precio del automóvil es mayor.

6ª- Se tenía en febrero $ 10.000 y se depositó a plazo fijo por 6 meses al 20% anual. Los índices son: de agosto 534,6 y de febrero 458,3.

a) Calcular el porcentaje real de utilidad o pérdida habida.

b) Calcular la tasa de interés a la que debería depositarse para que la utilidad real fuera 5%.

7ª- Considerando la tabla de índices al consumidor de los años 96/97/98.

a) Calcular la inflación correspondiente al período abril/julio de cada año.

b) Comparar los resultados.

8ª- Un señor pide un préstamo de $ 2.000 el 10 de abril de 1.996, si debe devolver el dinero con un interés del 5% anual.

a) ¿Cuánto debe devolver el 10 de julio de 1.998? (Considerar la inflación correspondiente al mencionado tiempo).

b) ¿Cuánto debe devolver si no se le cobran intereses?

Evolución mensual del índice de precios al consumidor.			
MESES/AÑOS	AÑO 1.996	AÑO 1.997	AÑO 1.998
Enero		324.070,6	325.656,2
Febrero		325.316,7	326.791,7
Marzo		323.713,0	326.381,2
Abril	320.570,7	322.643,1	326.481,0
Mayo	320.284,8	322.375,4	326.182,3
Junio	320.293,1	323.109,4	326.805,0
Julio	322.029,7	323.827,4	327.826,4
Agosto	321.780,3	324.360,3	
Septiembre	322.364,7	324.205,0	
Octubre	323.989,6	323.697,1	
Noviembre	323.486,4	323.071,5	
Diciembre	322.564,0	323.622,0	

9ª- Se recibe un préstamo al 14% anual. Si la inflación es del 7% anual. ¿Cuál es la tasa anual real que debe abonarse?

10ª- Una persona depositó $ 5.250 el 16/01/98 y retira $ 5.438 el 16/07/98.

a) Considerar la inflación correspondiente al período al período y determinar la rentabilidad real del dinero.

b) Determinar la tasa efectiva.

c) Determinar la tasa real.

11ª- Si se va a realizar un préstamo al que no se le puede hacer corrección monetaria, ¿Cuál debería ser la tasa a aplicar si se desea un rendimiento real del 12% anual y se prevé una inflación del 0,07% mensual?

12ª- Sabiendo que el Spread (S) es la diferencia entre la tasa activa (TA) y la tasa pasiva (TP) (Tasa del costo financiero del dinero TCF) TP = TCF. TRA = Tasa real activa TRP = Tasa real pasiva

$$S(1) = TA - TP \qquad S(2) = \frac{1 + TA}{1 + TP}$$ Expresiones que permiten calcular el Spread.

Considerar la influencia de la inflación en S(1) y S(2). Sabiendo que: $1 + r = \frac{1 + i}{1 + \theta}$ tasa de inflación

Si consideramos la inflación y reemplazamos en la expresión S(1) y S(2) estas resultan:

$$S(1) = (1 + \theta)*(TRA - TRP) \quad \text{y } S(2) = \frac{1 + TRA}{1 + TRP} - 1$$

13ª- Sabiendo que la tasa pasiva es del 100% la tasa activa del 120% y la inflación del 95%.

a) Determinar el Spread, S(1) y S(2), sin considerar la inflación.

b) Determinar el Spread, S(1) y S(2), considerando la inflación.

c) Analizar los resultados y anotar las conclusiones.

14ª- Sabiendo que la tasa pasiva es del 100%, la tasa activa del 120%.

a) Determinar el Spread, S(1) y S(2). Compararlos.

b) Determinar el Spread, S(1) y S(2), considerando que la inflación es el 29%. Compararlos.
c) Conociendo el valor de S(1) y sabiendo que se lo quiere mantener a pesar de la inflación. Determinar el valor que debe tener la tasa activa.

15ª- Si en el mes de julio/15 la inflación fue del 0,89% y en agosto/15 del 0,95% y el Banco A tiene una tasa activa que corresponde al 30,42% anual y la pasiva corresponde al 7,5% anual.
a) Hallar el Spread del mes de julio y agosto, sin considerar la inflación.
b) Hallar el Spread del mes de julio y agosto, considerando la inflación.
c) Variar la tasa activa del mes de agosto para que el Spread se mantenga igual que en el mes de julio.
d) Variar la tasa pasiva del mes de agosto para que el Spread se mantenga igual que en el mes de julio.
e) Anotar conclusiones sobre los puntos c) y d).

16ª- Si en el mes de julio/15 la inflación fue del 0,89% y en agosto/15 del 0,95% y el Banco A tiene una tasa activa que corresponde al 30,42% anual y la pasiva corresponde al 5,5% anual.
a) Calcular el Spread correspondiente a los dos meses.
b) Cala tasa activa del mes de agosto si se quiere aumentar en 2 puntos al Spread de agosto respecto al mes de julio.
c) Calcular la tasa activa del mes de agosto si se quiere reducir en 2 puntos al Spread de agosto respecto al mes de julio.

17ª- Considerar los datos del ejercicio 16 y calcular cuanto debe ser el valor de la tasa pasiva para que el Spread de agosto tenga el mismo porcentaje de aumento que la inflación.

IMPOSICION

Imposición a interés compuesto: Cuando una persona quiere formar un capital, al cabo de un tiempo puede hacerlo depositando periódicamente, a interés compuesto, en una institución de crédito., cierta cantidad de dinero llamada *cuota*, *imposición* o *anualidad* a una serie de cantidades que se abonan al cabo de períodos constantes de tiempo, con el objeto deformar un capital.
Tratemos el caso en que las *cuotas* o *imposiciones* sean *constantes* y según se paguen al principio o al final de cada período, las llamaremos *adelantadas* o *vencidas*.

Época de valuación: Es aquella en la que se estima el valor que representa cada una de las cuotas. En las imposiciones esta época coincide con el fin del último período.

Deducción de la fórmula fundamental de las imposiciones vencidas: Llamaremos ***c*** a la anualidad; ***i*** al tanto por uno correspondiente al período de tiempo que se fija entre dos cuotas consecutivas; ***n*** al número de imposiciones y S_n al monto total que producen las n anualidades con sus intereses compuestos acumulados.

La anualidad depositada a fines del primer período, gana intereses compuestos durante todos los períodos menos uno; toma pues, en la época de valuación el valor de…………………………………………………… $\mathbf{c\,(1 + i)^{n-1}}$

La segunda cuota gana interés durante un período menos, es decir, da un monto de……………………………………………………………………………… $\mathbf{c\,(1 + i)^{n-2}}$

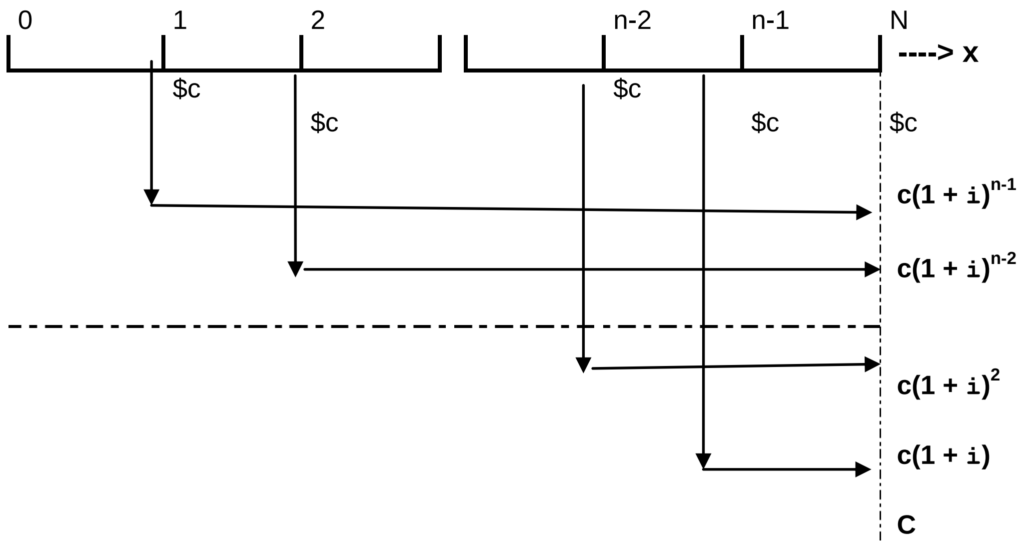
y así sucesivamente.

La antepenúltima cuota gana intereses compuestos durante dos Períodos, luego el ponto que produce es……………………………………… $\mathbf{c\,(1 + I)^{2}}$

La penúltima sólo gana intereses durante un período, luego su valor es……………………………………………………………………………………………… $\mathbf{c\,(1 + i)}$

Y, en fin, la última anualidad no gana intereses, sólo vale………………. **c**

Para mayor ilustración, interpretaremos gráficamente cada uno de los valores adquiridos por las anualidades en la época de valuación.



La suma de todos estos montos será el capital S_n e indicando esta suma comenzando por la última cantidad para que resulte una progresión creciente, se tiene:

$$\mathbf{S_n = \overbrace{c + c(1 + i) + c(1 + i)^2 + \ldots + c(1 + i)^{n-1}}^{N}}$$

Es fácil advertir que cada término de la igualdad (1) se obtiene multiplicando el precedente por $(1 + i)$, o sea que la suma del 2ª miembro está formada `por los términos de una progresión geométrica de razón $q = 1 + i$
Aplicando la fórmula correspondiente

$$S = a\,\frac{q^n - 1}{q - 1} \qquad \text{se tiene} \qquad S_n = c\,\frac{(1 + i)^n - 1}{1 + i - 1}$$

y reduciendo los términos del denominador, se tiene

$$S_n = c\,\frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

Que es la fórmula del capital integrado, o monto acumulado por las imposiciones vencidas.

<u>*Observaciones importantes.*</u> – La fórmula obtenida del capital es válida cuando el período de la tasa, de la anualidad y del tiempo estén expresados en la misma unidad. Como i representa en esta formula la *tasa anual*, puede presentarse el caso en que se capitalicen los intereses semestral, cuatrimestral, trimestralmente, etc. En este caso bastaría reemplazar la *tasa anual* por la *tasa proporcional*, correspondiente al régimen de capitalización, y el tiempo n por el número de períodos de capitalización que hay en n años, es decir, m . n.

Además, vamos a recalcar que las fechas de los pagos de las cuotas deben coincidir con cada período de capitalización.

Deducción de la fórmula fundamental de las imposiciones adelantadas. – Tratemos de obtener la *fórmula del capital* de las imposiciones que se pagan al principio de cada período.

La primera cuota gana intereses compuestos durante los n períodos, Luego el monto producido es ………………………………………………………… **$c\,(1 + i)^n$**

La segunda cuota, hecha al principio del segundo período, gana intereses compuestos durante (n -1) períodos, el valor que adquiere es, pues……………………………………………………………………………………… **$c\,(1 + i)^{n-1}$**

Y así sucesivamente.

