Universidad Nacional del Camahue. Facultad de Ingeniería. Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Maestranda

Claudia Dolores Lagraña

Modelo de competencias matemáticas elaborado para la resolución de problemas de ecología evolutiva

Tesis de Maestría presentada para obtener el título de "Magíster en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales"

"Este documento es resultado del financiamiento otorgado por el Estado Nacional, por lo tanto, queda sujeto al complimiento de la Ley N°26.899".

Directora

Mgter. Adriana Gabriela Duarte

Co- Directora

Dra. Maria Cecilia Lutz

Neuquén, 2019

Tesis de Maestría

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Un Modelo de Competencias Matemáticas elaborado para la Resolución de Problemas de Ecología Evolutiva

LAGRAÑA CLAUDIA DOLORES

Mg. DUARTE ADRIANA GABRIELA

Director de Tesis

Dra. LUTZ MARÍA CECILIA

Co-Director de Tesis

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional del Comahue

NEUQUÉN – ARGENTINA

AÑO 2019

RESUMEN

La matemática, en tanto ciencia aplicada, está presente en otras disciplinas aportando modelos matemáticos que posibilitan la cuantificación de sus fenómenos. No obstante, desde el supuesto de que no es suficiente aplicar sólo conocimientos matemáticos para resolver los problemas que se presenten en ellas, que además es necesario poner en escena capacidades y destrezas que utilicen estos conocimientos, esta tesis se centró en estudiar y analizar las competencias matemáticas que se deberían poner en juego al resolver problemas, en particular en el área de la Ecología Evolutiva.

En el proceso de hallar la solución se involucrarían, entre otras, un conjunto de competencias matemáticas, las que serían factibles de ser identificadas. Para ello, basados en el Modelo Teórico Local como marco teórico y metodológico, a partir de la elección y el estudio del tema de interés, de la selección del espacio de problemas, del análisis de las actuaciones de un resolutor ideal y de la contraposición con las actuaciones de resolutores reales, se logró elaborar un Modelo de Competencias Matemáticas, el cual permitió describir la conducta posible de quienes estén abocados a la resolución de problemas de Ecología Evolutiva, particularmente en el dominio Poblaciones.

Palabras claves: modelo de competencias matemáticas, resolución de problemas, ecología evolutiva.

ABSTRACT

Mathematics, as applied science, is present in other disciplines, providing models that enable the quantification of its phenomena. However, from the assumption that it is not enough to explain only mathematical knowledge to solve the problems that arise in them, that it is also necessary to stage skills and abilities that use other knowledge, this thesis focused on studying and analyzing the competences mathematics that should be put into play when solving problems, particularly in the area of Evolutionary Ecology.

In the process of finding the solution, a set of mathematical competences would be involved, among others, which would be feasible to be identified. To do this, based on the Local Theoretical Model as a theoretical and methodological framework, based on the choice and study of the topic of interest, the selection of the problem space, the analysis of the actions of an ideal resolver and the opposition to the actions of real resolvers, it was possible to elaborate a Model of Mathematical Competences, which allowed to describe the possible behavior of those who are destined to the resolution of evolutionary ecology problems, particularly in the Population domain.

Keywords: model of mathematical competences, problem solving, evolutionary ecology.

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer muy especialmente a la Mgter. Adriana Duarte, quien además de directora, es una amiga a quien considero un ejemplo a seguir tanto en lo profesional como en lo personal. Gracias Adriana por todo lo que me enseñaste y por tu aporte invaluable a este trabajo.

También quiero agradecer a la Dra Cecilia Lutz, co-directora de esta tesis, quien me mostró la grandeza de su persona, y me enseñó lo que es tener un criterio amplio. Gracias Cecilia por tus aportes y porque sin tu apoyo, no hubiese recorrido este camino.

Agradezco a mi familia, particularmente a mis padres, Blanca y Mariano, por el aliento que siempre me dieron para que continuase en la senda del estudio, inculcándome el amor hacia el trabajo. Y a mi compañero de la vida, Andrés, por su compañía y por esperarme el tiempo que estuve ocupada.

Asimismo, agradezco a mis amigas y colegas, Liliana, Marga, Marta, Norma, Silvia y Roxana, por sus continuos alientos, y en especial a Nancy por confiar en mí, alentándome y dándome el tiempo que necesitaba para concluir este trabajo.

Un agradecimiento especial para Graciela, amiga más que colega, quien siempre insistió para que terminase la Maestría. Por más que ya no esté con nosotros, siempre está presente.

A mis alumnos quienes son el por qué y el para qué de mi trabajo.

Además, quiero agradecer a los Docentes de la Maestría por compartir sus incalculables conocimientos, y a los No Docentes, muy especialmente a Angélica, por su aliento, cordialidad y buena disposición.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

Este proyecto de investigación se encuadra en el Área de Educación y se sitúa en la Enseñanza en Educación Superior. En ella, las Ciencias Básicas aportan conocimientos comunes a todas las carreras, pretendiendo lograr una sólida formación conceptual que sirva de sustento para las disciplinas específicas y brindando a los estudiantes un conjunto de saberes, competencias y habilidades que faciliten su tránsito académico en los espacios curriculares de formación específica de su profesión futura. Siendo la matemática una de esas ciencias básicas, se ha detectado una problemática común a numerosas disciplinas que necesitan su aplicación para resolver problemas propios. Esto hizo que surgiera nuestro interés por estudiar las competencias matemáticas puestas en juego en dichas resoluciones, para poder comprender las razones de las evidentes dificultades de los estudiantes para entender, juzgar, hacer y usar las matemáticas en contextos propios de asignaturas correspondientes al ciclo de formación profesional. En nuestro caso, nos interesamos por esta problemática en un contexto particular, en el campo de la Ecología Evolutiva.

Creemos que en el aprendizaje de la Ecología Evolutiva se ponen en juego algo más que contenidos disciplinares, que se involucran en este proceso competencias tanto del área específica como de otras áreas científicas, entre ellas, la matemática, y que el conocimiento de cuáles son estas competencias matemáticas puede colaborar en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Ecología Evolutiva. Por ello, para estar en condiciones de comprender en mayor profundidad acerca de cuáles son estas competencias matemáticas y el uso que se hace de ellas para lograr el aprendizaje significativo de los contenidos específicos de la Ecología Evolutiva, en esta tesis se abordó el tema “Un modelo de competencias matemáticas, aplicado en la resolución de problemas de Ecología Evolutiva”.

Este trabajo forma parte de una investigación más amplia con un objetivo general que es el de:

- *Comprender en mayor profundidad acerca del tipo de competencias matemáticas y el uso que se hace de ellas para lograr el aprendizaje de los contenidos específicos de la Ecología Evolutiva.*

Dada la extensión de este problema, decidimos centrarnos en:

- *Comprender y describir las competencias matemáticas que se requieren para resolver problemas de Ecología Evolutiva, a partir de la elaboración de un Modelo de Competencias Matemáticas.*

A su vez, para la consecución de los mismos, se estableció que se debería (objetivos específicos):

- *Identificar los elementos de competencias matemáticas necesarios para resolver los problemas de Poblaciones, en particular, los referidos a Crecimiento Poblacional y Tablas de Vida.*
- *Dilucidar si existen competencias matemáticas puestas en juego la resolución de problemas de Ecología Evolutiva y, de ser así, establecer cuáles son.*
- *Caracterizar la conducta competente en función del espacio teórico de problemas.*

El trabajo que presentamos aquí se circunscribe al paradigma interpretativo de investigación, con la utilización de métodos cualitativos. Como marco teórico – metodológico de trabajo nos situamos en el enfoque del Modelo Teórico Local, que es un método adecuado para investigaciones educativas en las que se pretende dar cuenta de fenómenos que se producen en situaciones locales de enseñanza y aprendizaje, y que propone analizar, de manera localizada y específica, distintos aspectos o componentes de los fenómenos de la matemática educativa.

Bajo este enfoque se considera que es posible elaborar un modelo de competencia que proporcione una descripción de la conducta de un sujeto en un dominio del saber, un modelo que permita explicar y predecir el conjunto de actuaciones posibles en ese dominio y, del cual se sabe que, si las cosas fueran como las caracteriza el modelo elaborado, los fenómenos se producirían como se han descrito.

Teniendo en cuenta el encuadre metodológico presentado, y entendiendo por hipótesis al conjunto de supuestos que funcionan como motor de una investigación y que, según Ruiz Higueras, “deben ser entendidas como expectativas sobre los resultados, y no como hipótesis en el sentido estadístico” (en Etchegaray, 2000, p. 25), adoptando también la postura de Briones quien dice que “los objetivos específicos que formula una investigación señalan los aportes que el investigador se propone hacer en el campo de la disciplina en que trabaja [...] y éstos, hasta que la investigación termina, no pasan de ser proposiciones probables referidas a aspectos estructurales, de funcionamiento, de cambio, etc. de los fenómenos en estudio” (en Vain, 1997, p. 100), planeamos o formulamos las siguientes hipótesis:

$\boldsymbol{H_1}$: La resolución de problemas de la Ecología Evolutiva involucra competencias matemáticas en su desarrollo.

$\boldsymbol{H_2}$: Es posible elaborar un modelo de competencia que permita identificar y describir las competencias matemáticas necesarias para resolver problemas de la Ecología Evolutiva.

H_3: No es posible identificar todas las competencias matemáticas involucradas en la resolución de un conjunto de problemas de Ecología Evolutiva si se consideran exclusivamente las actuaciones de estudiantes.

Esta investigación se compone de 7 capítulos y 3 anexos, descriptos en las siguientes partes:

Primera Parte. Corresponde a la presentación del marco teórico y metodológico de la tesis. En ella planteamos la metodología de trabajo, presentamos una revisión conceptual respecto del término "competencia" en el campo de la educación y exponemos el sentido en que usamos el término "competencia" en nuestra expresión "modelo de competencia matemática", realizamos una breve síntesis de los aspectos del Modelo Teórico Local que son significativos para nuestro trabajo, como marco teórico – metodológico para elaborar el modelo de competencias matemáticas, presentamos una descripción del marco teórico disciplinario, delimitando el tema específico de estudio y realizamos una revisión del contenido formal del tema de estudio como saber "sabio" en el campo de la Ecología Evolutiva, pero desde un punto de vista matemático (Capítulos 1, 2 y 3).

Segunda parte. Análisis e interpretación de la problemática. Siguiendo las etapas para la elaboración de un modelo de competencia, presentamos el análisis y la interpretación de las resoluciones, separados en dos partes, la primera correspondiente al resolutor ideal y la segunda a los resolutores reales, cada parte con su correspondiente conclusión parcial. (Capítulos 4 y 5).

Tercera parte. Conclusiones y reflexiones finales. En este apartado presentamos el Modelo de Competencias Matemáticas, las conclusiones generales sobre las competencias matemáticas aplicadas en la resolución de problemas de la Ecología Evolutiva, las reflexiones finales y consecuencias didácticas de los resultados obtenidos, así como los posibles aportes para futuras investigaciones. (Capítulos 6 y 7).

En cuanto a los anexos, primeramente presentamos las soluciones de un resolutor ideal respecto del campo de problemas (Anexo 1), luego la descripción de las actuaciones del resolutor ideal al resolver dicho campo de problemas (Anexo 2) y, para finalizar, se presentan algunas de las resoluciones de resolutores reales (Anexo 3).

PRIMERA PARTE

METODOLOGÍA

Y

MARCO TEÓRICO

CAPÍTULO 1

MARCO METODOLÓGICO

Esta investigación se ubica en la perspectiva de la Investigación Educativa, entendida ésta como “un estudio científico y organizado para analizar con rigurosidad y objetividad una situación y los efectos de las acciones e intervenciones educativas” (Ministerio de Educación, 2007, p. 5). Este es un marco que ofrece la posibilidad de desarrollar nuevos enfoques e instrumentos para interpretar e intervenir en los procesos educativos, transformándola.

Como indican Rodríguez Gómez y Valldeoriola Roquet, (2014), la investigación se ha constituido como una disciplina angular en el campo de las ciencias de la educación, imprescindible para el avance de su cuerpo de conocimientos. "... investigar en educación es el procedimiento más formal, sistemático e intensivo de llevar a cabo un análisis científico. Es decir, consiste en una actividad encaminada hacia la concreción de un cuerpo organizado de conocimientos científicos sobre todo aquello que resulta de interés para los educadores. En sentido amplio, por tanto, puede entenderse como la aplicación del método científico al estudio de los problemas educativos, ya sean de índole teórica o práctica." (Latorre, Rincón y Arnal, 2003, p. 36; en Rodríguez Gómez y Valldeoriola Roquet, 2014, p. 5)

En particular, esta es una investigación desarrollada en el marco de la Didáctica de la Matemática, para la cual se han utilizado los aportes del Modelo Teórico Local de Filloy (1999). Consideramos que este modelo teórico - metodológico para la Investigación en Matemática Educativa presenta el encuadre adecuado para el estudio de las competencias matemáticas necesarias durante el ciclo de formación profesional, para la adquisición de conocimientos de un área específica, como lo es la Ecología Evolutiva.

1 – A. Paradigma de investigación

El trabajo que presentamos aquí se circunscribe a los aportes que orientan y definen los modelos que asumen características del paradigma interpretativo / cualitativo.

Consideramos oportuno circunscribirnos a dicho paradigma porque este tiene por finalidad "comprender y describir la realidad educativa a través del análisis profundo de las percepciones e interpretaciones de los sujetos intervinientes en las diversas situaciones objeto de investigación", (Sánchez Santamaría, 2013, p. 96), lo que se corresponde con los propósitos de nuestra investigación.

Bajo este paradigma, convenientemente para nuestros intereses, la investigación es entendida como una actividad que localiza al observador en el mundo y consiste en un conjunto de prácticas interpretativas que hacen al mundo visible. La investigación cualitativa implica una aproximación interpretativa y naturalista del mundo, lo que significa que los investigadores cualitativos estudian las cosas en su contexto natural, intentando dar sentido o interpretar los fenómenos en función de los significados que las personas le dan. (Denzin y Lincoln, 2005, pág. 3, en Rodríguez Gómez y Valldeoriola Roquet, 2014, p. 46).

1 – B. Tipo de Investigación

Si bien en el ámbito de la investigación educativa hay gran abundancia de clasificaciones, definimos esta investigación como aplicada, descriptiva, no experimental y de campo. (Arnal, Del Rincón y Latorre , 1992, p. 45 - 49):

a) Aplicada: porque tiene como finalidad primordial la resolución de problemas prácticos inmediatos en orden a transformar las condiciones del acto didáctico y a mejorar la calidad educativa.

b) Descriptiva: porque se trata de describir cómo pueden incidir las competencias matemáticas de los estudiantes en sus procesos de resolución de problemas de otra ciencia donde la matemática es una herramienta.

c) No experimental: porque para el análisis de las actuaciones de sujetos reales no se pueden controlar o manipular las actuaciones de los estudiantes.

d) De campo: porque, al menos una parte de ella, la resolución del espacio de problemas, se realizó en un ambiente natural: el aula.

1 – C. Método

La investigación que se ha diseñado requirió que se hiciese un seguimiento continuo, completo y detallado de la actividad de un sujeto ideal y de sujetos reales, en cuanto a las actuaciones referidas a un contexto particular, la resolución de un conjunto de problemas, conociéndose el método para ello como estudio de casos. De acuerdo a lo expresado por Grau (2011), este método “se utiliza cuando hay cuestiones que resolver sobre los modos y las causas de un hecho, cuando el investigador no tiene control sobre el fenómeno y cuándo éste se da en circunstancias naturales” (p. 31)

El estudio de casos es un diseño de investigación apropiado para estudiar un caso o situación con cierta intensidad en un período de tiempo corto, tiene como característica diferenciadora que la obtención de la información y de las conclusiones se basan en la observación de un número reducido de individuos y “se afronta la realidad mediante un análisis detallado de sus elementos y la interacción que se produce entre ellos y su contexto, para llegar mediante un proceso de síntesis a la búsqueda del significado y la toma de decisión sobre el caso. El estudio detallado permite clarificar relaciones, descubrir los procesos críticos subyacentes e identificar fenómenos comunes” (Hamilton y Delamont, 1974, en Arnal, Del Rincón y Latorre, 1992, p. 107).

1 – D. Técnicas e Instrumentos

Por una parte, para establecer un posible conjunto de problemas que, dentro del estudio de la Ecología Evolutiva, constituyen situaciones fundamentales, nos hemos guiado por la idea de proponer situaciones que sean nodales para esta ciencia o que se presenten como problemas característicos dentro de la Ecología Evolutiva.

Se utilizaron como instrumento los libros de textos, guía de trabajos prácticos, evaluaciones. Con respecto a los libros de texto, como lo indica Gómez, (2015, p. 20), tiene la particularidad de ser “una publicación especializada, con identidad propia, que nace idealmente en respuesta a las necesidades de enseñanza”. Es una fuente válida de conocimiento, y como tal, el análisis de los libros de textos nos proporcionó un conocimiento de la enseñanza pretendida por las intenciones curriculares, de suma importancia para el estudio de las actuaciones de estudiantes del sistema. La revisión bibliográfica permitió tener una descripción y una explicación de las actuaciones esperadas de los estudiantes al resolver tareas en las que esté involucrada la matemática. En cuanto a las guías prácticas y las evaluaciones, entendemos que las mismas son una fuente de información para la definición del conjunto de problemas, ya que presentan una síntesis de lo que se espera, se tiene que conocer sobre un tema específico.

En cuanto al análisis de las actuaciones de un resolutor ideal al resolver el conjunto de problemas, bajo modelo el modelo teórico local, se piensa que el proceso de resolución no se compone de conductas puntuales aisladas, sino que estas conductas tienen sentido con respecto a la totalidad del proceso, esto hizo pertinente considerar el proceso compuesto por momentos o fases con objetivos específicos. Debido a esto, para el análisis de las actuaciones de un resolutor, tomando como referencia lo realizado por autores como Polya, Mason, y otros, sobre resolución de problemas, hemos diseñado un proceso propio para el análisis e interpretación de las resoluciones del conjunto de problemas, formado tres momentos consecutivos, a los que llamamos "fases". A cada una de las fases las denominamos de la siguiente manera: (1) formulación, (2) resolución matemática y (3) interpretación. La explicación de en qué consiste cada una de las fases y lo que se analiza en ellas se encuentra en el Capítulo 4.

Para analizar las actuaciones de los sujetos reales, como técnica cualitativa, se utilizó el análisis de contenido, tomando como base las competencias matemáticas del modelo de competencias matemáticas inicial.

Se denomina análisis de contenido al conjunto de procedimientos interpretativos de productos comunicativos (mensajes, textos o discursos) que proceden de procesos de comunicación previamente registrados, y que, basados en técnicas cuantitativas o cualitativas tienen por objeto elaborar y procesar datos relevantes sobre las condiciones en que se han producido aquellos textos, o sobre las condiciones que puedan darse para su empleo posterior. (Grau, 2011, p.3). Para el análisis de contenido se deben considerar y analizar aquellos escritos que contienen datos de interés relacionados con el estudio.

El instrumento empleado para el análisis de las actuaciones de los resolutores reales fueron las resoluciones escritas del conjunto de problemas realizadas por estos.

El análisis de resoluciones escritas de los resolutores reales permitió corroborar los elementos de competencias matemáticas detectados para el modelo de competencias matemáticas inicial e identificar nuevos elementos, para así poder elaborar el modelo de competencias matemáticas.

1 – E. Modificaciones del Plan Inicial

Para finalizar este capítulo, es necesario puntualizar algunas cuestiones que alteraron el plan inicial:

Inicialmente en esta investigación estábamos interesados en conocer las relaciones entre las competencias matemáticas y el aprendizaje de la Ecología Evolutiva, esperando estar en condiciones para esto, tras indagar acerca de las competencias. En particular, una vez realizado el estudio de la bibliografía existente sobre las competencias matemáticas en las que se establecen indicadores para estas competencias clasificadas en categorías, pensamos que podríamos utilizar dichas categorías de competencias matemáticas para analizar las competencias matemáticas presentes en aprendizaje de la Ecología Evolutiva. Pero, una vez avanzados en la literatura, coincidimos con autores como Filloy, Puig, Sireñiz y otros, en cuanto a que, en lo referido a las competencias, el analizar e interpretar las actuaciones de resolutores reales no pone en evidencia las competencias involucradas en los procesos de enseñanza y aprendizaje, sino que pone en evidencia las actuaciones de resolutores reales, actuaciones que están condicionadas por otras circunstancias que pueden no ser relevantes cuando se quieren determinar las competencias matemáticas involucradas. Por ello, decidimos establecer nosotros, cuáles son las competencias matemáticas que se ponen en juego al resolver problemas de la Ecología Evolutiva, es decir, decidimos elaborar un Modelo de Competencias Matemáticas.

Esto justifica también el cambio planteado en el título del trabajo, que inicialmente se había titulado "*Relación entre las competencias matemáticas y el aprendizaje de la Ecología Evolutiva*", para denominarse "*Un modelo de competencias matemáticas, elaborado para la resolución de problemas de Ecología Evolutiva*".

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO

Emprender un estudio de las competencias matemáticas nos conduce a realizar un recorrido por un marco teórico conceptual extenso en el que se conjugan conceptos de las diversas teorías y posturas científicas. En este capítulo se expone someramente dicho marco referencial, presentado en los siguientes núcleos: antecedentes de las competencias y de las competencias matemáticas, introducción al estudio sobre Modelos Teóricos Locales y el Modelo de Competencia desde este enfoque, delimitación del saber sabio de referencia, explicitación de la Matemáticas aplicadas a la Ecología Evolutiva y una breve síntesis sobre Población, Crecimiento Poblacional y Tablas de vida.

2 – A . Antecedentes de la Investigación

En la indagación sobre el concepto competencia, encontramos que existen diversas formulaciones y expresiones en torno al mismo. En particular, en el ámbito de la educación, hay variadas interpretaciones según el ámbito de la formación escolar al que se haga referencia.

En este apartado presentamos una revisión conceptual respecto del término "competencia" en el campo de la educación.

2 – A . 1. Acerca de las Competencias

Para dar inicio a este estudio nos hemos planteado los siguientes interrogantes: ¿Qué significados involucra el término competencia?, ¿Cuáles son las condiciones que permiten afirmar que una persona es competente para llevar a cabo determinada tarea o para ejercer cierta profesión? y, en especial en el área de educación, ¿Cómo se interpreta el término competencia?, ¿Se conservan estos significados o tiene interpretaciones diferentes?

El afán de responder a estas cuestiones nos llevó a explorar en la literatura sobre el tema, encontrando que su tratamiento data desde la segunda mitad del siglo XX, tanto en ámbitos educativos como externos a éstos. Así, considerando a Chomsky (1965), quien utiliza el término competencia en el campo de la lingüística para referirse a la capacidad innata que tiene todo ser humano de poder hablar y crear mensajes que nunca antes había oído, se tiene una definición de competencia diciendo que es "la capacidad de creación y producción autónoma, de conocer, actuar y transformar la realidad que nos rodea, ya sea personal, social, natural o simbólica, a través de un proceso de intercambio y comunicación con los demás y con los contenidos de la cultura" (en Farnos, 2016, p. 2). Chomsky puso el énfasis en que, si se quiere caracterizar la estructura de la lengua o, incluso, lo que un sujeto sabe de un determinado lenguaje, es decir, su competencia lingüística, no serviría analizar lo que un sujeto puede producir, ya sea en forma verbal o escrita, sino que lo que se debe estudiar son las posibles producciones lingüísticas de un sujeto ideal con dominio en su lenguaje. (Puig, 2006, p. 2).

Otros autores más actuales, como ser Perrenoud, Díaz Barriga, Tobón, entre otros, se ocupan del tema dando su posición respecto a las competencias. Para Perrenoud (2000), quien da una interpretación interesante sobre lo que significa "ser competente", es posible hablar de competencia cuando, para realizar una tarea, un individuo pone en juego determinados recursos y expresa que "competencia es la facultad de movilizar un conjunto de recursos cognoscitivos (conocimientos, capacidades, información, etc.) para enfrentar con pertinencia y eficacia a una familia de situaciones", (Perrenoud, 2000, p. 19). Así, por ejemplo, para orientarse en una ciudad desconocida, una persona debe movilizar la capacidad de leer un mapa para situarse geográficamente o interpretar las indicaciones del Sistema de Posicionamiento Global (GPS), o pedir y seguir indicaciones, así como también debe movilizar distintos conocimientos: concepto de escala, elementos de topografía, conocimiento de una serie de puntos de señales geográficos. Para dar otro ejemplo, cuando alguien sufraga en una elección de autoridades, la persona debe movilizar capacidades como el saber emitir su voto, y también conocimientos: de las instituciones políticas, de lo que está en juego en la elección, candidatos, partidos, etc. Este autor afirma que, en la vida diaria, un sujeto moviliza distintas competencias para desenvolverse en sociedad.

Por su parte, Díaz Barriga (2006) nos presenta otro enfoque, considerando el término *competencia* desde una perspectiva laboral; expresa que toda competencia se genera en una situación real inédita, requiere del conocimiento de una información específica y del desarrollo de una serie de habilidades derivadas de los procesos de información. Enuncia que “en el mundo del trabajo el término competencia tiene un sentido utilitario, y hace referencia a las habilidades y destrezas que hacen que un trabajador se desempeñe eficientemente en su labor”. (Díaz Barriga, 2006, p 13).

Desde un abordaje sistémico-complejo, en Tobón *y col*. (2010) se describen las competencias integrando conocimientos teóricos y prácticos, el contexto social, laboral y ambiental, así como las motivaciones internas y externas del sujeto. Conciben las competencias como: “Procesos complejos de desempeño con idoneidad en determinados contextos, integrando diferentes saberes (saber ser, saber hacer, saber conocer y saber convivir), para realizar actividades y/o resolver problemas con sentido de reto, motivación, flexibilidad, creatividad, comprensión y emprendimiento, dentro de una perspectiva de procesamiento metacognitivo, mejoramiento continuo y compromiso ético, con la meta de contribuir al desarrollo personal, la construcción y afianzamiento del tejido social, la búsqueda continua del desarrollo económico-empresarial sostenible, y el cuidado y protección del ambiente y de las especies vivas". (Tobón *y col*., 2010, p 5).

A partir de un enfoque más general, desde Vergnaud (2007) se justifica la necesidad de ser competente debido a la creciente necesidad social de diagnosticar, resolver problemas y de realizar juicios. Cuando habla de competencia lo relaciona con el interés que debe generar la actividad misma y no solamente los resultados. Para este autor, la experiencia y el aprendizaje son adaptaciones de esquemas a situaciones dadas, donde la dupla esquema-situación es la dupla teórica central de la psicología del desarrollo y del aprendizaje, de la didáctica y de la pedagogía.

Del mismo modo, distintas organizaciones abocadas a la educación se han expresado acerca de las *competencias*. Por ejemplo, los responsables del Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA)[1] de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE), organismo que evalúa las competencias de estudiantes próximos a iniciar la educación post-secundaria o que están a punto de integrarse a la vida laboral, indican que esta evaluación "está diseñada para conocer las competencias, o, dicho en otros términos, las habilidades, la pericia y las aptitudes de los estudiantes para analizar y resolver problemas, para manejar información y para enfrentar situaciones que se les presentarán en la vida adulta y que requerirán de tales habilidades." (PISA, 2006, p 5).

En el marco de la OCDE, DESECO[2], los autores Salganik *y col*. (2002), plantean que "ser competente es ser capaz de responder a demandas complejas y llevar a cabo tareas diversas de

[1] El nombre corresponde con las siglas del programa según se enuncia en inglés: *Programme for International Student Assessmen, PISA*. Es un proyecto de la OCDE destinado es evaluar la formación de los alumnos cuando llegan al final de la etapa de enseñanza obligatoria, hacia los 15 años. Esta evaluación se lleva a cabo de forma regular cada 3 años desde el año 2000 y participan de la misma 61 países de América, África, Europa y Oceanía.

[2] A finales de la década de los 90, la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) lanzó el proyecto denominado DeSeCo (Definition and Selection of Competencies) cuyo objetivo era proporcionar un marco conceptual sólido que estableciese los objetivos que debía alcanzar cualquier sistema educativo que pretendiera

forma adecuada", y que la competencia se demuestra cuando "se aplican los conocimientos adquiridos a las tareas y retos cotidianos y a los entornos extraescolares, previa valoración de distintas opciones y toma de decisiones" (PISA, 2006, p. 7). Lo que es aprobado por el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación de México quien, bajo esta misma línea, define competencia como "un sistema de acción complejo que abarca las habilidades intelectuales, las actitudes y otros elementos no cognitivos, como motivación, valores y emociones, que son adquiridos y desarrollados por los individuos a lo largo de su vida y son indispensables para participar eficazmente en diferentes contextos sociales". (PISA, 2006, p. 7).

De la misma forma, en la educación universitaria argentina encontramos posturas referidas a las Competencias Académicas para el desempeño adecuado en el ámbito académico. En este sentido, Mastache (2007), quien es representante del Consejo Federal de Decanos de Ingeniería de la República Argentina (CONFEDI), alude "a la posibilidad de realizar correctamente las tareas o actividades de aprendizaje que les sean propuestas"; y al complejo integrado de "conocimientos, habilidades, destrezas, actitudes, requeridos para un correcto desempeño en el rol de alumno" (Mastache, 2007, en CONFEDI 2008, p 3). Asimismo, desde este organismo se establece que: "Competencia es la capacidad de articular eficazmente un conjunto de esquemas (estructuras mentales) y valores, permitiendo movilizar (poner a disposición) distintos saberes, en un determinado contexto con el fin de resolver situaciones profesionales" (CONFEDI, 2008, p. 3).

Otro aspecto a tener en cuenta, es el presentado por Salas Zapata (2005, p. 3), quien, desde el análisis de la relación entre el proceso de aprendizaje y el desarrollo de competencias, expresa

---

fomentar la educación a lo largo de toda la vida. El proyecto trataba de dar respuesta a qué competencias personales se consideran imprescindibles para poder afrontar los retos de la sociedad del S. XXI.

que es necesario dar una mirada inicial a los factores que intervienen en el proceso de aprendizaje para luego discernir acerca de cómo ellos contribuyen al desarrollo de las competencias. Enuncia que, en el proceso de aprendizaje, considerado desde la perspectiva constructivista de Ausubel, se pueden identificar tres factores que son determinantes en el aprendizaje: las actitudes, las aptitudes y los contenidos, y que, de acuerdo a Piaget, dichas aptitudes toman dos orientaciones diferentes, las aptitudes intelectivas y las aptitudes procedimentales. Salas Zapata (2005) presenta una organización en la cual se indican los factores intervinientes en el aprendizaje y su relación con la construcción de competencias. (Figura 2 – a).

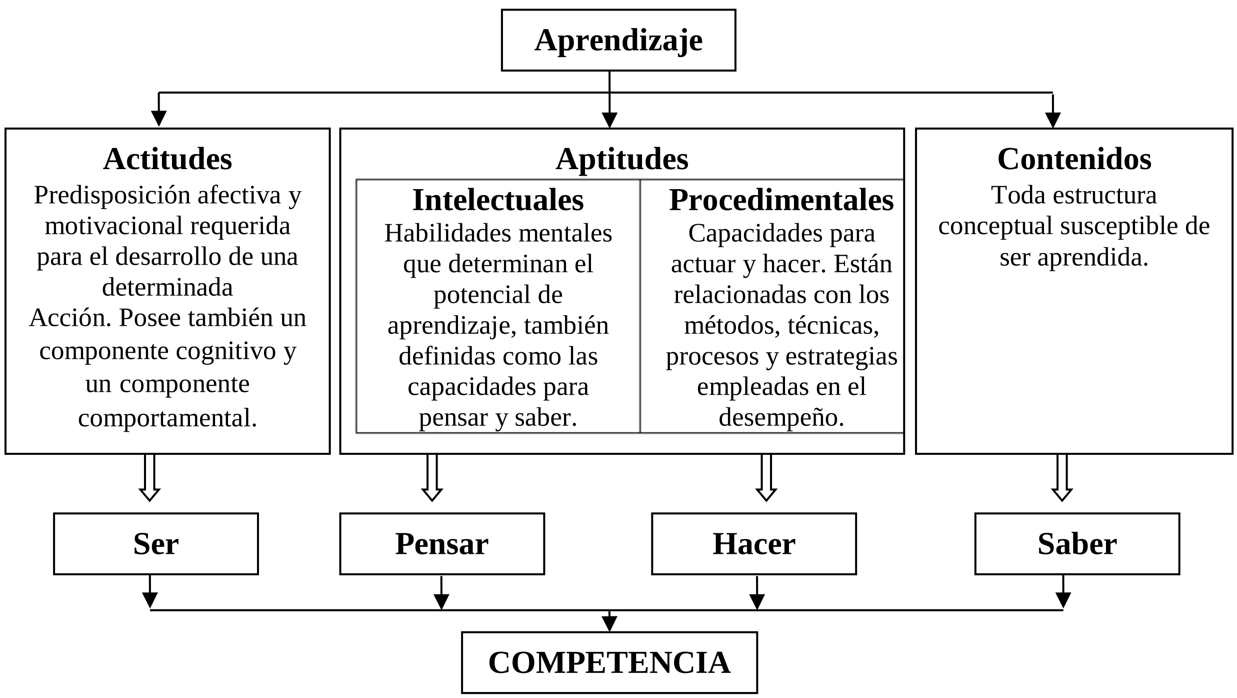


Figura 2 – a. Factores intervinientes en el aprendizaje y su relación con la construcción de competencias.

Como lo indica Salas Zapata, (2005): "El desarrollo de cada una de las actitudes, aptitudes intelectivas, aptitudes procedimentales y los contenidos tiene correspondencia con la formación en el ser, en el pensar, el hacer y el saber, respectivamente, y el aprendizaje logrado por medio de la convergencia de estas cuatro dimensiones da lugar a los llamados aprendizajes significativos

[...] De esa integración entre conocimiento con sentido y experiencia resulta el desarrollo de la competencia." (p. 3).

2 – A . 2. Sobre Competencias matemáticas

En la literatura existente también encontramos referencias sobre competencias en un área disciplinar específica, como ser en la Matemática y desarrollos teóricos que describen cuando se puede decir que una persona es competente en matemática, o que tiene competencias matemáticas.

En PISA/OCDE (2003), se define: "La competencia matemática es la capacidad individual para identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios bien fundados, utilizar las matemáticas y comprometerse con ellas, y satisfacer las necesidades de la vida personal como ciudadano constructivo, comprensivo y reflexivo" (PISA, 2003, p. 28).

Se aclara después el sentido en que se consideran los términos, y en el caso del término "el mundo" se refiere a la posición natural, cultural y social en la que viven los individuos; en cuanto a "utilizar las matemáticas y comprometerse con ellas" significa no sólo utilizar las matemáticas y resolver problemas matemáticos sino también comunicar, relacionarse con, valorar e incluso, apreciar y disfrutar con las matemáticas. La frase "vida personal" hace referencia a la vida privada, la vida profesional, la vida social con compañeros y familiares, así como a la vida como ciudadanos de una comunidad. El informe recuerda que, para los individuos, las matemáticas pueden suponer la extensión con la que disponen sus conocimientos matemáticos, pero también la amplitud con la que pueden activar los conocimientos y destrezas matemáticas para resolver problemas, principalmente en situaciones de la vida real.