La penúltima, colocada durante dos períodos, adquiere un valor de... **$c\,(1 + I)^2$**

La última anualidad, colocada durante un período, adquiere un valor de……………………………………………………………………………………………… **$c\,(1 + i)$**

El monto total S'_n será igual a la suma de los montos de todas las cuotas. Efectuando la suma, empezando por la última cantidad para que resulte una progresión creciente, se tiene:

$$S'_n = c\,(1 + i) + c\,(1 + i)^2 + \dots + c\,(1 + i)n\text{-}1 + c\,(1 + i)n$$

La suma del segundo miembro está formada por los términos de una progresión geométrica de razón $q = 1 + i$ y cuyo primer término es $c\,(1 + i)$, luego aplicando la fórmula de la suma.

$$S = a\,\frac{q^n - 1}{q - 1} \qquad \text{resulta} \qquad S'_n = c\,(1 + i)\,\frac{(1 + i)^n - 1}{1 + i - 1}$$

Y reduciendo los términos del denominador se tiene

$$S'_n = c\,(1 + i)\,\frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

EJERCICIOS

I) ¿Cuál es el capital obtenido al cabo de 20 años mediante cuotas vencidas de \$ 1.000 a la tasa 8% anual, si se capitalizan sus intereses semestralmente? R: S_n = 95.025,52

II) Calcular el capital obtenido al cabo de 12 años mediante cuotas vencidas de \$ 1.000 a la tasa 4% anual de capitalización anual R: S_n = 15.025,80

III) Hallar el capital obtenido mediante el pago de 35 cuotas trimestrales vencidas de \$ 1.200 a la tasa 2 ½% trimestral de capitalización trimestral. R: S_n = \$ 65.913,85

IV) Hallar el capital ahorrado depositando al cabo de cada semestre \$ 1.000 al 6% anual durante 36 años, capitalizando semestralmente R: S_n = \$ 246.667,24

V) Hallar el capital obtenido por 20 cuotas anuales adelantadas de \$ 1.000 a la tasa 0,035 anual de capitalización anual. R: S'_n = \$ 29.269,47

VI) Hallar el capital formado en 10 años, siendo las cuotas adelantadas cuatrimestrales de \$ 1.500 a la tasa 9% anual de capitalización cuatrimestral. R: S'_n = \$ 73.504,02

VII) Calcular el capital obtenido en 15 años y medio mediante cuotas vencidas semestrales de \$ 1.355 a la tasa 5 ¼% anual de capitalización semestral. R: S'_n = \$ 63.635,55

FORMULAS DERIVADAS

<u>Cálculo de la cuota o anualidades.</u> De las fórmulas fundamentales de las imposiciones vencidas y adelantadas se deducen las ecuaciones relativas a la cuota o anualidad correspondiente.
<u>Imposiciones vencidas.</u> Partiendo de la fórmula del capital, se tiene

$$S_n = c \, \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

y despejando c, resulta

$$c = Sn = \frac{i}{(1+i)n - 1}$$ que es la fórmula de la cuota vencida necesaria para formar un capital S_n

<u>Imposiciones adelantadas.</u> Sabemos que

$$S'_n = c\,(1+i)\,\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Despejando c, resulta

$$c = S'_n \, \frac{1}{1+i} \cdot \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

EJERCICIOS

I) Calcular la anualidad o cuota vencida necesaria para formar un capital de \$ 2.000 en 10 años al 4% anual de capitalización anual. R: c = \$ 166,58
II) Hallar una cuota trimestral vencida necesaria para formar un capital de \$ 10.000 en t año y medio al 8% anual de capitalización trimestral. R: c = \$ 246,50
III) Calcular la anualidad adelantada necesaria para formar un capital de \$ 15.000 en 9 años al 3% anual capitalización anual. R: c = \$ 1.433,51
IV) Ídem anterior con capitalización mensual. R: c = \$ 120,85
V) Hallar la cuota adelantada necesaria para formar un capital de \$ 10.000 en 8 años y 4 meses al 12% anual de capitalización bimestral. R: c = \$ 115,91
VI) Hallar la cuota trimestral vencida necesaria para formar un capital de \$ 56.000 en 12 años y 3 meses al 6,75 % anual de capitalización trimestral. R: c = \$ 743,83

Fórmula para la determinación del tiempo. De las fórmulas del capital de las imposiciones vencidas y adelantadas se deducen las fórmulas del tiempo correspondientes.
Tiempo para las imposiciones vencidas.
Siendo:

$$S_n = c \, \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Se tiene

$$S_n .\, i = c\,\{(1+i)^n - 1\}$$

Pasando c al primer miembro

$$\frac{i \cdot S_n}{c} = (1 + i)^n - 1$$

Pasando -1 al primer miembro

$$\frac{i \cdot S_n}{c} + 1 = (1 + i)^n$$

Efectuando la suma de la fracción y la unidad

$$\frac{i \cdot S_n + c}{c} = (1 + i)^n$$

Aplicando la propiedad reciproca y luego logaritmos

$$n \log (1 + i) = \log \{S_n . i + c\} - \log c$$

luego

$$\mathbf{n = \frac{\log \{S_n . i + c\} - \log c}{\log (1 + i)}}$$

Tiempo para las imposiciones adelantadas.

Siendo:

$$S'_n = c\,(1 + i)\, \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

Pasando al primer miembro c(1 + i) como divisor e i como factor

$$\frac{i \cdot S'_n}{c(1 + i)} = (1 + i)^n - 1$$

Pasando 1 al primer miembro

$$\frac{i \cdot S'_n}{c(1 + i)} + 1 = (1 + i)^n$$

Efectuando la suma de la fracción y la unidad

$$\frac{i \cdot S'_n + c(1 + i)}{c(1 + i)} = (1 + i)^n$$

Aplicando la propiedad reciproca y luego logaritmos

$$n \log (1 + i) = \log \{S'_n . i + c(1 + i)\} - \log c(1 + i)$$

luego

$$\mathbf{n = \frac{\log \{S'_n . i + c(1 + i)\} - \log c(1 + i)}{\log (1 + i)}}$$

Fórmula que permite determinar el número de imposiciones adelantadas de capitalización necesarias para formar un capital.

EJERCICIOS

I) ¿Cuántas cuotas vencidas de $ 10.000 es necesario depositar a la tasa de interés compuesto i = 0,02 anual de capitalización anual, para obtener un capital de $ 97.546,28? R: n= 9 cuotas
II) ¿Cuántas anualidades adelantadas de $ 27,49 es necesario depositar a la tasa de interés compuesto 7% anual, de capitalización anual, para formar un capital de $ 1.000? R: n=18 cuotas anuales
III) ¿Cuántos años se tardará en construir un capital de $ 11.769,28 imponiendo al principio de cada mes $ 100 en un Banco que paga el 5% anual y capitaliza mensualmente. R: n=
IV) ¿Cuánto tiempo se tardará en ahorrar $ 54.944,05 imponiendo al fin de cada semestre $ 314 en una compañía que paga el 5% anual y capitaliza semestralmente? R: n=
V) Calcular el monto que se logrará reunir al cabo de un período de 12 meses, si se deposita $ 876 al comienzo de cada mes en un sistema de ahorro que capitaliza en forma mensual el 15% anual.
VI) Determinar el valor de la cuota trimestral adelantada que debe depositarse durante 3 años a fin de reunir $ 15.200 efectuar la valuación a una tasa del 9% semestral con capitalización trimestral.
VII) Al fin de reunir $ 20.000 se efectúan depósitos bimestrales vencidos de $ 1.875, en una institución que abona el 9,9% anual capitalización bimestral. Calcular la cantidad de cuotas necesarias a fin de lograr el objetivo. Proponer tres soluciones prácticas.
VIII) Sustituir una renta de $ 4.000 por semestres vencidos (16% anual), por pagos mensuales vencidos con la tasa del 16% capitalizable mensualmente.
VIX) Determinar la suma reunida después del último de una serie de 12 depósitos trimestrales de $ 876 al 18% anual con capitalización semestral.

AMORTIZACIÓN

Amortización a interés compuesto. Cuando una compañía, un Estado o una persona necesitan cancelar una deuda o rembolsar un empréstito al cabo de cierto tiempo, pueden hacerlo pagando periódicamente, a interés compuesto o simple, o sin interés, cierta suma de dinero llamada anualidad o cuota de amortización.
Anualidad o cuota de amortización: se denomina anualidad o cuota de amortización a los importes que se depositan periódicamente a interés compuesto o simple o sin interés, con el fin de extinguir una deuda.
Las cuotas se llamaran vencidas o adelantadas según se coloquen al fin o al comienzo de cada período, respectivamente.

Deducción de la fórmula fundamental de las amortizaciones vencidas a interés compuesto. _
Llamaremos *c* a la anualidad; i al tanto por uno correspondiente al período de tiempo que existe entre dos cuotas consecutivas; *n* al número de amortizaciones y V_n a la deuda en el momento de iniciar la operación. En las amortizaciones la *Época de valuación* coincide con el inicio de la operación.

La 1ª anualidad pagadera al cabo del 1er período tendrá en ese mismo momento inicial el valor actual de…………………………………… $\dfrac{c}{(1+i)}$

La 2ª cuota de $ c actualizando 2 períodos antes de la efectividad, vale……………………………………………………………………………………… $\dfrac{c}{(1+i)^2}$

y así sucesivamente.

La penúltima cuota tiene en la época de valuación el valor de………. ……………………………………………………………………………………… $\dfrac{c}{(1+i)^{n-1}}$

Y la última tiene un valor actual de………………………………………………. $\dfrac{c}{(1+i)^n}$

Claro está, que la deuda debe ser igual a la suma de los valores actuales de los (*n*) cuotas de $- (c) estimadas en la época de valuación. Sumando esos valores en orden inversos, se obtendrá.

$$V_n = \frac{c}{(1+i)^n} + \frac{c}{(1+i)^{n-1}} + \text{-----} + \frac{c}{(1+i)^2} + \frac{c}{(1+i)}$$

En donde se observa que el 2ª miembro es la suma de n términos de una progresión geométrica creciente, cuyo primer término es $c / (1 + i)^n$ y su razón es $(1 + i)$.

Aplicando la fórmula que da la suma de los términos de una progresión geométrica.

$$S = a \, \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

se tiene

$$V_n = \frac{c}{(1+i)} \; \frac{(1+i)^n - 1}{1 + i - 1}$$

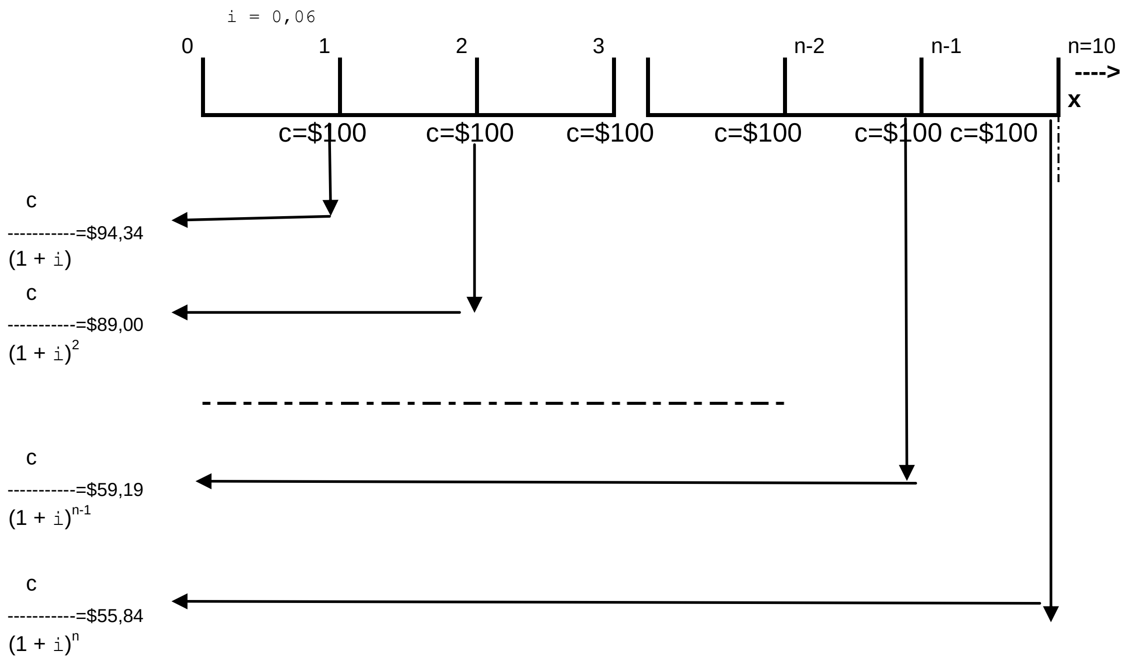
Simplificando, resulta

$$\mathbf{V^n = c \; \frac{(1+i)^n - 1}{i\,(1+i)^n}} \quad \textbf{Fórmula Amortiz. Vencida}$$

que es la fórmula buscada, la cual es valida cuando el período de la tasa , de la anualidad y del tiempo están expresados en la misma unidad. Como i representa en esta ecuación la tasa anual, puede presentarse el caso en que se capitalicen los interese semestral, cuatrimestral, trimestralmente etc.

En este caso bastaría reemplazar la tasa anual por la tasa proporcional correspondiente al régimen de capitalización y el tiempo n por el número de períodos de capitalización que hay en n años.

El dibujo ilustra los valores actuales de las n = 10 cuotas de c = $100, cuya suma equivale a la deuda, en el momento de iniciarse la operación.



En este ejemplo el capital prestado será:

$$\overleftrightarrow{\quad 10 \quad}$$

Vn = \$ 55,84 + \$ 59,19 +. . . .+ \$94,34 = \$ 736,02

Para obtener el interés que cobra el capitalista, se tiene en cuenta que:

10 cuotas de \$ 100 c/u = \$ 1.000
Capital prestado V_n = \$ 736,02
Interés cobrado = \$ 263,98

Cabe agregar que cada pago incluye el interés sobre la deuda pendiente y un pago parcial sobre el capital prestado.

Deducción de la fórmula fundamental de las amortizaciones adelantadas.- Llamaremos V_n a la deuda en el momento de iniciar la operación, se tiene

La 1ª anualidad pagadera al cabo del 1er período tendrá en ese mismo momento inicial el valor actual de…………………………………. $\mathbf{c}$

La 2ª cuota de \$ c pagadera al inicio del 2ª período tendrá en ese mismo momento inicial el valor actual de…………………………………. $\dfrac{\mathbf{c}}{\mathbf{(1 + i)}}$

y así sucesivamente.

La penúltima cuota tiene en la época de valuación el valor de………. $\dfrac{\mathbf{c}}{\mathbf{(1 + i)^{n-2}}}$

Y la última cuota pagadera al inicio del n-simo período su valor actual.. $\dfrac{\mathbf{c}}{\mathbf{(1 + i)^{n-1}}}$

Y como la deuda debe ser equivalente a la suma de los valores actuales de las ***n*** cuotas de \$ ***c*** en el momento de iniciar la operación, se tiene, sumando por el último término:

$$V'_n = \frac{c}{(1+i)^{n.1}} + \frac{c}{(1+i)^{n-2}} + \text{-----} + \frac{c}{(1+i)} + c$$

En donde es fácil advertir, que el 2ª miembro es la suma de los términos de una progresión geométrica, cuyo primer término es $c/(1+i)^{n-1}$ y su razón $(1 + i)$.

Aplicando la fórmula que da la suma de los términos de una progresión geométrica.

$$S = a\,\frac{q^n - 1}{q - 1}$$

se tiene

$$V'_n = \frac{c}{(1+i)^{n-1}}\;\frac{(1+i)^n - 1}{1 + i - 1} = \frac{c}{(1+i)^{n-1}}\;\frac{(1+i)^{n-1}}{i}$$

Multiplicando y dividiendo por $(1 + i)$, resulta

$$V'_n = c(1 + i)\ \frac{(1 + i)^n - 1}{i\,(1 + i)^n} \quad \textbf{Fórmula Amortiz. Adelantada}$$

EJERCICIOS

I) – Calcular el capital amortizado al cabo de 5 años mediante cuotas anuales vencidas de \$ 1.000 colocados a interés compuesto a la tasa 5% anual, sabiendo que se capitalizan anualmente. R: V_n = \$ 4.329,48

II) – Hallar el valor de un préstamo amortizable en 15 años mediante cuotas semestrales vencidas de \$ 1.500 colocadas a la tasa 0,09 anual, sabiendo que se capitaliza semestralmente.
R: V_n = \$ 24.433,33

III) - ¿Qué deuda se puede amortizar en 12 años por medio de cuotas trimestrales vencidas de \$ 1.000 al 20% anual, si se capitaliza trimestralmente? R: V_n = \$ 18.077,16

IV) - ¿Qué deuda se puede amortizar en 35 años por medio de cuotas semestrales vencidas de \$ 10.000 al 5% semestral, si se capitaliza semestralmente? R: V_n = \$ 193.427.

V) – Hallar la deuda amortizada por 12 cuotas adelantadas de \$ 100 a la tasa 0,06 anual, sabiendo que se capitaliza anualmente. R: V'_n = \$ 888,69

VI) – Calcular el valor de un préstamo amortizable en 15 años y medio, sabiendo que se pagan por semestres adelantados cuotas de \$ 1.200 al 10% anual, capitalizados semestralmente.
R: V'_n = \$ 19.646,94

VII) - ¿Qué deuda se puede amortizar en 8 años por medio de cuotas bimestrales adelantadas de \$ 1.000 al 33% anual si se capitaliza bimestralmente? R: V'_n = \$ 17.713,66

Deducción de la fórmula de la anualidad o cuota de amortización.

<u>Anualidad vencida</u>: De la fórmula fundamental se deduce fácilmente la ecuación de la anualidad o cuota, en efecto,

$$V^n = c\ \frac{(1 + i)^n - 1}{i\,(1 + i)^n} \quad \textbf{Fórmula Amortiz. Vencida}$$

despejando ***c,*** resulta

$$c = V^n\ \frac{i\,(1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1} \quad \textbf{Fórmula cuota vencida}$$

<u>Anualidad adelantada:</u> Análogamente se procede para obtener la fórmula de la anualidad adelantada.

$$V'_n = c(1 + i)\ \frac{(1 + i)^n - 1}{i\,(1 + i)^n} \quad \textbf{Fórmula Amortiz. Adelantada}$$

despejando *c*, resulta

$$c = V'_n\ \frac{1}{(1 + i)} \cdot \frac{i\,(1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1} \quad \textbf{Fórmula cuota adelantada}$$

EJERCICIOS

I) – Calcular la cuota de amortización vencida necesaria para pagar una deuda de \$ 10.000 en 10 años al 5% anual, sabiendo que se capitaliza anualmente. R: c = \$ 1.295,10

II) – ¿Qué cantidad es necesario pagar al fin de cada semestre al 6% anual para extinguir en 12 años una deuda de $ 20.000 siendo la capitalización semestral? R: c = $ 1.180,90

III) – ¿Qué deuda se podrá amortizar en 18 años al 3% anual con anualidades vencidas de $ 2.000, capitalizando anualmente? R: V_n = $ 27.506,91

IV) – ¿Qué cantidad es necesario pagar al comienzo de cada año al 3 ½% anual para extinguir en 15 años una deuda de $ 100.000, siendo la capitalización anual? R: c = $ 8.389.

V) – Hallar la cuota de amortización adelantada necesaria para pagar una deuda de $ 200.000 en 11 años y medio al 8% anual, sabiendo que se capitaliza trimestralmente. R: c = $ 6.559,40

Fórmula para determinar el tiempo en amortizaciones vencidas. – Partiendo de la fórmula fundamental vamos a deducir la ecuación que permitirá determinar el número de períodos en que se logra extinguir una deuda.

$$c \; \frac{(1+i)^n - 1}{i\,(1+i)^n} = V_n \quad \textbf{Fórmula Amortiz. Vencida}$$

pasando el denominador al 2ª miembro y aplicando la propiedad distributiva en el 1er miembro se tiene

$$c(1+i)^n - c = V_n\, i\,(1+i)^n$$

pasando el 2ª miembro restando al 1ª miembro y el 2ª término del 1ª miembro pasar sumando al 2ª miembro

$$c(1+i)^n - V_n\, i\,(1+i)^n = c$$

sacando $(1 + i)^n$ como factor común

$$(1+i)^n \{c - V_n\, i\} = c$$

Y aplicando logaritmos

$$n \operatorname{Log}(1+i) + \operatorname{Log}\{c - V_n\, i\} = \operatorname{Log} c$$

luego despejando n, resulta

$$n = \frac{\operatorname{Log} c - \operatorname{Log}\{c - V_n\, i\}}{\operatorname{Log}(1+i)} \quad \textbf{Fórmula del período n (A. Vda.)}$$

Fórmula para la determinación del tiempo en las amortizaciones adelantadas. – Se deduce de la fórmula fundamental de las amortizaciones adelantadas.

$$c\,(1+i) \; \frac{(1+i)^n - 1}{i\,(1+i)^n} = V'_n \quad \textbf{Fórmula Amortiz. Adelantada}$$

pasando el denominador al 2ª miembro y aplicando la propiedad distributiva en el 1er miembro se tiene

$$c(1+i)(1+i)^n - c(1+i) = V'_n\, i\,(1+i)^n$$

pasando el 2ª miembro restando al 1ª miembro y el 2ª término del 1ª miembro pasar sumando al 2ª miembro

$$c(1+i)\,(1+i)^n - V_n\, i\,(1+i)^n = c(1+i)$$

sacando $(1 + i)^n$ como factor común

$$(1+i)^n \{c(1+i) - V_n\, i\} = c(1+i)$$

Y aplicando logaritmos

$$n \operatorname{Log}(1+i) + \operatorname{Log}\{c(1+i) - V_n\, i\} = \operatorname{Log} c(1+i)$$

luego despejando n, resulta

$$n = \frac{\operatorname{Log} c(1+i) - \operatorname{Log}\{c(1+i)\,(1+i) - V_n\, i\}}{\operatorname{Log}(1+i)} \quad \textbf{Fórmula del período n (A. Adela.)}$$

EJERCICIOS

I) – ¿En cuántos años se extinguirá una deuda de \$ 22.236 si se abonan \$n2.000 al fin de cada año y se sabe que la tasa de interés compuesto es de 4% anual, con Capit. Anual. R: n=15 años
II) - ¿Cuántas anualidades adelantadas de \$ 100 es necesario colocar a la y tasa 0,055 anual para pagar un préstamo de \$ 795,30, sabiendo que se capitaliza anualmente? R: n= 10 años

TIEMPO FRACCIONARIO

En los problemas anteriores se han obtenido para *n* valores enteros, pero esta circunstancia raramente acontece en la práctica; por el contrario, se halla frecuentemente un resultado fraccionario. Vamos a prescindir de las soluciones teóricas que tienden a determinar una fracción de cuota pagadera en una época fraccionaria del período, pues conducen a unos cálculos tan difíciles como inútiles.
Trataremos de darle una solución práctica al resolver el siguiente problema:
Problema.- ¿En cuántos años se puede extinguir una deuda de \$ 10.000 pagando \$ 2.500 al fin de cada año a la tasa 6% anual, capitalizando los intereses anualmente?