Para esta organización, el concepto de competencia matemática excede al mero conocimiento de la terminología y las operaciones matemáticas, sino que hace referencia a la posibilidad de razonar, analizar y resolver una situación, ya sea en contextos puramente matemáticos o contextos extra matemáticos, de forma matemática. En esta noción de la competencia matemática están implícitas las capacidades de plantear, formular, resolver e interpretar problemas empleando matemáticas dentro de una variedad de situaciones y contextos; en este sentido el documento aclara: “Estos van desde los puramente matemáticos a aquellos que no presentan estructura matemática aparente[...] la definición atañe a la capacidad de utilizar las matemáticas en situaciones que van de lo cotidiano a lo inusual y de lo simple a lo complejo.” (EDUTEKA, 2005, p. 2)

Así mismo, la OCDE (PISA, 2006), propone tres ejes alrededor de los cuales se realiza la evaluación de las competencias matemáticas en el proyecto PISA (en Iñiguez Porras, 2015, p. 120-121): (1) *Los conocimientos propiamente matemáticos*; (2) *Los procesos,* es decir, el uso que se hace de los contenidos matemáticos para la resolución de problemas; y (3) *La presentación de situaciones de contexto próximas al alumnado,* donde los problemas que se plantean están siempre relacionados con una situación determinada o un contexto concreto.

En cuanto a los procesos realizados para la resolución de problemas, la OCDE establece diferentes grados de complejidad en dichos procesos, a saber:

- *De reproducción:* cuando para la solución de una situación se trabaja con operaciones comunes, cálculos simples. Son problemas propios del entorno inmediato y de la rutina cotidiana.

- *De conexión:* cuando se involucran ideas y procedimientos matemáticos para la solución de problemas que ya no pueden definirse como ordinarios pero que aún incluyen escenarios familiares; además involucran la elaboración de modelos para la solución de problemas.
- *De reflexión:* Implican la solución de problemas complejos y el desarrollo de una aproximación matemática original. Para ello los estudiantes deben matematizar o conceptualizar las situaciones.

Por otra parte, en afinidad con la idea de que el desarrollo de la competencia matemática no se relaciona exclusivamente con el conocimiento de contenidos sino que también involucra su aplicación a situaciones reales o simuladas de la vida cotidiana del alumno, Niss (2003) define competencia matemática como la “habilidad para comprender, juzgar, hacer y usar las matemáticas en una variedad de contextos intra y extra matemáticos” (Citado en Iñiguez Porras, 2015, p. 118), es decir, si bien el conocimiento matemático y los procesos son prerrequisitos necesarios para alcanzar la competencia matemática, no son suficientes. Este autor propone ocho competencias matemáticas clasificadas en dos grupos: Competencias involucradas en preguntar y responder las matemáticas y a través de las matemáticas y, la comprensión de las entidades. En el primer grupo se incluyen: pensar matemáticamente, plantear resolver problemas matemáticos, saber construir modelos matemáticos y razonar matemáticamente; mientras que en el segundo grupo se manifiestan la representación de entidades matemáticas, el manejo de símbolos matemáticos y formalismos, la comunicación en, con y acerca de las matemáticas y el uso de recursos y herramientas. (Niss, 2003, en Iñiguez Porras, 2015, p. 118). Esta clasificación nos parece interesante porque incorpora a lo hasta aquí dicho, la comprensión de los símbolos y de los formalismos matemáticos, así como el uso de recursos y herramientas matemáticas.

Otro aporte importante es el de Godino (2004, p. 12), quien introdujo un nuevo punto de análisis, indicando que cuando se habla de competencia matemática se involucran dos ideas que son complementarias, la “competencia” y la “comprensión”; que si bien en la práctica se suelen usar como sinónimos, no lo son. “Competencia y comprensión se complementan mutuamente:

- La competencia atiende al componente práctico, mientras que la comprensión al componente teórico del conocimiento.
- La competencia pone en juego conocimientos de tipo procedimental, la comprensión requiere conocimiento conceptual”. (Godino, 2003, p. 58).

En el modelo cognitivo que propone este autor, la comprensión responde al componente discursivo-relacional del significado sistémico de un objeto (dominio de conceptos, propiedades y argumentos), mientras que la competencia se relaciona con el componente práctico (dominio de las maneras de actuar ante las situaciones-problemas o tareas). Cuando se habla de competencia y de comprensión, no puede pensarse en ellos en términos de tener o no tener competencia o comprender o no comprender, sino que estos son procesos en progresivo crecimiento y mejora, que además deberán ser valorados relativamente a los contextos institucionales correspondientes. La relación entre comprensión y competencia se manifiesta así para la didáctica como una dialéctica en la cual la competencia se relaciona con:

- nivel de inteligencia o cualidad o destreza que tienen una persona para hacer una cosa particular.
- aptitud, capacidad, disposición de servir para determinada cosa.
- capacidad de realizar una tarea o de finalizar algo con éxito. (Godino, 2004, p. 129)

Por ello, Godino ve la conveniencia de atribuir un significado distinto y complementario a las nociones de competencia y comprensión matemática, relacionado con los componentes operatorios (praxémicos) y discursivos del conocimiento, respectivamente. En el Enfoque Semiótico de la Cognición Matemática, al igual que en la Teoría Antropológica de lo Didáctico, los objetos matemáticos se conciben en términos de sistemas praxeológicos, esto es, sistemas compuestos de praxis y logos. El sujeto puede tener una relación bien adaptada a la praxis, pero no al componente discursivo. De esta manera, “En este caso decimos que el sujeto conoce cómo hacer un tipo de tareas, tiene competencia o capacidad para hacerla, pero no comprende (o comprende parcialmente) el porqué de las técnicas que aplica.”, y más adelante agrega que “*un sujeto es competente para realizar una tarea* cuando domina o es capaz de aplicar correctamente la técnica que resuelve o permite hacer bien la tarea. El sujeto tiene una capacidad o competencia específica, o que *conoce cómo hacer la tarea*. En cambio, *un sujeto comprende una técnica que permite realizar una tarea* cuando conoce porqué dicha técnica es adecuada, su ámbito de validez y las relaciones con otras técnicas”. (Godino, 2002, p. 12).

Un aporte también muy valioso para nuestra investigación es el realizado por Puig (2006) quien, retomando la noción de competencia lingüística dada por Chomsky, realiza un estudio gramatical de las traducciones del término *competencia* realizada sobre los informes de la OCDE respecto de los resultados de las Evaluaciones PISA y muestra como estas traducciones han colaborado en la confusión de lo que se entiende por *competencia*.

Como habíamos mencionado, Chomsky (1968), al definir las competencias lingüísticas, puso énfasis en que para la determinación de estas competencias no alcanzaba con analizar las estructuras que subyacen en las actuaciones reales de los sujetos, sino que se debe analizar las actuaciones de un sujeto ideal con dominio en su lenguaje (citado en Puig, 2006, p. 4). Llevando esta idea al campo de las matemáticas, Puig explica que para establecer cuáles son los elementos de competencia referidos a un cierto saber matemático, se deben analizar tanto las actuaciones de un sujeto ideal en el dominio matemático en cuestión, como las actuaciones concretas de los sujetos reales en ese dominio. Es así que trabaja el concepto de competencia desde el marco teórico y metodológico “de los Modelos Teóricos Locales” (MTL), desde esta concepción y considerada en el conjunto de las matemáticas, se permiten dos interpretaciones: se puede entender que la competencia permite describir “la conducta del sujeto epistémico de las matemáticas”, es decir, permite explicar y predecir el conjunto de todas las actuaciones de un sujeto ideal. Pero también se puede hablar de la competencia en un dominio más concreto de las matemáticas, ya sea la resolución heurística de problemas, la resolución algebraica de problemas, etc., en el que el modelo de competencia ha de proporcionar una descripción de la conducta del sujeto ideal en ese dominio, y, por tanto, ha de explicar y predecir su conjunto de actuaciones posibles en ese dominio (Puig, 2006, p. 5). Para este autor, el observar la resolución realizada por un estudiante concreto, no puede dar cuenta de su competencia en el dominio en cuestión, ya que sólo da cuenta de lo observado en las circunstancias en que se hayan tomado los datos.

A modo de resumen de los aportes realizadas por los distintos autores considerados respecto de lo que se entiende por *competencias matemáticas*, presentamos la siguiente tabla (Tabla 2.a), en la que se pretende discriminar las ideas centrales de las definiciones dadas por estos.

Tabla 2 –a . Aspectos que involucra la definición de *competencias matemáticas* realizadas por diferentes autores.

COMPETENCIAS MATEMÁTICAS Aportes			
PISA / OCDE	**NISS**	**GODINO**	**PUIG**
- capacidad individual - identificar - comprender - fundamentar - emitir juicios - comprometerse - contexto - satisfacer necesidades personales como ciudadano constructivo, comprensivo y reflexivo.	- habilidad - comprender - juzgar - hacer y usar matemáticas - contextos intra y extra matemáticos.	- competencia - comprensión (ideas complementarias) - Competencia / saber hacer - Comprensión / saber qué hacer y saber porque.	- Modelo de competencia - Competencia / Pericia - Dominio de estudio - Procesos generales para resolver problemas. - Conocimientos matemáticos para resolver problemas. - Nivel de competencia / actuaciones observadas. - Capacidad para realizar tareas específicas.

2 – A . 3. Precisiones terminológicas relacionadas con la Competencia

En cuanto a la traducción de la palabra *competencia* en los informes de las evaluaciones PISA, Rico encuentra “cuatro significados distintos sobre la noción de competencia en el informe PISA” y señala que “ponen de manifiesto la riqueza y diversidad de matices con que se trabaja” (Rico, 2005, p. 38). Para Puig, conviene efectivamente diferenciar esos significados, pero no porque sean significados distintos de una misma noción, sino porque son conceptos distintos que se han designado con un mismo término de forma equívoca. Los cuatro significados son:

- el primero es “competencia como dominio de estudio [...] equivalente a alfabetización matemática”;

- el segundo, competencias aparece en plural "como conjunto de procesos generales que deben ponerse en práctica al resolver problemas matemáticos";
- como tercero, "la manera en que distintas competencias se invocan en respuesta a distintos tipos y niveles de demandas cognitivas impuestas por distintos problemas matemáticos",
- y el cuarto, cuando el informe habla de "nivel de competencia" de los alumnos que "se determina empíricamente y se expresa en una escala, indicando para cada nivel las competencias generales que los alumnos habrían de tener y las tareas específicas que deberían ser capaces de realizar". (Puig, 2006, p. 6)

En cuanto al "nivel de competencia", cabe aclarar que Puig expresa que es equívoca la traducción al castellano del término "competence" realizada del informa PISA escrito en inglés, ya que esta palabra no se usa cuando se habla de lo que se evalúa, ni cuando se habla de los niveles en que se clasifican a los alumnos en función de sus respuestas en dicho informe. Lo que se evalúa es la "performance", y los niveles que se establecen son de "performance" o de "proficiency", no de "competence". A su vez, advierte que no hay una palabra en castellano equivalente al término inglés "competence". En los casos segundo y tercero, sí se usa "competence", y en los casos primero y cuarto se usan "proficiency" y "literacy", respectivamente. Se podría adoptar la palabra castellana "pericia" para traducir "proficiency", y poder así conservar esa diferencia conceptual entre "competence" y "proficiency". Así mismo, para la traducción inicial de "mathematical literacy" (mejor traducido como "cultura matemática") se optó por "alfabetización matemática", que es una acción en vez de una capacidad y "en los sucesivos documentos se produce un deslizamiento de términos, que comienza por destacar la Alfabetización y concluyen con el mayor uso del término Competencia Matemática; éste tiene efectivamente la ventaja de no ser una acción, pero su uso borra de nuevo diferencias conceptuales en el texto castellano."(Puig, 2006, p. 8).

2 – B. Enfoque teórico-metodológico

De acuerdo a lo expresado, para esta investigación se han utilizado aportes del Modelo Teórico Local de Filloy (1999), ya que consideramos que este modelo teórico - metodológico para la Investigación en Matemática Educativa presenta el encuadre adecuado para el estudio de las competencias matemáticas puestas en juego en la adquisición de conocimientos de un área específica, como lo es la Ecología Evolutiva. En este apartado presentamos una breve síntesis de los aspectos de ésta teoría que son significativos para nuestro trabajo.

2 – B . 1 . Introducción al estudio sobre Modelos Teóricos Locales

En la década de los ochenta del siglo pasado, se ha desarrollado, en principio por Filloy y luego por Kieran, Puig y Rojano, un marco teórico y metodológico para la investigación educativa, en el que la idea central ha sido el elaborar un **Modelo Teórico Local** (MTL) que permitiera tanto organizar una investigación en Matemática Educativa, como así también sus resultados. Para poder observar experimentalmente los fenómenos que aparecen alrededor de la enseñanza y el aprendizaje, será este un marco teórico y metodológico para interpretar y organizar tales fenómenos y proponer nuevas observaciones que pongan en evidencia las relaciones que entran en juego. Desde este este enfoque no se pretende elaborar una teoría que explique los hechos de manera única y cerrado y que inhabilite cualquier otra explicación de los mismos, sino que es una organización de lo observado y, tras ser reevaluado, puede ser modificado. Por ello, se utiliza el término **modelo** debido a que "no se hace la afirmación fuerte de que las cosas son tal y como las caracteriza el modelo, sino sólo que, si las cosas fueran como las caracteriza el modelo, los fenómenos se producirían como se han descrito. El modelo tiene pues carácter descriptivo, explicativo y predictivo, pero no excluye que los mismos fenómenos puedan describirse, explicarse y predecirse de otra manera (mediante otro modelo)" (Puig, 2006, p. 2).

En cuanto al carácter **local** del modelo, se refiere a que "el modelo se elabora para dar cuenta de los fenómenos que se producen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de unos contenidos matemáticos concretos a unos alumnos concretos y sólo se pretende que el modelo sea adecuado para los fenómenos observados". (Puig, 2006, p. 2). Es decir, sirve para estudiar fenómenos específicos, sin pretender ser una teoría con un carácter universal.

En el MTL se conciben las situaciones de enseñanza y aprendizaje en los sistemas escolares como situaciones de comunicación y de producción de sentido, en las que están implicados la materia objeto de enseñanza y aprendizaje, la enseñanza, que organiza el profesor, y los estudiantes, en cuyas actuaciones se muestra lo que han aprendido. En este sentido, la teoría de modelos locales propone analizar, de manera localizada y específica, distintos aspectos o componentes de los fenómenos de la matemática educativa: un Componente de competencia formal del MTL o simplemente Modelo de competencia, un Componente de los procesos de cognición o de actuación del MTL o Modelo de actuación, un Componente de enseñanza del MTL o abreviado, Modelo de enseñanza y un Componente de comunicación del MTL o Modelo de comunicación, teniendo en cuenta que estos componentes o "modelos en sí mismos" se interrelacionan, conformando una estructura (Figura 2 – b):

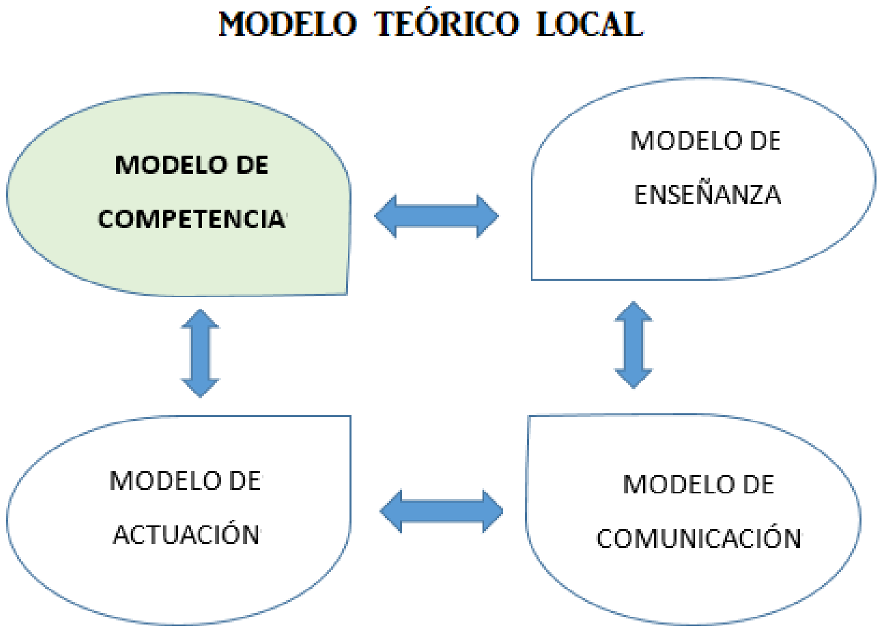


Figura 2 – b. Componentes de los fenómenos de la matemática educativa que conforman un MTL.

Aunque no se pretende que el ámbito de validez de los MTL vaya más allá de los fenómenos observados, la descripción de los fenómenos que el modelo procura es profunda, compleja y minuciosa.

Como explica González Marí (2015), bajo el enfoque de los MTL, el esquema general del proceso de investigación se desglosa en dos fases:

En la primera fase, la **fase teórica** del Modelo Teórico Local, se realiza un análisis histórico y epistemológico, a fin de identificar las principales concepciones y dificultades que ha entrañado la construcción de un determinado objeto matemático hasta llegar a su formulación actual, y con el análisis de libros de texto, como registro que son de la evolución científica, curricular y pedagógica en los diversos momentos de la historia, elaborando así un modelo teórico local inicial. En la segunda fase, la **fase empírica**, se pasa a estudiar la capacidad de los estudiantes de movilizar el conocimiento matemático ante una situación, tarea o problema por resolver, en relación con los modelos de enseñanza examinados. A raíz de los resultados, se infieren las competencias de los estudiantes con el fin de fundamentar cambios potenciales en el acercamiento metodológico vigente en la enseñanza de la matemática.

Como se menciona en Lajusticia (2003, p. 32), una investigación se puede organizar por la idea de la elaboración de un MTL, cuyo diagrama posee la característica de ser recurrente. Es decir, se parte del planteo de la Problemática a estudiar, luego se continua con el análisis previo de los problemas, dando lugar a los elementos de los modelos, se define así un MTL inicial, que permite el establecimiento de hipótesis para contrastarlo con lo observado y del diseño de experimentación, que luego termina con la expresión de los resultados de la investigación en términos de los componentes del Modelo Teórico Local inicial y, por tanto, con la elaboración de un nuevo Modelo Teórico Local, que está listo para ser el comienzo de una nueva investigación.

2 – B . 2 . El Modelo de Competencia en un Modelo Teórico Local

Retomando lo expresado por Puig, (2006), con base en las ideas de Chomsky sobre la lingüística y en el marco de los MTL de Filloy, el desarrollo de una organización matemática de las distintas clases de problemas en los que intervienen un tema a estudiar, así como el análisis de las posibles actuaciones de un resolutor ideal frente al campo de problemas desarrollado, estableciendo una lista de elementos del modelo de competencia, permite determinar las posibles competencias de dicho resolutor ideal, y a su vez, el análisis de las actuaciones realizadas por un resolutor real frente a este campo de problemas, ayuda a completar del modelo de competencia dentro del MTL. La contrastación de dichas actividades de resolución favorece la elaboración de un modelo de competencia para el tema objeto de interés.

Se entiende al “resolutor ideal” como aquél cuya competencia es la que da el método y cuya conducta está por tanto predicha, explicada y descrita por los pasos del método, mientras que “resolutor real” es el sujeto, competente o no, cuya actuación real da cuenta de lo observado en las circunstancias en que se toman los datos y que puede ser de utilidad para completar la descripción de los elementos de competencia.

Puig (2006), enuncia que “la complejidad de las situaciones de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas conducen a la elaboración de modelos (que no teorías) de competencia (para la investigación de procesos de enseñanza y aprendizaje de matemáticas) que precisan que se consideren elementos difícilmente describibles formalmente […] En cualquier caso, el concepto de competencia (matemática) está vinculado al concepto de actuación (matemática)”. (Puig, 2006, p. 5). Entonces, el modelo de competencia proporciona, en principio, una descripción de la conducta del sujeto ideal en un dominio de problemas y, por lo tanto, pretende explicar y predecir el conjunto de actuaciones posibles en ese dominio.

En cuanto a las fuentes para la elaboración de tales modelos de competencia, estas pueden ser tanto el análisis del dominio matemático en cuestión, como las actuaciones concretas de los sujetos reales en ese dominio que, por su contraposición con las actuaciones del sujeto ideal, predichas por el modelo de competencia, pueden proporcionar nuevos elementos de la competencia, que tal vez no fueron incorporados al modelo en el análisis del dominio matemático. Este proceso puede ser representado en un esquema donde se resumen los pasos a seguir para elaborar un Modelo de Competencia en el marco de los Modelos Teóricos Locales (Figura 2 – c):

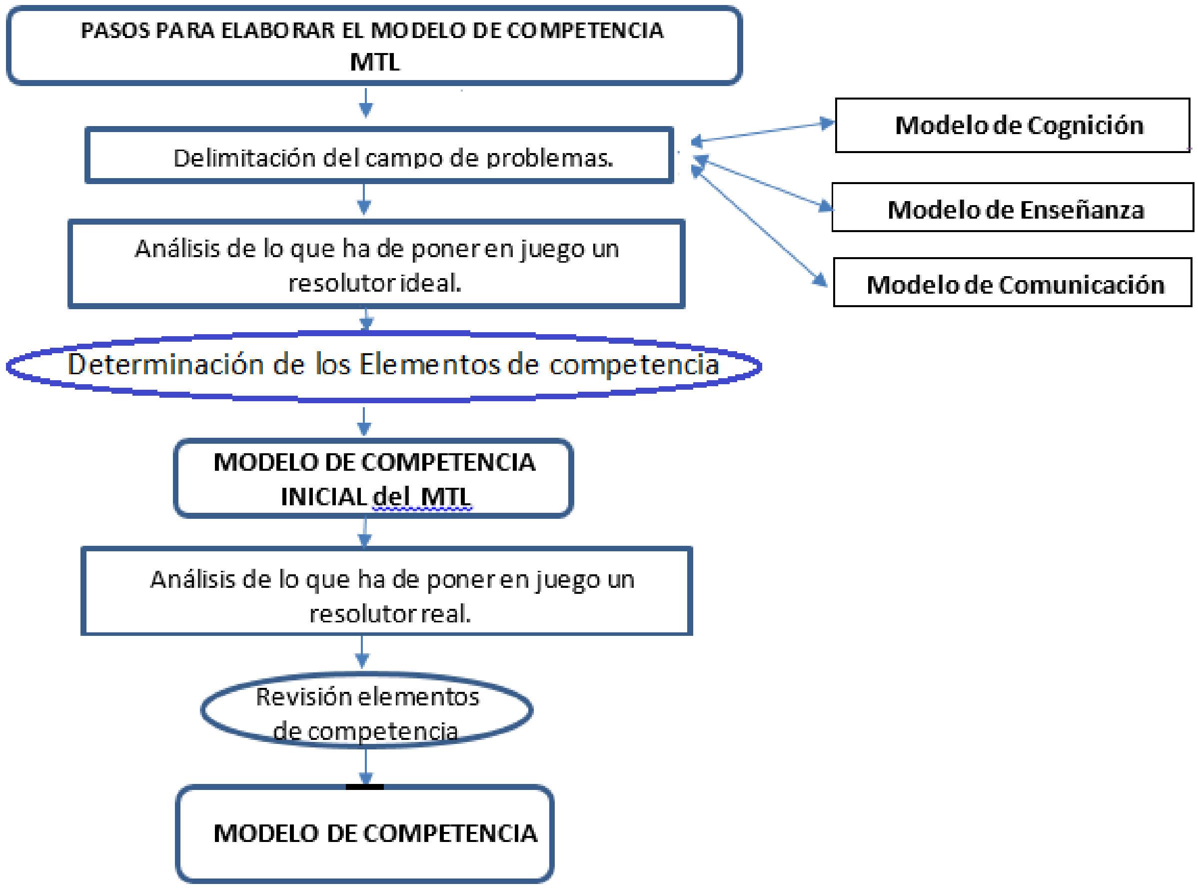


Figura 2 – c. Pasos a seguir para elaborar un Modelo de Competencia en el marco de los Modelos Teóricos Locales.

2 – C . Encuadre disciplinar: Acerca de la Ecología Evolutiva

En este trabajo de tesis, si bien estamos interesados en las competencias matemáticas, el saber sabio[3] se refiere a un área específica de la Ecología, la Ecología Evolutiva. Y una de las cuestiones que tenemos que aclarar para poder avanzar en la presentación de la investigación es en qué tema específico de la Ecología Evolutiva nos hemos concentrado para describir las competencias matemáticas puestas en juego en el proceso de aprendizaje de esta área.

2 – C . 1 . Delimitación del saber sabio de referencia

Para justificar la delimitación el objeto de estudio, creemos que primeramente es necesario ubicar a la Ecología Evolutiva como área de estudio: La Ecología Evolutiva es una rama de la Ecología y, a su vez, la Ecología está clasificada de modo adecuado como una rama de la Biología, e incluye en su desarrollo aspectos de muchos otros campos, como la matemática, la estadística, la geografía, la geología, la meteorología, la física, entre otras. La Ecología es una ciencia que estudia la relación de los seres vivos con su medio ambiente, y como parte de ella, la Ecología Evolutiva se encarga del estudio de la dinámica de poblaciones, la genética de poblaciones, la evolución de las interacciones poblacionales, la biogeografía y las comunidades. A continuación, presentamos una posible organización de la relación entre Ecología Evolutiva, Ecología, Genética y Biología (Figura 2 – d):

---

[3] En el sentido que lo utiliza Chevallard (1985) cuando explica la transposición didáctica al pasar del “saber sabio”, entendido como conocimiento científico, dentro de la institución de producción, al “saber enseñado”, conocimiento escolarizado o sea dentro de instituciones escolares (en Etchegaray, 2000, p. 9).

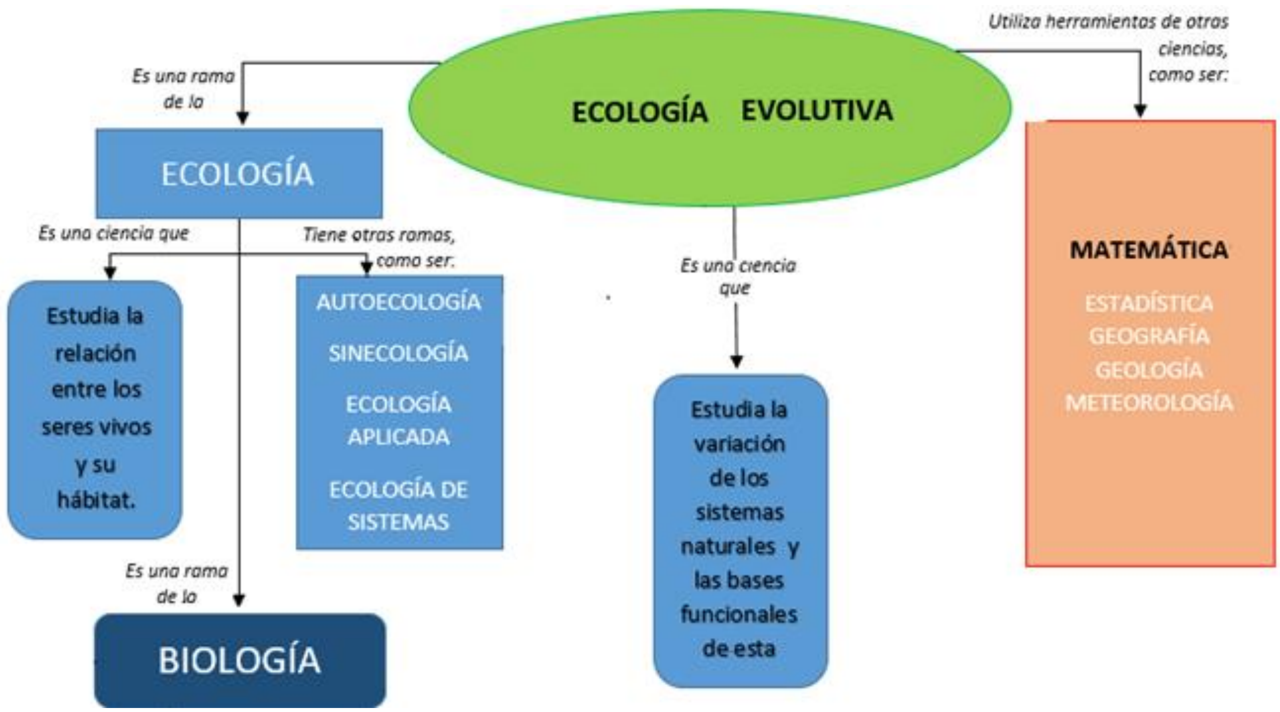


Figura 2 – d. Organización de la relación entre Ecología Evolutiva, Ecología, Genética y Biología.

Entre los temas estudiados en la Ecología Evolutiva, Figura 2 – e, nos interesa ocuparnos de la ecología de poblaciones, rama que se aboca al estudio del crecimiento (incluye tasas de natalidad y mortalidad), fluctuaciones, dispersión e interacciones de la población. En particular, dentro de estos temas, nos interesamos en el Crecimiento Poblacional Exponencial y en las Tablas de Vida.

Decidimos delimitar nuestro estudio a estos temas en particular debido a que entendemos que son representativos de la utilidad de la Matemática en la Ecología Evolutiva.

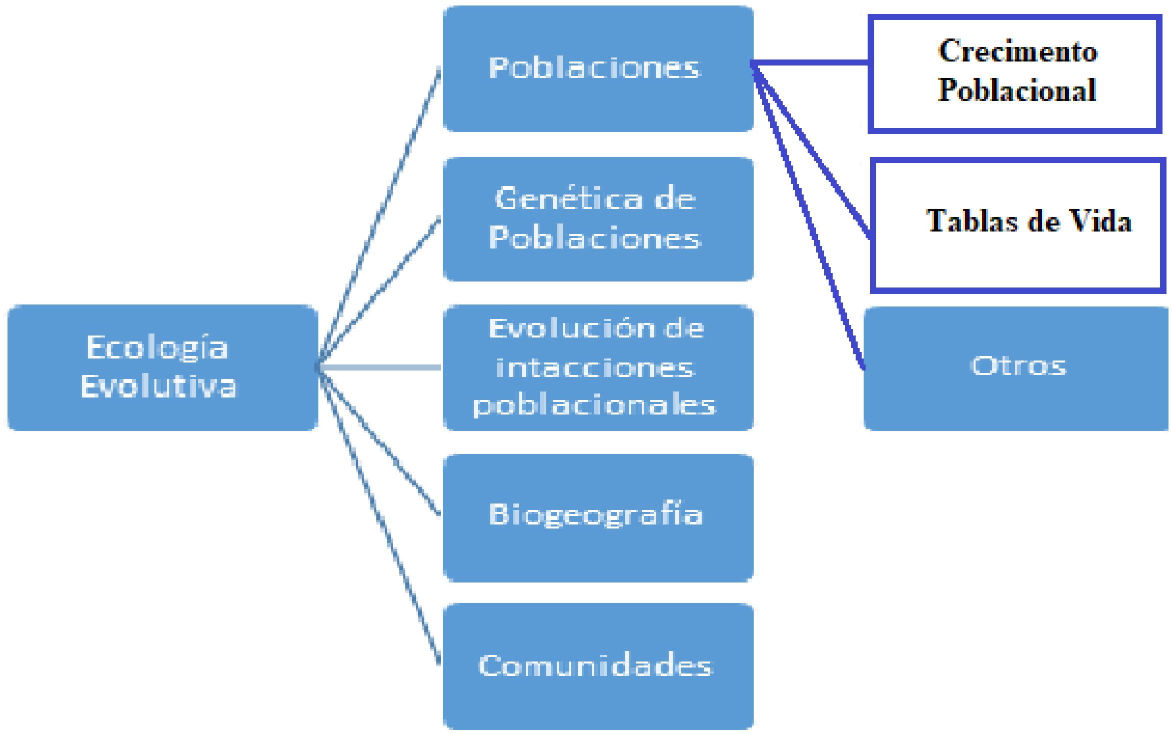


Figura 2 – e. Áreas de estudio de la Ecología Evolutiva

La presentación del estudio del saber sabio realizado de estos temas se presenta en la sección 2–C.3. Dicho estudio corresponde al primer paso para la construcción del Modelo de Competencias Matemáticas.

2 – C . 2 . Matemáticas aplicadas a la Ecología Evolutiva

La Ecología Evolutiva hace uso de conceptos y modelos matemáticos para estudiar la evolución en poblaciones de organismos actuales, estos son una herramienta de la que se vale para realizar hipótesis e interpretar la evolución de las poblaciones. Por ello, como indica Polo (2013), a pesar de que muchos biólogos prefieren eludir los desarrollos matemáticos, es mucho lo que esta ciencia puede aportar, particularmente si se toma en cuenta la utilidad de los modelos matemáticos en ecología. Apoyando esta idea, Bazán y Aparicio (2012) indican que tanto la matemática como la estadística, en el mundo de hoy, son consideradas como herramientas que puede ser utilizada en la búsqueda de resultados y soluciones en distintas ciencias. La adquisición de ciertas habilidades matemáticas y estadísticas básicas y la comprensión de ciertos conceptos son imprescindibles para un funcionamiento efectivo de la sociedad actual.

Los ecólogos, al igual que otros científicos, suponen que existe una realidad organizada en la naturaleza y que pueden formularse principios que reflejen de modo adecuado este orden natural. La tarea del ecólogo es, no solo describir, pormenorizando y clasificando distintos elementos ecológicos, sino desarrollar teorías generales que permiten comprender y explicar el origen y los mecanismos de interacciones de los organismos entre sí y con el mundo no vivo. Para esto, Pianka, E (1982, p. 3), expresa que la Ecología utiliza matemática, y es como parte de esta ciencia, que la ecología evolutiva estudia las adaptaciones de los organismos a su medio ambiente, y los mecanismos que las generan. En términos de Méndez Iglesia, la Ecología Evolutiva estudia la evolución en poblaciones de organismos actuales, se cuestiona si diferentes fenotipos conducen a diferencias en eficacia biológica y cómo eso afecta a la distribución de fenotipos en las generaciones siguientes, y para ello utiliza matemática. (Méndez Iglesia, 1999, p. 596)

También hay que reconocer que entre los matemáticos puede encontrarse cierta reticencia en cuanto al estudio de la matemática aplicada, respecto a esto García (2005, p. 17) expresa que desde finales del siglo XIX y durante las primeras décadas del siglo XX, hubo una fuerte corriente en investigación sobre fundamentos epistemológicos del conocimiento matemático que condujo a dar una mayor importancia a la matemática pura frente a las aplicaciones, que hasta ese momento no se había producido, es más, se puede decir que gran parte de las nociones matemáticas tuvieron su origen al tratar de resolver problemas de otras ciencias, como ser el cálculo infinitesimal que surgió de estudios en mecánica o ciertas teorías geométricas que se desarrollaron a partir del estudio de problemas de topografía. Mientras que, en la Educación Matemática, indica García (2005), “durante los últimos 25-30 años es posible observar un intento de retorno a las matemáticas aplicadas o, de manera general y un tanto ambigua, a las relaciones entre las matemáticas y el mundo real, entendido éste en un sentido amplio que abarca, desde la realidad cotidiana, hasta la realidad de otras disciplinas científicas. También es usual referirse a este amplio dominio de investigación como «modelización y aplicaciones»”. (p. 17). Para que los estudiantes lleguen a comprender y a apreciar tanto el papel de las matemáticas en la sociedad como el método matemático, esto es, la clase de preguntas que un uso inteligente de las matemáticas permite responder, las formas básicas de razonamiento y del trabajo matemático, así como su potencia y limitaciones, consideramos, coincidiendo así con Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2003, p. 17) en que es importante analizar el tipo de matemáticas a enseñar y la forma de llevarla a cabo.