Utilizando la fórmula correspondiente es:

$$n = \frac{\text{Log } c - \text{Log }\{c - V_n\ i\}}{\text{Log }(1 + i)} \quad \textbf{Fórmula del período n (A. Vda.)}$$

, n = 4,709 años

Primer solución práctica. – (Modificación de la cuota del problema). Dado que el valor *n* es un número fraccionario, se conviene en la práctica *modificar ligeramente la anualidad o cuota*, tomando para *n* el valor por defecto 4 o el valor por exceso 5, según que al deudor le resulte más conveniente aumentar el sacrificio anual o alargar el plazo.
Vamos a calcular la *nueva cuota* que debe pagarse anualmente, eligiendo n = 5, luego.

$$c = V^n \ \frac{i\,(1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1} \quad \textbf{Fórmula cuota vencida}$$

, c = \$ 2.373,96
Es decir, se adopta una anualidad un poco menor que la previamente dada.
Esta solución práctica es aplicable a las amortizaciones vencidas y adelantadas.
Segunda solución práctica. – Considerando el problema último, cuyos datos son:
V_n = \$ 10.000
c = \$ 2.500 cuotas anuales vencidas
i = 0,06 anual (capitalización anual)
Aplicando la fórmula de tiempo n = 4,709 años
La cuota complementaria ***c***' se obtiene de la siguiente manera:

$$c' = (V_n - V_4).(1 + i)^n$$

Reemplazando los valores correspondientes en la fórmula c' y en su correspondiente V_4, se obtiene c' = \$ 1.759,55
Por lo tanto se deberá pagar 4 anualidades o cuotas de \$ 2.500 más una cuota suplementaria de \$ 1.759,55
Esta modalidad la emplea el Banco Hipotecario que no altera el número de pagos y procede a calcular la *cuota complementaria* que se paga al final de la operación.

EJERCICIOS

I) En cuantos años se puede extinguir una deuda de \$ 12.336 pagando cuotas vencidas de \$ 800 al 5% anual, capitalización anual. R: n=10 años c=\$ 802,47 (1ra. Soluc. prác.)

II) Ídem anterior con anualidades adelantadas. R: n=27 años c=$ 802,31 (1ra. Soluc.prác.)
III) En cuantos años se puede extinguir una deuda de $ 7.350 pagando cuotas vencidas de $ 1.000 al 6 ½% anual, capitalización anual. R: n= 10 años c=$ 1.022,42 (1ra. Soluc.prác.)
IV) Ídem anterior con anualidades adelantadas. R: n= 9 años c=$ 1.036,87 (1ra. Soluc.prác.)
V) En cuantos años se puede extinguir una deuda de $ 6.725 pagando cuotas vencidas de $ 500 al 4 ½% anual, capitalización anual. R: n= 21 años c'=$ 57,37 (2ra. Soluc.prác.)
VI) Ídem anterior con anualidades adelantadas. R: n= 19 años c'=$ 511,02 (2ra. Soluc.prác.)
VII) En cuantos años se puede extinguir una deuda de $ 2.528 pagando cuotas vencidas de $ 200 al 7% anual, capitalización anual. R: n= 31 años c'=$ 187,84 (2ra. Soluc.prác.)
VIII) Ídem anterior con anualidades adelantadas. R: n= 25 años c'=$ 202,74 (2ra. Soluc.prác.)
IX) En cuantos años se puede extinguir una deuda de $ 7.000 pagando cuotas vencidas de $ 1.000 al 10% anual, capitalización semestral. R: n= 8 semes. c=$ 1.083,05 (1ra. Soluc.prác.)
X) Ídem anterior con anualidades adelantadas. R: n= 8 semes. c=$ 1.031,50 (1ra. Soluc.prác.)
XI) En cuantos años se puede extinguir una deuda de $ 10.000 pagando cuotas vencidas de $ 1.000 al 6% anual, capitalización anual. R: n= 15 anual c=$ 1.029,63 (1ra. Soluc.prác.)
XII) Ídem anterior con anualidades adelantadas. R: n= 14 años c=$ 1.014,96 (1ra. Soluc.prác.)

AMORTIZACIONES PROGRESIVAS

(Sistema Francés)

Al determinar el valor del tiempo *n* se hizo notar que la *anualidad debe ser siempre mayor que el interés simple del capital adeudado*. La diferencia entre la cuota y el interés nombrado, es la porción de la anualidad que se destina a la disminución de la deuda; de tal forma que en el período siguiente ésta es menor que la deuda primitiva y así sucesivamente. Esta manera de extinguir un capital prestado mediante el pago de cuotas constantes se llama *Sistema Francés* o de *amortización progresiva* y es muy usado entre nosotros.

Amortización real y fondo amortizante.- Se denominan amortizaciones reales de una deuda que se paga mediante cierto número de cuotas, a la porción de cada una de esas anualidades que va extinguiendo progresivamente la deuda. En símbolos, llamando $t, t_2, t_3, \ldots, t_n$ a las amortizaciones reales correspondientes al 1º, 2º y 3º,. . . y nº períodos, se tiene

$$t = c - Vn.i \qquad t_2 = c - (V_n - t)i$$

$$t_n = c . (V_n - t - t_2 - \ldots - t_n\text{-}1) . i$$

Es decir, cada *amortización real* es igual a la diferencia entre la cuota y el interés simple del capital adeudado al comienzo de cada período. Claro está, que a medida que transcurre el tiempo, los intereses que se pagan al acreedor disminuyen y, por lo tanto, la amortización real aumenta.

Se llama *fondo amortizante* de una deuda V_n a la primera amortización real de esa deuda.

En símbolos

$$\mathbf{t = c - V_n . i}$$

o sea, el fondo amortizante es igual a la diferencia entre la cuota y el interés en un período del capital prestado.

Amortizaciones reales sucesivas en función del fondo amortizante-

Nos proponemos encontrar una formula que exprese el valor de $t_2, t_3, \ldots, t_n$ en función del fondo amortizante.

Para ello se debe tener en cuenta que solamente el exceso de la cuota sobre el interés es lo que va extinguiendo el préstamo.

Al comienzo del 2º período, la deuda es $V_n - t)$

Luego al cabo del 2º período, la amortización real

.t_2 = Cuota – Interés de la deuda reducida $(V_n - t)$ o sea

.$t_2 = c - (V_n - t).i$ o bien $t_2 = c - V_n.i + it$

Y como $c - V_n.i = t$ se tiene $t_2 = t + t.i$ y sacando t como factor común, resulta.

$$t_2 = t. (1 + i)$$

Al comienzo del 3º período, la deuda es igual a $V_n - t - t2$, luego, al fin del 3º período

$. t_3 =$ Cuota – Interés de la deuda reducida $(V_n - t - t_2)$ o sea

$$t_3 = c - (V_n - t - t_2).i$$

o bien

$$t_3 = c - V_n.i + i.t + t_2$$

y como

$$.c - V_n.\ i + t.i = t_2$$

Se tiene

$$.t_3 = t_2 + t_2.\ i = t_2\,(1 + i)$$

O bien expresando t_2 en función de t, resulta

$$.t_3 = t.\ (1 + i)^2$$

Y en general es

$$\mathbf{.t_n = t.\ (1 + i)^{\ n-1}}$$

Fórmula que expresa: *que las amortizaciones reales sucesivas de un capital prestado, son respectivamente iguales a los montos del fondo amortizante de ese préstamo, al cabo de un número de períodos igual al orden de la cuota menos uno*.

Observación: Al deducir la fórmula de las amortizaciones reales sucesivas de una deuda se advirtió que:

$$.t_2 = t(1 + i);\ \ t_3 = t_2\,(1 + i);.\ .\ .\ t_n = t_{n-1}\,(1 + i)$$

Es decir, que cada amortización real es igual a la amortización anterior por el binomio (1 + i).

CUADRO DE AMORTIZACION DE UNA DEUDA

Ejemplo: ¿Qué anualidad o cuota es necesario pagar para extinguir una deuda de $ 20.000 en 5 años al 30% anual, capitalizando anualmente?

Primero se calcula la cuota de amortización vencida:

$$\mathbf{c = V^n\ \frac{i\,(1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1}}\quad \textbf{Fórmula cuota vencida (*)}$$

$$\mathbf{c = 20.000\ \ \frac{0{,}30\,(1 + 0{,}30)^5}{(1 + 0{,}30)^5 - 1}}\quad \textbf{Fórmula cuota vencida}$$

$$\mathbf{c = \$\ 8.211{,}63}$$

<u>SISTEMA FRANCES</u>

Períodos n	Amortiz. Real a fin de cada período	Deuda al principio de cada período	Interés a fin de cada período	Total Cuota a fin de cada período
n_1	$t = c - iV_n$	V_n	iV_n	c
n_2	$t_2 = t(1 + i)$	$V_n - t$	$iV_n - it$	c
n_3	$t_3 = t_2(1 + i)$	$V_n - t - t_2$	$iV_n - it - it_2$	c
----	----------	----------	----------	----------
----	----------	----------	----------	----------
n_n	$t_n = t(1 + i)^{n-1}$	$V_n - t - t_2 - \ldots - t_{n-1}$	$iV_n - it - it_2 - \ldots - it_{n-1}$	c

SISTEMA FRANCES

5 30%

Período n	Amortiz. Real pagada a fin de cada año	Deuda al principio de cada período	Interés a fin de cada período	Total Cuota a fin de cada período
n_1	2.211,63	20.000,00	6.000,00	8.211,63
n_2	2.875,12	17.788,37	5.336,51	8.211,63
n_3	3.737,66	14.913,25	4.473,97	8.211,63
n_4	4.858,95	11.175,59	3.352,68	8.211,63
n_5	6.316,64	6.316,64	1.894,99	8.211,63
	20.000,00	0,00	21.058,15	41.058,15

C x n =		Total amortizado		Total Interés		Total Préstamo
41.058,15	=	20.000	+	21.058,15	=	41.058,15

Teniendo en cuenta que las cuotas o anualidades en el Sistema Francés, son iguales en cada período, en consecuencia cada amortización real es igual a la diferencia de la cuota y del interés simple de la deuda que existe al comienzo del periodo respectivo.

Además, el cuadro de la amortización pone en evidencia que a medida que transcurre el tiempo, los intereses que se pagan a los Bancos o Financieras, disminuyen y como consecuencia la amortización real aumenta.

Cuadro donde se muestra con el ejemplo anterior los cálculos desarrollados en filas y columnas.

SISTEMA FRANCES

5 30%

Período n	Amortiz. Real pagada a fin de cada año	Deuda al principio de cada período	Interés a fin de cada período	Total Cuota a fin de cada período
	$t = c - i\,V_n$	$V_{n-t} = Vn - t$	$I = i\,V_n$	C = Fórmula **(*)**
n_1	$8.211,63 - $6.000,00=**$2.211,63**	**20.000,00**	$20.000,00 x 0,3 = **$6.000,00**	**$ 8.211,63**
n_2	$8.211,63 - $5.336,51=**$2.875,12**	$20.000,00-$2.211,63=**$17.788,37**	$17.788,37 x 0,3 = **$5.336,51**	**$ 8.211,63**
n_3	$8.211,63 - $4.473,97=**$3.737,66**	$17.788,37-$2.875,12=**$14.913,25**	$14.913,25 x 0,3 = **$4.473,97**	**$ 8.211,63**
n_4	$8.211,63 - $3.352,68=**$4.858,95**	$14.913,25-$3.737,66=**$11.175,59**	$11.175,59 x 0,3 = **$3.352,68**	**$ 8.211,63**
n_5	$8.211,63 - $1.894,99=**$6.316,64**	$11.175,59-$6.316,64=**$ 6.316,64**	$ 6.316,64 x 0,3 = **$1.894,99**	**$ 8.211,63**
	$ 20.000,00	**0,00**	**$ 21.058,15**	**$ 41.058,15**

Deducción de fórmulas derivadas:

Deducción de la fórmula fundamental de las amortizaciones en función del fondo amortizante.

Para deducir esta fórmula conviene tener en cuenta que solamente la parte de cada cuota llamada amortización real es la destinada a extinguir la deuda; por lo tanto, la suma de ellas es igual al capital adeudado:

$$V_n = t + t_2 + t_3 + \ldots + t_n$$

expresando las amortizaciones reales en función del fondo amortizante se tiene

$$V_n = t + t\,(1+i) + t\,(1+i)^2 + \ldots + t\,(1+i)^{n-1}$$

Y como el 2º miembro constituye la suma de los n términos de una progresión geométrica de primer término igual a t y razón igual a (1+i), resulta

$$V_n = a\,\frac{q_n - 1}{q - 1} = t\,\frac{(1+i)^n - 1}{1 + i + 1} \quad \text{o bien}$$

$$V_n = t \frac{(1+i)^n - 1}{i} \qquad (I)$$

que es la fórmula fundamental de las amortizaciones en función del fondo amortizante; y es la que prefieren los bancos, entre nosotros, sobre todos los que se ocupan de operaciones hipotecarias.
Observando la fórmula **(I)** se advierte que el segundo miembro es igual a la de las imposiciones vencidas, siendo la cuota de capitalización igual al fondo amortizante t.
O sea

$$V_n = t \,.\, S_{n|i}$$

<u>Formula para la determinación del tiempo.</u>
La fórmula fundamental (I) permite determinar el tiempo cuando se conocen V_n y t

$$V_n = t \frac{(1+i)^n - 1}{i} \qquad (I)$$

eliminando el denominador, se tiene

$$i\ V_n = t\ \{(1+i)^n - 1\}$$

o bien

$$1 + \frac{i\ V_n}{t} = (1+i)^n$$

Efectuando la suma y aplicando la propiedad reciproca, resulta

$$(1+i)^n = \frac{i\ V_n - t}{t}$$

y, aplicando logaritmos queda

$$n = \frac{\log(i\ V_n - t) - \log t}{\log(1+i)} \qquad (II)$$

Ejemplo: ¿Cuántos años se ha tardado en saldar una deuda de $ 30.000 si el fondo amortizante anual es de $ 2.200 y la tasa de interés 4% anual capitalizable anualmente?

Con la fórmula (II) se obtuvo n = 11,10 años, reduciendo la parte decimal queda n = 11 años y 36 días.
Para interpretar el resultado fraccionario en la práctica se procede así: se calcula el total amortizado V_n según fórmula (I) durante la parte entera del tiempo, y luego se determina el saldo de la deuda por diferencia de los totales amortizados y sus interés simple correspondiente, que deben pagarse al cabo de la fracción del tiempo.

Total amortizado en 11 años Vn = $ 29.669,97 según fórmula (I)
El saldo de la deuda = $ 30.000 - $ 29.669,97 = $ 330,03
Por lo tanto, el deudor debe pagar a los 36 días el saldo más el interés simple.

$$\text{Saldo + Interés} = \$\ 330{,}03 + \frac{\$\ 330{,}03 \times 36 \text{ días} \times 4\%}{360 \text{ días} \times 100\%} = \$\ 331{,}35$$

<u>Fórmula para la determinación del fondo amortizante</u>.
De la fórmula fundamental (I) se deduce inmediatamente que

$$t = V_n \frac{i}{(1+i)^n - 1} \qquad (III)$$

<u>Total amortizado después de un pago determinado</u>.

Tratemos de calcular el total amortizado después de haber pagado ***p*** cuotas.

Expresando la suma amortizada mediante ***p*** cuotas pagadas, $\mathbf{T_p}$ en función del *fondo amortizante*, se tiene:

$$T_p = t \, \frac{(1+i)^p - 1}{i}$$

Se puede obtener otra fórmula que representa el total amortizado en función de **(V_n)**, teniendo en cuenta que

$$t = V_n \, \frac{i}{(1+i)^n - 1} \qquad \textbf{(III)}$$

Reemplazando **(t)** en la primera relación **(T_p)** resulta

$$T_p = V_n \, \frac{i}{(1+i)^n - 1} \; \frac{(1+i)^p - 1}{i}$$

Simplificando i queda

$$T_p = V_n \, \frac{(1+i)^p - 1}{(1+i)^n - 1}$$

Estado de la deuda en un período determinado.

Vamos a calcular la deuda que queda por amortizar después de haber pagado ***p*** cuotas. La deuda buscada que llamaremos $\mathbf{V_{n-p}}$ es la diferencia entre la deuda total $\mathbf{V_n}$ y la suma amortizada $\mathbf{T_p}$ al cabo de ***p*** períodos, luego

$$V_{n-p} = V_n - T_p = V_n - V_n \, \frac{(1+i)^p - 1}{(1+i)^n - 1}$$

Sacando V_n factor común y efectuando la resta se tiene:

$$V_{n-p} = V_n \, \frac{(1+i)^n \cancel{-1} - (1+i)^p \cancel{+1}}{(1+i)^n - 1}$$

$$V_{n-p} = V_n \, \frac{(1+i)^n - (1+i)^p}{(1+i)^n - 1}$$

EJERCICIOS

1ª- Calcular el total amortizado en hasta el cuarto período en una deuda de \$ 10.000 que se salda en 5 mensualidades al 2% mensual. R= \$ 7920

2ª- Calcular el total amortizado hasta el cuarto período de una deuda de \$ 10.000 que se salda en 5 bimestres al 4% bimestral. R= \$ 7.840,20

3ª- a) Calcular el fondo amortizante de una deuda de \$ 10.000 que se salda al 2% mensual en 5 meses b) Calcular la amortización real del tercer período. R= t_1=\$1.921,58 t_3= \$1.999,22nterés.b) Calcular el fondo amortizante. c) Calcular la amortización del quinto período. d) Calcular la amortización real y el saldo de la deuda en el quinto período

4ª- a) Calcular la cuota de la amortización de una deuda de $ 95.491 que se salda en 8 pagos bimestral es al 5% bimestral de interés. b) Calcular el fondo amortizante. c) Calcular la amortización del quinto período. d) Calcular la amortización real y el saldo de la deuda en el quinto período
5ª- Determinar la deuda pendiente de pago al finalizar el segundo período, sabiendo que la deuda inicial es de $ 30.000 y se salda en 10 meses al 35% anual.
6ª- Se obtuvo un préstamo de $ 200.000 destinado a renovar parte de los bienes de uso de una empresa. Para saldar dicho préstamo, deben abonarse 16 cuotas mensuales de $ 14.730, al 2% mensual. A los efectos de poder estudiar las futuras inversiones de la empresa, la dirección de la misma desea saber cuánto le queda para pagar luego de un año. R= $ 56.088
7ª- Para una deuda de $ 18.000 que será amortizada en base al sistema de amortización progresiva, en 8 cuotas mensuales vencidas y que devenga intereses al 15,6% nominal anual.
Calcular:
a) El importe de la cuota, b) El fondo amortizante, c) El total amortizado y la deuda pendiente inmediatamente después de pagar la quinta cuota, d) El plazo necesario para amortizar el 50% de la deuda, e) El total de intereses a pagar, f) Hacer el cuadro de amortización.
8ª- Para una deuda de $ 12.560 amortizable en 24 cuotas bimestrales que genera intereses del 30% anual con capitalización bimestral, calcular el importe a abonar conjuntamente con la cuota 16 a fin de que las cuotas restantes se reduzcan a la mitad.
9ª- Por un préstamo hipotecario de $ 350.000 que se financia en 120 pagos mensuales vencidos al 15,48% anual capitalización mensual de intereses sobre saldos. Determinar:
a) La cuota mensual, b) Los intereses a abonar hasta el pago 90 inclusive, c) Descomponer el pago número 30 en cuota y amortización, d) En cuanto deben incrementarse las últimas 5 cuotas a fin de cancelar la deuda en el pago número 90.
10ª- Como única información referente a un préstamo otorgado por el sistema francés en 10 cuotas vencidas al 2,5% mensual de interés, se tiene que el interés correspondiente al sexto pago fue de $ 199,06. A los efectos de recomponer los datos a partir de la información. Calcular: a) El importe de la cuota b) La deuda inicial c) El total amortizado y deuda pendiente al finalizar el sexto mes.
11ª- Un cliente solicitó un préstamo en un banco M. el 1ª de diciembre de 2014, al 2,8% mensual, pagó 5 cuotas, quedando un saldo deudor de $ 1316,42 al 3 de mayo del 2015. ¿Cuál era el capital original y el valor de las cuotas en el sistema francés para este préstamo?
12ª- Un cliente del banco B adeuda una suma de $ 15.345,55 y solicita pagar como máximo $ 450 de cuota mensual. La tasa es del 30% anual a) ¿Cuál es el plazo para devolver el dinero, aplicando el sistema francés? B) ¿En cuánto se le acorta el plazo si dispone de $ 600 para la cuota? c) ¿Cuál es el total amortizado en la cuota número 30?
13ª- Para una deuda de $ 18.000 que será amortizada en base al sistema de amortización progresiva, en 8 cuotas mensuales vencidas y que devengan intereses al 15,6% nominal anual. Calcular:
a)El importe de la cuota, b) El fondo amortizante. c) El total amortizado y la deuda pendiente inmediatamente después de pagar la quinta cuota, d) El plazo necesario para amortizar el 50% de la deuda. E) El total de intereses a pagar. F) Hacer el cuadro de amortizaciones.
14ª- Calcular el total amortizado hasta el cuarto período en una deuda de $ 10.000 que se salda en 5 mensualidades al 2% mensual.