Así, basados en estas concepciones, de entre las nociones matemáticas que emplea la Ecología Evolutiva, prestamos especial atención a los modelos matemáticos y al uso de fórmulas.

En sentido amplio, un *modelo* es una representación formal, verbal, matemática, o eventualmente de computación, de un objeto o de un fenómeno real (Figura 2 – f). La formulación de modelos y su posterior validación empírica constituyen el núcleo central del método científico.

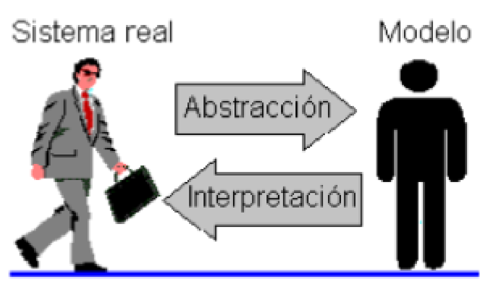


Figura 2 – f. Esquema conceptual de un sistema real y un modelo.

La Ecología Evolutiva se ayuda de modelos matemáticos, como los modelos de optimización, los modelos de teoría de juegos y los modelos genéticos; los ecólogos utilizan modelos siempre que quieren entender, representar, describir, analizar, comunicar etc., algún fenómeno natural. Los modelos matemáticos permiten comprender y explicar el origen y los mecanismos de interacción de los organismos entre sí y con el mundo no vivo, permitiéndoles, por ejemplo, realizar predicciones sobre el comportamiento de las poblaciones que estudian, entender la relación presa-depredador o bien describir cambios oscilatorios en dos poblaciones que interactúan en función del tiempo (De La Ossa y De La Ossa-Lacayo, 2010, p. 168).

Para explicar el pasaje del mundo real (situación concreta en campo de la Ecología Evolutiva) a un modelo matemático retomamos lo propuesto por Blum y Niss[4] (1991), respecto a que la forma de describir la "modelización y las aplicaciones" en el proceso de resolución de problemas aplicados, (Figura 2 – g):

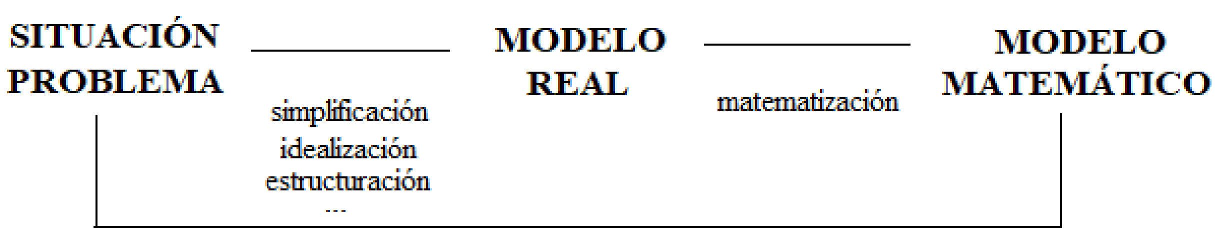


Figura 2 – g. Pasaje de la situación concreta a un modelo matemático.

> "El punto de partida es un problema aplicado o, como también lo llamamos, una situación de problema real. Esta situación debe ser simplificada, idealizada, estructurada, sujeta a condiciones y suposiciones apropiadas, y debe ser precisada por el "resolutor de problemas" de acuerdo con sus intereses. Esto conduce a un modelo

[4] Lo que presentamos es la traducción de lo presentando por García (2005), ya que este autor trascribe lo expuesto por Blum y Niss 1991) en inglés.

real de la situación original que, por un lado, aún contiene características esenciales de la situación original, pero por otro lado ya está tan esquematizado que (si es posible) permite un enfoque con medios matemáticos.

El modelo real debe ser matematizado, es decir, sus datos, conceptos, relaciones, condiciones y supuestos deben traducirse a las matemáticas. Así, resulta un modelo matemático de la situación original. Dicho modelo consiste esencialmente en ciertos objetos matemáticos, correspondientes a los "elementos básicos" de la situación original o en el modelo real, y en ciertas relaciones entre estos objetos, que también corresponden a las relaciones entre esos "elementos básicos". Para ser un poco más preciso, un modelo matemático puede verse como una terna (S, M, R), que consiste en una situación de problema real S, alguna colección M de entidades matemáticas y alguna relación R por la cual los objetos y las relaciones de S son relacionados con los objetos y relaciones de M" (p. 38-39, en García, 2005, p. 46).

Bajo esta concepción un modelo es un sistema conceptual complejo, expresado mediante una variedad de medios de representación interactuando entre sí, con el propósito de construir o interpretar, describir o explicar, otros sistemas que los humanos encuentran o crean. Se considera que los modelos residen tanto en la mente como en los medios representacionales. Para especificar un modelo matemático es necesario, en general, identificar sus elementos, relaciones entre elementos, operaciones con los elementos, reglas o principios que controlan las interacciones y relaciones, precedentes. De esta manera, la modelización matemática es el marco a través del que una situación del mundo real, simple o compleja, puede ser reconstruida, descrita, matemáticamente, y usada con fines predictivos.

Otros autores hacen establecen ideas similares sobre la modelización matemática, por ejemplo, Gascón (2002a), tomando ideas de Revuz (1971) propone tres componentes para plantear un modelo epistemológico de las matemáticas, a saber: las situaciones, los modelos y las teorías. Llama situación a una parte de la realidad (referida a la realidad física) que se quiere considerar, relativamente independiente del resto del universo; el modelo matemático de la situación es una esquematización de ésta por medio de sus características “esenciales” que deben ser descritas en términos matemáticos, y llama teoría a un modelo matemático cuando se lo considera independiente de las situaciones modelizadas por él. A partir de esto establece una consecuencia muy importante para la enseñanza de las matemáticas y es que es fundamental en ella, se pase tanto de situaciones a modelos y de ahí a las teorías, como también en sentido inverso, de teorías a modelos y de modelos a situaciones.

Por su parte, Chevallard (1989, en Gascón 2002a, p. 7) presenta una visión más amplia de modelo matemático, él entiende como sistema modelizable matemáticamente a cualquier ámbito de la realidad, sin ningún tipo de restricciones, siempre que pueda ser aislado del resto será considerado un sistema potencialmente modelizable; la noción de modelo matemático pasa a ser el resultado de un proceso de modelización matemática de un sistema matemático o sistema extramatemático y en cuanto a las teorías, denomina teoría o modelo regional simplemente a un modelo cuyo alcance es tal que engloba ciertos modelos locales.

Así, una fórmula no es más que un modelo matemático, que relaciona ya sea variables intramatemáticas o extramatemáticas. es una secuencia o cadena de caracteres cuyos símbolos pertenecen a un lenguaje formal, de tal manera que la expresión cumple ciertas reglas de buena formación y que admite una interpretación consistente en alguna área de la matemática y en otros sistemas formales. Ésta tiene la finalidad de expresar una relación general entre los términos expresados en ella.

En las ciencias naturales, una fórmula es una expresión matemática que relaciona magnitudes, que pueden ser medidas, para calcular el valor de otras de muy difícil o de imposible medida. En un contexto general, nos suministran una solución matemática para un problema del mundo real.

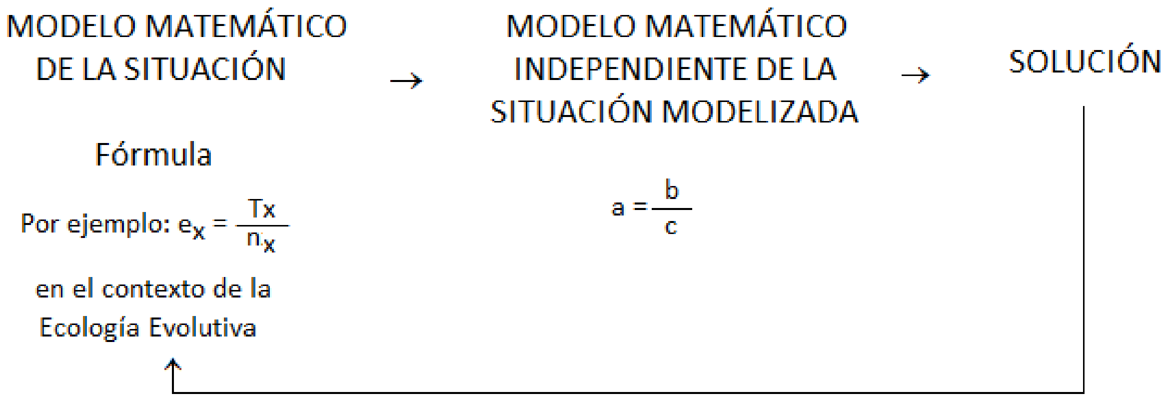


Figura 2 – h. Distinción entre el modelo matemático real y el modelo matemático.

Expresando esto en términos de la terna (S, M, R), (Figura 2 – i), dada por Blum y Niss (1991), entendiendo que S es el conjunto de objetos y relaciones dadas por el problema real, por la situación en Ecología Evolutiva; M es la colección de entidades matemáticas, los objetos y relaciones en este campo y, R es la relación por la cual los elementos de S se relacionan con los de M.

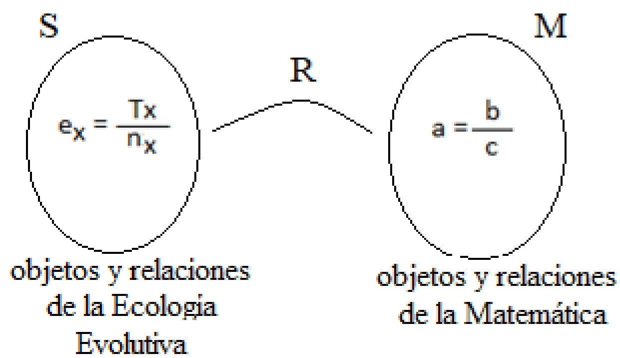


Figura 2 – i. Correspondencia entre objetos y relaciones de la Ecología Evolutiva establecidas en el modelo real y objetos y relaciones de la Matemática del modelo matemático.

En S tenemos un modelo real de la situación original, por ejemplo, $e_x = \frac{T_x}{n_x}$, que por un lado, aún contiene características esenciales de la situación original, pero por otro lado ya está tan esquematizado que, si es posible, permite un enfoque con medios matemáticos. Mientras que, en M, tenemos el correspondiente modelo matemático, formado por objetos y relaciones matemáticas, para el que, por lo tanto, son válidas las definiciones y las propiedades del campo matemático.

El modelo matemático de la situación permite expresar las relaciones observadas en el contexto de la Ecología Evolutiva, manteniendo las propiedades de este campo para las variables relacionadas, por lo que las observaciones que se pueden realizar sobre ella estarán limitas, mientras que, si se analiza el modelo matemático independiente de la situación modelizada, se está en contextos puramente matemáticos, se podrán observas cuestiones matemáticas que no estarán limitadas por el contexto real.

Por último, queremos hacer mención a que, desde la Didáctica de la Matemática, investigadores como Barquero, B., Bosch, M. y Gascón, J. (2007) advierten acerca del riesgo de que en la formación universitaria se enseñen conocimientos previamente matematizados, sin atribuir mucho protagonismo a los procesos de matematización de sistemas extramatemáticos que han dado lugar a estos conocimientos. Expresan que la "ideología" imperante en las instituciones universitarias es la de la "aplicación": lo primero es aprender a manejar los modelos matemáticos supuestamente únicos y luego ya se verá como "aplicarlos" a cada ámbito particular de trabajo, sin tener en cuenta que, en muchas ocasiones, el modelo matemático que se pretende aplicar proviene de la matematización o modelización previa del sistema al cual queremos aplicar el modelo. El considerar que la aplicación y la matematización (o modelización) son procesos independientes cuando, en realidad, son procesos inversos que se condicionan y dan sentido mutuamente, puede generar un obstáculo en su aprendizaje

2 – C . 3 . Sobre Población, Crecimiento Poblacional y Tablas de vida

Si bien el tema de esta investigación no es la enseñanza y aprendizaje de los Principios de la Ecología de Poblaciones, de acuerdo a lo explicitado respecto de la conformación de un Modelo de Competencia (Cap.2 – B . 2), entendemos que su análisis es fundamental para poder organizar un Modelo de Competencia referido al tema. Por ello, vamos a considerar el tratamiento del saber sabio de referencia en torno a dos aspectos de las Poblaciones: las Tablas de Vida y el Crecimiento de las Poblaciones.

Desde esta postura, es necesario presentar las principales definiciones, propiedades, simbologías, etc., de este contenido desde su aspecto matemático, sin que se tenga pretensiones de hacer una presentación exhaustiva y formal de los temas.

2 – C . 3 . I . Población - Crecimiento Poblacional Exponencial

"El crecimiento poblacional refleja la diferencia entre las tasas de natalidad y mortalidad" (Smith, 2007, p. 215)

Para la ecología evolutiva, una forma de definir población es como un grupo de organismos de la misma especie que ocupan un espacio particular en un tiempo determinado. Así, mientras la demografía representa el análisis de la dimensión temporal de una población, la ecología evolutiva, desde el punto de vista demográfico, puede ser vista como el estudio de las implicancias, para una población, de la variación sobre esta dimensión. Justamente, de los parámetros poblacionales, el de mayor relevancia para la ecología evolutiva es su tamaño o densidad, y los cuatro parámetros de la población que afectan a la densidad son: la natalidad (nacimientos), la mortalidad (muerte), la inmigración y la emigración.

En este contexto, el *crecimiento poblacional* se refiere al modo en el que la cantidad de individuos de una población aumenta o disminuye con el tiempo (Smith y Smith, 2007, p. 215). Y en nuestro caso, el interés está puesto en explorar el proceso de crecimiento poblacional en condiciones en las que la dinámica poblacional es una función únicamente de los procesos demográficos relacionados con el nacimiento y muerte, es decir, en las condiciones en las que una población es cerrada, sin inmigraciones ni emigraciones.

Para entender los conceptos, procesos y fórmulas involucradas, tomamos en consideración lo expresado por Smith (2007, p 215 – 218) y por Pianka (1982, p. 108 - 112)., para la cuantificación del Crecimiento Poblacional:

Supóngase que se quiere controlar la población de un organismo que tiene un ciclo de vida muy simple. Consideremos que no existen otros factores que modifiquen la cantidad de individuos de la población, salvo los nacimientos y las muertes, que estos son procesos son continuos, es decir, que no se tienen períodos de vida o muerte sincronizados, y que depende del tiempo. Denotemos N(t) a la cantidad de individuos que forman una población en un tiempo t. A partir de esta situación, lo que se debe analizar es cómo cambiará la cantidad de individuos que forman la población con el transcurso del tiempo.

Si “b” representa el nacimiento de un nuevo individuo por unidad de tiempo (proporción de nacimiento), denominado *tasa instantánea de natalidad per cápita*, la cantidad de individuos que nacen en el siguiente período Δt, es: $b\,N(t)\,\Delta t$, debido a que cuanto más individuos haya en la población, mayor será la cantidad de nacimientos, y como cada individuo añadirá únicamente un individuo a la población total, la cantidad de nacimiento, en función del tiempo, estará dada por: $B(t) = b\,N(t)\,\Delta t$.

En el cálculo de la constante “b” se realiza la división entre la cantidad de individuos nacidos sobre la cantidad de individuos iniciales de una población, y el tiempo analizado; por lo que considerando sus unidades de medición se expresaría como [(individuos nacidos / individuos iniciales) / tiempo)], de donde, al simplificar, resulta que la unidad de b es tiempo^{-1}.

Si se denota con la letra “d” la muerte de un individuo por unidad de tiempo (proporción de muerte), denominado *tasa instantánea de mortalidad per cápita*, con el mismo razonamiento aplicado para los nacimientos, la cantidad de muertes, en función del tiempo, estará dada por:

$D(t) = d\,N(t)\,\Delta t$.

Así también, para la constante de proporcionalidad “d”, las unidades son [individuos muertos / (individuos tiempo)], por lo que la unidad de d es tiempo^{-1}.

El tamaño de la población en el siguiente período Δt se puede escribir:

$N(t + \Delta t) = N(t) + B(t) - D(t)$ o bien $N(t + \Delta t) = N(t) + b\,N(t)\,\Delta t - d\,N(t)\,\Delta t$

Si se escribe esta relación, expresando la variación del tamaño de la población respecto de la variación del tiempo, se tiene: $\frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = (b - d)\,N(t)$ o bien $\frac{\Delta N}{\Delta t} = (b - d)\,N(t)$

Si se denota Δt a la variación del tiempo, que se puede calcular haciendo tiempo final menos tiempo inicial, $\Delta t = t_f - t_i$, denominado período, y ΔN a la variación del tamaño poblacional, que se calcula haciendo la diferencia entre el tamaño poblacional luego de un período Δt y el tamaño poblacional en el momento inicial donde $\Delta N = N(t + \Delta t) - N(t)$, denominado "elevación", $\frac{\Delta N}{\Delta t}$ define la *tasa de cambio poblacional* ΔN durante el intervalo de tiempo Δt; es el cambio por unidad en el tamaño poblacional por cambio por unidad de tiempo. Como se observa en el Gráfico 2 – a, si la relación entre N(t) y t es lineal, la tasa de cambio permanece constante, mientras que si la relación entre N(t) y t no es lineal, la pendiente cambia en función del tiempo, de tal manera que la tasa de cambio depende del tiempo en el que se evalúa, Gráfico 2 – b.

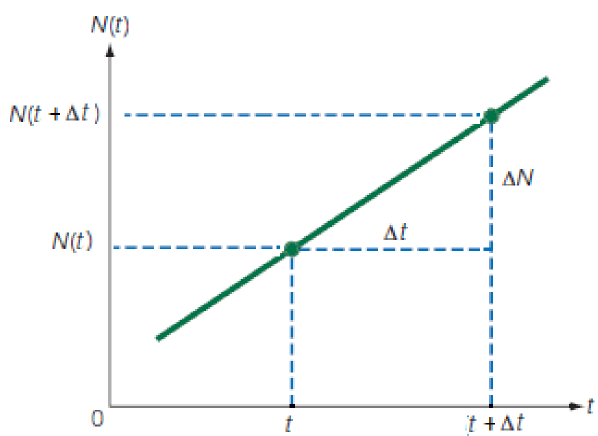


Gráfico 2–a. Relación lineal entre la cantidad de individuos en la población en un momento dado N(t) y el tiempo t.

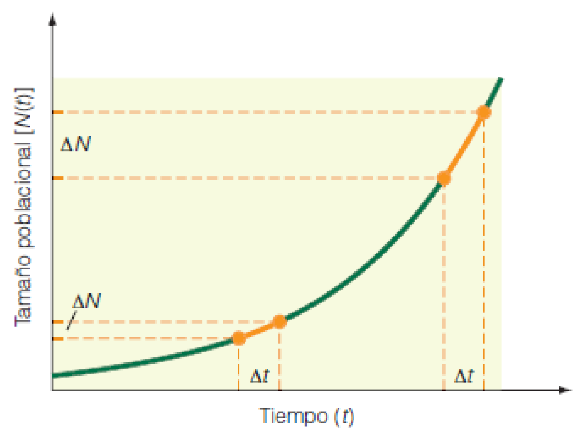


Gráfico 2–b. Relación no lineal entre la cantidad de individuos en la población en un momento dado N(t) y el tiempo t. (Smith, 2007, p. 216)

En el caso de que se quiera analizar variaciones de tiempo infinitamente pequeños, Δt se aproxima al valor cero, la tasa de cambio se llama *tasa de cambio instantánea* y se denota:

$$\frac{dN}{dt} = (b - d)\,N$$

En este caso, b y d representan las tasas de natalidad y mortalidad (per cápita) instantáneas y, como son constantes, se puede definir: r = b – d.

r es la tasa instantánea de crecimiento per cápita, también denominada *tasa intrínseca de crecimiento poblacional*, o *tasa intrínseca de incremento natural*, es una medida de la *tasa instantánea de cambio del tamaño de la población* per cápita; r se expresa en número por unidad de tiempo por individuo, por lo que su unidad es tiempo^{-1}.

Entonces se puede escribir: $\frac{\mathrm{dN}}{\mathrm{dt}} = r\,N$, ecuación a la que se denomina como *modelo de crecimiento poblacional exponencial*. Este modelo pronostica la tasa de cambio poblacional con el transcurso del tiempo. Como se puede observar en el Gráfico 2 – c, (Smith, 2007, p. 217), si la tasa instantánea de crecimiento per cápita es positiva ($r > 0$, $b > d$) el modelo exponencial aumenta exponencialmente; si la tasa instantánea de crecimiento por cápita es nula ($r = 0$, $b = d$) no existe en el transcurso del tiempo ningún cambio en el tamaño poblacional y, si la tasa instantánea de crecimiento por cápita es negativa ($r < 0$, $b < d$), existe una reducción exponencial.

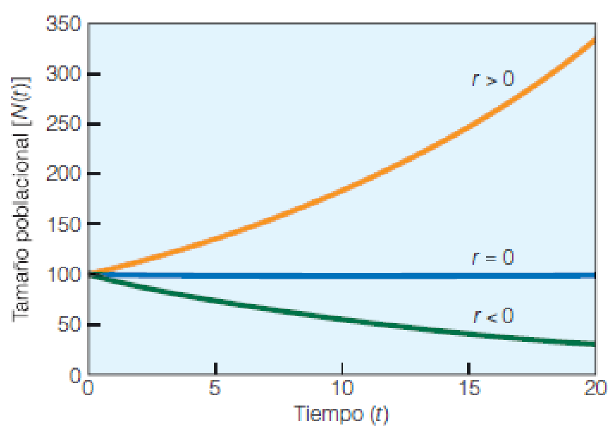


Gráfico 2–c. Relación entre el crecimiento o decrecimiento en el modelo exponencial y la tasa instantánea de crecimiento per cápita, r.

Si se desea definir la ecuación para pronosticar el tamaño poblacional, N(t), en las condiciones del *crecimiento exponencial*, es necesario resolver la ecuación diferencial $\frac{\mathrm{dN}}{\mathrm{dt}} = r\,N$.

El resultado es: $N(t) = N_0 e^{r t}$, donde N_0 es el tamaño poblacional inicial en t = 0, y “e” es un número irracional, base de los logaritmos neperianos, cuyo valor aproximado es 2,72.

2 – C . 3. II . Tablas de Vida

“Las tablas de vida proporcionan un patrón de mortalidad y supervivencia características de la edad”, (Smith, 2007, p. 218). Justamente, una *tabla de vida* registra cuestiones de vida y muerte en una población, resume la probabilidad de que los organismos de una población vivan, mueran o se reproduzcan en las diferentes etapas de sus vidas.

Los ecólogos registran cuántos individuos de una especie sobreviven y cuántos nacen, y con estos datos pueden entender mejor la *historia de vida* o el patrón típico de supervivencia y reproducción de esa especie, para de esta manera protegerlos. El combinar las tasas de natalidad y mortalidad en una "instantánea" de la población actual, el conocer cuántos individuos jóvenes y viejos hay en ella y si son machos o hembras, permite a los ecólogos predecir cómo crecerá o disminuirá la población en el futuro, lo que es particularmente importante en el caso de especies amenazadas.

Ya se dijo que la tasa de crecimiento per cápita r se calcula en función de las tasas de natalidad y mortalidad, pero ¿de qué manera calculan los ecólogos la tasa de crecimiento per cápita? Si todos los individuos de la población pueden ser considerados como idénticos, las tasas de natalidad y mortalidad para la población se calculan contando la proporción de individuos en la población que nacen o que mueren, por unidad de tiempo.

Pero, cuando las tasas de natalidad y mortalidad varían con la edad, se debe utilizar un enfoque diferente. Los procesos ecológicos son normalmente específicos para la edad o estadio de los organismos. Así, ellos tienen que ser registrados de acuerdo al estadio del ciclo de vida.

Esta información normalmente se llama "tablas de vida" y permiten obtener una imagen clara y sistemática de la mortalidad y supervivencia de una población. Generalmente se usan dos tipos de tablas de vida: (1) edad-dependiente y (2) estadio-dependiente.

Tabla de vida edad-dependiente:

La técnica para construir una tabla de vida **(**Smith, 2007, p. 219 – 221 y Pianka, 1982, p. 93 - 101) está basada en las tablas de mortalidad utilizadas por las empresas de seguros de vida. La construcción comienza con una cohorte, es decir, un grupo de individuos nacidos en el mismo período de tiempo. A partir de dicha cohorte, se anotan los supervivientes de la población inicial tomando cohortes consecutivas, así hasta que la población se reduce a cero. En general, se denota “x”, a la edad en cierta unidad de tiempo y “n_x” a la cantidad de individuos de la cohorte original, que están vivos a la edad especificada (x). A partir de esta información, se pueden calcular:

La Tasa de supervivencia (l_x,): es la proporción de individuos de la cohorte original que está viva a la edad x, se calcula haciendo $l_x = \frac{n_x}{n_0}$, representa la probabilidad que tiene el individuo al nacer de sobrevivir hasta la edad considerada.

La Mortalidad específica de la edad (d_x): es la cantidad de individuos que murieron durante el intervalo de tiempo, se calcula haciendo la diferencia entre la cantidad de individuos vivos para cualquier de edad (n_x) y la siguiente clase de edad mayor (n_{x+1}). También se puede calcular la *tasa de mortalidad*, restando a la tasa de supervivencia de una cierta edad x, la que corresonde a un período posterior $x + 1$: $d_x = l_x - l_{x+1}$.

La Tasa de mortalidad específica de la edad (q_x): es la cantidad de individuos que murieron durante cualquier intervalo de tiempo (d_x) dividido por la cantidad de individuos vivos al comienzo de ese intervalo (n_x): $q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}$ (o bien $q_x = \frac{d_x}{n_x}$ si se calcula $d_x = n_x - n_{x+1}$)

Otro fenómeno importante a considerar es la reproducción. "El número de individuos de la prole producidos por un organismo medio de edad x durante este período de edad, se designa por m_x; sólo se cuentan los individuos que pertenecen a la clase de edad cero[5]" (Pianka, 1982, p. 99). Desde el punto de vista biológico, hembras y machos son responsables cada uno de la mitad de la reproducción, para cada individuo de la prole recién nacida, de manera que un organismo debe producir dos individuos de la progenie para substituirse a sí mismo[6]. "La suma de m_x a lo largo de todas las edades o el número total de individuos de la prole que serían producidos por un organismo medio en ausencia de mortalidad, se denomina tasa de reproducción bruta". (Pianka, 1982, p. 101).

La Tasa de reproducción (m_x): si se define en términos de las hembras, es el número de descendencia hembra producidas por una madre en el intervalo de edad x a x+1. La supervivencia de madres y descendencia durante este intervalo de tiempo debe ser incluida en m; es decir, m_x es igual al número total de descendientes producidos en un intervalo de tiempo y que sobreviven hasta el final de este periodo, dividido por el número inicial de hembras en el comienzo del intervalo de tiempo.

Ahora bien, no todos los organismos viven para explotar plenamente su capacidad de reproducción, por lo que es conveniente tener una estimación del número de descendientes producidos por un organismo que experimenta una mortalidad media, para ello se define la tasa de reproducción neta (R_0) que es el "número medio de individuos de la prole de la clase de edad

[5] La clase de edad cero es arbitraria: se puede empezar una tabla de vida en el momento de la concepción, del nacimiento, o en la edad de independencia respecto a los cuidados parentales, según lo que sea más conveniente y apropiado.
[6] Este concepto tiene sentido biológico porque un organismo que se reproduce sexualmente cede sólo la mitad de su genoma a cada uno de los individuos de la progenie.

cero, producidos por un organismo medio, durante su vida entera” (Pianka, 1982, p. 100). Matemáticamente: $R_0 = \sum_{x=0}^{n} l_x m_x$.

Cuando R_0 es mayor que 1, la población está en aumento; cuando R_0 es igual a 1, la población es estable, y cuando R_0 es menor que 1, la población está disminuyendo. Por esto, la tasa de reproducción neta también se denomina tasa de substitución de la población. Una población estable, en equilibrio, con una curva q_x alta, debe presentar una curva m_x correspondientemente alta para substituirse a sí misma (cuando la tasa de mortalidad es alta, la tasa de natalidad debe ser alta). Inversamente, cuando l_x es alta, m_x es baja para que R_0 sea igual a la unidad.

Ahora bien, la reproducción no comienza a la misma edad en todas las especies, puede retrasarse bastante en la vida o, al contrario, las actividades reproductoras pueden empezar casi después del nacimiento. La edad en la que tiene lugar la primera reproducción se suele denotar α, y la edad de la última reproducción ω. El *tiempo medio entre generaciones* producidas por organismos que crían repetidas veces puede estimarse haciendo[7]: $T = \frac{\alpha+\omega}{2}$, aunque se puede hacer un cálculo más exacto de T midiendo cada edad por su *fecundidad total*, $l_x\ m_x$, haciendo, siempre que la población no crezca: $T = \sum_{x=0}^{n} x\ l_x\ m_x$.

En el caso de que la población esté en expansión o en regresión, esta suma debe dividirse por R_0, para estandarizar el número medio de descendientes con éxito por individuo. El tiempo medio de generación es la edad parental media en la cual nacen los individuos por progenie.

[7] Para un organismo que sólo cría una sola vez, el tiempo entre generaciones, se denomina “tiempo de generación” y es igual a α.

(Pianka, 1982, p. 100). Así, T, el *tiempo promedio de generación*, es estimado usando la ecuación[8]: $T = \frac{(\sum_{x=0}^{n} x\ l_x\ m_x)}{R_0}$.

También es posible estimar el valor aproximado de la *tasa intrínseca de incremento per cápita* r usando la siguiente lógica: si se asume generaciones discretas con tiempo de generación T y tasa de reproducción neta de R_0, con un tamaño de la población en el tiempo cero N_0, después de T años, la población crecerá a $N_T = N_0 \times R_0$. Según el modelo exponencial: $N_T = N_0\ e^{rT}$

De donde r = $\frac{1}{T} ln\left(\frac{N_T}{N_0}\right) = \frac{1}{T} ln\left(\frac{N_0 \times R_0}{N_0}\right)$, por lo tanto: r = $\frac{ln(R_0)}{T}$ [9]

r es positivo cuando $R_0 > 1$ y negativo cuando $R_0 < 1$. Como ln 1 = 0, cuando $R_0 = 1$, r = 0. En condiciones óptimas, cuando R_0 es tan grande como sea posible, se alcanza la tasa intrínseca de incremento máxima, $r_{\text{máx}}$.

Cabe aclarar respecto de las unidades usuales de tiempo utilizadas para medir la edad[10], cuando la supervivencia y la reproducción son procesos continuos, sin cambios cíclicos, cualquier unidad de tiempo puede ser conveniente: días, semanas, meses, años. Las unidades de Tiempo deben proporcionar resolución suficiente. Por ejemplo, si el lapso de vida de un organismo es de 2 meses, tomar 1 mes como unidad producirá sólo dos intervalos de edad que definitivamente no son suficientes. En la mayoría de los casos, el número de intervalos de edad deberá estar en el rango de 10 a 50.

---

[8] Si los organismos engendran continuamente, entonces el tiempo de generación puede ser sobrestimado usando esta ecuación, porque todos los nacimientos son sumados al periodo entre censos, el cual es igual a una clase de edad. El tiempo de generación puede ser ajustado restando la mitad de la clase de edad.

[9] Esta es una estimación aproximada de r porque asumimos que las generaciones son discretas.

[10] Aclaración realizada en el Trabajo Práctico N° 3 de la cátedra Ecología Evolutiva de la carrera Licenciatura en Genética de la Universidad Nacional de Misiones.

Si la supervivencia o la reproducción son cíclicas (ej., estacional), entonces un ciclo puede tomarse como una unidad de tiempo. En este caso puede pasar que el número de intervalos de edad pueden caer a 2 o 3. Sin embargo, no es peligroso si la reproducción se limita a un periodo corto dentro del año porque habrá diferencias pequeñas de edad entre los organismos nacidos en el mismo año.

Si la supervivencia y la reproducción son cíclicas pero el lapso de vida es menor o igual a este ciclo, entonces las unidades de tiempo deben ser más pequeñas que la longitud del ciclo. Sólo pueden construirse tablas de vida edad-dependientes para la población entera si el periodo de cría es corto y por consiguiente el desarrollo de organismos se sincroniza. Por otra parte, deben construirse tablas de vida separadas para subpoblaciones que empiezan su desarrollo en estaciones diferentes.

Esperanza de vida: e, se refiere a la cantidad media de años que se espera que viva un individuo desde el momento de su nacimiento. (Smith, 2007, p. 222).

Esperanzas de vida específicas de la edad (e_x): es la cantidad media esperada de años que un individuo de cierta edad espera vivir en el futuro. Se calcula: $e_x = \frac{T_x}{n_x}$

Para estimar e_x primeramente se calcula, L_x y T_x.

Esperanza de vida en cada edad (L_x): la cantidad media de individuos vivos durante el intervalo de edad x hasta x + 1. Se calcula como el promedio de n_x y n_{x+1} : $L_x = \frac{n_x+n_{x+1}}{2}$

Total de años vividos hacia el futuro por los individuos de la clase de edad x en la población: T_x, es el total de años vividos hacia el futuro por los individuos de la clase de edad x en la población. Se calcula sumando los valores de L_x acumulativamente desde la base de la columna a la edad x.

Supervivencia para cada edad (s_x): es la supervivencia específica de cada clase de edad. Se puede obtener restando a la probabilidad total 1, la tasa de mortalidad específica dx: $s_x = 1 - d_x$

Curvas de supervivencia y de mortalidad:

La probabilidad de supervivencia (l_x) es a menudo graficada en función de la edad x. Estos gráficos se llaman "curvas de supervivencia". Las tablas de vida y las curvas de supervivencia se basan en los datos obtenidos de una población de las especies en un tiempo particular y bajo ciertas condiciones ambientales. Son como fotos instantáneas que muestran qué fracción de un grupo inicial sigue vivo en cada edad sucesiva.