SISTEMA ALEMAN

Se dice que un préstamo se reembolsa en un tiempo ***n*** con *amortizaciones constantes* cuando estas son iguales a la enésima parte de la deuda, y se pagan al comienzo o al cabo de cada período los intereses devengados por el capital que se adeuda en ese período. Si el préstamo se designa con la letra **V**, las amortizaciones reales son iguales a $t = V/n$.
En este sistema la deuda disminuye **V/n** por período y, por lo tanto, el interés también disminuye de $(V/n).i$ por período.
Fórmula de las cuotas de amortización vencidas.

Fórmula 1ª Cuota

$$\mathbf{c = \frac{V}{n} + V.i = \frac{V}{n}\{1 + n.i\}}$$

Determinación del importe de la deuda. Para determinar el importe de la deuda en las amortizaciones vencidas se considera la primera cuota

Fórmula 1ª Cuota

$$\mathbf{c = \frac{V}{n}\{1 + n.i\}}$$

por lo tanto,

$$\mathbf{V = \frac{n \cdot c_1}{\{1 + n.i\}}}$$

Fórmula que permite calcular el capital adeudado.
En este sistema, igualmente aplicable a préstamos de amortización periódica, la amortización (cuota capital $\mathbf{t}$) permanece constante, y por lo tanto la cuota total resulta decreciente, al ir disminuyendo los intereses en función de los menores saldos adeudados.
La cuota de amortización de capital (constante para todos los períodos) se determina en base a la siguiente fórmula:

$$\mathbf{t = \frac{V}{n} \qquad (*)}$$

Donde cabe agregar, a los términos ya conocidos:
$\mathbf{t}$ = Cuota de amortización de capital.

En cuanto a la cuota total (amortización más interés) para un período dado, se puede calcular en base a la siguiente fórmula:

$$\mathbf{c_p = \frac{V. \{1 + i\,(n - p + 1)\}}{n} \qquad (**)}$$

Donde los elementos ya conocidos debemos agregar:

- $\mathbf{t}$ = Cuota correspondiente al pago ***p.***
- ***p*** **=** Número de orden del período ***p*** de pago

Tomaremos ahora el mismo ejemplo utilizado en la descripción del Sistema Francés; es decir, un préstamo de $ 20.000 amortizable en 5 cuotas anuales, con una tasa de interés nominal vencida (contractualmente aplicada), del 30% anual.
Aplicando la fórmula $\mathbf{t}$ **(*)** para determinar la cuota de amortización de capital. Tenemos:

V = $ 20.000.   n = 5

$$\mathbf{t} = \frac{\$\ 20.000}{5} = \$\ 4.000.-$$

Si queremos determinar ahora, por ejemplo, el monto de la cuota total (amortizaciones más interés) número 3, tendremos:

V = $ 20.000   n = 5   p = 3   i = 0,30 anual

Aplicando la fórmula de $\mathbf{c_p}$ **(**)**, resulta:

$$c_p = \frac{\$\ 20.000\ \{1 + 0{,}30\ (5 - 3 + 1)\}}{5} = \$\ 7.600.$$

El desarrollo completo sería el siguiente:

SISTEMA ALEMAN

5 30%

Período n	Amortiz. Real pagada a fin de cada año	Deuda al principio de cada período	Interés a fin de cada período	Total Cuota a fin de cada período
T	4.000,00	20.000,00	6.000,00	10.000,00
t_1	4.000,00	16.000,00	4.800,00	8.800,00
t_2	4.000,00	12.000,00	3.600,00	7.600,00
t_3	4.000,00	8.000,00	2.400,00	6.400,00
t_4	4.000,00	4.000,00	1.200,00	5.200,00
TOTAL	20.000,00	0,00	18.000,00	38.000,00

En el sistema alemán, el importe total de intereses puede ser calculado en base a la siguiente fórmula:

$$\mathbf{I = \frac{c_p \cdot i \cdot n \cdot (n+1)}{2}} \quad \mathbf{(***)}$$

Donde a los elementos ya conocidos, debemos agregar:

I = Importe total de intereses devengados por el préstamo.

En el ejemplo considerado, tendríamos:

c_p = \$ 4.000.   i = 0,30 anual   n = 5

Aplicando la fórmula **(***)**, resulta:

$$I = \frac{4.000 \times 0{,}30 \times 5(5+1)}{2} = \$\ 18.000.-$$

La diferencia de intereses pagados, con una misma tasa nominal, según se aplique el sistema francés o alemán, corresponde a una distinta utilización de fondos por parte del usuario. Desde el punto de vista de las entidades, ambos sistemas brindan la misma rentabilidad, a igualdad de tasas efectivas e iguales proporciones de colocación de fondos.

<u>Total amortizado en cierto período de pago T_p</u>.

$$\mathbf{T_p = p \cdot \frac{V}{n}} \quad \mathbf{(IV)}$$

Tomando como datos del ejercicio anterior y aplicando la fórmula (IV), resulta.

$$T_p = 3 \cdot \frac{\$\ 20.000}{5} = \$\ 12.000.-$$

<u>Estado de la deuda en un período determinado V_{n-p}</u>.

$$\mathbf{V_{n-p} = V_n \cdot \{1 - \frac{p}{n}\}} \quad \mathbf{(V)}$$

Tomando como datos del ejercicio anterior y aplicando la fórmula (V), resulta.

$$V_{n-p} = \$\ 20.000 \cdot \{1 - \frac{3}{5}\} = \$\ 8.000.-$$

<u>Valor del interés en un cierto período determinado I_p</u>.

$$\mathbf{I_p = \{ V_n - (p-1) \cdot \frac{p}{n}\} \cdot i} \quad \mathbf{(VI)}$$

Tomando como datos del ejercicio anterior y aplicando la fórmula (VI), resulta.

$$I_p = \{\$\ 20.000 - (3 - 1).\ \frac{3}{5}\}\ .\ 0,30\ =\ \$\ 3.600.-\quad (VI)$$

EJERCICIOS

1ª- Una persona debe amortizar una deuda de $ 60.000, en 6 meses al 2% mensual. Hacer el cuadro de amortización si el sistema aplicado es el de amortización real (alemán).
2ª- Verificar aplicando la fórmula el valor de la cuota: 1;2;3;4;5 y 6
3ª- Por un préstamo acordado por el sistema de amortización real constante, en 10 cuotas mensuales vencidas, se tiene la información que la cuota número 7 asciende a $ 2.500, incluyendo $ 200de interés. Calcular a)La deuda inicial b) La tasa mensual de interés c) La deuda pendiente después de pagada la cuota número 5.
4ª-Un banco otorgó un préstamo a un cliente por valor de $ 50.000 a una tasa de 30% anual con pagos mensuales durante 4 años. Se aplicó el sistema Alemán. Calcular: a) El valor de la cuota 1 y 5.b) Total amortizado en la quinta cuota.
5ª-Del ejercicio anterior, el cliente abona la 5ª cuota el 05-01-15 y no paga más hasta que solicita refinanciación del saldo el 30-08-15 en 60 meses a partir de dicha fecha a) Calcular el valor de la amortización real del período b) Calcular los intereses abonados.

SISTEMA AMERICANO

(Sinking – Found) traducido (Enterrar hundir – Fondos)

En este sistema, aplicable a préstamos, donde el valor total recibido de una Institución Financiera, es amortizada en una sola vez al finalizar el período estipulado, y los intereses se abonan obligatoriamente, aplicando interés simple $\mathbf{i.V_n}$ en subperíodos (m) a tasas proporcionales $\mathbf{i/m}$, acordadas. Para que la amortización total realizada al final del período no fuera exigente, paralelamente con los intereses el deudor abona cuotas voluntarias de amortización (imposiciones), de esta manera al final del periodo tiene saldado el préstamo.

Desarrollo de fórmulas del sistema americano:

```
      iVn    iVn    iVn          iVn + Vn
 i--------i--------i--------i--------//--------i------->
 0                                             n
 ,        t        t        t                  t
```

, t = Fondo de acumulación voluntaria. Deposita el deudor a interés compuesto (Imposición)
,$i.V_n$ = Interés simple pago de servicios obligatorios.

Fórmulas derivadas

Cálculo de la anualidad o cuota (c)

Formada por las cuotas obligatoria $(\mathbf{i.V_n})$ y voluntaria del deudor **"t"**

$$\mathbf{c = i.V_n + t \qquad (1)}$$

Los fondos de acumulación o reintegro t es una serie de cuotas de imposición a interés compuesto a una tasa **i',** que puede ser =>< que **i** tasa fijada para los intereses de la deuda.

$$\mathbf{V_n = t\ \frac{[(1+i')^n - 1)]}{i'}} \quad \text{siendo} \quad \mathbf{t = \frac{V_n\ .\ i'}{(1+i')^n - 1}} \qquad \mathbf{(2)}$$

Luego reemplazando (2) en (1) es:

$$c = i.V_n + V_n \cdot \frac{i'}{(1+i')^n - 1}$$ **sacando V_n c/ factor común**

$$c = V_n \left[i + \frac{i'}{(1+i')^n - 1} \right]$$

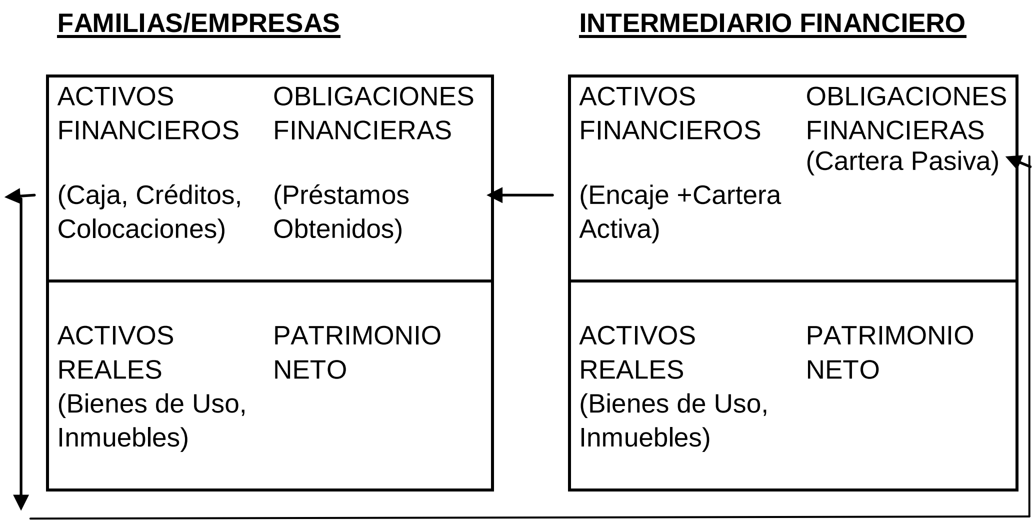
EJERCICIOS

1ª- Se desea amortizar una deuda de $ 5.000, con el sistema americano, en 6 meses al 1,5% mensual. Si el deudor decide formar el fondo amortizante y la tasa propuesta puede ser: i) 1% mensual ii) 2% mensual.
a) Calcular el valor del fondo amortizante y la cuota que debe pagarse en cada caso. b) ¿Cuál de las tres tasas conviene al deudor? ¿Porque?
2ª- En relación al problema anterior determinar la tasa efectiva que debe abonar el deudor en cada uno de los casos.
3ª- Una persona debe $ 30.000 que se amortizará en 10 años junto con los intereses al 12% anual. Para obtener la suma necesaria, deposita en un banco mensualmente cuotas que ganan 11% anual de interés a) ¿Cuál es el valor de la cuota? b) ¿Cuál es la tasa efectiva mensual que se abona?.
4ª- Una deuda de $ 4.000 al 12% anual se capitaliza semestralmente y quiere ser amortizada mediante 6 depósitos semestrales en un sinking-found que paga el 10% anual con capitalización semestral a) Hallar la cuota semestral, b) Hallar la tasa efectiva abonada por el deudor.
5ª- Por un préstamo contraído con sistema americano de $ 40.010 18 meses al 15% anual, constituyéndose un fondo de amortización de la deuda al 1% mensual. Calcular: a) El fondo amortizante o cuota de ahorro b) El desembolso mensual. c) El valor de la tasa mensual para que la operación resulte equivalente al sistema francés.
6ª- ¿Cuál es la deuda que se extingue en 13 meses con una cuota de $ 10.403 si el capital prestado gana el 21% anual capitalización mensual, en tanto que el fondo de acumulación solo percibe el 15% anual capitalización mensual.
7ª- Una empresa desembolsa por mes la suma de $ 2.500 por un préstamo contraído con sistema americano con plazo 3 años. La tasa activa es del 20% y la pasiva es del 10% (anuales con capitalización mensual). Determinar: a) El valor de la deuda b) El plazo en el que se podría extinguir la deuda si se pudiera depositar en el fondo amortizante $ 4.000.
8ª- a) ¿Qué préstamo se puede tomar para pagarlo en 15 trimestres de $ 5.000 cada uno, si el capital prestado gana el 12% de interés anual, en tanto que el fondo de acumulación gana el 16% anual capitalización trimestral? b) Al deudor le conviene este sistema o el sistema de amortización francés al 12% anual capitalización trimestral?
9ª- La compañía AZ obtiene un préstamo de $ 10.000 por 5 años al 6% anual convertible semestralmente. Con el objeto de pagar el capital al término de los 5 años, se establece una cuenta de ahorro que paga el 4% anual convertible semestralmente, un fondo de amortización mediante depósitos semestrales iguales, el primero con vencimiento en 6 meses. Hallar: a) El costo semestral de la deuda b) La tasa nominal convertible que la compañía está pagando para liquidar la deuda. Rep. a) El pago por intereses 300 costos por la deuda $ 1.213,27 b) 7,35% anual convertible semestral
10ª- M desea un préstamo de $ 20.000 a 6 años. El banco nacional presta el dinero al 18% anual. Si la deuda se amortiza en anualidades. El banco regional presta el dinero al 17% anual, si el interés se paga anualmente y el capital al término de 6 años. Si se establece un fondo de amortización, pagando el 15% anual mediante depósitos anuales iguales, el primero con vencimiento en un año. ¿Qué plan es más barato y cuanto se ahorraría anualmente aceptándolo?
11ª- Una empresa obtiene un préstamo de $ 50.000 a 10 meses, acordando pagar el 5% al final de cada semestre y al mismo tiempo, establecer un fondo de amortización para el pago del capital. Hallar a) El costo semestral de la deuda si el fondo paga el 3,5 semestral b) ¿Cuánto habrá en el fondo después del 7ª depósito? c) ¿Qué tanto del incremento al fondo en la fecha del 5ª depósito es debido a intereses. REP. a) $ 6.762,07 b) $ 33.156,38 c) $ 628,75

INTERMEDIACIÓN FINANCIERA

ESQUEMA DE FUNCIONAMIENTO INTERMEDIARIO FINANCIERO

OBJETIVO: El sistema financiero, a través de los intermediarios autorizados que operan en él, asigna (distribuye) los fondos de las unidades económicas superlativas permitiendo que los dispongan las unidades deficitarias.



BANCO CENTRAL DE LA REPUBLICA ARGENTINA

Es la autoridad de aplicación de la ley de Entidades Financieras-

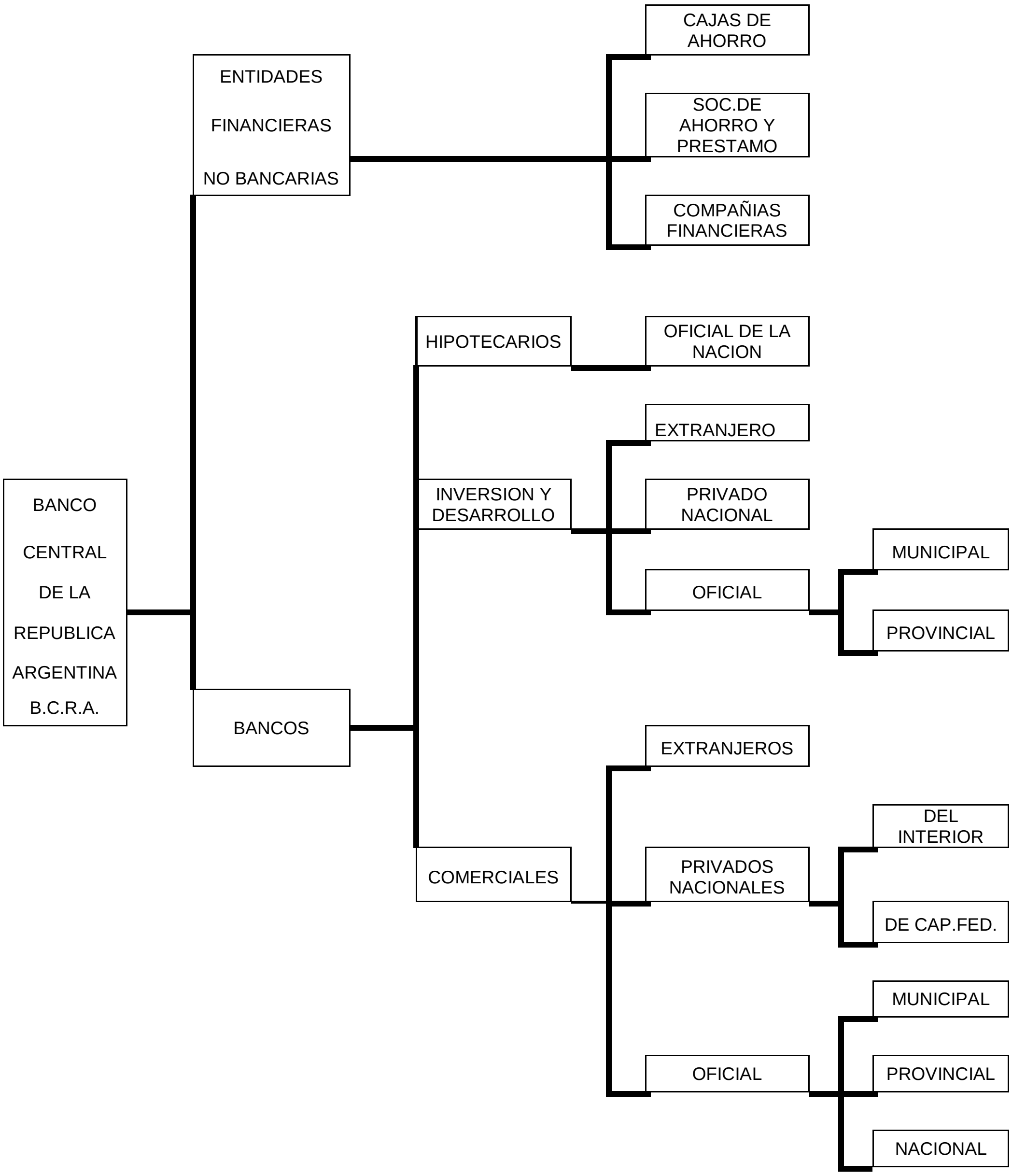
Campos de gravitación:

- Sector monetario y crediticio
- Sector cambiario
- Mercado de Valores Públicos

Funciones:

- Regular el crédito y los medios de pago.
- Ejecutar política cambiaria.
- Administrar reservas en oro y activos externos.
- Vigilar liquidez y funcionamiento del sistema financiero.
- Desarrollar y fortalecer el mercado de capitales.
- Agente financiero del Estado.
- Asesor económico, monetario y cambiario del P.E.N. (Poder Ejecutivo Nacional)

INSTITUCIONES DEL SISTEMA FINANCIERO ARGENTINO



OBJETIVOS DEL B.C.R.A.

- DISEÑAR MECANISMOS PARA ELIMINAR MERCADOS EXTRABURSATILES.
- PRODUCIR REFORMAS NEUTRAS EN CUANTO A LOS STOCKS DE INMOBILIZACIONES Y DECRECIENTES EN LOS FLUJOS.
- MEJORAR LA SITUACION DEL DEFICIT CUASIFISCAL.
- CONTROL DE LA BASE MONETARIA.

OPERACIONES DEL INTERMEDIARIO FINANCIERO

OPERACIONES: Obtener fondos a través de la captación de depósitos del público:

- CUENTAS CORRIENTES.
- CAJAS DE AHORROS.
- PLAZO FIJO

Obtener fondos a través de las operaciones financieras:

- PRESTAMOS DE OTRAS ENTIDADES FINANCIERAS (CALL MONEY).
- REDESCUENTOS (CON EL B.C.R.A., CUMPLE LA MISMA FUNCION QUE LOS CALL MONEY).