Se dividen en tres tipos generales (Gráfico 2 – d):

Tipo I: curva marcadamente convexa, los organismos no tienden a morir cuando son jóvenes o de edad media sino cuando se hacen viejos. Es decir, los individuos tienden a vivir hasta el final de su esperanza de vida fisiológica, la tasa de supervivencia es elevada durante su vida seguida de una fuerte mortalidad al final. Las especies con curvas de este tipo, por lo general, tienen pocos descendientes y proveen mucho cuidado parental para asegurarse que estos sobrevivan. Ejemplo: los humanos y la mayoría de los primates.

Tipo II: línea recta, en este caso las tasas de supervivencia no varían con la edad, los organismos mueren más o menos por igual en cada intervalo de edad. En general, los organismos con este tipo de curva de supervivencia también pueden tener relativamente poca descendencia y proveer cuidados parentales significativos. Ejemplo: especies de aves.

Tipo III: curva cóncava, indican tasas de mortalidad extremadamente elevadas al comienzo de la vida, sin embargo, los que logran superar la juventud suelen tener vidas bastante largas después de eso. Las especies con este tipo de curva por lo general tienen muchos descendientes a la vez, pero no proveen muchos cuidados a su descendencia. Por ejemplo, los árboles, los invertebrados marinos y la mayoría de los peces.

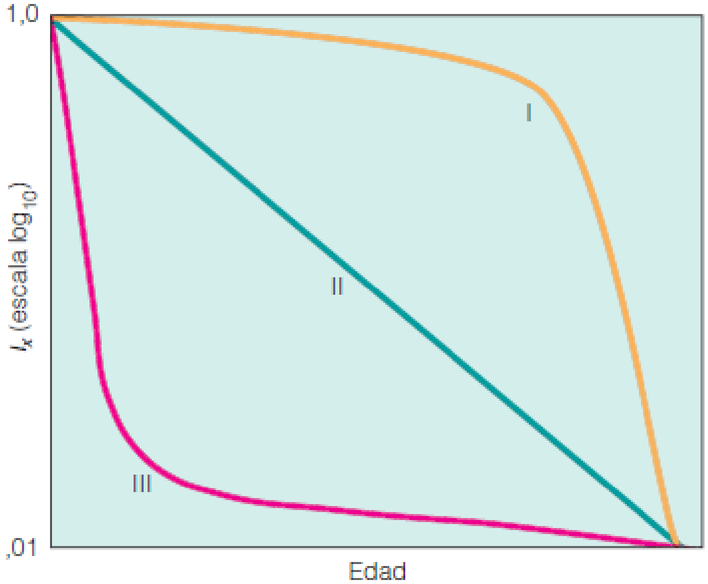


Gráfico 2 – d . Tipos de Curvas de Supervivencia (Smith, 2007, p. 224).

En la naturaleza, obviamente no se puede clasificar la supervivencia exclusivamente con estas tres categorías, en la realidad existen muchas curvas de supervivencia que son intermedias entre los tipos dados; además, los valores de supervivencia no son constantes, sino que varían con las condiciones ambientales inmediatas, pero estos tipos son un recurso importante para describir lo que ocurre en con el crecimiento de las poblaciones.

Así también se puede representar la probabilidad de muerte de un organismo de una especie utilizando las llamadas “curvas de mortalidad”. Una curva de mortalidad representa las tasas de mortalidad en términos de q_x frente a la edad. En los siguientes gráficos se muestran dos ejemplos de curvas de mortalidad, en el Gráfico 2 – e, se observa la mortalidad de la ardilla gris que muestra una fase juvenil, en la que la tasa de mortalidad es elevada y una fase posjuvenil, en la que la tasa disminuye con la edad hasta que la mortalidad alcanza algún valor bajo, para aumentar luego nuevamente, y en la Gráfico 2 – f, se muestra una curva de mortalidad de la población de Sedum (vegetal) donde se observa que la tasa de mortalidad varía según el ciclo de vida.

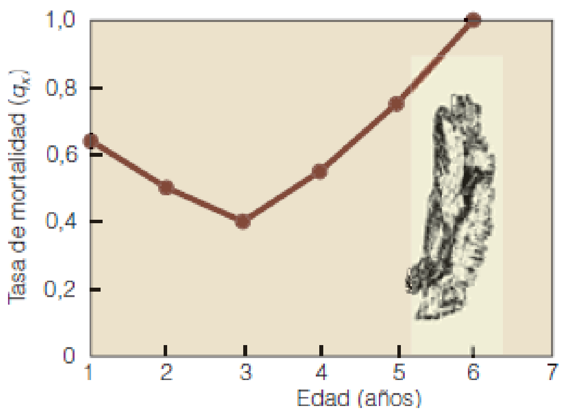


Gráfico 2 – e. Curva de mortalidad de la población de ardillas (Smith, 2007, p. 223).

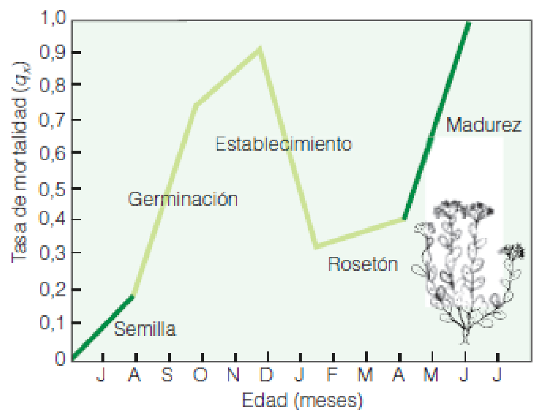


Gráfico 2 – f. Curva de mortalidad de la población de Sedum (Smith, 2007, p. 223).

Tabla de vida estadio-dependiente:

Se construyen en los siguientes casos:

- El ciclo de vida se divide en distintos estadios (ejemplo huevos, larvas, pupas y adultos en insectos).

- La supervivencia y reproducción dependen más del estadio del organismo que de la edad.

- La distribución de edades en un tiempo determinado no es importante (ej., hay sólo una generación por año).

Son tablas que se caracterizan por no tener referencia a tiempo calendario, son relativamente independientes de tiempo y pueden registrarse individualmente procesos de mortalidad, por lo que son tablas que tiene más información biológica que las tablas de vida edad-dependientes. Se usan tablas principalmente para los insectos y otros invertebrados terrestres.

Valores k: es otra medida de mortalidad. La mayor ventaja es que los valores k son aditivos: el valor k de una combinación de procesos de mortalidad independientes, es igual a la suma de los valores k para procesos individuales[11].

La supervivencia es la probabilidad de sobrevivir y para calcularla se puede aplicar la teoría de la probabilidad. Si dos procesos de mortalidad están presentes, el organismo sobrevive si sobrevive de cada proceso individual. Por ejemplo, un organismo sobrevive si no fue infectado por enfermedad y no fue capturado por un predador. Si la supervivencia de un factor de mortalidad es s_1 y la supervivencia del segundo factor de mortalidad es s_2, entonces la supervivencia de ambos procesos, s_{12} (si ellos son independientes), es igual al producto de s_1 y s_2[12]: $s_{12} = s_1 s_2$

Esta es una "regla de multiplicación de supervivencia". Si la supervivencia es reemplazada por una menor mortalidad, s = 1 - d, entonces esta ecuación se convierte en: $d_{12} = 1-(1-d_1)(1-d_2)$

Por ejemplo, si la mortalidad por predación es del 60 % y la mortalidad por enfermedades es del 30 %, entonces la combinación de estos dos procesos resulta en una mortalidad:

$d = 1 - (1 - 0{,}6)(1 - 0{,}3) = 0{,}72$ la mortalidad es del 72%

Varley y Gradwell (1960) sugirieron medir la mortalidad en valores k, que son los logaritmos negativos de la supervivencia[13]: $k = -ln(s)$

Los valores k son aditivos: $k_{12} = -ln(s_{12}) = -ln(s1\ s2) = [-ln(s_1)] + [-ln(s_2)] = k_1 + k_2$

Los valores k para el ciclo de vida entero (K) puede ser estimado como la sumatoria de los valores k de cada uno de los procesos de mortalidad: $K = \sum k_i$

---

[11] Esto es importante porque los porcentajes de mortalidad no son aditivos. Por ejemplo, si los predadores solo pueden matar al 50 % de la población y las enfermedades matan al 50 % de la población, entonces el efecto combinado de éstos procesos **no producirá** 50 % + 50 % = 100 % mortalidad.

[12] Se considera a las tasas de supervivencia como eventos y, según la teoría de probabilidad, dos eventos son independientes si y sólo si la probabilidad de la combinación de esos dos eventos es igual al producto de las probabilidades individuales.

[13] Varley y Gradwell utilizan logaritmos con base 10, pero en la cátedra Ecología Evolutiva se sugiere utilizar logaritmos naturales (con base e = 2,718).

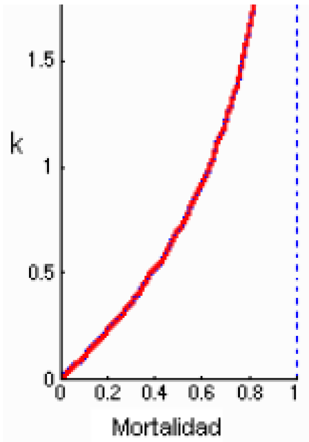


Gráfico 2 – g. Relación entre la mortalidad y el valor k

El Gráfico 2 – g, muestra la relación entre la mortalidad y el valor k. Cuando la mortalidad es baja, entonces el valor k es casi igual a mortalidad. Ésta es la razón por la cual el valor k puede ser considerado como otra medida de mortalidad. Sin embargo, a mortalidades altas, el valor k crece mucho más rápido que la mortalidad. La mortalidad no puede exceder de 1, mientras el valor k puede ser infinitamente grande.

CAPÍTULO 3

MARCO CONCEPTUAL DE LA INVESTIGACIÓN

Nuestro trabajo incluye la identificación de elementos de competencias matemáticas involucradas en la resolución de problemas de Ecología Evolutiva y la consecuente elaboración de un Modelo de Competencias Matemáticas. Para lograr este propósito, hemos asumido ciertos marcos y planteamientos teóricos, que presentamos en esta sección.

3 - A. Definiciones adoptadas para Competencia y Competencia Matemática

La revisión de bibliografía científica relacionadas a competencias y en particular competencias matemáticas, nos permitió establecer que se tratan de conceptos polisémicos, involucrando tanto a procesos externos, que pueden ser interpretados en término de acciones desarrolladas y observadas en ellas, como a procesos internos, comprensión, interpretación, razonamientos, que si bien no pueden ser visibles, se ponen en evidencia en las actuaciones realizadas por aquellos, de los cuales se dice, son competentes.

Esa polisemia hace que *competencia* no siempre sea conceptualizada de la misma forma y adquiere diferentes acepciones según el entorno en la que se la considere. A pesar de esto, en las definiciones dadas por distintos organismos, instituciones y autores, se destacan elementos comunes, como ser la necesidad de movilizar conocimientos para realizar una actividad o el resolver situaciones problemáticas en contextos reales y relevantes. Por lo expuesto, decidimos tomar en consideración las siguientes definiciones:

Competencia es la capacidad para realizar una actividad o resolver una situación problemática, en el contexto en el que se presenta la misma, de manera apropiada y con eficacia, movilizando para ello un conjunto de saberes.

Y,

S*er competente para la realización de determinada tarea involucra no solo la posibilidad de realizar de manera eficaz y con pericia la misma, sino que también se relaciona con entender por qué ha de realizarse de esa manera.*

La complejidad del término también se pone en evidencia tanto en la cantidad de acepciones que se pueden dar al mismo, como en las dificultades que presenta su traducción a idiomas distintos al que se utilizaron originalmente, como ser en la traducción del inglés al castellano expresado por Rico (2005) y Puig (2006). Por ese motivo, encontramos oportuna la aclaración que hacen estos autores sobre que en la versión inglesa se usan los términos "competence", "proficiency" y "literacy" refiriéndose a conceptos distintos, que al español son todos traducidos igualmente como "competencia", designándolos con un mismo término de forma equívoca.

Cuando en el texto inglés se utiliza *mathematical literacy*, se está refiriendo al dominio de estudio, equivalente a hablar de una "alfabetización matemática" y que, según estos autores, es conveniente traducirlo como *cultura matemática*; cuando en el texto inglés se menciona *proficiency* y *performance* refiriéndose al nivel de competencia, se afirma que es conveniente adoptar en la traducción los términos *pericia* y *actuación*, respectivamente; por otra parte, cuando en el inglés se utiliza *competence* o *competencies*, la traducción que corresponde son los términos *competencia* y *competencias*, respectivamente, al hablar sobre el conjunto de procesos generales que se deben poner en práctica al resolver problemas y cómo estas se involucran en diferentes tipos de problemas matemáticos.

En cuanto a las consideraciones realizadas sobre competencia matemática, a partir de los antecedentes considerados, entendemos que:

Competencia matemática es el conjunto de las capacidades o destrezas expresadas en las actuaciones de un sujeto epistémico para resolver situaciones problemáticas, concernientes a un entorno físico o a entornos puramente teóricos, referidos a cuestiones extramatemáticos o intramatemáticos, utilizando para ello conocimientos matemáticos.

Y que,

Un individuo tiene competencias matemáticas cuando, posicionado frente a un problema concreto de su entorno real, problema que pueden ser matemático o extramatemático, es capaz de movilizar sus conocimientos matemáticos de forma pertinente y eficaz, tanto para interpretar la situación, comprenderla y llegar a resolver la misma, interpretando la solución hallada en el contexto que lo generó.

3 – B. Competencias relacionadas en el estudio de la Ecología Evolutiva

Como se ha manifestado anteriormente, el interés de esta tesis fue estudiar las competencias matemáticas necesarias para resolver problemas de otras disciplinas distintas a la matemática, en este caso especial, la Ecología Evolutiva.

Entendemos que, en el tratamiento de ésta área de conocimiento, tanto en los procesos de su enseñanza y aprendizaje, como en las cuestiones inherentes a sus campos profesionales se requiere considerar un trabajo interdisciplinario, con la intervención de varias disciplinas científicas o culturales. Por lo tanto, en la resolución de problemas de la Ecología Evolutiva se deben poner en juego tanto competencias específicas en la misma, como en ecología general, competencias en matemáticas, y competencias en otras ciencias (Figura 3 – a).

Figura 3 – a. Competencias que se ponen en juego en la resolución de problemas en Ecología Evolutiva.

3 – C. Adaptación del Modelo Teórico Local a problemas de la Ecología Evolutiva

Como ya se ha mencionado, el marco que organiza esta investigación y sus resultados, es la elaboración de un Modelo Teórico Local (MTL): el cual corresponde a un marco teórico y metodológico para la observación experimental en matemática educativa. La adaptación que realizamos es que este modelo, en sus orígenes, está originada para investigaciones de enseñanza y aprendizaje de la matemática, y en esta ocasión, planteamos una extensión de su alcance aplicándolo a otra disciplina que utiliza la matemática como auxiliar.

En un MTL, se consideran componentes, denominados modelos de competencia, de enseñanza, de cognición y de comunicación. Cabe mencionar que se precisa la noción de *Modelo*, como un sistema conceptual (complejo), expresado mediante una variedad de medios de representación, interactuando entre sí, con el propósito de construir o interpretar, describir o explicar, otros sistemas que los humanos encuentran o crea.

En la elaboración de un MTL los cuatro modelos se interrelacionan. Básicamente los componentes de cognición y comunicación intervienen en la elaboración del marco de referencia, al realizar el estudio de la propuesta de enseñanza del tema tanto en la bibliografía como en el material de cátedra, para organizar el campo de problemas. El componente de enseñanza también está presente en dicho estudio, así como las actuaciones de los sujetos reales pueden explicarse mediante la elaboración de modelos de actuación. Si bien, la concreción de un MTL requiere del establecimiento de los componentes mencionados, no fue objetivo de este trabajo concretarlos, dado que hemos centrado el interés de la investigación en el estudio de las competencias matemáticas para el diseño de un Modelo de Competencia.

En otras palabras, esta investigación se centró principalmente en las competencias matemáticas necesarias para la resolución de problemas de la Ecología, y como un MTL debe contener como uno de sus componentes, una descripción teórica de la conducta competente en la actividad mencionada -es decir, ha de contener lo que llamamos un modelo de competencia- se particularizó el estudio en uno de los componentes, es decir, en la elaboración de un Modelo de Competencia.

Definimos como *Modelo de Competencia* a aquel que proporciona una descripción de la conducta del sujeto ideal en un dominio, y, por tanto, ha de explicar y predecir su conjunto de actuaciones posibles en él. En nuestro caso el dominio corresponde a la resolución de problemas en la Ecología Evolutiva.

La descripción de la conducta de un resolutor ideal al resolver los problemas y la interpretación de las conductas observadas en resolutores reales, da cuenta de lo que en la teoría se designan e*lementos del modelo de competencia*, estos pueden entenderse como indicadores de competencia.

3 – D. Secuencia para la elaboración de un modelo de competencias matemáticas

Como ya hemos manifestado, la elaboración de modelos teóricos locales nos proporciona un marco teórico y metodológico para la investigación, desde el punto de vista teórico caracteriza el tipo de investigación, su alcance y su fundamento, y desde el punto de vista metodológico, la noción de Modelo Teórico Local conlleva una determinada manera de organizar la investigación que es coherente con ella y que es la que aplicamos para la elaboración del Modelo de Competencia. Cabe aclarar que este enfoque se propone como modelo teórico y no como teoría; así, se sugiere que es una manera predictiva de representación que ofrece por lo menos alguna aproximación a la situación real que se somete a estudio.

Los pasos que se sugieren para la elaboración del modelo de competencias matemáticas en un área externa a ella, basados en lo presentado en el Capítulo 2 – B . 2, y que se han tomado como guía para las distintas etapas en el trabajo de investigación; se señalan en el siguiente organigrama (Figura 3 – b):

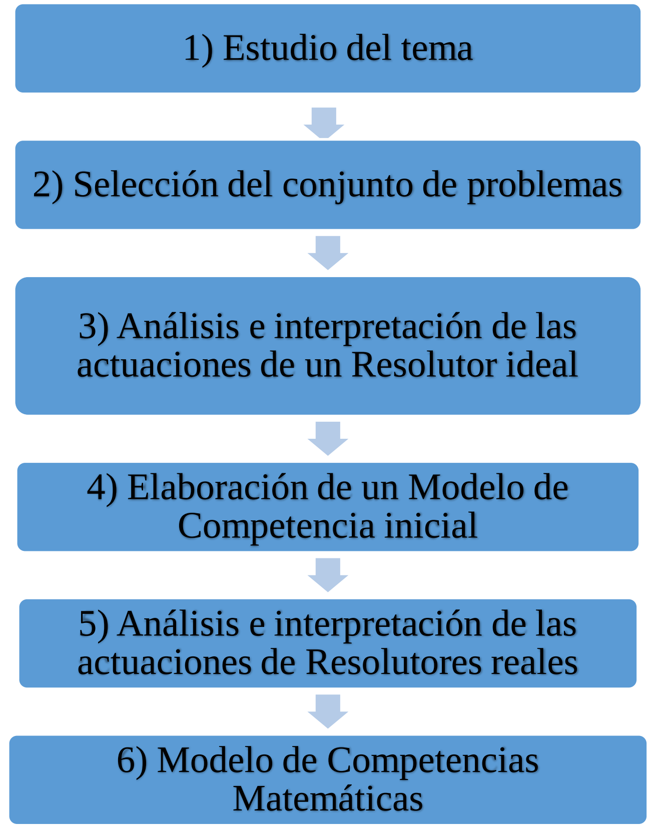


Figura 3 – b . Secuencia para la elaboración del Modelo de Competencias Matemáticas en una disciplina que utiliza la matemática como auxiliar.

Estas etapas consisten en:

1) El punto de partida es el estudio del tema: ningún fenómeno puede ser analizado sin tener en cuenta la especificidad del saber, si no se conoce el campo conceptual en el que se realiza el estudio, las preguntas que responde, así como las definiciones, propiedades y los procesos que lo sustentan; en este caso, se refiere a lo relacionado con el estudio de Poblaciones, crecimiento poblacional y tablas de vida, temas nodales dentro de la Ecología Evolutiva.
2) Selección del conjunto de problemas representativos de los temas mencionados anteriormente y en los cuales, para su resolución, la matemática debe estar presente.

3) Análisis e interpretación de las posibles actuaciones de un resolutor ideal, es decir, aquel que tiene dominio en el tema, aquél cuya competencia es la que da el método válido y cuya conducta está por tanto predicha, explicada y descrita por los pasos de ese método. Como ya lo explicitamos anteriormente, esto permite determinar los elementos de competencia evidenciados en esas actuaciones.
4) Elaboración de un Modelo de Competencia, que es Inicial, dado que se someterá posteriormente a una contrastación con las actuaciones del sujeto real.
5) Análisis e interpretación de las actuaciones de resolutores reales, tomando como base el modelo de competencia inicial elaborado y analizando posibles elementos faltantes.
6) Elaboración final del llamado Modelo de Competencias Matemáticas referido al tema de interés.

SEGUNDA PARTE

ANÁLISIS

E

INTERPRETACIONES

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE LAS ACTUACIONES DE UN RESOLUTOR IDEAL Y ELABORACIÓN DE UN MODELO DE COMPETENCIAS INICIAL

El estudio teórico del tema de interés, la selección del conjunto de problemas y la descripción de las resoluciones de los mismos, enfocado en las posibles actuaciones de un resolutor ideal, nos ha permitido identificar cuáles son los conceptos de la Ecología Evolutiva involucrados y las posibles relaciones establecidas entre dichos conceptos ecológicos, así también nos ha posibilitado el reconocimiento de las nociones matemáticas a considerar y por dónde se debería transitar para resolver dicho conjunto de problemas. Esto nos proporcionó el insumo necesario para determinar los elementos que conforman las competencias matemáticas puestas en juego en la resolución de problemas del tema de interés en esta investigación.

En este capítulo se expone someramente las nociones utilizadas para el análisis y la interpretación de las actuaciones de un resolutor ideal, el análisis propiamente dicho y se presenta un modelo de competencias matemáticas inicial, elaborado para la resolución de problemas de Ecología Evolutiva.

4 – A. Consideraciones para llevar a cabo el Análisis

4 – A. 1. Delimitación del espacio de problemas

Considerando que nuestro interés estuvo en analizar las competencias matemáticas, de acuerdo a lo expuesto en el Capítulo 2 en cuanto a las razones de la elección del tema dentro de la Ecología Evolutiva, y a que, en el Capítulo 3, ítem 4, se lo menciona como uno de los pasos a realizar para la elaboración de un modelo de competencias, se llevó a cabo la selección del conjunto de problemas que son representativos y en los cuales, para su resolución, la matemática debe estar presente.

Esta acción fue realizada a partir de la exploración de guías o listados de problemas, presentes en material de una cátedra y de material bibliográfico sugerido para la enseñanza de Ecología Evolutiva en el nivel Universitario y tuvimos, como criterio de selección, el que, en los enunciados se mencionen los contenidos disciplinares dentro del Dominio: *Población*, que hemos resumido en el cuadro siguiente:

Tabla 4 – a . Contenidos disciplinares de la Ecología Evolutiva, en el dominio Población, que fueron tomados en cuenta para la selección del conjunto de problemas.

<table>
<tr><td rowspan="3">Crecimiento poblacional exponencial</td><td colspan="2">Cantidad de individuos de la población.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tasa intrínseca de crecimiento.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tiempo en que una población pasa de tener una población N_0 a N(t).</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Tablas de Vida</td><td>Edad – dependiente</td><td rowspan="2">l_x : tasa de supervivencia
d_x: tasa de mortalidad específica de la edad x
R_0: tasa de reproducción neta
T: tiempo promedio de generación
r: tasa intrínseca de incremento
s_x: supervivencia específica de la edad x
q_x: tasa de mortalidad específica de la edad x
L_x: esperanza de vida entre dos edades</td></tr>
<tr><td>Estadio - dependiente</td></tr>
</table>

		T_x: total de años vividos hacia el futuro por los individuos de la clase de edad x. e_x: esperanza de vida para cada clase de edad k_x: mortalidad específica para la edad x. K: mortalidad en todo el ciclo de vida
	Curvas de supervivencia y de mortalidad	

Por otra parte, como la determinación del conjunto de problemas también está relacionada con las amplias posibilidades de cuantificación matemática de los conocimientos sobre Población ─y a los efectos de esta investigación, no es el eje el estudio en el campo de la Ecología Evolutiva─ hemos seleccionado en total cinco problemas, cuyos enunciados son los que se ofrecen a continuación:

Problema 1: *Los pulgones (Aphididae, Homoptera) pueden crecer a velocidades extraordinariamente rápidas cuando colonizan un árbol, lo cual les convierte en plagas agrícolas de consideración. En una plantación de cítricos se midió en el mes de mayo una densidad de pulgón verde de los cítricos (Aphis spiraecola) de 200 ind m^{-2}; al cabo de una semana la densidad era de 285 ind m^{-2}. Si suponemos que el crecimiento sigue un crecimiento exponencial,* **(a)** *¿cuál es el valor de la tasa instantánea de crecimiento per cápita?,* **(b)** *¿cuál será la cantidad de pulgones por metros cuadrados al cabo de 30 días?,* **(c)** *¿en cuánto tiempo la población alcanzará una densidad de 100.000 ind m^{-2}?*

Problema 2: *Se han medido con mucho detalle cambios demográficos de una población cautiva de un coleóptero. En una semana (tiempo suficientemente pequeño como para poder aplicar las ecuaciones de las tasas instantáneas de fertilidad y de mortalidad) han aparecido 24 nuevas larvas y han muerto 10 individuos. El tamaño inicial de la población era 540 individuos. ¿Cuál es la tasa instantánea de crecimiento de la población?*

Problema 3: *Una población de áfidos en una plantación de cítricos tiene una densidad de 276 ind m^{-2}, al cabo de una semana la densidad era de 348 ind m^{-2}. Si suponemos que el crecimiento de la población sigue un modelo exponencial, ¿cuánto tiempo (en meses) tardaría la población en alcanzar 100.000 ind m^{-2}?*

Problema 4:
(a) *Construya una tabla de vida para una población hipotética de una cohorte de Phlox drummondii, a partir de los datos de la tabla siguiente. Estime l_x, d_x , T , r , s_x , q_x y e_x .*
(b) *Elaborar la curva de supervivencia e identifique a que tipo se ajusta.*

Intervalo de edad (días) x – x` (x)	Número de supervivientes hasta el día x (N)	Número medio de descendientes (mx)
0-63 (2)	2014	
63-124 (4)	1876	
124-184 (6)	909	
184-215 (8)	690	
215-264 (10)	400	
264-278 (12)	289	
278-292 (14)	167	
292-306 (16)	159	0,33
306-320 (18)	154	3,13
320-334 (20)	147	5,42
334-348 (22)	105	9,26
348-362 (24)	22	4,31
362	0	

Problema 5*: La población en estudio corresponde a Nezara viridula var. saragdula, considerada la plaga más importante de la soja (Glicyne max) porque se alimenta directamente de las semillas reduciendo su calidad y potencial germinativo, afectando la producción. A partir de las ninfas III se inicia el período normal de alimentación. En la soja, las ninfas del cuarto y quinto estadio son las responsables de la dispersión de esta plaga y las formas adultas causan más daños en la producción que las ninfas.*

Estadios	***Huevo***	***I***	***II***	***III***	***IV***	***V***	***Adultos***
x (meses)	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
n	*4008*	*3660*	*3024*	*1917*	*882*	*506*	*202*

Por estudios previos se conoce que la tasa de reproducción en el estadio adulto es de 112 descendientes.
(a) *A partir de los datos estimar: tasa intrínseca de crecimiento per cápita. El productor quiere saber si tiene que preocuparse o no con esta plaga en este momento, ¿qué le contestaría? ¿Por qué?*
(b) *Calcular la mortalidad en todo el ciclo de vida.*

Nota: en la versión original que se presentan en Anexos, los problemas 1, 2 y 4 contienen imágenes sobre los individuos de la población.

En este caso, decidimos considerar como técnica para el análisis, el estudio de casos, con la convicción de que, si bien son pocos ejemplos, son suficientes y representativos de un conjunto más grande de situaciones relacionadas con el tema de estudio.

4 – A. 2. Justificación del esquema de análisis

Para llevar a cabo el análisis e interpretación de las actuaciones del resolutor ideal, hemos diseñado un esquema propio, conformado por tres momentos consecutivos, a los que hemos identificado como: (1) fase de formulación, (2) fase de resolución matemática y (3) fase de interpretación (el que se ilustra en la Figura 4 – a). Para éste diseño se tomaron como referencia los trabajos realizados por Polya (1965, en Alfaro, 2006, p. 2 - 3), Mason, (1989, en Villamil Camelo, sf, p. 4), Bransford y Stein (1993, en Cañadas Santiago *y col*., 2002, p. 2) sobre la resolución de problemas matemáticos y lo expresado por Blum y Niss (1991), respecto a que la forma de describir la "modelización y las aplicaciones" en dicho proceso, y para el cual, estos autores acuerdan en considerar el establecimiento de una serie de pasos (en García, 2005, p. 46).

En este esquema se parte de una situación concreta, que es un problema en el campo de la ecología evolutiva, y se inicia el proceso de análisis de resolución:

1) Fase de formulación: es la etapa entre la *situación concreta* y la formulación del *modelo matemático*, donde el resolutor realiza una lectura comprensiva del tema, la cual, permite el reconocimiento de la información y de la relación de ésta con sus saberes previos. En esta fase el resolutor interpreta el problema, lo entiende, y este acto lo remite a: a) la elección de un método de resolución (en aquellos casos donde los pasos a seguir ya estuviesen establecidos), o bien, b) la elaboración de un nuevo método. En esta investigación sólo consideramos problemas descriptos en a) por lo que el método de resolución conduce a la selección de un *modelo matemático*.

2) Fase de resolución matemática: seleccionado el o los modelos matemáticos a emplear, se procede a realizar los cálculos en las fórmulas, las construcciones de tablas y de gráficos, etc. Esta fase está descontextualizada de la situación concreta de la que se parte y los resultados que se obtienen son meros resultados matemático.

A continuación, se pasa a la siguiente:

3) Fase de interpretación: se produce la contextualización de los resultados obtenidos relacionándolos con la información que ya se poseía. Estos dejan de ser exclusivamente matemáticos, se interpretan en el contexto, adoptando significados dentro del marco teórico de la disciplina, permitiendo que sean soluciones del problema.

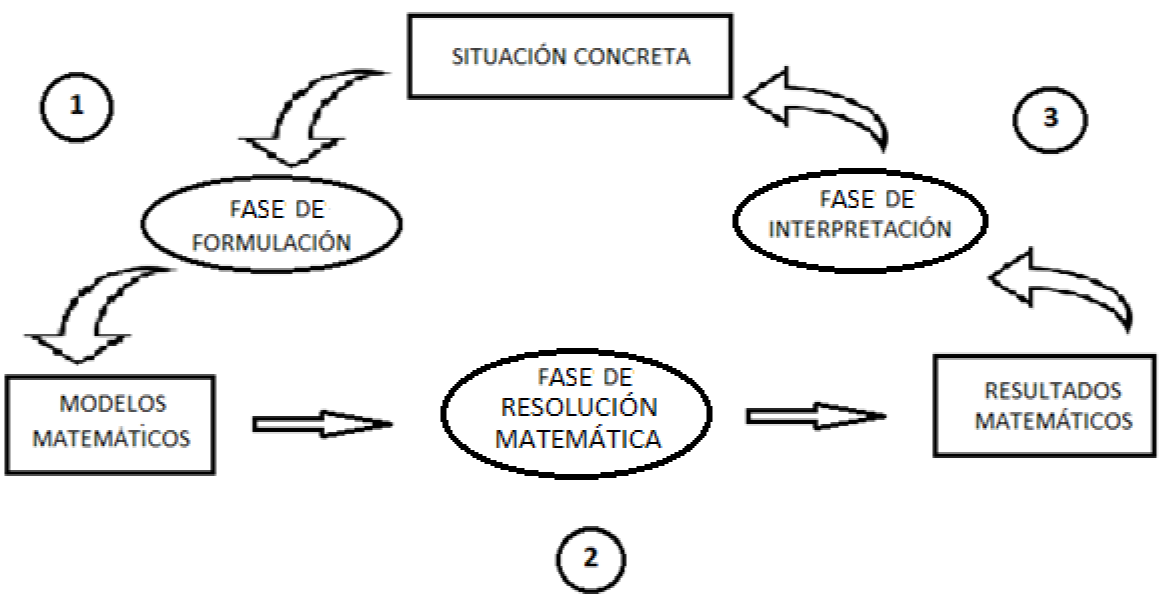


Figura 4 – a. Fases en el proceso de análisis de resolución de un problema.

Entiéndase que las fases de formulación, resolución matemática e interpretación, pueden considerarse como las que transitaría el resolutor ideal y, por tanto, son parte del modelo de competencia. “Puede postularse como resolutor ideal aquél cuya competencia es la que da el método y cuya conducta está por tanto predicha, explicada y descrita por los pasos del método” (Puig, 2006, p. 11). Sin embargo, en los procesos de resolución de los resolutores reales (serán analizados en el siguiente capítulo), dichas fases no las concebimos de manera lineal, sino como estados por los cuales se pasa y a los que se puede volver durante el proceso de resolución.

Cabe aquí aclarar que, en el contexto de esta tesis, la acción de *resolución de un problema*, tiene el siguiente significado: es la actividad mental que desarrolla el resolutor desde cuando asume el problema, tiene interés de resolverlo y hasta que da por terminada la tarea. Denota el conjunto de pasos que llevan a la solución.

A continuación, explicitaremos con mayor detalle las cuestiones que se tuvieron en cuenta para el análisis en cada una de las etapas mencionadas:

En la **fase de formulación**, que se ubica en el campo de la Ecología Evolutiva, la lectura comprensiva del problema permite situarlo en un cierto dominio dentro del cual se desarrolla la situación para, a partir de esta lectura, realizar los siguientes procesos:

a) Reconocimiento de la información: es necesario distinguir la información brindada en el enunciado para relacionarla con el dominio del cual depende. Implica la capacidad para identificar, ya sea a partir de términos, gráficos o símbolos, un cierto número de saberes aprendidos anteriormente y referenciarlos a la información.

Por ejemplo, el reconocimiento del término “Tabla de Vida” evoca a un conjunto de conocimientos previos relacionados con dicha noción: cómo se define, las variables que se involucran con ella, cómo se construye y la información que hay que tener en cuenta para ello, su utilidad, etc. Así también, cuando en el enunciado del problema se menciona a un tipo particular de población, por ejemplo, del mundo vegetal, se movilizan conocimientos previos sobre ecología, que relacionen a esa especie con comportamientos específicos de esa población, en cuanto a su reproducción, mortalidad, fecundidad, etc.

b) ***Relaciones entre componentes de la información***: una vez que se reconoce la información en el enunciado del problema que se quiere resolver, se establecen relaciones entre la información explícita y la evocada por ella, dentro del conjunto de saberes que se dispone.

Por ejemplo, si la información explícita es *tasa de supervivencia a una cierta edad*, está relacionada con ciertos saberes, entre ellos, la cantidad de individuos vivos a dicha edad y con la cantidad de individuos de una cohorte original y además, es el cociente entre estas dos cantidades. Y si la información explícita es *una población que se ajusta a un modelo de crecimiento exponencial*, se relaciona con la cantidad de individuos de la población inicial, con la tasa de crecimiento poblacional instantánea per cápita y con el tiempo transcurrido.

c) Identificación del Método: para resolver el problema, el resolutor organiza la información y prepara un plan. Tanto el reconocimiento de la información como el establecimiento de relaciones, descripto anteriormente, provoca la formulación de ciertas preguntas, como por ejemplo: ¿hay un método para esto…? Y en caso de que lo haya, ¿qué información es necesaria para la aplicación de dicho método (o métodos)?

Los pasos de esta primera fase se ilustran en el siguiente esquema (Figura 4 – b)

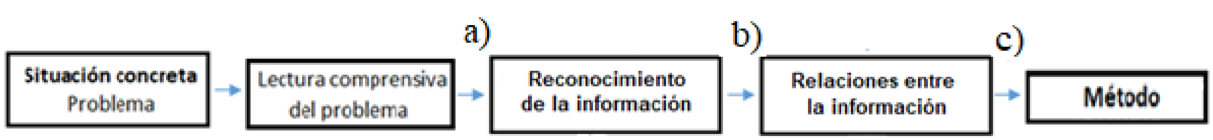


Figura 4 – b. Pasos de la fase de formulación.

Tal como hemos presentado en el Capítulo 2 - C . 2, las ideas centrales que mostraban el pasaje de la situación concreta de un problema al modelo matemático puro, pasando por un modelo matemático real, en esta fase se culmina con la elección de un **modelo matemático específico**, expresado generalmente mediante una fórmula, que permite resolver la situación exclusivamente en el campo matemático.

Es necesario aclarar que cuando nos referimos a *modelo matemático específico* es, en general, identificar sus elementos, relaciones entre elementos, operaciones con los elementos, reglas o principios que controlan las interacciones y relaciones precedentes.

En cuanto a la noción de f*órmula*, es una secuencia o cadena de caracteres cuyos símbolos pertenecen a un lenguaje formal, de tal manera que la expresión cumple ciertas reglas de buena formación y que admite una interpretación consistente en alguna área de la matemática y en otros sistemas formales. Ésta tiene la finalidad de expresar una relación general entre los términos expresados en ella.

A continuación, se muestra un esquema del pasaje descripto (Figura.4 – c).

MÉTODO → **MODELO MATEMÁTICO REAL** → **MODELO MATEMÁTICO (FÓRMULA)**

Figura 4 – c. Pasaje del Método elegido al modelo matemático.

En la **fase de resolución matemática** ya se ubica el trabajo en el campo matemático, para comprender el modelo matemático, para ubicarlo en una rama matemática, para definir su aplicabilidad y potencialidad, se analiza “lo que el resolutor debe saber”; y para poder operar con él, para obtener resultados correctos, se analiza “lo que el resolutor debe saber hacer”.

El resolutor ideal sabe que existen métodos, fórmulas y gráficos para resolver un problema y sabe qué hacer con ellos.

Así, por ejemplo, la fórmula para la esperanza de vida a determinada edad , $e_x = \frac{T_x}{n_x}$, sería un modelo matemático real y es una relación matemática entre sus componentes, cuyo sentido viene dado por la relación ecológica con ella definida, y de allí, su justificación. Mientras que, pensada como fórmula en el campo de la matemática, se independiza de la situación modelizada y su expresión simbólica es: $a = \frac{b}{c}$, es una relación que evoca conceptos matemáticos (como ser fracción, razón entre magnitudes o cociente entre números reales), y como tal, puede analizarse desde conceptos y propiedades propias de la matemática.

La **fase de interpretación** −como ya se ha mencionado, posicionados nuevamente en el campo de la Ecología Evolutiva− es un momento de contextualización de los resultados obtenidos con las fórmulas, gráficos, tablas, etc. En esta fase se analiza la actuación del resolutor para darle sentido a lo hallado en el campo matemático y dar respuesta al problema en cuestión, también como medio de control de los resultados, en cuanto a que si lo que ha obtenido es factible o pertinente en el campo de aplicación en el que está trabajando.

4 – B. Determinación de los elementos de competencia en cada fase del proceso de resolución

Tomando como base las descripciones de las actuaciones de un resolutor ideal (adjunto en el Anexo 2), se determinaron en cada una de las fases del proceso de análisis de la resolución de un problema, los elementos que conformarían a las competencias presentes en ellas.

4 – B. 1 . En la Fase de Formulación

Elementos identificados durante el proceso de reconocimiento de la información:

- Al describir la correspondencia que se realiza entre la pregunta que se formuló en lenguaje de la ecología evolutiva y su correspondiente expresión simbólica, por ejemplo: ¿Cuál es la tasa instantánea de crecimiento de la población? Se corresponde con: $\frac{dN}{dt}$

Encontramos que lo que se pone en juego es un elemento de competencia matemática: *Traducción del lenguaje natural, del contexto del problema, al lenguaje simbólico.*

- Al identificar la unidad en la que se miden las magnitudes, como por ejemplo: Densidad; presentado en forma escrita, con dato numérico y unidades de medida, $ind.metros^{-2}$. Tamaño de la población; presentado en forma escrita y por su unidad, $ind.$ Tasa instantánea de crecimiento poblacional per cápita, presentado en forma escrita. Su unidad es $días^{-1}$.

Evidenciamos otro elemento de competencia: *Manejo de magnitudes y sus unidades.*

Durante el proceso de determinación de la relación entre componentes de la información:

- Al identificar las relaciones entre las variables involucradas, justificadas por la ecología evolutiva por ser concepto de esta ciencia, pero expresadas en términos matemáticos, como por ejemplo: La tasa instantánea de crecimiento poblacional que es la derivada del tamaño de la población respecto del tiempo y que se calcula haciendo el producto de la tasa instantánea de crecimiento poblacional per cápita por la cantidad de individuos de la población en un momento dado; o, la tasa de supervivencia, que es la razón entre la cantidad de individuos vivos en un momento dado y la cantidad original.

Hace que se evidencie otro elemento de competencia: *reconocimiento de que la relación enunciada en términos ecológicos se puede expresar en términos matemáticos.*

- Y que, si se opera matemáticamente con la información, por ejemplo:

Tasa instantánea de crecimiento	Es proporcional a la tasa instantánea de crecimiento per cápita y al tamaño de la población en un momento dado.
Tasa de supervivencia	Es la cantidad de individuos vivos entre de la cantidad de individuos de la cohorte original.

Se puede obtener una nueva información de utilidad, es decir, *detección de situaciones de la ecología evolutiva en los que la matemática es una herramienta para obtener nueva información*.

Siguiendo con el análisis de la resolución de los problemas del resolutor ideal, en la fase de formulación, durante el proceso de identificación del método:

- Justamente, el entender cómo se relacionan las variables observadas en la situación desde el campo de la ecología y que esas relaciones pueden expresarse en términos matemáticos, favorece la selección (o la elaboración) del método a aplicar para resolver el problema. Es el momento en el que se pasa de la formulación a la resolución. De acuerdo a lo observado en las resoluciones, para estos problemas, la selección del método implica la elección de las fórmulas a aplicar, fórmulas que están dadas por las relaciones entre los conceptos involucrados. Por ejemplo:

Tasa instantánea de crecimiento	Es proporcional a la tasa instantánea de crecimiento per cápita y al tamaño de la población en un momento dado.	$\frac{\mathrm{dN}}{\mathrm{dt}} = r\,N$
Tasa de supervivencia	Es la cantidad de individuos vivos entre de la cantidad de individuos de la cohorte original.	$l_x = \frac{n_x}{n_0}$

- Entendemos que, al seleccionar el método que se ha de aplicar o la fórmula para llegar a la solución, se ponen en evidencia otros elementos de competencia matemática:

I*dentificación de situaciones que pueden ser resueltos con modelos matemáticos,*

- Y, para poder utilizar estos modelos, se debe tener:

Perspicacia para la determinación de los componentes de un modelo matemático, de su potencialidad y de los límites de aplicabilidad.

En resumen, los elementos que se observan en la fase de formulación son:

- *Traducción del lenguaje natural, del contexto del problema, al lenguaje simbólico.*
- *Manejo de magnitudes y sus unidades.*
- *Reconocimiento de que la relación enunciada en términos ecológicos se puede expresar en términos matemáticos.*
- *Detección de situaciones de la ecología evolutiva en los que la matemática es una herramienta para obtener nueva información.*
- *Identificación de situaciones que pueden ser resueltos con modelos matemáticos.*
- *Perspicacia para la determinación de los componentes de un modelo matemático, de su potencialidad y de los límites de aplicabilidad.*

4 – B . 2. Fase de Resolución matemática

Como sabemos, en esta fase se produce la descontextualización de la información que se tiene respecto de la situación concreta de la que se parte, perteneciente al campo de la ecología y se opera en forma exclusivamente matemática.

Por ejemplo, identificado el modelo matemático real, cuyo sentido está dado por la ecología evolutiva, $N(t) = N_0\, e^{r\,t}$, se puede pensar en éste independientemente de la situación que modeliza, como fórmula matemática, $f(x) = f_0\ e^{ax}$, y como tal, es un modelo matemático, que como ya dijimos, permite el análisis de "lo que el resolutor debe saber" para comprender dicho modelo, para definir su aplicabilidad y potencialidad; y de "lo que el resolutor debe saber hacer" para poder operar con él, para obtener resultados correctos.

Tabla 4 – b . Ejemplo de pasaje entre el modelo matemático real y el modelo matemático[14], y de lo que el resolutor ideal debe saber y lo que debe saber hacer con el modelo matemático.

<table>
<tr><th>Modelo Matemático real,
en Ecología Evolutiva</th><th colspan="2">Modelo Matemático</th></tr>
<tr><td rowspan="3">$N(t) = N_0\ e^{r\,t}$
Tamaño poblacional</td><td colspan="2">$f(x) = f_0\ e^{ax}$</td></tr>
<tr><td>Lo que se debe saber:</td><td>Lo que se debe saber hacer:</td></tr>
<tr><td>- Concepto de función.
- Variable dependiente e independiente.
- Características de la función exponencial.</td><td>- Calcular imágenes utilizando regla de definición de una función.
- Diferenciar variables de constantes en la regla de definición de una función.</td></tr>
</table>

[14] Ver Anexo 2.

	Lo que se debe saber:	Lo que se debe saber hacer:
	Regla de definición y gráfico.	- Homogeneizar unidades para cálculos de imágenes (por ser funciones que relacionan magnitudes). - Usar calculadora para calcular potencias con base e. - Escribir números en notación decimal y en notación científica. - Redondeo.

Cabe recordar que el interés de esta investigación no está en identificar los conocimientos matemáticos utilizados en la resolución, sino en determinar los elementos que conforman competencias matemáticas, es decir, detectar indicadores que posibiliten identificar capacidades o destrezas expresadas en las actuaciones de un resolutor ideal, para las cuales se involucran conocimientos matemáticos.

Como el resolutor ideal sabe que existe el método o la fórmula y sabe cómo aplicar el método o qué hacer con esa fórmula, en esta fase, a partir del proceso de la actuación de un resolutor ideal, se pueden describir nuevos elementos de competencia matemática, algunos relacionados al saber, y otras al saber hacer.

Entonces, para identificar los elementos de competencia matemática relacionados al saber, basándonos en el análisis realizado sobre las actuaciones de un resolutor ideal[15] (ver Anexo 2),

[15] Recordemos que las resoluciones matemáticas son las de un resolutor ideal que utiliza para la misma exclusivamente, lápiz, papel, calculadora y herramientas geométricas. Es decir, no estamos analizando las posibles actuaciones que se realizarían en el caso de emplear algún software.

observamos que se involucran las siguientes áreas de la matemática: cálculo diferencial e integral, aritmética y álgebra; y que en cada una de ellas se deben identificar objetos matemáticos, ya sea a partir de la notación (mayormente), o por sus nombres, saber las definiciones, así como las propiedades que verifican. Así, entendemos que los posibles los **elementos de competencia matemática relacionados a lo que se debe saber** son los enunciados en la Tabla 4 – c, en la que, a partir de lo que el resolutor ideal debe saber para emplear el modelo matemático, se determina el elemento de competencia matemática correspondiente:

Tabla 4 – c . Elementos de competencia matemática relacionados a lo que se debe saber para utilizar el modelo matemático.

Lo que se debe saber para utilizar el modelo matemático	**Elemento de competencia matemática**
Por ejemplo: Función exponencial, $f(x) = f_0\, e^{ax}$; Derivada de una función, $\frac{\mathrm{df}}{\mathrm{dx}}$ = a f(x); Variación, Δx.	*Reconocimiento de términos y símbolos del cálculo diferencial e integral.*
En particular: - Concepto de función. Variable dependiente e independiente. - Funciones inversas, en particular que las funciones exponenciales y logarítmicas, de igual base, son inversas entre sí. - Concepto de variación. - Derivada de una función en un punto. - Función derivada. - Concepto de ecuación diferencial.	*Conocimiento definiciones y propiedades del cálculo diferencial e integral.*

Lo que se debe saber para utilizar el modelo matemático	Elemento de competencia matemática
Por ejemplo: Cuando se conoce la relación funcional y se quiere estudiar el comportamiento de las variables involucradas (aplicaciones de las derivadas, máximos y mínimos, concavidad de una curva). También cuando se conoce como varía una variable en función de la otras y se quiere encontrar la expresión funcional que las relaciona (Solución particular de una ecuación diferencial)	*Conocimiento de situaciones prototípicas de uso y aplicación del concepto diferencial e integral.*
Por ejemplo, símbolos numéricos, 2, letras de denotan constantes, a, b, c, letras que denotan relaciones f, o procesos, df.	*Distinción del estatus de los símbolos en una expresión.*
Por ejemplo, realizar cocientes convenientes para calcular tasas, diferencias o sumatorias.	*Reconocimiento de las situaciones prototípicas del uso de operaciones aritméticos y algebraicos.*
Por ejemplo: diferencias, $a = b - c$; cocientes, $a = \frac{b}{c}$; Sumatoria, $a = \sum_{i=0}^{n} b_i c_i$	*Conocimiento de símbolos tanto aritméticos como algebraicos que denotan operaciones.*
En particular, los referidos a: - Conjuntos numéricos y del orden en ellos. - Operaciones en los distintos conjuntos numéricos: suma, resta, producto, cociente, potencia y logaritmación. - Relación entre logaritmos naturales y potencias de base e. - Ecuaciones. Ecuaciones exponenciales.	*Conocimiento de definiciones, operaciones, propiedades tanto aritméticos como algebraicos.*

Lo que se debe saber para utilizar el modelo matemático	Elemento de competencia matemática
- Sumatorias. - Concepto de razón. Razón entre cantidades de magnitudes.	
Por ejemplo: - La suma de números reales entre 0 y 1, puede ser menor, igual o mayor que 1. - Para la diferencia: Si $b < c \Rightarrow b - c < 0$, Si $b = c \Rightarrow b - c = 0$, Si $b > c \Rightarrow b - c > 0$ - El producto de números reales no negativos ($b \in R_0^+$ y $c \in R_0^+$), el resultado puede ser menor, mayor o igual a 1. - En un cociente de naturales a = b/c: Si $b < c \Rightarrow a < 1$, Si $b = c \Rightarrow a = 1$, Si $b > c \Rightarrow a > 1$ - Si $b < 1 \Rightarrow \ln(b) < 0$, Si $b = 1 \Rightarrow \ln(b) = 0$, Si $b > 1 \Rightarrow \ln(b) > 0$	*Control sobre resultados posibles al realizar operaciones matemáticas.*
Por ejemplo: - Construcción de sistema de ejes cartesianos, en particular, determinación de escalas convenientes para los ejes. Uso de escala semilogarítmica. - Máximos y mínimos. Concavidad de una curva. - Crecimiento y decrecimiento de una función.	*Conocimiento referido a la construcción, lectura e interpretación de gráficos funcionales.*

Lo que se debe saber para utilizar el modelo matemático	Elemento de competencia matemática
- Características de la función exponencial. Regla de definición y gráfico.	*Conocimiento sobre características del comportamiento de una función.*

Referente al saber hacer, distinguimos los elementos de competencia matemática relacionados referidos a la realización de cálculo numéricos, manipulación de variables, construcción de tablas y gráficos o procesos de interpretación de fórmulas, números o gráficos. A partir del análisis e interpretación realizados, podemos decir que los posibles **elementos de competencia matemática relacionados a lo que se debe saber hacer** son los que se detallan en la Tabla 4 – d:

Tabla 4 – d . Elementos de competencia matemática relacionados a lo que se debe saber hacer para utilizar el modelo matemático.

Lo que se debe saber hacer para utilizar el modelo matemático	Elemento de competencia matemática
Por ejemplo: - Despejar variables (o constantes) en ecuaciones, en particular, en ecuaciones exponenciales.	*Manipulación de expresiones que contengan símbolos, como ser fórmulas y ecuaciones.*
Por ejemplo: - Calcular imágenes utilizando regla de definición de una función. - Calcular incrementos reales.	*Reconocimiento de la operación básica a la que evoca un concepto.*

Lo que se debe saber hacer para utilizar el modelo matemático	**Elemento de competencia matemática**
- Homogeneizar unidades para cálculos de imágenes (por ser funciones que relacionan magnitudes).	
Por ejemplo: - Calcular cocientes. - Calcular restas. - Calcular sumas y restas. - Calcular logaritmos.	*Resolución de operaciones básicas.*
Como, por ejemplo: - Interpretar el concepto de derivada. - Diferenciar variables de constantes en la regla de definición de una función. - Leer información presentada por una curva en un sistema de ejes cartesianos.	*Lectura e interpretación distintas representaciones matemáticas, como ser tablas, gráficas, símbolos.*
Por ejemplo: - Escribir números en notación decimal y en notación científica. - Redondeo. - Utilizar notación con subíndices.	*Uso correcto de notación numérica.*
Lo que involucra, por ejemplo: - Armar escalas convenientes. - Ubicar valores reales en escalas logaritmicas. - Ubicar puntos en un sistema de ejes cartesianos.	*Construcción de tablas y gráficos matemáticos.*

Lo que se debe saber hacer para utilizar el modelo matemático	Elemento de competencia matemática
Por ejemplo: - Usar calculadora para realizar las operaciones básicas: sumas, restas, productos, cocientes, potencias, logaritmos con distintas bases. - Usar modos específicos de la calculadora para calcular medias aritméticas. - Trazar rectas perpendiculares con elementos geométricos. - Confeccionar una poligonal uniendo estos puntos con segmentos.	*Empleo de herramientas auxiliares de la matemática.*

Además de lo ya considerado en la fase de resolución de problema, Puig (1996, p. 32) indica que una descripción de los elementos que intervienen en el proceso de resolución de problemas tendrá que contener, no solo los elementos que intervienen en el proceso de resolución de los mismos, como los algoritmos y las rutinas utilizadas, de los cuáles se sabe que conducen a la solución, y que son elementos que utilizan los resolutores ideales para resolver los problemas de un dominio determinado, sino que también se deben considerar los modos al resolver problemas y los medios que se utilizan en el proceso de resolverlos, que son independientes del contenido y que no suponen garantía de que se obtenga la solución.

Si bien entendemos que lo expresado por Puig (1996) hace referencia a modos y medios heurísticos, realizando una adaptación, en nuestro caso, cuando hablamos de analizar los modos de resolver un problema nos referimos a la rama matemática que da sustento al método o a la fórmula matemática utilizada para modelar la situación ecológica, como, el modo aritmético, el algebraico, el analítico. Sin embargo, cuando nos referimos a los medios para resolver un problema, nos referimos a la forma de representar o esquematizar el problema, es decir, si se usan esquemas, se usan tablas, gráficos, ecuaciones.

Este elemento de análisis nos parece importante porque, en cuanto al modo de resolución, desde las matemáticas, en sus distintas áreas de saber, las definiciones y las relaciones que se establecen son distintas, así por ejemplo, no es lo mismo pensar en los conjuntos numéricos y las propiedades algébricas de los mismos, que pensar en los conjuntos numéricos desde el punto de vista analítico; o pensar en la logaritmación como operación, que pensar en la función logaritmo. Respecto a los medios para resolver los problemas, por ejemplo, las competencias involucradas en el cálculo de la tasa de supervivencia al construir una tabla de vida no son las mismas que las puestas en juego al construir la curva de supervivencia.

Entonces, entendemos que estos son dos elementos a considerar para la construcción del modelo de competencias:

- *Identificación del área matemática al que se recurre para resolución del problema.*
- *Identificación del medio de resolución del problema.*

En resumen, los **elementos de competencia matemática que se observan en la fase de resolución matemática** son:

- *Reconocimiento de términos y símbolos del cálculo diferencial e integral.*
- *Conocimiento definiciones y propiedades del cálculo diferencial e integral.*
- *Conocimiento de situaciones prototípicas de uso y aplicación del concepto diferencial e integral.*
- *Distinción del estatus de los símbolos en una expresión.*

- *Reconocimiento de las situaciones prototípicas del uso de operaciones aritméticos y algebraicos.*
- *Conocimiento de símbolos tanto aritméticos como algebraicos que denotan operaciones.*
- *Conocimiento de definiciones, operaciones, propiedades tanto aritméticos como algebraicos.*
- *Control sobre resultados posibles al realizar operaciones matemáticas.*
- *Conocimiento referido a la construcción, lectura e interpretación de gráficos funcionales.*
- *Conocimiento sobre características del comportamiento de una función.*
- *Manipulación de expresiones que contengan símbolos, como ser fórmulas y ecuaciones.*
- *Reconocimiento de la operación básica a la que evoca un concepto.*
- *Resolución de operaciones básicas.*
- *Lectura e interpretación distintas representaciones matemáticas, como ser tablas, gráficas, símbolos.*
- *Uso correcto de notación numérica.*
- *Construcción de tablas y gráficos matemáticos.*
- *Empleo de herramientas auxiliares de la matemática.*
- *Identificación del área matemática al que se recurre para resolución del problema.*
- *Identificación del medio de resolución del problema.*

4 – B . 3. Fase de Interpretación

En esta fase se contextualizan, en el campo de la Ecología Evolutiva, los resultados obtenidos en el campo matemático, con las fórmulas, tablas y gráficos. Los resultados dejan de ser exclusivamente matemáticos, para estar referidos a un campo específico, con significados propios y, para que estos tengan sentido, el resolutor debe realizar un control de dichos resultados, analizando si lo que ha obtenido tiene sentido en el campo de aplicación en el que está trabajando.

Entendemos que también en esta fase, al igual que en la fase de formulación, si bien se está en el contexto de la ecología evolutiva, sigue involucrando elementos de competencias matemáticas. Por ejemplo, para interpretar los valores de tasas, como la tasa de supervivencia, l_x, en el contexto del problema, el resolutor debe entender que es un cociente de dos números naturales donde el dividendo es menor que el divisor, y el divisor nunca es cero, por lo tanto, será un valor entre 0 y 1, inclusive. Con el transcurrir de las edades, el numerador decrece, siendo el denominador fijo, la tasa decrece con el tiempo. Se puede decir que, en este caso, el elemento de competencia matemática es:

Interpretación de la solución matemática en el contexto del problema.

También es importante interpretar el símbolo matemático en el contexto del problema, más allá de conocer el nombre en el contexto, así, $\frac{dN}{dt}$ en matemática es la derivada de la función N, que depende de t, respecto de t, si se evalúa para t = 1 semana, en el contexto del problema $\frac{dN}{dt} \cong$ 14,404 ind.semanas^{-1}, lo que indica que la velocidad a la que crece la población en ese momento es de aproximadamente 14 individuos por semana. Entonces, el elemento de competencia matemática es:

Traducción del simbólico, tras haber realizado un cálculo, al lenguaje natural del contexto del problema.

Otro aspecto a considerar en la fase de interpretación es la selección de la unidad en la que se ha de expresar la solución. Por ejemplo, en $l_x = \frac{n_x}{n_0}$, n_x representa la cantidad de individuos vivos de la población a la edad x, y n_0 también es una cantidad de individuos (cantidad de individuos que forman la población original, a la edad 0). Si se hace $l_x = \frac{n_x\,[ind]}{n_0[ind]}$, si se simplifica ind con ind, l_x es un valor adimensional, pero esto no favorece la interpretación del mismo, ya que se pierde la interpretación de que a los 4 días de edad, la tasa de supervivencia es de 0,93 individuos por cada individuo que formaba la población original. Entendemos que en este caso, el elemento de competencia matemática que se pone en evidencia es:

Selección conveniente de la unidad de medida para la correcta interpretación de la información obtenida en el contexto del problema.

En lo referido a las unidades, para realizar la interpretación de los resultados, se debe buscar una unidad que favorezca dicha interpretación, así por ejemplo, para el cálculo del tiempo en el que la población de pulgones alcanza la densidad de 100000 ind m^{-2}, es $t = \frac{\ln(500)}{0{,}051} \cong 121{,}86$ días, es conveniente expresar este tiempo en unidades que se comprendan, 121,86 días $\cong$ 4 meses y 2 días. El elemento de competencia matemática es:

Manejo de magnitudes y sus unidades.

En resumen, los **elementos que entendemos que se observan en la fase de interpretación** son:

- *Interpretación de la solución matemática en el contexto del problema.*
- *Traducción del lenguaje simbólico, tras haber realizado un cálculo, al lenguaje natural del contexto del problema.*
- *Selección conveniente de la unidad de medida para la correcta interpretación de la información obtenida en el contexto del problema.*
- *Manejo de magnitudes y sus unidades.*

4 – C . Conclusiones: Elaboración de un modelo de competencias matemáticas inicial

Teniendo en cuenta que hemos definido Competencia matemática como el *conjunto de las capacidades o destrezas expresadas en las actuaciones de un sujeto epistémico para resolver situaciones problemáticas, concernientes a un entorno físico o a entornos puramente teóricos, referidos a cuestiones extramatemáticos o intramatemáticos, utilizando para ello conocimientos matemáticos,* adherimos a lo expresado por Puig (2006) respecto a que los elementos de competencia descubiertos en el análisis de las actuaciones de un resolutor ideal son los convenientes para construir un modelo de competencias matemáticas.

Con esta idea, para elaborar el modelo de competencias matemáticas inicial, retomamos los elementos de competencia matemática identificados en la sección anterior, a partir del análisis de las posibles actuaciones de un resolutor ideal frente al campo de problemas en las distintas fases de resolución de los mismos. Dichos elementos son los descriptos en la Tabla 4 – e:

Tabla 4 – e . Elementos de competencia matemática evidenciados en las distintas fases del análisis de las actuaciones de un resolutor ideal.

Elementos de competencia matemática correspondientes a las actuaciones de un resolutor ideal		
En la fase de formulación:	**En la fase de resolución matemática:**	**En la fase de interpretación:**
- Traducción del lenguaje natural, del contexto del problema, al lenguaje simbólico. - Manejo de magnitudes y sus unidades. - Reconocimiento de que la relación enunciada en términos ecológicos se puede expresar en términos matemáticos. - Detección de situaciones de la ecología evolutiva en los que la matemática es una herramienta	- Reconocimiento de símbolos del cálculo diferencial e integral. - Reconocimiento y símbolos del cálculo diferencial e integral. - Conocimiento de definiciones y propiedades del cálculo diferencial e integral. - Conocimiento de situaciones prototípicas de uso y aplicación del concepto diferencial e integral. - Distinción del estatus de los símbolos en una expresión. - Reconocimiento de las situaciones prototípicas del uso de operaciones aritméticos y algebraicos. - Conocimiento de símbolos tanto aritméticos como algebraicos que denotan operaciones. - Conocimiento de definiciones, operaciones, propiedades tanto aritméticos como algebraicos. - Control sobre resultados posibles al realizar operaciones matemáticas. - Conocimiento referido a la construcción, lectura e interpretación de gráficos funcionales.	- Interpretación de la solución matemática en el contexto del problema. - Traducción del lenguaje simbólico, tras haber realizado un cálculo, al lenguaje natural del contexto del problema. - Selección conveniente de la unidad de medida para la correcta interpretación de la información obtenida en el contexto del problema.

En la fase de formulación:	En la fase de resolución matemática:	En la fase de interpretación:
para obtener nueva información. - Identificación de situaciones que pueden ser resueltos con modelos matemáticos. - Perspicacia para la determinación de los componentes de un modelo matemático, de su potencialidad y de los límites de aplicabilidad.	- Conocimiento sobre características del comportamiento de una función. - Manipulación de expresiones que contengan símbolos, como ser fórmulas y ecuaciones. - Reconocimiento de la operación básica a la que evoca un concepto. - Resolución de operaciones básicas. - Lectura e interpretación distintas representaciones matemáticas, como ser tablas, gráficas, símbolos. - Uso correcto de notación numérica. - Construcción de tablas y gráficos matemáticos. - Empleo de herramientas auxiliares de la matemática. - Identificación del área matemática al que se recurre para resolución del problema. - Identificación del medio de resolución del problema.	- Manejo de magnitudes y sus unidades.

Es importante aclarar que esta lista (Tabla 4 – e) no tiene la presunción de describir completamente las actuaciones de un resolutor ideal, entendemos que no es una lista colectivamente exhaustiva de todas las posibles actuaciones, sino más bien, está abierta a posibles nuevas interpretaciones de las resoluciones analizadas. Sin embargo, el listar los elementos del modelo de competencia, nos ha posibilitado el determinar las posibles competencias de dicho resolutor ideal y con ello construir un modelo de competencias matemáticas para los problemas considerados.

Entendiendo que un Modelo de Competencias Matemáticas es la convergencia de un conjunto de elementos que describen a un conjunto de competencias matemáticas, a partir de los elementos de competencia matemática listados en la Tabla 4 – e, determinamos las siguientes competencias matemáticas que conforman el Modelo de Competencias Matemáticas Inicial:

Tabla 4 – f . Competencias Matemáticas determinadas a partir de la convergencia de elementos de competencia matemática correspondientes a las actuaciones de un resolutor ideal.

Elementos de competencia matemática	Competencia Matemática
- Manejo de magnitudes y sus unidades. - Selección conveniente de la unidad de medida para la correcta interpretación de la información obtenida en el contexto del problema.	*Manejo de magnitudes y sus unidades.*
- Detección de situaciones de la ecología evolutiva en los que la matemática es una herramienta para obtener nueva información. - Identificación del medio de resolución del problema.	*Visualización del problema de la Ecología Evolutiva en forma matemática.*
- Traducción del lenguaje simbólico, tras haber realizado un cálculo, al lenguaje natural del contexto del problema. - Traducción del lenguaje natural, del contexto del problema, al lenguaje simbólico.	*Lectura e interpretación de distintas representaciones matemáticas, símbolos, gráficos, tablas, expresiones coloquiales.*

Elementos de competencia matemática	Competencia Matemática
- Interpretación de la solución matemática en el contexto del problema. - Lectura e interpretación distintas representaciones matemáticas, como ser tablas, gráficas, símbolos. - Conocimiento referido a la construcción, lectura e interpretación de gráficos funcionales. - Reconocimiento de la operación básica a la que evoca un concepto.	
- Reconocimiento de que la relación enunciada en términos ecológicos se puede expresar en términos matemáticos. - Identificación de situaciones que pueden ser resueltos con modelos matemáticos. - Perspicacia para la determinación de los componentes de un modelo matemático, de su potencialidad y de los límites de aplicabilidad.	*Empleo de modelos matemáticos.*
- Reconocimiento de términos del cálculo diferencial e integral. - Conocimiento de definiciones y propiedades del cálculo diferencial e integral. - Conocimiento de definiciones, operaciones, propiedades tanto aritméticos como algebraicos. - Conocimiento sobre características del comportamiento de una función.	*Identificación y caracterización de objetos aritméticos, algebraicos y analíticos.*
- Distinción del estatus de los símbolos en una expresión. - Conocimiento de símbolos tanto aritméticos como algebraicos que denotan operaciones. - Reconocimiento símbolos del cálculo diferencial e integral. - Uso correcto de notación numérica.	*Manejo del lenguaje simbólico matemático.*

Elementos de competencia matemática	Competencia Matemática
- Conocimiento de situaciones prototípicas de uso y aplicación del concepto diferencial e integral. - Reconocimiento de las situaciones prototípicas del uso de operaciones aritméticos y algebraicos. - Identificación del área matemática al que se recurre para resolución del problema.	*Especificación del área matemática en el que corresponde que se resuelva un problema.*
- Empleo de herramientas auxiliares de la matemática.	*Uso de herramientas auxiliares de la matemática.*
- Resolución de operaciones básicas. - Control sobres resultados posibles al realizar operaciones matemáticas. - Manipulación de expresiones que contengan símbolos, como ser fórmulas y ecuaciones. - Construcción de tablas y gráficos matemáticos.	*Resolución de procesos que involucran elementos matemáticos.*

Es así que el **Modelo de Competencias Matemáticas Inicial** que construimos para la resolución de problemas de Ecología Evolutivas referidas al tema Poblaciones, en particular, Crecimiento Poblacional y Tabla de Vida, está conformado por las siguientes competencias matemáticas:

- *Manejo de magnitudes y sus unidades.*
- *Visualización del problema de la Ecología Evolutiva en forma matemática.*
- *Lectura e interpretación de distintas representaciones matemáticas, símbolos, gráficos, tablas, expresiones coloquiales.*

- *Empleo de modelos matemáticos.*
- *Identificación y caracterización de objetos aritméticos, algebraicos y analíticos.*
- *Manejo del lenguaje simbólico matemático.*
- *Especificación del área matemática en el que corresponde que se resuelva un problema.*
- *Uso de herramientas auxiliares de la matemática.*
- *Resolución de procesos que involucran elementos matemáticos.*

CAPÍTULO 5

ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE LAS ACTUACIONES DE RESOLUTORES REALES

En el marco de la elaboración del modelo de competencia, entendemos que, si bien el análisis de las actuaciones de resolutores reales no son suficientes para identificar competencias en el dominio en cuestión, ya que sólo dan cuenta de lo observado en las circunstancias en que se hayan tomado los datos, sí permite interpretar adecuadamente los elementos de competencias que se ponen en juego en la producción de dichos resolutores cuando son analizados utilizando como "rejilla" de observación el modelo de competencia inicial elaborado. Al contraponer las actuaciones concretas de los sujetos reales en un dominio dado, con las actuaciones del sujeto ideal predichas por el modelo de competencia, se pueden identificar, si los hubiera, nuevos elementos de la competencia que no hayan sido incorporados al modelo de competencia inicial.