Colocar fondos a través de:

- PRESTAMOS PERSONALES
- PRESTAMOS A EMPRESAS Para distintos fines, con o sin
- PRESTAMOS AL GOBIERNO garantía de bienes reales
- PRESTAMOS A OTRAS ENTIDADES FINANCIERAS (CALL MONEY).

Nota: Son préstamos o depósitos interbancarios solicitados vía teléfono, en corto tiempo dentro de la semana, generalmente en la última semana del mes, ya que se utiliza para equilibrar el Encaje legal y técnico.

PRINCIPALES RELACIONES TECNICAS A CUMPLIR POR ENTIDADES FINANCIERAS

- Efectivo mínimo.
- Efectivo en B.C.R.A.
- Relación total depósitos en Patrimonio Neto Computable (total depósitos menor/igual 15 P.N.C.).
- Restricción en la tenencia de bonos.
- Restricción en la utilización de los fondos propios (PROM. R. P NETA + PROVISIONES)
- Previsiones por riesgo de incobrabilidad de operaciones a tasa no regulada.
- Relación activo inmovilizados/patrimonio neto.
- Suscripciones de los activos financieros.
- Márgenes de redescuentos.

RENTABILIDAD DEL INTERMEDIARIO FINANCIERO

Costo de captación (Tasa de Captación + Plus)	Tasa Pasiva
• Encaje	
• Costo impositivo directo	Diferencia entre Tasa Activa
• Costo operativo a administrativo	y Tasa Pasiva = SPREAD BRUTO
• Utilidad Neta = SPREAD NETO	
Tasa de Colocación del Crédito	Tasa Activa

Para el mercado financiero argentino se utiliza la palabra SPREAD se hace referencia al BRUTO.
Tasa de interés = es el precio que se paga por disponer de los fondos.
Tasa Activa = es el precio que paga el solicitante de los fondos y que percibe el banco.
Tasa Pasiva = es el precio que paga el banco y que percibe el inversor.

GARANTIAS

Lo estipula el B.C.R.A. de acuerdo a la época y momento monetario.

CAJA DE AHORRO + PLAZO FIJO	99 % hasta $........ 75 % sobre el excedente de $……y hasta $……… 50 % sobre el excedente de $......y hasta $........ 1 % sobre el excedente de $......
CUENTA CORRIENTE	99 % hasta $....... 1 % sobre el excedente de $.......
PLAZO FIJO TRANSFERIBLE Cuya utilidad haya sido ad- Querida vía endoso.	1 % del capital impuesto

ENCAJE

ENCAJE LEGAL: Cantidad de moneda legal fijada por el B.C.R.A., que debe tener libre de disponibilidad, una entidad en función de sus depósitos.
ENCAJE TECNICO: Cantidad de moneda legal que deben tener los bancos para garantizar la realización de sus operaciones habituales.
ENCAJE NO REMUNERADO: Proporción de los depósitos que el B.C.R.A. obliga a mantener a las entidades en forma improductiva.
ENCAJE REMUNERADO: Proporción de los depósitos que el B.C.R.A. obliga a mantener a las entidades y por el cual el B.C.R.A. paga una tasa de interés a las entidades.
CARACTERISTICAS:

1. Se fijan en general como un porcentaje de los depósitos.
2. Existen encajes diferenciados para los distintos plazos-
3. Se utilizan como un elemento del manejo monetario.

EJEMPLO: para disponer de $ 1.- para prestar debo tomar más depósito producto del efecto del encaje.

DEPOSITO = CAPITAL PRESTABLE + ENCAJE

$$1 = (1 - e) + e$$

Dividiendo ambos miembros por **(1-e)**, obtenemos cocientes:

$$\frac{1}{(1-e)} = \frac{(1-e)}{(1-e)} + \frac{e}{(1-e)}$$

$$\text{DEPOSITO } \frac{1}{(1-e)} = \text{CAPITAL PRESTABLE } 1 + \text{ENCAJE } \frac{e}{(1-e)}$$

ENCAJES E INMOBILIZACIONES

ENCAJES

	PLAZOS	ENCAJE %
PLAZO FIJO	7 a 30 días	3,00
PLAZO FIJO	30 a 90 días	1,50
PLAZO FIJO	más de 90 días	0,00
C.A. COMUN		25,00
C.A. ESPECIAL		1,50
CUENTA CORRIENTE		25,00
PASES PASIVOS (ídem Plazo Fijo)		
ACEPTACIONES		3,00

INMOVILIZACIONES

DEPOSITOS ESPECIALES (A 1241)	Monto Fijo	= 25 a 30%
DEPOSITOS ESPECIALES (A 1242)	Promedio Mensual	= 15 a 20%
ACTIVO FINANCIERO S/CAJA DE AHORRO		50,00%
DEPOSITO INDISPONIBLE		6,50%

OTROS CONCEPTOS

TASA PROMEDIO: Sumatoria de las tasas dividiendo la cantidad de tasas que Ingresan en dicha sumatoria.

$$\text{T.P.} = \frac{\text{(SUMA) } t}{N}$$

donde t = tasa
n = cantidad de tasas

TASA PROMEDIO PONDERADA: Es la tasa promedio que considera la incidencia proporcional de cada tasa del factor que se quiere ponderar.
Ejemplo: Tasa promedio ponderada de depósitos, de préstamos, de call, etc.

$$\text{T.P.P.} = \frac{\text{(SUMA) } t \,.\, f}{\text{(SUMA) } f}$$

donde t = tasa
n = cantidad de tasas
f = factor ponderativo

TASAS DE EQUILIBRIO (BRAK – EVEN): Son las tasas activas y pasivas tal que dado la tasa pasiva o activa respectivamente genera una utilidad nula.

EJEMPLO DE LA RELACION ENTRE DEPOSITOS, ENCAJE Y MARGEN PRESTABLE

DEPOSITOS (en millones)		ENCAJE %	ENCAJE PESOS	MARGEN PRESTABLE
CUENTA CTES.	200,00	15,00%	30,00	170,00
PLAZO FIJO 30 días	180,00	15,00%	27,00	153,00
60 días	140,00	13,00%	18,20	121,80
90 días	130,00	12,00%	15,60	114,40
120 días	40,00	6,00%	2,40	37,60
180 días	30,00	3,00%	0,90	29,10
360 días y más	50,00	0,00%	0,00	50,00
CAJA AHORRO	150,00	15,00%	22,50	127,50
O/DEPOSITOS	600,00	10,00%	60,00	540,00
CALL MONEY	0,00	100,00%	0,00	0,00
CCTE. BCRA	60,00	100,00%	60,00	0,00
TOTAL	1.580,00	26,27%	236,60	1.343,40
ENCAJE LEGAL		15,00%	14,97%	
ENCAJE TECNICO		15,20%	14,97%	
DIFER. %, ENCAJ. LEG. Y PESOS			0,03%	
CALL MONEY SE TOMA O PRESTA PARA ENCAJ. LEG.			**0,40**	0,47
DIFER. %, ENCAJ. TECN. Y PESOS			0,23%	
CALL MONEY SE TOMA O PRESTA PARA ENCAJ. TECN.			**3,56**	4,20
	DEPOSITO	MARG. PBLE.	ENCAJES	
LEGAL	1,176470588	1,00	0,176470588	
	1580,470588	1.343,40	237,0705882	0,47
TECNICO	1,179245283	1,00	0,179245283	
	1584,198113	1.343,40	240,7981132	4,20

En este ejemplo el encaje legal es de 15%, el técnico se obtuvo en un 15,20%, el promedio del encaje en un tiempo dentro del mes es de 14,97%,estando debajo del legal y técnico, Por lo tanto para equilibrar con el legal se necesita $ 0,47 millones de pesos, y para el técnico se necesita $ 4,20 millones de pesos. En el cuadro siguiente vemos que al tomar un CALL-MONEY de $ 4,20 millones, llegamos al encaje % del técnico.

DEPOSITOS (en millones)		ENCAJE %	ENCAJE PESOS	MARGEN PRESTABLE
CUENTA CTES.	200,00	15,00%	30,00	170,00
PLAZO FIJO 30 días	180,00	15,00%	27,00	153,00
60 días	140,00	13,00%	18,20	121,80
90 días	130,00	12,00%	15,60	114,40
120 días	40,00	6,00%	2,40	37,60
180 días	30,00	3,00%	0,90	29,10
360 días y más	50,00	0,00%	0,00	50,00
CAJA AHORRO	150,00	15,00%	22,50	127,50
O/DEPOSITOS	600,00	10,00%	60,00	540,00
CALL MONEY	4,20	100,00%	4,20	0,00
CCTE. BCRA	60,00	100,00%	60,00	0,00
TOTAL	1.584,20	26,27%	240,80	1.343,40
ENCAJE LEGAL		15,00%	15,20%	
ENCAJE TECNICO		15,20%	15,20%	
DIFER. %, ENCAJ. LEG. Y PESOS			-0,20%	
CALL MONEY SE TOMA O PRESTA PARA ENCAJ. LEG.			**-3,17**	-3,73
DIFER. %, ENCAJ. TECN. Y PESOS			0,00%	
CALL MONEY SE TOMA O PRESTA PARA ENCAJ. TECN.			**-0,00**	-0,00
	DEPOSITO	MARG. PBLE.	ENCAJES	
LEGAL	1,176470588	1,00	0,176470588	
	1580,470588	1.343,40	237,0705882	-3,73
TECNICO	1,179245283	1,00	0,179245283	
	1584,198113	1.343,40	240,7981132	-0,00

BIBLIOGRAFIA

- TAJANI, Miguel M.: “Matemática Financiera”. Nueva Edición. Cesarini Hnos. Editores. Año 1.996.
- GIANNESCHI, Mario A.: “Matemática Financiera”. Fascículo 1 y Fascículo 2. Facultad de Ciencias Económicas Universidad Nacional del Nordeste Resistencia Chaco 1.975.
- DI VICENZO, Osvaldo N.:”Matemática Financiera”. 3° Edición. Editorial Kapeluz.
- GIARRIZZO, Alicia Mirta:”Matemática Financiera”. A-Z Editora.
- SEMILLA. Carlos A. – DE LA VEGA, Eduardo: “Matemática Financiera”. Escuela de Capacitación y Desarrollo. Ex Banco Provincia de Misiones.
- MURIONI, Oscar – TROSSERO Ángel A. “Calculo Financiero”. Editorial TESIS.
- Comunicación A 4712 BCRA.
- BCRA. Efectivo Mínimo “A” 4916, texto ordenado 26-02-09
- Apuntes tomados en clases Año 2.009, por la Exalumna Kagerer Gabriela S., Estudiante Adscripta en el 2.010-2.011, hoy Profesora en Ciencias Económicas egresada en el 2.010, egresada Adscripta en el 2,012-2.013-2.014. Apuntes tomados en clases Año 2.012, por la Exalumna Prieto Andrea Carolina, hoy Profesora en Ciencias Económicas a partir de diciembre de 2.012. Apuntes tomados en clase del egresado Adscripto Sena Jorge Aníbal años 2.007-2.008, como Profesor Adscripto 2.012-2.013.