5 – A. Observación del proceso de solución realizado por sujetos reales

En el capítulo anterior hemos explicitado que el modelo de competencias matemáticas inicial elaborado (Cap. 4 – C) proporciona una descripción de la conducta del sujeto ideal en cuanto a las competencias matemáticas involucradas en el dominio estudiado.

Ahora procedemos presentar la síntesis del análisis realizado sobre las resoluciones en lápiz y papel de los resolutores reales con el objeto de observar si se podían identificar, en estas producciones, las competencias predichas y, a la vez, si se identificaban nuevas competencias.

Cabe aclarar que, considerando que la presentación del conjunto de problemas a los resolutores reales fue posterior al desarrollo de las clases de Ecología sobre Poblaciones, estos problemas son “problemas de aplicación”. El objetivo no estaba puesto en que se elaboraran formas de resolver las situaciones dadas, sino en que se recurriese a conocimientos cuya validez están formalmente establecidos en la Ecología Evolutiva.

En cuanto a los elementos que los resolutores pudieron emplear para la resolución de los problemas, aclaramos que las resoluciones fueron a lápiz y papel, no utilizaron software en sus desarrollos, y los elementos habilitados fueron: calculadora, elementos de geometría, hojas en escalas semilogarítmicas.

Así, lo expuesto en la producción de estos resolutores respecto de las competencias matemáticas, evidenciadas al analizar las actuaciones utilizando como “rejilla” de observación el modelo de competencia inicial elaborado se muestra en la Tabla 5 – a:

Tabla 5 – a . Competencias matemáticas evidenciadas en las actuaciones de resolutores reales.

Competencia Matemática	**Observación de actuaciones reales**
Manejo de magnitudes y sus unidades.	En cuanto al manejo de las magnitudes y sus unidades, observamos que en general, utilizan las unidades con las cantidades de medida y las simplifican correctamente. $Ln\left(\frac{348\ ind/m^2}{276\ ind/m^2}\right)\cdot\frac{1}{7días}=r$ $Ln\ 1{,}260\cdot\frac{1}{7días}=r$ $0{,}033\ días^{-1}=r$

<table>
<tr><th>Competencia Matemática</th><th>Observación de actuaciones reales</th></tr>
<tr><td></td><td>
También se evidencia que eligen la unidad conveniente con la que deben trabajar, por ejemplo, pasar r de $días^{-1}$ a $meses^{-1}$ para obtener el tiempo en meses.

$$t = \frac{\ln \frac{100.000\ \cancel{ind/m^2}}{348\ \cancel{ind/m^2}}}{0,927\ meses^{-1}}$$

$$\boxed{t = 6,106} \rightarrow \simeq 6\ meses$$

A su vez encontramos errores, como que los resultados tengan unidades incorrectas o que utilicen relaciones incorrectas para las transformaciones de unidades.

$$r = \frac{\ln \frac{348\ ind/m2}{276\ ind/m2}}{7\ días} = 0,033 ind/m^2/días$$

o,

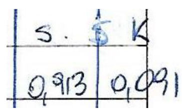
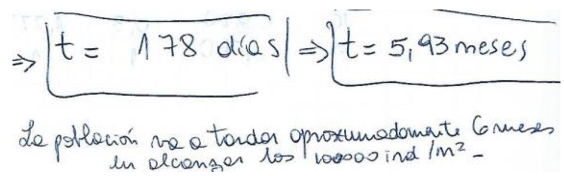
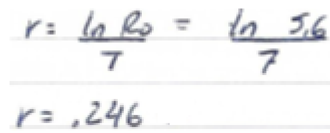
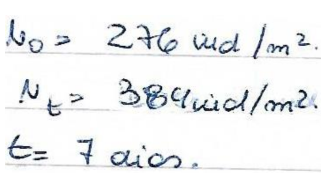
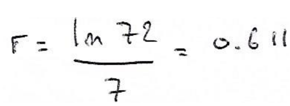
$$t = 1\ semana = \frac{1\ mes}{4\ semanas} = 1/4\ mes$$
</td></tr>
<tr><td>Visualización del problema de la Ecología Evolutiva en forma matemática.</td><td>
Ante el problema de ecología planteado, relacionan la situación con la herramienta matemática que les permitirá nueva información e identifican el medio para resolver el problema.

$$N(t) = 200 \cdot e^{\ln\frac{285}{200} \cdot t}$$
$$N(1) = 200 \cdot e^{\ln\frac{285}{200} \cdot 1}$$
$$N_0 = 200 \qquad \frac{dN}{dt}$$
$$N(1) = 285$$

$$N_t = N_0 \cdot e^{rt}$$
$$\frac{N_t}{N_0} = e^{rt} \Rightarrow \ln\frac{N_t}{N_0} = rt \ln e$$
$$\frac{\ln\frac{N_t}{N_0}}{\ln e \cdot t} = r$$
</td></tr>
</table>

Competencia Matemática	**Observación de actuaciones reales**
Lectura e interpretación de distintas representaciones matemáticas, símbolos, gráficos, tablas, expresiones coloquiales	Interpretan las soluciones matemáticas en el contexto del problema. El productor debe preocuparse ya que la población está en crecimiento ($R_0>1$) y $r=0,246$) y es solo cuestión de tiempo para que la plaga invada completamente su cultivo. rapidamente. También se presentan errores, como por ejemplo, la mala interpretación de los resultados: $r = \frac{\ln 112}{7}$ $\boxed{r = 0,674}$ Como $r < 0$ podemos concluir que la población de Nezara viridula var. smaragdula o plaga de la soja está decreciendo exponencialmente por lo tanto le diría al productor que no debería preocuparse por esta plaga en ~~este~~ ese momento. Hay evidencia de reconocimiento de operaciones básicas a la que evoca un concepto. a) La tasa de reproducción neta (R_0) está dada por la $\Sigma\, l_x . m_x$ Y de que traducen del lenguaje natural, del contexto del problema, al lenguaje simbólico. tasa intrínseca de crecimiento. (r) o b) Calcular la mortalidad en todo el ciclo de vida. $\Rightarrow k$
Empleo de modelos matemáticos.	Hay prueba de reconocimiento de que la relación enunciada en términos ecológicos se puede expresar en términos matemáticos, conocen los modelos matemáticos que deben utilizar y están en condiciones de utilizarlos correctamente. Por ejemplo: $l_x = N_1/N_0$ $D_x = l_x - l_{x+1}$ $R_0 = \Sigma\, l_x . m_x$ $T = \frac{\Sigma\, l_x . m_x . x}{R_0}$ $r = \frac{\ln R_0}{T}$ $N_t = N_0 . e^{r.t}$

Competencia Matemática	Observación de actuaciones reales
	Aunque también se observan errores en el empleo de modelos matemáticos, como por ejemplo, el interpretar mal el significado de una variable, lo que conduce a un reemplazo incorrecto y a un posterior error en la respuesta solicitada. $t = \frac{\ln(100000/348)}{0{,}033} \Rightarrow t = 8707{,}767$ días $t \approx 8708$ días 30 días $\longrightarrow$ 1 mes 8708 días $\longrightarrow x = 290{,}26$ meses Se necesitarían 290 meses para q' la pobl. alcance 100000 ind/m².
Identificación y caracterización de objetos aritméticos, algebraicos y analíticos.	En varias actuaciones se observó que los estudiantes aplicaban correctamente propiedades de los logaritmos, utilizando una base conveniente. $100000 = 348 \cdot e^{0{,}033 \cdot t}$ $\ln \frac{100000}{348} = 0{,}033 \cdot t \cdot \ln e$
Manejo del lenguaje simbólico matemático.	Se pudo observar que los resolutores reales distinguen el estatus de los símbolos en una fórmula, es decir, diferencian números, letras que denotan constantes y letras que denotan variables, así como el significado de los subíndices, y de los símbolos para las distintas operaciones. $d_x = l_x - l_{x+1}$ $d_x = 1 - 0{,}913 = 0{,}087$ etc. $K = \sum k_x \Rightarrow K = 0{,}091 + 0{,}172 + 0{,}324 + 0{,}298 + 0{,}09$[illegible] $\boxed{K = 1{,}063}$

Competencia Matemática	**Observación de actuaciones reales**
	En general, se evidenció un uso correcto de la notación numérica, con redondeos en dos o tres cifras decimales.   Aunque también se observó que, en algunos casos, hay uso incorrecto de la notación numérica: 
Uso de herramientas auxiliares de la matemática.	En todos los desarrollos hubo certeza del uso de calculadora, en general, los cálculos estaban correctamente realizados. Lo que no se aprecia es que utilicen elementos de geometría, casi siempre los trazos son “a pulso”.
Resolución de procesos que involucran elementos matemáticos.	Si bien, en general, se observaron resoluciones correctas de las operaciones básicas, también se presentaron errores, como por ejemplo:  Copia mal la información, en N_t = 348 ind/m^2, invierte el orden de los números.  Error de concepto, en lugar de dividir 348 y 276, los resta.

<table>
<tr><th>Competencia Matemática</th><th>Observación de actuaciones reales</th></tr>
<tr><td></td><td>
O, como en este otro caso, en lugar de dividir 348 y 276, los suma.

$\frac{348}{276} = e^{rt} \quad 624 = e^{rt}$

Se observó que trabajan correctamente las expresiones que contienen símbolos, como ser fórmulas y ecuaciones.

$$\frac{N_E}{N_0} = e^{r.t}$$

$$Ln\frac{N_E}{N_0} = \cancel{Ln}.\cancel{e}^{r.t}$$

$$Ln\frac{N_E}{N_0} = r.t \longrightarrow \boxed{Ln\frac{N_E}{N_0}.\frac{1}{t} = r}$$

Y no hay evidencia de dificultades para construcción de tablas y gráficos matemáticos.
</td></tr>
<tr><td></td><td>
<table>
<tr><th>X</th><th>N</th><th>lx</th><th>mx</th><th>dx</th><th>s</th><th>k</th></tr>
<tr><td>1</td><td>4008</td><td>1</td><td></td><td>0,087</td><td>0,913</td><td>1,645</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3660</td><td>0,913</td><td></td><td>0,087</td><td>0,913</td><td>1,645</td></tr>
<tr><td>3</td><td>3024</td><td>0,826</td><td></td><td>0,192</td><td>0,808</td><td>0,213</td></tr>
<tr><td>4</td><td>1917</td><td>0,634</td><td></td><td>0,174</td><td>0,826</td><td>0,191</td></tr>
<tr><td>5</td><td>882</td><td>0,460</td><td></td><td>0,114</td><td>0,886</td><td>0,121</td></tr>
<tr><td>6</td><td>506</td><td>0,574</td><td></td><td>0,175</td><td>0,825</td><td>0,192</td></tr>
<tr><td>7</td><td>202</td><td>0,399</td><td>112</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

5 – B. Conclusiones de la contraposición entre el modelo inicial y las actuaciones de resolutores reales.

De la contraposición de las actuaciones concretas de los sujetos reales al resolver el conjunto de problemas seleccionados, referidos a crecimiento poblacional exponencial y a tablas de vida, con las predichas por el modelo de competencias matemáticas inicial, elaborado a partir de las actuaciones del sujeto ideal, se ha podido encontrar evidencia de las competencias matemáticas citadas, aunque no de todas.

Así, se observa que son competentes en cuanto:

- *a la identificación y caracterización de objetos aritméticos, algebraicos y analíticos*, si bien no se pudieron establecer competencias referidas al dominio de definiciones, si se evidenciaron competencias respecto al conocimiento de propiedades y a la aplicación de las mismas;

- *a la resolución de procesos que involucran elementos matemáticos*, se observó que los resolutores son competentes para despejar incógnitas en fórmulas y ecuaciones, y en la construcción de tablas y gráficos matemáticos;

- *al uso de herramientas auxiliares de la matemática*, en particular, en cuanto al uso de calculadoras[16].

- *al manejo de magnitudes y sus unidades*, expresan las medidas con las unidades correspondientes y son competentes al seleccionar conveniente de la unidad de medida para la correcta interpretación de la información obtenida en el contexto del problema;

---

[16] Recordemos que se decidió que los resolutores reales emplearan lápiz, papel, calculadora, elementos de geometría, hojas en escalas semilogarítmicas, es decir, no utilizaron software en sus desarrollos.

- *en la visualización del problema de la Ecología Evolutiva en forma matemática*, lo que se aprecia en que identifican correctamente el medio de resolución del problema, eligen correctamente la fórmula que deben utilizar o bien, despejan de las fórmulas que tienen, la variable de interés;

- *a la lectura e interpretación de distintas representaciones matemáticas, símbolos, gráficos, tablas, expresiones coloquiales*, ya que pueden traducir del lenguaje en el contexto del problema al lenguaje simbólico y viceversa, y también pueden interpretar las soluciones matemática para dar las respuestas en el contexto del problema.

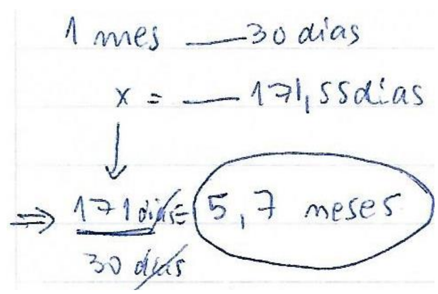
También se advirtieron dificultades en algunas de las competencias:

- *en el empleo de modelos matemáticos*, si bien, en general, seleccionan y utilizan convenientemente los modelos, hubo evidencia de que podría haber dificultades al interpretar cuales son los valores que se deben utilizar en ellos;

- *en el manejo del lenguaje simbólico matemático*, en general, pueden trabajar con fórmulas, entendiendo los símbolos matemáticos presentes en ellas, ya sea denotando operaciones o procesos y, distinguiendo el estatus dado a, por ejemplo, las letras utilizadas como representación de constantes, variables o como subíndices, aunque hubo resoluciones incorrectas en las operaciones básicas, pero no por realizar mal el cálculo, sino por realizar la operación incorrecta, como por ejemplo, restar en lugar de dividir.

Lo que también se observó es que no todas las competencias que se identificaron en el modelo de competencias matemáticas inicial se pusieron en evidencia en las actuaciones escritas de los resolutores reales, no hubo evidencia de que especificaran el área matemática en el que corresponde que se resuelva un problema.

Tampoco se evidenciaron nuevos elementos de competencias que indicaran otras competencias matemáticas para incorporar al modelo de competencias matemáticas inicial, únicamente, se observó el uso de procedimientos matemáticos que no se habían considerado en las actuaciones del resolutor ideal, como, el uso de la “regla de tres simple”:



Pero esto no aporta nuevos elementos de competencia matemática, sino que corrobora que son competentes en la resolución de procesos que involucran elementos matemáticos y en el manejo de las magnitudes y sus unidades.

TERCERA PARTE

CONCLUSIONES

Y

REFLEXIONES FINALES

CAPÍTULO 6

DETERMINACIÓN DE UN MODELO DE COMPETENCIAS MATEMÁTICAS

Luego de haber construido un modelo de competencias matemáticas inicial elaborado para la resolución de problemas de Ecología Evolutiva – Capítulo 4 – , y tras haber contrastado las actuaciones concretas de los sujetos reales en la resolución del conjunto de problemas, con la intención de identificar, si los hubiera, nuevos elementos de la competencia que no hubieran sido considerado para la elaboración del modelo de competencia inicial – Capítulo 5 –, presentamos en este apartado, como conclusión del trabajo realizado, el Modelo de Competencias Matemáticas elaborado para la resolución de problemas de la Ecología Evolutiva.

Asimismo, nos abocamos a realizar un balance de los resultados obtenidos como parte del proceso de investigación y a exponer las conclusiones obtenidas a partir de dicho proceso.

6 – A . Un Modelo de Competencias Matemáticas

A partir del análisis e interpretación de las actuaciones del resolutor ideal, construimos un **Modelo de Competencias Matemáticas Inicial** para la resolución de problemas de Ecología Evolutivas referidas al tema Poblaciones, en particular, Crecimiento Poblacional y Tabla de Vida, el cual estaba conformado por las siguientes competencias matemáticas:

- *Manejo de magnitudes y sus unidades.*
- *Visualización del problema de la Ecología Evolutiva en forma matemática.*
- *Lectura e interpretación de distintas representaciones matemáticas, símbolos, gráficos, tablas, expresiones coloquiales.*
- *Empleo de modelos matemáticos.*

- *Identificación y caracterización de objetos aritméticos, algebraicos y analíticos.*
- *Manejo del lenguaje simbólico matemático.*
- *Especificación del área matemática en el que corresponde que se resuelva un problema.*
- *Uso de herramientas auxiliares de la matemática.*
- *Resolución de procesos que involucran elementos matemáticos.*

En cuanto al análisis de las actuaciones de resolutores reales respecto de la resolución del conjunto de problemas, éste no aportó nuevas competencias matemáticas.

Lo que sí permitió observar el análisis de estas actuaciones, fue que podría haber dificultades en:

- *en el manejo del lenguaje simbólico matemático*, y

- *en el empleo de modelos matemáticos*.

En cuanto a la competencia: *manejo del lenguaje simbólico matemático*, se puede decir que la información recopilada fue incompleta ya que, por ejemplo, las formas básicas de notación del álgebra son esencialmente las mismas que las de la aritmética, es decir, números, signos de operación, signo de igualdad y letras, sin embargo, los significados y modos de operación de tales notaciones difieren de un campo a otro, y no se ha logrado percibir en el análisis realizado si los resolutores podían hacer esta diferencia.

No hubo evidencia de la competencia matemática:

- *especificación del área matemática en el que corresponde que se resuelva un problema*.

Por lo tanto, el **Modelo de Competencias Matemáticas** elaborado para la resolución de problemas de Ecología Evolutiva, queda sintetizado en el siguiente esquema (Figura 6 – a):

Figura 6 – a . Modelo de Competencias Matemáticas elaborado para la resolución de problemas de la Ecología Evolutiva.

Debido a que, como explicita Puig (2006, p. 10) “para que el modelo de competencia sea operativo, no debe limitarse a enumerar una lista […], sino que se debe entrar en los detalles”, a continuación, explicitamos en qué consiste cada una de estas competencias:

- **Manejo de magnitudes y sus unidades**: involucra la capacidad de analizar, en el contexto del problema, la magnitud con la que se ha de trabajar, la unidad en la que se mide, la relación con otras magnitudes, evaluando la necesidad de homogeneizar unidades, simplificarlas o considerarlas al momento de hacer la correspondiente interpretación.

- **Visualización del problema de la Ecología Evolutiva en forma matemática**: se refiere a la destreza para reconocer las relaciones entre las variables en el contexto del problema, y luego reconocer como expresar esas relaciones desde lo matemático, evaluando el medio matemático a utilizar.

- **Lectura e interpretación de distintas representaciones matemáticas, símbolos, gráficos, tablas, expresiones coloquiales**: esta competencia se refiere a la capacidad de reconocer en un texto la operación a la que se evoca, a estar en condiciones de entender, interpretar y traducir del lenguaje natural, en el contexto del problema, al lenguaje matemático y viceversa, ya sean símbolos, tablas o gráficos; a poder interpretar la solución matemática en el contexto del problema.

- **Empleo de modelos matemáticos**: si bien no se quita la posibilidad de elaborar un modelo matemático que responde a las condiciones de un problema particular, esta competencia se refiere a la capacidad de hacer corresponder las situaciones concretas de la ecología, con modelos ya establecidos y elaborados para esas situaciones, y a estar en condiciones para discriminar los componentes que lo forman, así como su potencialidad y los límites de aplicabilidad.

- **Identificación y caracterización de objetos aritméticos, algebraicos y analíticos**: es una destreza en el campo matemático, está basado en los conocimientos de los objetos matemáticos, sus definiciones, relaciones, operaciones y propiedades que verifican.

- **Manejo del lenguaje simbólico matemático**: es la capacidad de utilizar correctamente las distintas notaciones numéricas, como ser la notación decimal o la científica, estar en condiciones de entender el significado de distintos símbolos en las fórmulas matemáticas que deba emplear.

- **Especificación del área matemática en el que corresponde que se resuelva un problema**: esta competencia se refiere a la capacidad de elegir el área matemática conveniente para resolver el problema, al reconocimiento de situaciones prototípicas de uso y aplicación del concepto matemáticos, conociendo las características de las situaciones que justifiquen dicha elección

- **Uso de herramientas auxiliares de la matemática**: hace referencia a la capacidad de utilizar herramientas que fueron hechas para su uso en el trabajo matemático, como el uso de calculadora, uso de instrumentos geométricos, o uso de software específicos (solo que en nuestro caso no los hemos analizado).

- **Resolución de procesos que involucran elementos matemáticos**: es la capacidad de resolver operaciones matemáticas básicas, de manipular expresiones ya sean, aritméticas, algebraicas o analíticas, y de realizar cálculos que permitan elaborar tablas y gráficos, utilizando la notación numérica adecuada.

Entendemos que el Modelo de Competencias Matemáticas elaborado permite caracterizar la conducta competente de un resolutor en Ecología Evolutiva, en relación a las competencias matemáticas.

Cabe aclarar que este modelo es válido para describir las competencias matemáticas del conjunto de problemas estudiados y que sólo se pretende que el modelo sea adecuado para los fenómenos observados. Recordemos que, desde el enfoque metodológico adoptado, no se pretende elaborar una teoría que explique los hechos de manera única y cerrada o que inhabilite cualquier otra explicación de los mismos, sino que es una organización de lo observado y, tras ser reevaluado, puede ser modificado.

6 – B . Conclusiones

En cuanto a la determinación de competencias matemáticas, entendemos que podemos establecer las siguientes relaciones:

- Examinando al sujeto ideal, lo que *sabe* y lo que *sabe hacer*, se corresponde con el *conocimiento* de la disciplina que éste posee; en cambio, lo que *sabe que sabe*, lo que *sabe que sabe hacer*, lo que *sabe qué tiene que hacer* y lo que *sabe cómo hacer*, está en correspondencia con sus *competencias*. Frente a una actividad por realizar, a una tarea por resolver, el sujeto *será competente* cuando ponga en juego competencias (en este caso matemáticas) y las podrá resolver porque además del conocimiento matemático, tendrá la habilidad y la destreza para saber *qué* y *cómo hacer*.

- La identificación de una competencia matemática se da por la convergencia de un cierto número de elementos que la describen.

En cuanto a las competencias matemáticas en la resolución de problemas de Ecología Evolutiva:

- El análisis y la descripción realizada tanto de las actuaciones de resolutores reales como del resolutor ideal, de las soluciones de situaciones en Ecología Evolutiva, puso en evidencia que en dicho proceso debieron ponerse en juego competencias matemáticas.

Obviamente que no estamos diciendo que son las únicas competencias involucradas, sino que queremos establecer, en particular, la presencia de competencias matemáticas.

- El proceso de resolución no sólo requiere reconocer a uno o más contenidos matemáticos, sino saber qué hacer con ellos, a la hora de interactuar con el modelo matemático real y utilizarlo como medio para obtener la solución de un problema.

- Pareciera que para un resolutor real, no siempre el reconocimiento del modelo matemático que corresponde con cierto modelo real, se realiza de manera consciente, o bien, es probable que no se tenga la necesidad de que el primero sea explicitado.

- Lo anterior podría estar relacionado con el hecho de que en los enunciados de los problemas en Ecología Evolutiva nunca se solicita que se expliciten los modelos matemáticos ni las relaciones que sean posibles realizar entre sus componentes.

- La solución del problema no se encuentra hasta tanto se realice la interpretación en el contexto, en este caso, la problemática referida a la Ecología Evolutiva y pareciera que en esta parte del proceso reside la garantía en encontrar soluciones exitosas, pero que obviamente, no sólo se logra con la presencia de competencias matemáticas, sino de otras competencias que no han sido tenidas en cuenta en este estudio.

- En un principio, habíamos supuesto que los elementos que conforman las competencias matemáticas iban a ser detectados únicamente en la fase de resolución matemática (2), la realizada exclusivamente en el contexto matemático, no obstante, a raíz del análisis realizado, encontramos que tanto en las fases de formulación (1) y de interpretación (3), se han podido determinar elementos de competencia matemática.

- Se advierte que, si bien para el trabajo de las actuaciones de los resolutores reales se ha realizado sobre pocos casos, fue suficiente para percibir que se no hubiera elaborado el modelo de competencias matemáticas presentado y que probablemente se hubiesen identificado un menor número de competencias, puesto que, en el análisis de dichas actuaciones no pudieron ser identificadas la totalidad de las competencias que formaban el modelo de competencias matemáticas inicial, como así tampoco se pusieron en evidencia nuevos elementos de competencia que no formaban parte del mismo. Se corroboran así las advertencias desde el marco teórico en cuanto a que, el observar la resolución realizada por un resolutor real concreto, no puede dar cuenta de la competencia de ese resolutor en el dominio en cuestión, ya que sólo da cuenta de lo observado en las circunstancias en que se hayan tomado los datos.

- Recordando que parte central de esta tesis ha sido el comprender y describir las competencias matemáticas que se requieren para resolver problemas de Ecología Evolutiva, ha sido posible lograr este objetivo a partir de la elaboración de un Modelo de Competencias Matemáticas. Si bien se ha hecho un recorte y fue acotada la investigación a unos pocos contenidos de esta área disciplinar, entendemos que los temas considerados fueron representativos, dado que las situaciones de Población, Crecimiento Poblacional Exponencial y Tablas de Vida permiten un alto grado de matematización.

CAPÍTULO 7

REFLEXIONES FINALES

El propósito de este último capítulo es rescatar algunos aspectos que permitan reflexionar sobre posibles consecuencias didácticas de estudiar las competencias matemáticas en el campo de la Ecología Evolutiva, disciplina en las que las matemáticas es un auxiliar; como así también, plantear algunas cuestiones que podrían ser de interés para futuras investigaciones.

7 – A . Posibles consecuencias didácticas en el campo de la Ecología Evolutiva

Como se dijo en la Introducción, en este trabajo decidimos centrarnos en *Comprender y describir las competencias matemáticas que se requieren para resolver problemas de Ecología Evolutiva, a partir de la elaboración de un Modelo de Competencias Matemáticas*, pero también se dijo que formaba parte de una investigación más amplia, con un objetivo general que era *Comprender en mayor profundidad acerca del tipo de competencias matemáticas y el uso que se hace de ellas para lograr el aprendizaje de los contenidos específicos de la Ecología Evolutiva.*

Los resultados obtenidos dan cuenta, por un lado, de que emprender el estudio de las competencias involucradas en cualquier área del saber es una tarea compleja, pero por otro lado, sus consecuencias didácticas son significativas. Si bien, el modelo de competencias matemáticas elaborado en esta investigación es válido para describir e interpretar los fenómenos observados, está poniendo en evidencia las relaciones (en general, implícitas) de la matemática con la ecología evolutiva y podrían ser útiles de ser tenidas en cuenta a la hora de pensar en su aprendizaje. Es decir, saber cuáles son las competencias matemáticas de las que se tendrá que disponer para enfrentar con pertinencia y eficacia distintas situaciones que formen parte de un proceso de aprendizaje dentro de esta área de estudio.

Cabe aquí reflexionar sobre este aspecto, porque también podría servir como aporte para ser considerado en la enseñanza de la Matemática cuando es una asignatura de la formación profesional en carreras de grado y que, junto a la Ecología Evolutiva, forman parte de la propuesta curricular.

Así también, desde el punto de vista de la enseñanza de la Ecología Evolutiva, el conocimiento de las competencias matemáticas involucradas en el tema de estudio puede ser útil para organizar lo que se ha de enseñar, y que la tarea de enseñanza esté apoyada en tal conocimiento, tal vez superando dificultades que se presentan al momento de poner en juego competencias matemáticas para realizar tareas del área específica. De hecho, al presentar el marco teórico, un Modelo Teórico Local implicaba la elaboración de cuatro componentes y uno de ellos es el modelo de enseñanza, donde se encontrarían los elementos que aportarían para pensar en las propuestas didácticas.

7 – B . Cuestiones para continuar investigando

- Pensar en cómo se vinculan el aprendizaje de la Ecología Evolutiva con las competencias matemáticas que ponen en juego los estudiantes, es materia pendiente de estudio. No obstante, una posible vía de acceso para realizar este estudio podría ser retomando lo expuesto por Salas Zapata (2005) en cuanto a cómo se relaciona el proceso de aprendizaje con el desarrollo de competencias. Este autor, a partir de ideas de Ausubel y Piaget, afirma que el desarrollo de las actitudes, aptitudes intelectivas, aptitudes procedimentales y los contenidos se corresponde con la formación en el ser, en el pensar, el hacer y el saber, respectivamente, que el aprendizaje logrado por medio de la convergencia de estas cuatro dimensiones da lugar a los llamados aprendizajes significativos, y que de la combinación entre conocimiento con sentido y experiencia resulta el desarrollo de competencias.

Reflexionando sobre este esquema y entendiendo que el proceso de aprendizaje es una construcción continua, pensamos que las competencias desarrolladas en una determinada área de conocimiento, como nuestro caso, el de las matemáticas, no sólo permite que el proceso de aprendizaje en esa área se retroalimente, sino que también favorece el desarrollo de competencias de otras áreas de conocimiento, como lo es en el campo de la Ecología Evolutiva (Figura 7 – a).

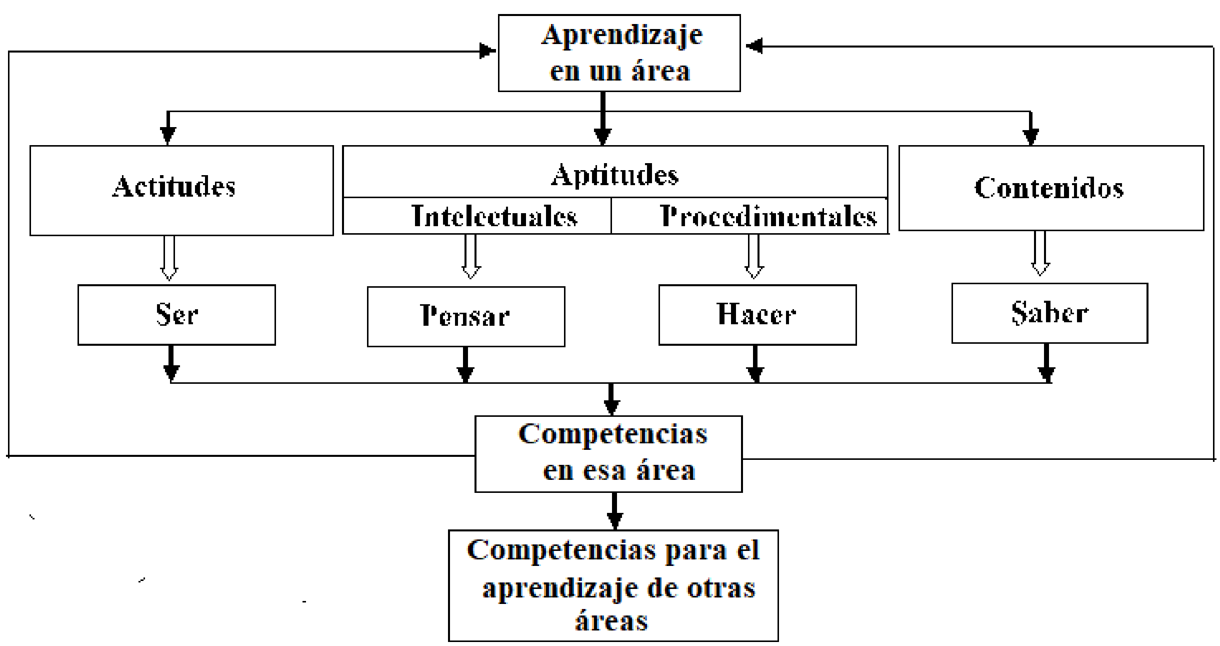


Figura 7 – a . Relación entre el aprendizaje de un área del saber y las competencias en esa área.

- Otra cuestión para ser desarrollada a futuro está relacionada con el siguiente aspecto: Habíamos expresado que, tanto en los procesos de su enseñanza y aprendizaje, como en aquellos donde se requieran resolver problemas profesionales utilizando la Ecología

Evolutiva, en la ecología en general competencias matemáticas, así como también, competencias en otras ciencias. Poder dilucidar de qué manera se relacionan estos conjuntos de competencias en las áreas mencionadas, ampliaría el estudio realizado dando más elementos para comprender la dinámica completa que se pone en marcha en la resolución de situaciones problemáticas.

- Interesa también poder continuar con el proceso de la elaboración de un Modelo Teórico Local, completando con los tres componentes faltantes, sería un gran aporte para los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la Ecología Evolutiva, ya que entre otras cosas, serviría para esclarecer si las dificultades de aprendizaje se relacionan con la carencia de competencias matemáticas, o bien, a una incompleta construcción de las mismas.

- Así como en la Ecología Evolutiva, se podría presentar el mismo interés de estudiar las competencias matemáticas que son requeridas y necesarias para resolver problemas en otras disciplinas. Es común oir que, en la comunidad universitaria, los estudiantes tienen dificultades para comprender, juzgar, hacer y usar las matemáticas en contextos propios de asignaturas correspondientes al ciclo de formación profesional, lo que ocasiona obstáculos en los procesos de aprendizaje y de enseñanza. De este modo, profundizar sobre significados de ser competente y tener competencias matemáticas y entender de qué manera influye en el aprendizaje, constituiría un aporte relevante a la comunidad educativa.

ANEXO 1

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS SELECCIONADOS

Problema N° 1:

Los pulgones (Aphididae, Homoptera) pueden crecer a velocidades extraordinariamente rápidas cuando colonizan un árbol, lo cual les convierte en plagas agrícolas de consideración. En una plantación de cítricos se midió en el mes de mayo una densidad de pulgón verde de los cítricos (Aphis spiraecola) de 200 $ind\ m^{-2}$; al cabo de una semana la densidad era de 285 $ind\ m^{-2}$. Si suponemos que el crecimiento sigue un crecimiento exponencial, **(a)** ¿cuál es el valor de la tasa instantánea de crecimiento per cápita?, **(b)** ¿cuál será la cantidad de pulgones por metros cuadraros al cabo de 30 días?, **(c)** ¿en cuánto tiempo la población alcanzará una densidad de 100.000 $ind\ m^{-2}$?

Información conocida: Población en estudio: Pulgones verdes en una plantación de cítricos.

Densidad: 200 $ind\ m^{-2}$ (individuos/metros cuadrados)

Después de una semana, densidad: 285 $ind\ m^{-2}$

Información por conocer:

(a) ¿cuál es el valor de la tasa instantánea de crecimiento per cápita? "r"

(b) ¿cuál será la cantidad de pulgones por metros cuadraros al cabo de 30 días? "densidad (30)"

(c) ¿en cuánto tiempo la población alcanzará una densidad de 100000 $ind\ m^{-2}$? “t”

Solución:

(a) ¿cuál es el valor de la tasa instantánea de crecimiento per cápita?

Se tiene que $N(t) = N(0)\, e^{r\,t}$, como se puede hablar de tamaño de población o de densidad de población, reemplazando en la fórmula: $285\ ind\ m^{-2} = 200\ \ ind\ m^{-2}\ e^{r\ 1\ semana}$

De donde, al despejar la tasa intrínseca o instantánea de crecimiento poblacional per cápita es: r = $ln\left(\frac{285}{200}\right)\ semana^{-1}\ \approx 0{,}3542\ \ semana^{-1}$.

Respuesta: la tasa instantánea de crecimiento per cápita es r ≈ $0{,}3542\ \ semana^{-1}$

(b) ¿cuál será la cantidad de pulgones por metros cuadraros al cabo de 30 días?

Se utiliza la misma fórmula $N(t) = N(0)\, e^{r\,t}$, pero como se tiene el tiempo en días y la tasa intrínseca de crecimiento poblacional per cápita en semanas, se homogeneizan las unidades:

$$r \cong 0{,}354\ \text{semanas}^{-1} \cong 0{,}051\ \text{días}^{-1}$$

Nuevamente, utilizando la fórmula de tamaño de la población con la información de densidad de individuos por metros cuadrados, al cabo de 30 días, será de:

$\frac{N(t)}{m^2} = \frac{N(0)}{m^2}\ e^{r\,t}$, entonces: $\frac{N(t)}{m^2} = 200\ e^{0{,}051\ .\ 30} \cong 923{,}6\ ind\ m^{-2}$

Respuesta: la cantidad de individuos por metros cuadraros al cabo de 30 días será de aproximadamente 924 $ind\ m^{-2}$.

(c) ¿En cuánto tiempo la población alcanzará una densidad de 100000 $ind\ m^{-2}$?

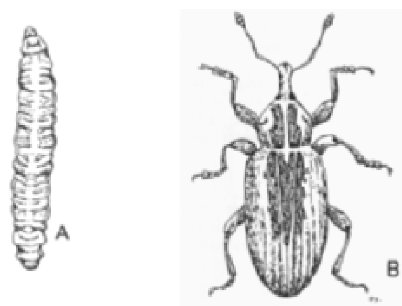
$$100000\ \text{ind m}^{-2} = 200\ \text{ind m}^{-2}\ \ e^{0{,}051\,t}$$

De donde t = $\frac{\ln(500)}{0{,}051} \cong 121{,}86$ días $\cong$ 4 meses y 2 días

Respuesta: la población alcanzará una densidad de 100.000 $ind\, m^{-2}$a los 4 meses aproximadamente.

Problema N° 2:

Se han medido con mucho detalle cambios demográficos de una población cautiva de un coleóptero. En una semana (tiempo suficientemente pequeño como para poder aplicar las ecuaciones de las tasas instantáneas de fertilidad y de mortalidad) han aparecido 24 nuevas larvas y han muerto 10 individuos. El tamaño inicial de la población era 540 individuos. ¿Cuál es la tasa instantánea de crecimiento de la población?



Hypera postica. S le conoce también como gusano verde de la alfalfa. Es una de las plagas más importantes de la alfalfa a nivel mundial. Las larvas se alimentan de las hojas y los brotes de la alfalfa, siendo extremadamente voraces.

Información conocida: Población en estudio: gusano verde de la alfalfa. Hypera postica.

Tiempo: una semana (tiempo suficientemente pequeño como para poder aplicar las ecuaciones de las tasas instantáneas de fertilidad y de mortalidad)

larvas nuevas: 24 y larvas muertas: 10 B(t) = 24 y D(t) = 10

Tamaño inicial de la población era 540 individuos N(t) = 540

Información por conocer:

¿Cuál es la tasa instantánea de crecimiento de la población? $\frac{dN}{dt}$

Solución:

La tasa de cambio instantánea de crecimiento poblacional: $\frac{\mathrm{dN}}{\mathrm{dt}} = r\, N$

Para poder calcularla se debe conocer el valor de la tasa instantánea de crecimiento poblacional per cápita "r" y el tamaño poblacional después de 1 semana.

N(t + Δt) = N(t) + B(t) - D(t) entonces N(t + Δt) = 540 + 24 – 10 = 554 ind.

Para calcular r, sabemos que $N(t) = N(0)\, e^{r\,t}$, con t = 1 semana,

$554 = 540\, e^{r\,1}$, de donde r = $ln\left(\frac{554}{540}\right) \cong$ 0,026 semanas^{-1}

La tasa instantánea o intrínseca de crecimiento per cápita es: r $\cong$ 0,026 semanas^{-1}

La tasa de cambio instantánea de crecimiento poblacional, con t = 1 semana, es: $\frac{\mathrm{dN}}{\mathrm{dt}} = 0{,}026\,.\,554 \cong$ 14,404 ind.semanas^{-1}

Respuesta: La tasa de cambio instantánea de crecimiento poblacional es de aproximadamente 14 ind.semanas^{-1}.

Problema N° 3:

Una población de áfidos en una plantación de cítricos tienen una densidad de 276 $ind\ m^{-2}$, al cabo de una semana la densidad era de 348 $ind\ m^{-2}$. Si suponemos que el crecimiento de la población sigue un modelo exponencial, ¿cuánto tiempo (en meses) tardaría la población en alcanzar 100.000 $ind\ m^{-2}$?

Información conocida: Población en estudio: áfidos (pulgones) en una plantación de cítricos.

El crecimiento de la población sigue un modelo exponencial

Densidad inicial: 276 $ind\ m^{-2}$ Densidad a la semana: 348 $ind\ m^{-2}$

Tiempo: 1 semana

Información por conocer:

¿cuánto tiempo (en meses) tardaría la población en alcanzar 100.000 $ind\ m^{-2}$? "t"

Solución:

La fórmula para el crecimiento exponencial es: $N(t) = N(0)\, e^{r\, t}$

Primeramente se debe calcular la tasa de crecimiento intrínseca r, pero antes se puede pasar la unidad de tiempo de 1 semana a meses: t = 1 $semana \frac{7\ días}{1\ semana} \frac{1\ mes}{30\ días} = \frac{7}{30}\ meses$

Entonces $r = \frac{ln\left(\frac{N(t)}{N(0)}\right)}{t}$ $\qquad$ $r = \frac{ln\left(\frac{348}{276}\right)}{\frac{7}{30}} \cong 0{,}993\ meses^{-1}$

$100000 = 348\ e^{0{,}993\,.t}$ $\qquad$ $t = \frac{ln\left(\frac{100000}{348}\right)}{0{,}993} \cong 5{,}7$ meses

<u>Respuesta</u>: La población de pulgones alcanzará los 100000 $ind\ m^{-2}$ aproximadamente a los 5 meses y 21 días.

Problema N° 4:

(a) Construya una tabla de vida para una población hipotética de una cohorte de *Phlox drummondii*, a partir de los datos de la tabla siguiente. Estime l_x, d_x , T , r , s_x , q_x y e_x .

(b) Elaborar la curva de supervivencia e identifique a que tipo se ajusta.

Intervalo de edad (días) x – x` (x)	Número de supervivientes hasta el día x (N)	Número medio de descendientes (mx)
0-63 (2)	2014	
63-124 (4)	1876	
124-184 (6)	909	
184-215 (8)	690	
215-264 (10)	400	
264-278 (12)	289	
278-292 (14)	167	
292-306 (16)	159	0,33
306-320 (18)	154	3,13
320-334 (20)	147	5,42
334-348 (22)	105	9,26
348-362 (24)	22	4,31
362	0	

Información conocida: Población en estudio: población hipotética de una cohorte de *Phlox drummondii*.

Tabla: Intervalo de edad (días), x; Número de supervivientes hasta el día x, n_x; Número medio de descendientes, m_x.

Información por conocer:

(a) Estimar l_x, d_x , T , r , s_x , q_x y e_x.

(b) Curva de supervivencia y tipo al que se ajusta.

Solución:

(a) A saber:

l_x : tasa de supervivencia, se calcula haciendo $l_x = \frac{n_x}{n_0}$

d_x: tasa de mortalidad específica de la edad x: $d_x = l_x - l_{x+1}$

R_0: tasa de reproducción neta, $R_0 = \sum_{x=0}^{n} l_x m_x$

T: tiempo promedio de generación, $T = \frac{(\sum_{x=0}^{n} x\ l_x\ m_x)}{R_0}$

r: tasa intrínseca de incremento, r = $\frac{ln(R_0)}{T}$

s_x: supervivencia específica de la edad x, s_x = 1 – d_x.

q_x: tasa de mortalidad específica de la edad x: $q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}$

Para calcular e_x , también es necesario calcular:

L_x: esperanza de vida entre dos edades, $L_x = \frac{n_x + n_{x+1}}{2}$

T_x: total de años vividos hacia el futuro por los individuos de la clase de edad x en la población. Se suman los valores de L_x desde la base de la columna a la edad x.

e_x: es la esperanza de vida para cada clase de edad, $e_x = \frac{T_x}{n_x}$

Tabla de vida

x	n_x	m_x	l_x	d_x	q_x	s_x	L_x	T_x	e_x
0 – 63 (2)	2014		1	0,0685	0,0689	0,9315	1945	6470	3,21
63 – 124 (4)	1876		0,9315	0,4802	0,5155	0,5198	1392,5	4525	2,41
124-184 (6)	909		0,4513	0,1087	0,2409	0,8913	799,5	3132,5	3,45
184-215 (8)	690		0,3426	0,1440	0,4203	0,856	1090	2333	3,38
215-264 (10)	400		0,1986	0,0551	0,2775	0,9449	344,5	1243	3,11
264-278 (12)	289		0,1435	0,0596	0,0761	0,9404	228	898,5	3,11
278-292 (14)	167		0,0839	0,005	0,0479	0,995	163	670,5	4,01
292-306 (16)	159	0,33	0,0789	0,0024	0,0314	0,9976	156,5	507,5	3,19
306-320 (18)	154	3,13	0,0765	0,0035	0,0455	0,9965	150,5	351	2,28
320-334 (20)	147	5,42	0,0730	0,0209	0,2857	0,9791	126	200,5	1,36
334-348 (22)	105	9,26	0,0521	0,0412	0,7904	0,9588	63,5	74,5	0,71

348-362 (24)	22	4,31	0,0109	0,0109	1	0,9891	11	11	0,5
362	0		0						

La correspondiente tabla de vida se presenta a continuación, en ella se puede leer que, por ejemplo, en la fila 4, en el intervalo de edad entre 184 y 215, de las 2014 flores originales, están vivos 690 flores, la probabilidad que tiene una flor de esta especie de sobrevivir entre 63 y 124 días es de 0,3426, la proporción de flores que han muerto entre este período y el siguiente es 0,144, en el período analizado, siendo la tasa de mortalidad de 0,4203. Por otra parte, e_x = 3,38 informa que la expectativa de vida de las flores de ese grupo es de 3,38 días hacia el futuro. También se puede observar que la columna de la proporción de mortalidad termina con 1, lo opuesto que la columna de la supervivencia que empieza con 1. Al principio todos están vivos y al final todos están muertos.

R_0: tasa de reproducción neta, $R_0 = \sum_{x=0}^{n} l_x m_x$,

En este caso R_0 = 0,33 x 0,0789 + 3,13 x 0,0765 + 5,42 x 0,073 + 9,26 x 0,0521 + 4,31 x 0,0109 = 1,1906

Considerando que: Si $R_0 < 1$ ⇒ la población está disminuyendo

Si $R_0 = 1$ ⇒ la población es estable

Si $R_0 > 1$ ⇒ la población está en aumento

En este caso, como R_0 = 1,2, podemos decir que la población está en aumento.

El tiempo promedio de generación es, $T = \frac{(\sum_{x=0}^{n} x\ l_x\ m_x)}{R_0}$

$$T = \frac{16 \text{ x } 0{,}33 \text{ x } 0{,}0789 + 18 \text{ x } 3{,}13 \text{ x } 0{,}0765 + 20 \text{ x } 5{,}42 \text{ x } 0{,}073 + 22 \text{ x } 9{,}26 \text{ x } 0{,}0521 + 24 \text{ x } 4{,}31 \text{ x } 0{,}0109}{1{,}1906}$$

$T = \frac{24,3811}{1,1906} = 20,478$ días. La edad promedio en la que se reproducen la población hipotética de esta planta, Phlox drummondii, es a los 20,5 días.

La tasa intrínseca de crecimiento poblacional, $r = \frac{ln(R_0)}{T}$ $\qquad r = \frac{ln(1,1906)}{20,478} = 0,00852$

Como la tasa instantánea de crecimiento por cápita es positiva (r > 0, b > d) el modelo exponencial aumenta exponencialmente.

(b) Curva de supervivencia

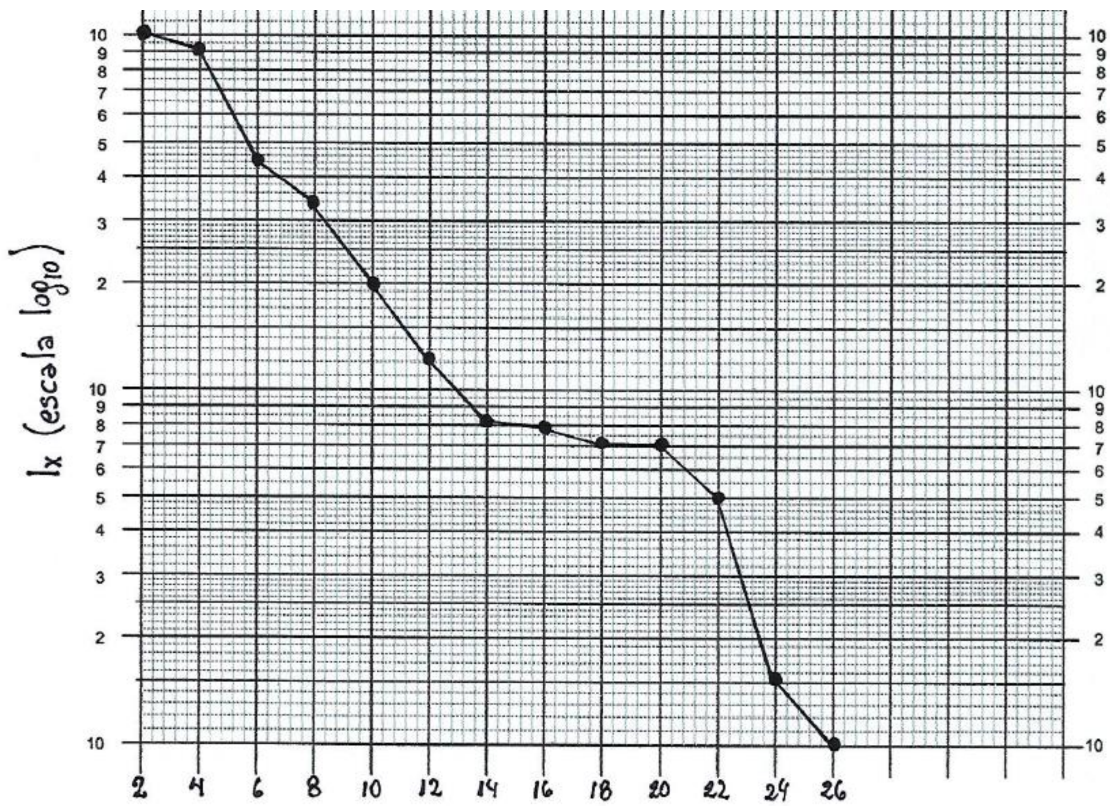


Gráfico Problema 4 - b

Se podría decir que esta curva de supervivencia corresponde al Tipo III. Presenta una alta mortalidad al principio de la vida y luego decrece lentamente. Aunque, a diferencia de lo que ocurre en una curva de supervivencia Tipo III; en este caso, al final del ciclo de vida se observa nuevamente una alta mortalidad, hasta que ninguna de las flores queda viva a los 362 días.

Problema N° 5:

La población en estudio corresponde a Nezara viridula var. saragdula, considerada la plaga más importante de la soja (Glicyne max) porque se alimenta directamente de las semillas reduciendo su calidad y potencial germinativo, afectando la producción. A partir de las ninfas III se inicia el período normal de alimentación. En la soja, las ninfas del cuarto y quinto estadio son las responsables de la dispersión de esta plaga y las formas adultas causan más daños en la producción que las ninfas.

Estadios	**Huevo**	**I**	**II**	**III**	**IV**	**V**	**Adultos**
x (meses)	1	2	3	4	5	6	7
n	4008	3660	3024	1917	882	506	202

Por estudios previos se conoce que la tasa de reproducción en el estadio adulto es de 112 descendientes.

(a) A partir de los datos estimar: tasa intrínseca de crecimiento per cápita. El productor quiere saber si tiene que preocuparse o no con esta plaga en este momento, ¿qué le contestaría? ¿Por qué?

(b) Calcular la mortalidad en todo el ciclo de vida.

Información conocida: Población en estudio: Nezara viridula var. saragdula, chinche verde considerada la plaga más importante de la soja (Glicyne max).

La tasa de reproducción en el estadio adulto es de 112 descendientes, $m_7 = 112$

Tabla: Estadios, x; Número de supervivientes para cada estadio, n_x.

Información por conocer:

(a) Estimar: tasa intrínseca de crecimiento per cápita, “r”.

(b) Calcular la mortalidad en todo el ciclo de vida, “k”.

Solución: **(a) Tabla de vida**

Estadio	x	n_x	m_x	l_x	d_x	$l_x\ m_x$	$x\ l_x\ m_x$	s_x $s_x=1–d_x$	k_x $k_x=-\ln(s_x)$
Huevos	1	4008		1	0,0868			0,9132	0,0908
I	2	3660		0,9132	0,1587			0,8413	0,1728
II	3	3024		0,7545	0,2762			0,7238	0,3232
III	4	1917		0,4783	0,2582			0,7418	0,2987
IV	5	882		0,2201	0,0939			0,9061	0,0986
V	6	506		0,1262	0,0758			0,9242	0,0788
Adultos	7	202	112	0,0504		5,6448	39,514		

R_0: tasa de reproducción neta, $R_0 = \sum_{x=0}^{n} l_x m_x$, en este caso $R_0 = 5{,}6448$

T, tiempo promedio de generación, $T = \frac{(\sum_{x=0}^{n} x\ l_x\ m_x)}{R_0}$ $T = \frac{39{,}514}{5{,}6448} = 7$

r: tasa intrínseca de crecimiento poblacional, $r = \frac{ln(R_0)}{T}$ $r = \frac{ln(5{,}6448)}{7} =$ 0,2472 meses^{-1}

Respuesta: La tasa intrínseca de crecimiento poblacional es de 0,2472 meses^{-1}.

Al productor se le debe contestar que debería preocuparse urgentemente por la producción, dado que la población de chinche verde está creciendo a un ritmo acelerado, porque la tasa de reproducción neta $R_0 > 1$, y la tasa intrínseca o instantánea de crecimiento $r > 0$.

(b) Para calcular la mortalidad en todo el ciclo de vida K, se hace

Los valores k para el ciclo de vida entero (K) puede ser estimado como la sumatoria de los valores k de cada uno de los procesos de mortalidad, $K = \sum k_i$ $K = 1{,}0629$

Respuesta: La mortalidad en todo el ciclo de vida es K = 1,0629.

ANEXO 2

DESCRIPCIONES DE LAS ACTUACIONES DE UN RESOLUTOR IDEAL

Problema N° 1:

Los pulgones (Aphididae, Homoptera) pueden crecer a velocidades extraordinariamente rápidas cuando colonizan un árbol, lo cual les convierte en plagas agrícolas de consideración. En una plantación de cítricos se midió en el mes de mayo una densidad de pulgón verde de los cítricos (Aphis spiraecola) de 200 $ind\ m^{-2}$; al cabo de una semana la densidad era de 285 $ind\ m^{-2}$. Si suponemos que el crecimiento sigue un crecimiento exponencial, **(a)** ¿cuál es el valor de la tasa instantánea de crecimiento per cápita?, **(b)** ¿cuál será la cantidad de pulgones por metros cuadraros al cabo de 30 días?, **(c)** ¿en cuánto tiempo la población alcanzará una densidad de 100.000 $ind\ m^{-2}$?

(1) Fase de Formulación:

a – ***Reconocimiento de la información***:

Se reconocen los siguientes conceptos:

Crecimiento Poblacional exponencial; presentado en forma escrita.

Población, presentado en forma escrita.

Tipo de individuos de la población; presentado en forma escrita y mediante su imagen.

Densidad; presentado en forma escrita, con dato numérico y unidades de medida, $ind.metros^2$.

Tamaño de la población; presentado en forma escrita y por su unidad, ind.

Tasa instantánea de crecimiento poblacional per cápita, presentado en forma escrita. Su unidad es $días^{-1}$.

Tiempo en que una población pasa de estar formada por una cierta cantidad de individuos a otra cantidad, presentado en forma escrita, con dato numérico y unidades de medida, $días$.

b – *Relaciones entre componentes de la información*:

Concepto	Relación con otros conceptos
Densidad	Es la cantidad de individuos por unidad de superficie.
Tamaño de la población. N(t)	Es la cantidad de individuos que forman una población en un tiempo t no definido, en un crecimiento exponencial, está dado por el producto entre la cantidad de individuos de la población en un momento t_0 por la potencia del número irracional e, elevado al producto de la tasa intrínseca per cápita y el tiempo transcurrido entre los dos momentos de análisis.
Tasa instantánea de crecimiento poblacional *per cápita* r	Es la diferencia entre las tasas de natalidad y mortalidad *per cápita*. O bien , si la variación poblacional es continua, es el cociente entre el logaritmo natural de cociente entre la cantidad de individuos en un momento t futuro y la cantidad de individuos de la población en el presente, y el tiempo transcurrido entre los dos momentos de análisis.
Tiempo en que una población pasa de estar	Si la variación poblacional es continua, es el cociente entre el logaritmo natural de cociente entre la cantidad de individuos en

Concepto	Relación con otros conceptos
formada por una cierta cantidad de individuos a otra cantidad. t	un momento t futuro y la cantidad de individuos de la población en el presente, y la tasa instantánea *per cápita*.

(2) Fase de Resolución Matemática:

<table>
<tr><th>Modelo Matemático real,
en Ecología Evolutiva</th><th colspan="2">Modelo Matemático</th></tr>
<tr><td rowspan="3">$N(t) = N_0 \; e^{r\,t}$

Tamaño poblacional</td><td colspan="2">$f(x) = f_0 \; e^{ax}$</td></tr>
<tr><td>Lo que se debe saber:</td><td>Lo que se debe saber hacer:</td></tr>
<tr><td>- Concepto de función.
- Variable dependiente e independiente.
- Características de la función exponencial. Regla de definición y gráfico.</td><td>- Calcular imágenes utilizando regla de definición de una función.
- Diferenciar variables de constantes en la regla de definición de una función.
- Homogeneizar unidades para cálculos de imágenes (por ser funciones que relacionan magnitudes).
- Usar calculadora para calcular potencias con base e.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Modelo Matemático real,
en Ecología Evolutiva</th><th colspan="2">Modelo Matemático</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td>- Escribir números en notación decimal y en notación científica.
- Redondeo.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$Densidad = \frac{N(t)}{Superficie}$</td><td colspan="2">$h(x) = \frac{f(x)}{S}$</td></tr>
<tr><td>Lo que se debe saber:</td><td>Lo que se debe saber hacer:</td></tr>
<tr><td>- Concepto de función.
- Variable dependiente e independiente.
- Concepto de razón.</td><td>- Calcular cocientes.
- Diferenciar variables de constantes en la regla de definición de una función.
- Redondeo.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$r = \frac{ln\left(\frac{N(t)}{N_0}\right)}{t}$

Tasa intrínseca o instantánea de crecimiento poblacional per cápita.</td><td colspan="2">$h = \frac{ln\left(\frac{f(x)}{f_0}\right)}{x}$</td></tr>
<tr><td>Lo que se debe saber:</td><td>Lo que se debe saber hacer:</td></tr>
<tr><td>- Concepto de función.
- Variable dependiente e independiente.
- Funciones logaritmo como inversa de la exponencial.
- Ecuaciones exponenciales.</td><td>- Despejar un elemento de una ecuación exponencial.
- Aplicar propiedades de logaritmos.
- Usar la calculadora para calcular logaritmos naturales y cocientes.</td></tr>
</table>

Modelo Matemático real, en Ecología Evolutiva	**Modelo Matemático**	
	- Conocimiento de la relación entre logaritmos naturales y potencias de base e. - Conocimiento de posibles resultados de un logaritmo en función del valor del argumento.	- Escribir números en notación decimal y en notación científica. - Redondeo.
r = b – d r: Tasa intrínseca o instantánea de crecimiento poblacional *per cápita*. b: Tasa intrínseca de natalidad *per cápita*. d: Tasa intrínseca de mortalidad *per cápita*.	$a = b - c$	
	Lo que se debe saber:	**Lo que se debe saber hacer:**
	- b y c son constantes, son número reales. - El valor de la resta depende de si el minuendo es mayor, menor o igual al sustraendo. - La resta de constantes es otra constante, por lo tanto, a es constante.	- Calcular restas.
$t = \frac{ln\left(\frac{N(t)}{N_0}\right)}{r}$ Tiempo en el que una población pasa de tener N_0 individuos a N(t).	$x = \frac{ln\left(\frac{f(x)}{f_0}\right)}{h}$	
	Lo que se debe saber:	**Lo que se debe saber hacer:**
	- Concepto de función. - Variable dependiente e independiente.	- Despejar un elemento de una ecuación exponencial.

<table>
<tr><th rowspan="2">Modelo Matemático real,
en Ecología Evolutiva</th><th colspan="2">Modelo Matemático</th></tr>
<tr><th>Lo que se debe saber:</th><th>Lo que se debe saber hacer:</th></tr>
<tr><td></td><td>- Funciones inversas.
- Ecuaciones exponenciales.
- Concepto de logaritmo de un número y como función
- Conocimiento de la relación entre logaritmos naturales y potencias de base e.
- Conocimiento de posibles resultados de un logaritmo en función del valor del argumento.</td><td>- Usar la calculadora para calcular logaritmos y cocientes.
- Aplicar propiedades de logaritmos
- Diferenciar entre constantes y variables en la regla de definición de una función.
- Escribir números en notación decimal y en notación científica.
- Redondeo.</td></tr>
</table>

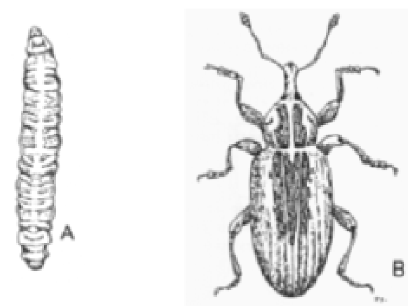
(3) Fase de Interpretación:

Una cuestión importante para interpretar los valores calculados en el contexto del problema, es tener control de las unidades en las que están expresadas cada una de las magnitudes con las que se están operando, ya sean variables funcionales o constantes.

Otra cuestión referida a las unidades es que, para realizar la interpretación de los valores calculados, se debe elegir una unidad que favorezca dicha interpretación, así por ejemplo, para el cálculo del tiempo en el que la población de pulgones alcanza la densidad de 100000 ind m^{-2}, es $t = \frac{\ln(500)}{0{,}051} \cong 121{,}86$ días, es conveniente expresar este tiempo en unidades que se comprendan, 121,86 días $\cong$ 4 meses y 2 días, es decir, aproximadamente 4 meses, para lo cual el resolutor deberá transformar los días a meses y, para la parte no entera de meses, volver a transformar la fracción de meses en días, o bien, directamente redondear a meses.

Problema N° 2:

Se han medido con mucho detalle cambios demográficos de una población cautiva de un coleóptero. En una semana (tiempo suficientemente pequeño como para poder aplicar las ecuaciones de las tasas instantáneas de fertilidad y de mortalidad) han aparecido 24 nuevas larvas y han muerto 10 individuos. El tamaño inicial de la población era 540 individuos. ¿Cuál es la tasa instantánea de crecimiento de la población?



Hypera postica. S le conoce también como gusano verde de la alfalfa. Es una de las plagas más importantes de la alfalfa a nivel mundial. Las larvas se alimentan de las hojas y los brotes de la alfalfa, siendo extremadamente voraces.

(1) Fase de Formulación:

a – ***Reconocimiento de la información***:

Los conceptos que se reconocen son:

Crecimiento Poblacional continuo; presentado en forma escrita.

Población, presentado en forma escrita.

Tipo de individuos de la población; presentado en forma escrita y mediante imagen.

Tamaño de la población; presentado en forma escrita y por su unidad, ind.

Tasa instantánea de crecimiento; presentado en forma escrita. Su unidad es $ind.semanas^{-1}$.

Tasa instantánea de crecimiento poblacional per cápita, presentado en forma escrita. Su unidad es $semanas^{-1}$.

b – *Relaciones entre componentes de la información*:

Concepto	Relación con otros conceptos
Tamaño de la población, en poblaciones cerradas. $N(t + \Delta t)$	La cantidad de individuos que forman una población en el futuro está dado la cantidad de individuos de la población en el presente más la cantidad de nacidos menos las cantidad de muertes en ese período.
Tamaño de la población $N(t)$	Es la cantidad de individuos que forman una población en un tiempo t no definido, en un crecimiento exponencial, está dado por el producto entre la cantidad de individuos de la población en un momento t_0 por la potencia del número irracional e, elevado al producto de la tasa intrínseca per cápita y el tiempo transcurrido entre los dos momentos de análisis.
Tasa instantánea de crecimiento $\frac{dN}{dt}$	Es proporcional a la tasa instantánea de crecimiento *per cápita* y al tamaño de la población en un momento dado.
Tasa instantánea de crecimiento poblacional *per cápita* r	Es la diferencia entre las tasas de natalidad y mortalidad *per cápita*. O bien , si la variación poblacional es continua, es el cociente entre el logaritmo natural de cociente entre la cantidad de individuos en un momento t futuro y la cantidad de individuos de la población en el presente, y el tiempo transcurrido entre los dos momentos de análisis.

(2) Fase de Resolución Matemática:

<table>
<tr><th>Modelo Matemático real,
en Ecología Evolutiva</th><th colspan="2">Modelo Matemático</th></tr>
<tr><td rowspan="3">$\frac{dN}{dt} = r\,N$

Tasa instantánea de crecimiento poblacional</td><td colspan="2">$\frac{df}{dx} = a\,f(x)$</td></tr>
<tr><td>Lo que se debe saber:</td><td>Lo que se debe saber hacer:</td></tr>
<tr><td>- Concepto de función.
- Variable dependiente e independiente.
- Función Derivada y Derivada de una función en un punto.
- Concepto de ecuación diferencial.
- Resolución de ecuaciones diferenciales.</td><td>- Calcular imágenes utilizando regla de definición de una función.
- Usar calculadora para realizar las operaciones.
- Diferenciar variables de constantes en la regla de definición de una función.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$N(t) = N_0\ e^{r\,t}$

Tamaño poblacional</td><td colspan="2">$f(x) = f_0\ e^{ax}$</td></tr>
<tr><td>Lo que se debe saber:</td><td>Lo que se debe saber hacer:</td></tr>
<tr><td>- Concepto de función.
- Variable dependiente e independiente.
- Características de la función exponencial. Regla de definición y gráfico.</td><td>- Calcular imágenes utilizando regla de definición de una función.
- Diferenciar variables de constantes en la regla de definición de una función.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Modelo Matemático real,
en Ecología Evolutiva</th><th colspan="2">Modelo Matemático</th></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td>Lo que se debe saber:</td><td>Lo que se debe saber hacer:</td></tr>
<tr><td></td><td>- Homogeneizar unidades para cálculos de imágenes (por ser funciones que relacionan magnitudes).
- Usar calculadora para calcular potencias con base e.
- Escribir números en notación decimal y en notación científica.
- Redondeo.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$N(t+\Delta t) = N(t)+B(t) - D(t)$
Tamaño poblacional en poblaciones cerradas.</td><td colspan="2">$f(x + \Delta x) = f(x) + h(x) – p(x)$
o bien
$f(x + \Delta x) - f(x) = h(x) – p(x)$</td></tr>
<tr><td>Lo que se debe saber:</td><td>Lo que se debe saber hacer:</td></tr>
<tr><td>- Concepto de función.
- Noción de Variación e incrementos.</td><td>- Calcular sumas y restas de funciones.
- Calcular incrementos reales.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$r = \frac{ln\left(\frac{N(t)}{N_0}\right)}{t}$
Tasa intrínseca o instantánea de</td><td colspan="2">$r = \frac{ln\left(\frac{f(x)}{f_0}\right)}{x}$</td></tr>
<tr><td>Lo que se debe saber:</td><td>Lo que se debe saber hacer:</td></tr>
<tr><td>- Concepto de función.</td><td>- Despejar un elemento de una ecuación exponencial.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Modelo Matemático real,
en Ecología Evolutiva</th><th colspan="2">Modelo Matemático</th></tr>
<tr><td rowspan="2">crecimiento poblacional per cápita.</td><td>Lo que se debe saber:</td><td>Lo que se debe saber hacer:</td></tr>
<tr><td>- Variable dependiente e independiente.
- Funciones logaritmo como inversa de la exponencial.
- Ecuaciones exponenciales.
- Conocimiento de la relación entre logaritmos naturales y potencias de base e.
- Conocimiento de posibles resultados de un logaritmo en función del valor del argumento.</td><td>- Aplicar propiedades de logaritmos.
- Usar la calculadora para calcular logaritmos naturales y cocientes.
- Escribir números en notación decimal y en notación científica.
- Redondeo.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">r = b – d
r: Tasa intrínseca o instantánea de crecimiento poblacional per cápita.
b: Tasa intrínseca de natalidad per cápita.
d: Tasa intrínseca de mortalidad per cápita.</td><td colspan="2">$a = b - c$</td></tr>
<tr><td>Lo que se debe saber:</td><td>Lo que se debe saber hacer:</td></tr>
<tr><td>- b y c son constantes, son número reales.
- El valor de la resta depende de si el minuendo es mayor, menor o igual al sustraendo.
- La resta de constantes es otra constante, por lo tanto, a es constante.</td><td>.- Calcular restas.</td></tr>
</table>

(3) Fase de Interpretación:

Nuevamente, para la interpretar los valores calculados, llevados al contexto del problema, es importante tener control de las unidades en las que están expresadas cada una de las magnitudes con las que se están operando, ya sean variables funcionales o constantes.

También es importante interpretar el símbolo matemático en el contexto del problema, más allá de conocer el nombre en el contexto, así, $\frac{dN}{dt}$ en matemática es la derivada de la función N, que depende de t, respecto de t, si se evalúa para t = 1 semana, en el contexto del problema $\frac{dN}{dt} \cong$ 14,404 ind.semanas^{-1}, lo que indica que la velocidad a la que crece la población en ese momento es de aproximadamente 14 individuos por semana.

<u>Problema N° 3</u>:

Una población de áfidos en una plantación de cítricos tienen una densidad de 276 $ind\ m^{-2}$, al cabo de una semana la densidad era de 348 $ind\ m^{-2}$. Si suponemos que el crecimiento de la población sigue un modelo exponencial, ¿cuánto tiempo (en meses) tardaría la población en alcanzar 100.000 $ind\ m^{-2}$?

(1) Fase de Formulación:

a – *Reconocimiento de la información*:

Los conceptos que se reconocen son:

Crecimiento Poblacional exponencial; presentado en forma escrita.

Población, presentado en forma escrita.

Tipo de individuos de la población; presentado en forma escrita y mediante su imagen.

Densidad; presentado en forma escrita, con dato numérico y unidades de medida, $ind.metros^2$.

Tamaño de la población; presentado en forma escrita y por su unidad, ind.

Tiempo en que una población pasa de estar formada por una cierta cantidad de individuos a otra cantidad, presentado en forma escrita, con dato numérico y unidades de medida, $meses$.

b – *Relaciones entre componentes de la información*:

Concepto	**Relación con otros conceptos**
Densidad	Es la cantidad de individuos por unidad de superficie.
Tamaño de la población. N(t)	Es la cantidad de individuos que forman una población en un tiempo t no definido, en un crecimiento exponencial, está dado por el producto entre la cantidad de individuos de la población en un momento t_0 por la potencia del número irracional e, elevado al producto de la tasa intrínseca per cápita y el tiempo transcurrido entre los dos momentos de análisis.
Tiempo en que una población pasa de estar formada por una cierta cantidad de individuos a otra cantidad. t	Si la variación poblacional es continua, es el cociente entre el logaritmo natural de cociente entre la cantidad de individuos en un momento t futuro y la cantidad de individuos de la población en el presente, y la tasa instantánea *per cápita*.

(2) Fase de Resolución Matemática:

<table>
<tr><th>Modelo Matemático real,
en Ecología Evolutiva</th><th colspan="2">Modelo Matemático</th></tr>
<tr><td rowspan="3">$N(t) = N_0 \; e^{r\,t}$

Tamaño poblacional</td><td colspan="2">$f(x) = f_0 \, e^{ax}$</td></tr>
<tr><td>Lo que se debe saber:</td><td>Lo que se debe saber hacer:</td></tr>
<tr><td>- Concepto de función.
- Variable dependiente e independiente.
- Características de la función exponencial. Regla de definición y gráfico.</td><td>- Calcular imágenes utilizando regla de definición de una función.
- Diferenciar variables de constantes en la regla de definición de una función.
- Homogeneizar unidades para cálculos de imágenes (por ser funciones que relacionan magnitudes).
- Usar calculadora para calcular potencias con base e.
- Escribir números en notación decimal y en notación científica.
- Redondeo.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$Densidad = \dfrac{N(t)}{Superficie}$</td><td colspan="2">$h(x) = \dfrac{f(x)}{S}$</td></tr>
<tr><td>Lo que se debe saber:</td><td>Lo que se debe saber hacer:</td></tr>
<tr><td>- Concepto de función.</td><td>- Calcular cocientes.</td></tr>
</table>

Modelo Matemático real, en Ecología Evolutiva	**Modelo Matemático**	
	Lo que se debe saber:	**Lo que se debe saber hacer:**
	- Variable dependiente e independiente. - Concepto de razón.	- Diferenciar variables de constantes en la regla de definición de una función. - Redondeo.
$r = \frac{ln\left(\frac{N(t)}{N_0}\right)}{t}$ Tasa intrínseca o instantánea de crecimiento poblacional *per cápita*.	$h = \frac{ln\left(\frac{f(x)}{f_0}\right)}{x}$	
	Lo que se debe saber:	**Lo que se debe saber hacer:**
	- Concepto de función. - Variable dependiente e independiente. - Funciones logaritmo como inversa de la exponencial. - Ecuaciones exponenciales. - Conocimiento de la relación entre logaritmos naturales y potencias de base e. - Conocimiento de posibles resultados de un logaritmo en función del valor del argumento.	- Despejar un elemento de una ecuación exponencial. - Aplicar propiedades de logaritmos. - Usar la calculadora para calcular logaritmos naturales y cocientes. - Escribir números en notación decimal y en notación científica. - Redondeo.

<table>
<tr><th>Modelo Matemático real,
en Ecología Evolutiva</th><th colspan="2">Modelo Matemático</th></tr>
<tr><td rowspan="3">$$t = \frac{ln\left(\frac{N(t)}{N_0}\right)}{r}$$
Tiempo en el que una población pasa de tenerN_0 individuos a N(t).</td><td colspan="2">$$x = \frac{ln\left(\frac{f(x)}{f_0}\right)}{h}$$</td></tr>
<tr><td>Lo que se debe saber:</td><td>Lo que se debe saber hacer:</td></tr>
<tr><td>- Concepto de función.
- Variable dependiente e independiente.
- Funciones inversas.
- Ecuaciones exponenciales.
- Conocimiento de la relación entre logaritmos naturales y potencias de base e.
- Conocimiento de posibles resultados de un logaritmo en función del valor del argumento.</td><td>- Despejar un elemento de una ecuación exponencial.
- Usar la calculadora para calcular logaritmos y cocientes.
- Diferenciar entre constantes y variables en la regla de una función.
- Escribir números en notación decimal y en notación científica.
- Redondeo.</td></tr>
</table>

(3) Fase de Interpretación:

Al igual que en los problemas anteriores, para la contextualización de los resultados matemáticos obtenidos, es importante tener control de las unidades en las que están expresadas cada una de las magnitudes con las que se están operando, ya sean variables funcionales o constantes. Así como también es importante controlar si los valores obtenidos con los cálculos matemáticos son factibles de acuerdo al contexto en el que se opera.

Problema N° 4:

(a) Construya una tabla de vida para una población hipotética de una cohorte de *Phlox drummondii*, a partir de los datos de la tabla siguiente. Estime l_x, d_x , T , r , s_x , q_x y e_x .

(b) Elaborar la curva de supervivencia e identifique a que tipo se ajusta.


Intervalo de edad (días) x – x` (x)	Número de supervivientes hasta el día x (N)	Número medio de descendientes (mx)
0-63 (2)	2014	
63-124 (4)	1876	
124-184 (6)	909	
184-215 (8)	690	
215-264 (10)	400	
264-278 (12)	289	
278-292 (14)	167	
292-306 (16)	159	0,33
306-320 (18)	154	3,13
320-334 (20)	147	5,42
334-348 (22)	105	9,26
348-362 (24)	22	4,31
362	0	

<u>4 – a</u>:

(1) Fase de Formulación:

a – *Reconocimiento de la información*:

Los conceptos que se reconocen son:

Tabla de Vida, presentado en forma escrita y representado por una tabla.

Población, presentado en forma escrita.

Tipo de individuos de la población, presentado en forma escrita y por una imagen.

Intervalo de Edad, presentado en forma escrita y por valores numéricos en una tabla, la unidad es $días$.

Cantidad de individuos de una cierta edad, presentados por valores numéricos en una tabla, la unidad es ind.

Tasa de reproducción o de fertilidad, presentada en forma simbólica y por valores numéricos en una tabla.

Tasa de supervivencia, presentada en forma simbólica.

Tasa de mortalidad, presentada en forma simbólica.

Tasa de reproducción neta, presentada en forma simbólica.

Tiempo medio de generación, presentada en forma simbólica, su unidad es $días$.

Tasa instantánea de crecimiento per cápita, presentada en forma simbólica, su unidad es $días^{-1}$.

Supervivencia específica de la edad, presentada en forma simbólica.

Tasa de mortalidad específica de la edad, presentada en forma simbólica.

Esperanza de vida o expectativa media de vida futura, presentada en forma simbólica, su unidad es ind.

b – *Relaciones entre componentes de la información*:

Concepto	**Relación con otros conceptos**
Intervalo de Edad $[x\ ;\ x'[$	Edad, o intervalo de edad en la que se cuenta la cantidad de sobrevivientes de una cohorte original

Concepto	Relación con otros conceptos
Cantidad de individuos de una cierta edad n_x	Es la cantidad de individuos de una población, que considerados sobre una cantidad original, están vivos a la edad x.
Tasa de reproducción o de fertilidad m_x	Es el número total de descendientes producidos en un intervalo de tiempo y que sobreviven hasta el final de este periodo, dividido por el número inicial de hembras[17] en el comienzo del intervalo de tiempo.
Tasa de supervivencia l_x	Es el cociente entre la cantidad de individuos vivos a la edad x y la cantidad de individuos de la cohorte original.
Tasa de mortalidad d_x	Es la diferencia entre la tasa de supervivencia de una cohorte y la siguiente.
Tasa de reproducción neta. R_0	Es el número medio de descendencia nacida de un individuo fértil, considerada a la edad 0, calculada como suma de productos de tasas de supervivencia y de fertilidad para cada corte.
Tiempo medio de generación T	Es el cociente entre la suma del producto, para cada cohorte, de la edad y las tasa de supervivencia y de fertilidad, y la tasa de reproducción neta.
Tasa instantánea de crecimiento per cápita r	Es el cociente entre el logaritmo natural de la tasa de reproducción neta, y el tiempo medio de generación.
Supervivencia específica de la edad. s_x	Es la diferencia entre la proporción total, 1, y la tasa de mortalidad específica para la edad x.

[17] También puede calcularse en término de la cantidad de machos de la especie.

Concepto	Relación con otros conceptos
Tasa de mortalidad específica de la edad. q_x	Es el cociente entre tasa de mortalidad y la tasa de supervivencia para la edad x.
Esperanza de vida o expectativa media de vida futura. e_x	Es el promedio de vida futura a la edad x. se calcula como el cociente entre el total de años vividos hacia el futuro por los individuos de la clase de edad x en la población (T_x) y la cantidad de individuos vivos a la edad x.
Promedio de individuos entre dos intervalos L_x	Es la semisuma de la cantidad de individuos vivos de dos cohortes consecutivas.
Total de años vividos hacia el futuro por los individuos de la clase de edad x en la población. T_x	Es la suma de la esperanza de vida en cada edad (L_x) acumulativamente desde la base de la columna a la edad x..

(2) Fase de Resolución Matemática:

<table>
<tr><th>Modelo Matemático real,
en Ecología Evolutiva</th><th colspan="2">Modelo Matemático</th></tr>
<tr><td rowspan="3">$l_x = \frac{n_x}{n_0}$

Tasa de supervivencia</td><td colspan="2">$a = \frac{b}{c}$</td></tr>
<tr><td>Lo que se debe saber:</td><td>Lo que se debe saber hacer:</td></tr>
<tr><td>- Razón entre cantidades de magnitudes.</td><td>- Usar calculadora para cálculo de cociente.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Modelo Matemático real,
en Ecología Evolutiva</th><th colspan="2">Modelo Matemático</th></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td>Lo que se debe saber:</td><td>Lo que se debe saber hacer:</td></tr>
<tr><td>- En un cociente de naturales:
Si $b < c \Rightarrow a < 1$
Si $b = c \Rightarrow a = 1$
Si $b > c \Rightarrow a > 1$</td><td>- Escribir números: notación decimal, notación científica.
- Redondeo.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$d_x = l_x - l_{x+1}$
Tasa de mortalidad específica</td><td colspan="2">$a = b - c$</td></tr>
<tr><td>Lo que se debe saber:</td><td>Lo que se debe saber hacer:</td></tr>
<tr><td>- Diferencia entre razones.
- a, b y c son números reales.
- En una diferencia de reales:
Si $b < c \Rightarrow a < 0$
Si $b = c \Rightarrow a = 0$
Si $b > c \Rightarrow a > 0$</td><td>- Usar calculadora para cálculo de restas.
- Redondeo.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$R_0 = \sum_{x=0}^{n} l_x m_x$</td><td colspan="2">$a = \sum_{i=0}^{n} b_i c_i$</td></tr>
<tr><td>Lo que se debe saber:</td><td>Lo que se debe saber hacer:</td></tr>
<tr><td>- Concepto y simbología de sumatorias.</td><td>- Usar calculadora para cálculo de productos y sumas.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Modelo Matemático real,
en Ecología Evolutiva</th><th colspan="2">Modelo Matemático</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Tasa de reproducción neta</td><td>Lo que se debe saber:</td><td>Lo que se debe saber hacer:</td></tr>
<tr><td>- El subíndice “i” toma valores consecutivos desde 0 hasta n en el campo de los naturales.
- En la multiplicación de números reales no negativos (b∈R_0^+ y c∈R_0^+), el resultado puede ser menor, mayor o igual a 1.
- La adición de números reales no negativos comprendidos entre 0 y 1, puede ser menor, igual o mayor que 1.</td><td>- Escribir números: notación decimal, notación científica.
- Redondeo.
- Utilizar notación con subíndices.
- Resolver sumatorias.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$T = \frac{(\sum_{x=0}^{n} x \ \ l_x \ m_x)}{R_0}$
Tiempo promedio de generación</td><td colspan="2">$a = \frac{\sum_{i=0}^{n} i \ b_i c_i}{d}$</td></tr>
<tr><td>Lo que se debe saber:</td><td>Lo que se debe saber hacer:</td></tr>
<tr><td>- Concepto y simbología de sumatorias.
- El subíndice “i” toma valores consecutivos desde 0 hasta n en el campo de los naturales.
- Posibles resultados del producto en R.
- Posibles resultados del cociente en R.</td><td>- Usar calculadora para cálculo de productos, sumas y cocientes.
- Escribir números: notación decimal, notación científica.
- Redondear.
- Utilizar notación con subíndices.
- Resolver sumatorias.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Modelo Matemático real,
en Ecología Evolutiva</th><th colspan="2">Modelo Matemático</th></tr>
<tr><td rowspan="3">$r = \frac{ln(R_0)}{T}$
Tasa intrínseca de incremento per cápita</td><td colspan="2">$a = \frac{ln(b)}{c}$</td></tr>
<tr><td>Lo que se debe saber:</td><td>Lo que se debe saber hacer:</td></tr>
<tr><td>- Operación Logaritmación.
- La operación logaritmo se aplica sobre argumentos reales positivos.
- Si b < 1 ⇒ ln(b) < 0
Si b = 1 ⇒ ln(b) = 0
Si b > 1 ⇒ ln(b) > 0
- Si en un cociente, el divisor es positivo, el signo del cociente depende del signo del dividendo.
- Un cociente también es una razón.</td><td>- Usar calculadora para cálculo de logaritmos y cocientes.
- Escribir números: notación decimal, notación científica.
- Redondeo.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$s_x = 1 - d_x$
Supervivencia específica</td><td colspan="2">$a = 1 - b$</td></tr>
<tr><td>Lo que se debe saber:</td><td>Lo que se debe saber hacer:</td></tr>
<tr><td>- a y b son números reales.
- En esta diferencia de reales:
Si b < 1 ⇒ a > 0
Si b = 1 ⇒ a = 0
Si b > 1 ⇒ a < 0</td><td>- Usar calculadora para cálculo de restas.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Modelo Matemático real,
en Ecología Evolutiva</th><th colspan="2">Modelo Matemático</th></tr>
<tr><td rowspan="3">$$q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}$$
Tasa de mortalidad específica</td><td colspan="2">$$a = \frac{b - c}{b}$$</td></tr>
<tr><td>Lo que se debe saber:</td><td>Lo que se debe saber hacer:</td></tr>
<tr><td>- a, b y c son números reales.
- Para la diferencia:
Si $b < c \Rightarrow b - c < 0$
Si $b = c \Rightarrow b - c = 0$
Si $b > c \Rightarrow b - c > 0$
- Para el cociente, su resultado depende tanto del signo como del valor absoluto del dividendo y del divisor.</td><td>- Usar calculadora para cálculo de restas y cocientes.
- Escribir números: notación decimal, notación científica.
- Redondeo.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$$L_x = \frac{n_x + n_{x+1}}{2}$$
Esperanza de vida entre dos edades consecutivas</td><td colspan="2">$$a = \frac{b+c}{2}$$</td></tr>
<tr><td>Lo que se debe saber:</td><td>Lo que se debe saber hacer:</td></tr>
<tr><td>- a, b y c representan números.
- 2 es una constante, un número natural.</td><td>- Usar calculadora para cálculo de sumas y cocientes.
- o bien, saber calcular medias aritméticas.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">T_x : Se suman los valores de L_x acumulativamente</td><td colspan="2">$$a_i = \sum_{i=i}^{n} b_i$$</td></tr>
<tr><td>Lo que se debe saber:</td><td>Lo que se debe saber hacer:</td></tr>
<tr><td>- Concepto y simbología de</td><td>- Usar calculadora para cálculo</td></tr>
</table>

Modelo Matemático real, **en Ecología Evolutiva**	**Modelo Matemático**	
	Lo que se debe saber:	**Lo que se debe saber hacer:**
desde la base de la columna a la edad x. Total de años vividos hacia el futuro, por los individuos de la clase de edad x	sumatorias. - i toma valores consecutivos desde 0 hasta n en el campo de los naturales.	de productos y sumas. - Escribir números: notación decimal, notación científica. - Redondeo. - Utilizar notación con subíndices. - Resolver sumatorias.
$e_x = \frac{T_x}{n_x}$	$a = \frac{b}{c}$	
	Lo que se debe saber:	**Lo que se debe saber hacer:**
Esperanza de vida para cada clase de edad	- a, b y c son números reales. - Cociente entre números reales.	- Usar calculadora para cálculo de cocientes. - Redondeo.

(3) Fase de Interpretación:

Para interpretar los valores de tasas, como ser, para la tasa de supervivencia, l_x, en el contexto del problema, el resolutor debe entender es un cociente de dos números naturales donde el dividendo es menor que el divisor, donde el divisor nunca es cero, por lo tanto, será un valor entre 0 y 1, nunca será igual a 0 y puede asumir el valor 1. Con el transcurrir de las edades, el numerador decrece, siendo el denominador fijo, la tasa decrece con el tiempo.

En cuanto al concepto de razón al que se puede recurrir para la interpretación de las tasas, se pone en evidencia la conveniencia de no simplificar unidades cuando las magnitudes involucradas en el cálculo tienen la misma unidad. Por ejemplo, en $l_x = \frac{n_x}{n_0}$, n_x representa la cantidad de individuos vivos de la población a la edad x, y n_0 también es una cantidad de individuos (cantidad de individuos que forman la población original, a la edad 0). Si se hace: $l_x = \frac{n_x\,[ind]}{n_0[ind]}$, si se simplifica ind con ind, l_x es un valor adimensional, pero esto no favorece la interpretación del mismo, ya que se pierde la interpretación de que a los 4 días de edad, la tasa de supervivencia es de 0,93 individuos por cada individuo que formaba la población original.

Para interpretar la tasa de mortalidad específica de la edad x, d_x, en $a = \mathrm{b} - \mathrm{c}$, sabiendo que b ≥ c, por el significado de l_x, y como a la vez b y c son tasas de supervivencia, por lo que $0 \leq b \leq 1$ y $0 \leq c \leq 1$, de donde, la tasa de mortalidad entre períodos consecutivos será un $0 \leq a \leq 1$.

En el caso de la tasa de reproducción neta, R_0, los productos en cada término están dados por bc, donde $0 \leq b \leq 1$ y $0 \leq c \leq 1$, $b\,c \leq 1$ y la suma puede ser mayor, igual o menor que 1.

Otro concepto importante para la interpretación tanto de la esperanza de vida entre dos edades, L_x, como para la esperanza de vida para cada clase de edad, e_x, el concepto de media aritmética y de su equivalente concepto de valor esperado o esperanza matemática.

4 – b:

(1) Fase de Formulación:

a – *Reconocimiento de la información*:

Los conceptos que se reconocen son:

Curva de supervivencia, presentado en forma escrita.

Tipo de ajuste, presentado en forma escrita.

b – *Relaciones entre componentes de la información*:

Las Curvas de supervivencia son como fotos instantáneas que muestran qué fracción de un grupo inicial sigue vivo en cada edad sucesiva. Son gráficos sobre ejes cartesianos, que muestran la relación entre la tasa de supervivencia y la edad.

En el caso de elaborar una Curva de Supervivencia a lápiz y papel, se tiene opciones a seguir: construir el gráfico en un sistema de ejes cartesianos con escala decimal, construir este gráfico transformando los valores a graficar a escala logarítmica o bien, utilizar papel semilogaritmico para la construcción.

- Construir el sistema de ejes cartesianos, trazando dos ejes perpendiculares y, como en general los valores de las variables a graficar son positivos, se entiende que se ha de construir el gráfico en el primer cuadrante.
- Entendiendo que las variables a graficar son edad y tasa de supervivencia, y que la edad es la variable independiente, se debe elegir escalas convenientes para considerar en los ejes horizontal y vertical.
- Como dijimos, se podría realizar una conversión de los valores de las tasas de supervivencia a valores a una escala logarítmica, utilizando logaritmos decimales, $\log l_x$. La presentación de datos en una escala logarítmica puede ser útil cuando los datos cubren una amplia gama de valores, el logaritmo los reduce a un rango más manejable.
- En el caso de utilizar un papel semilogarítmico, se debe entender el uso de la escala.

- En cualquiera de los casos, se ubican los puntos en el plano, y se traza la poligonal correspondiente a estos puntos.

Determinación del Método: Para construir una curva de supervivencia, un posible procedimiento es trabajar con un sistema de ejes coordenados donde en el eje de las abscisas se colocan las edades, o los intervalos de edades, y en el eje de las ordenadas se consideran las tasas de supervivencia para cada edad. Ubicando cada punto sobre el plano cartesiano (edad, tasa de supervivencia), y uniendo dichos puntos con segmentos, se obtiene una curva de supervivencia.

(2) Fase de Resolución Matemática:

Lo que se debe saber	Lo que se debe saber hacer
- Concepto de ejes cartesianos. - Concepto de escala y escala logarítmica. - Uso de papel semilogarítmico. - Función logaritmo decimal y la función inversa: y = log(x) y $x = 10^y$ - La operación logaritmo se aplica sobre argumentos reales positivos (x). - Si $x < 1 \Rightarrow \log(x) < 0$ Si $x = 1 \Rightarrow \log(x) = 0$ Si $x > 1 \Rightarrow \log(x) > 0$	- Trazar rectas perpendiculares con elementos geométricos. - Seleccionar escalas convenientes. - Calcular logaritmos. - Escribir números en notación decimal y en notación científica. - Redondeo. - Ubicar valores reales en escalas. - Ubicar puntos en un sistema de ejes cartesianos.

Lo que se debe saber	Lo que se debe saber hacer
- Máximos y mínimos. Concavidad de una curva. - Crecimiento y decrecimiento de funciones. - Las funciones lineales tienen pendientes constantes, es decir, independientes del valor de la variable independiente x. - Si una función es cóncava hacia arriba, la pendiente de una recta tangente a la curva es creciente y depende del valor de la variable independiente x. - Si una función es cóncava hacia abajo, la pendiente de una recta tangente a la curva es decreciente y depende del valor de la variable independiente x.	- Confeccionar una poligonal uniendo estos puntos con segmentos. - Leer e interpretar información presentada por una curva en un sistema de ejes cartesianos.

(3) Fase de Interpretación:

Una vez confeccionado el gráfico, la interpretación se basa en entender que, si para valores bajos de edad se tiene los valores más altos de tasa de supervivencia y, a valores altos de edad se tiene las tasas de supervivencia más bajas, es porque la curva es decreciente, lo que representa que, con el transcurrir del tiempo, la cantidad de individuos que forman una población, disminuye.

El que la curva sea cóncava hacia arriba (o simplemente cóncava) al principio del ciclo de vida informa sobre la velocidad de la variación de la tasa en función de la edad. Al principio del ciclo de vida, la tasa de supervivencia disminuye con gran velocidad, indicando una alta mortalidad en los primeros días; luego esta velocidad de la variación de la tasa de supervivencia disminuye, se mantiene casi nula, la tasa de supervivencia es casi constante y la mortalidad es muy baja; ya al final del ciclo de vida, se vuelve a observar que la tasa de supervivencia decrece rápidamente, la mortalidad aumenta.

Cabe recordar que, en el caso de haber utilizado una escala logarítmica para la tasa de supervivencia, habrá que hacer la transformación correspondiente, $x = 10^y$, para leer correctamente la tasa de supervivencia.

<u>Problema N° 5</u>:

La población en estudio corresponde a Nezara viridula var. saragdula, considerada la plaga más importante de la soja (Glicyne max) porque se alimenta directamente de las semillas reduciendo su calidad y potencial germinativo, afectando la producción. A partir de las ninfas III se inicia el período normal de alimentación. En la soja, las ninfas del cuarto y quinto estadio son las responsables de la dispersión de esta plaga y las formas adultas causan más daños en la producción que las ninfas.

Estadios	**Huevo**	**I**	**II**	**III**	**IV**	**V**	**Adultos**
x (meses)	1	2	3	4	5	6	7
n	4008	3660	3024	1917	882	506	202

Por estudios previos se conoce que la tasa de reproducción en el estadio adulto es de 112 descendientes.

(a) A partir de los datos estimar: tasa intrínseca de crecimiento per cápita. El productor quiere saber si tiene que preocuparse o no con esta plaga en este momento, ¿qué le contestaría? ¿Por qué?

(b) Calcular la mortalidad en todo el ciclo de vida.

(1) Fase de Formulación:

a – ***Reconocimiento de la información***:

Los conceptos que se reconocen son:

Tabla de Vida, presentado en forma escrita y representado por una tabla.

Población, presentado en forma escrita.

Tipo de individuos de la población, presentado en forma escrita y por una imagen.

Estadio de Edad, presentado en forma escrita y por valores numéricos en una tabla.

Cantidad de individuos de una cierta edad, presentados por valores numéricos en una tabla, la unidad es ind.

Tasa de reproducción o de fertilidad, presentada en forma simbólica y por valores numéricos en una tabla.

Tasa instantánea de crecimiento per cápita, presentada en forma simbólica, su unidad es $meses^{-1}$.

Mortalidad total en todo el ciclo de vida, presentada en forma escrita y simbólica.

– ***Relaciones entre componentes de la información***:

Concepto	**Relación con otros conceptos**
Estadio de vida x	Es una enumeración de las etapas en el desarrollo de la vida, hasta llegar a la madurez sexual.

Concepto	Relación con otros conceptos
Cantidad de individuos de un cierto estadio de vida n_x	Es la cantidad de individuos de una población, que considerados sobre una cantidad original, están vivos a la edad x.
Tasa de reproducción o de fertilidad m_x	Es el número total de descendientes producidos en un intervalo de tiempo y que sobreviven hasta el final de este periodo, dividido por el número inicial de hembras[18] en el comienzo del intervalo de tiempo.
Tasa instantánea de crecimiento per cápita r	Es el cociente entre el logaritmo natural de la tasa de reproducción neta, y el tiempo medio de generación.
Mortalidad en todo el ciclo de vida K	Es la suma total del factor de mortalidad para cada estadio de vida.

(2) Fase de Resolución Matemática:

Modelo Matemático real, en Ecología Evolutiva	Modelo Matemático	
$l_x = \frac{n_x}{n_0}$ Tasa de supervivencia	$a = \frac{b}{c}$	
	Lo que se debe saber:	**Lo que se debe saber hacer:**
	- Razón entre cantidades de magnitudes. - En un cociente de naturales:	- Usar calculadora para cálculo de cociente. - Escribir números: notación decimal, notación científica.

[18] También puede calcularse en término de la cantidad de machos de la especie.

<table>
<tr><th>Modelo Matemático real,
en Ecología Evolutiva</th><th colspan="2">Modelo Matemático</th></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td>Lo que se debe saber:</td><td>Lo que se debe saber hacer:</td></tr>
<tr><td>Si b < c $\Rightarrow$ a < 1
Si b = c $\Rightarrow$ a = 1
Si b > c $\Rightarrow$ a > 1</td><td>- Redondeo.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$d_x = l_x - l_{x+1}$

Tasa de mortalidad específica</td><td colspan="2">$a = b - c$</td></tr>
<tr><td>Lo que se debe saber:</td><td>Lo que se debe saber hacer:</td></tr>
<tr><td>- Diferencia entre razones.
- a, b y c son números reales.
- En una diferencia de reales:
Si b < c $\Rightarrow$ a < 0
Si b = c $\Rightarrow$ a = 0
Si b > c $\Rightarrow$ a > 0</td><td>- Usar calculadora para cálculo de restas.
- Redondeo.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$R_0 = \sum_{x=0}^{n} l_x m_x$

Tasa de reproducción neta</td><td colspan="2">$a = \sum_{i=0}^{n} b_i c_i$</td></tr>
<tr><td>Lo que se debe saber:</td><td>Lo que se debe saber hacer:</td></tr>
<tr><td>- Concepto y simbología de sumatorias.
- El subíndice “i” toma valores consecutivos desde 0 hasta n en el campo de los naturales.</td><td>- Usar calculadora para cálculo de productos y sumas.
- Escribir números: notación decimal, notación científica.
- Redondeo.</td></tr>
</table>

Modelo Matemático real, en Ecología Evolutiva	**Modelo Matemático**	
	Lo que se debe saber:	**Lo que se debe saber hacer:**
	- En la multiplicación de números reales no negativos (b$\in R_0^+$ y c$\in R_0^+$), el resultado puede ser menor, mayor o igual a 1. - La adición de números reales no negativos comprendidos entre 0 y 1, puede ser menor, igual o mayor que 1.	- Utilizar notación con subíndices. - Resolver sumatorias.
$T = \frac{(\sum_{x=0}^{n} x\ \ l_x\ m_x)}{R_0}$ Tiempo promedio de generación	$a = \frac{\sum_{i=0}^{n} i\ b_i c_i}{d}$	
	Lo que se debe saber:	**Lo que se debe saber hacer:**
	- Concepto y simbología de sumatorias. - El subíndice "i" toma valores consecutivos desde 0 hasta n en el campo de los naturales. - Posibles resultados del producto en R. - Posibles resultados del cociente en R.	- Usar calculadora para cálculo de productos, sumas y cocientes. - Escribir números: notación decimal, notación científica. - Redondeo. - Utilizar notación con subíndices. - Resolver sumatorias.

<table>
<tr><th>Modelo Matemático real,
en Ecología Evolutiva</th><th colspan="2">Modelo Matemático</th></tr>
<tr><td rowspan="3">r = $\frac{ln(R_0)}{T}$

Tasa intrínseca de incremento per cápita</td><td colspan="2">$a = \frac{ln(b)}{c}$</td></tr>
<tr><td>Lo que se debe saber:</td><td>Lo que se debe saber hacer:</td></tr>
<tr><td>- Operación Logaritmación.

- La operación logaritmo se aplica sobre argumentos reales positivos.

- Si b < 1 ⇒ ln(b) < 0

Si b = 1 ⇒ ln(b) = 0

Si b > 1 ⇒ ln(b) > 0

- Si en un cociente, el divisor es positivo, el signo del cociente depende del signo del dividendo.

- Un cociente también es una razón.</td><td>- Usar calculadora para cálculo de logaritmos y cocientes.

- Escribir números: notación decimal, notación científica.

- Redondeo.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$s_x = 1 - d_x$

Supervivencia específica</td><td colspan="2">$a = 1 - b$</td></tr>
<tr><td>Lo que se debe saber:</td><td>Lo que se debe saber hacer:</td></tr>
<tr><td>- a y b son números reales.

- En esta diferencia de reales:

Si b < 1 ⇒ a > 0

Si b = 1 ⇒ a = 0

Si b > 1 ⇒ a < 0</td><td>- Usar calculadora para cálculo de restas.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Modelo Matemático real,
en Ecología Evolutiva</th><th colspan="2">Modelo Matemático</th></tr>
<tr><td rowspan="3">k_x = -ln(s_x)

Mortalidad para cada estadio de vida</td><td colspan="2">$a = -ln(b)$</td></tr>
<tr><td>Lo que se debe saber:</td><td>Lo que se debe saber hacer:</td></tr>
<tr><td>- Logaritmación natural.
- La operación logaritmo se aplica sobre argumentos reales positivos.
- Si b < 1 ⇒ ln(b) < 0
Si b = 1 ⇒ ln(b) = 0
Si b > 1 ⇒ ln(b) > 0
- Regla de signos.</td><td>- Usar calculadora para cálculo de logaritmos.
- Escribir números: notación decimal, notación científica.
- Redondeo.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">K = $\sum k_i$

Mortalidad en todo el ciclo de vida</td><td colspan="2">$a = \sum_{i=0}^{n} b_i$</td></tr>
<tr><td>Lo que se debe saber:</td><td>Lo que se debe saber hacer:</td></tr>
<tr><td>- Concepto y simbología de sumatorias.
- i toma valores consecutivos desde 0 hasta n en el campo de los naturales.</td><td>- Usar calculadora para cálculo de sumas.
- Redondeo.
- Utilizar notación con subíndices.
- Resolver sumatorias.</td></tr>
</table>

(3) Fase de Interpretación:

Para interpretar los valores de k_x y K, se debe entender que estas no son tasas, pueden tomar valores mayores que la unidad. Son medidas que, para cada estadio o para el proceso en general, muestran la mortalidad en esta población.

ANEXO 3

RESOLUCIÓN DE ALGUNOS RESOLUTORES REALES

Algunas resoluciones de problemas de Crecimiento Poblacional Exponencial:

$N_0 = 276$ ind $\qquad N_t = N_0 \cdot e^{rt}$

$N_t = 348$ ind

$t = 7$ días $\qquad \dfrac{N_t}{N_0} = e^{rt} \Rightarrow \ln \dfrac{N_t}{N_0} = rt \ln e$

$$\frac{\ln \frac{N_t}{N_0}}{\ln e \cdot t} = r$$

$$r = \frac{\ln \frac{348}{276}}{\underbrace{\ln e}_{1} \cdot t} = \frac{.232}{7} = .033 \text{ día}^{-1}$$

$r = 0{,}033$

$N_0 = 348$

$N_t = 100.000$

$$t = \frac{\ln \frac{N_t}{N_0}}{r}$$

$$t = \frac{\ln \frac{100.000}{348}}{.033} = 171 \text{ días}$$

Meses $= 171/30 \cong 6$

La población tardará 6 meses en alcanzar 100.000 individuos/m² considerando condiciones ambientales favorables para los áfidos.

Para determinar cuanto tiempo se necesitaría para que la población alcance 100 000 ind/m² primero hay q' calcular la tasa intrínseca de crecimiento a partir de los datos otorgados

$N_0 = 276$ $N_t = 348$ $t = 7$ días

$$N_t = N_0 . e^{r.t} \Rightarrow N_t/N_0 = e^{r.t} \Rightarrow \frac{\ln(N_t/N_0)}{t} = r$$

$$r = \frac{\ln(348/276)}{7} \Rightarrow r = 0{,}033$$

Entonces:

$$N_t = N_0 . e^{r.t} \Rightarrow N_t/N_0 = e^{r.t} \Rightarrow t = \frac{\ln(N_t/N_0)}{r}$$

$$t = \frac{\ln(100000/348)}{0{,}033} \Rightarrow t = 8707{,}767 \text{ días}$$

$$t \approx 8708 \text{ días}$$

30 días ⟶ 1 mes
8708 días ⟶ x = 290,26 meses

Se necesitarían 290 meses para q' la pobl. alcance 100000 ind/m².

Algunas resoluciones de problemas de Tablas de Vida:

ESTADIOS	(X)	N	mx	lx	Dx	lx.mx	x.lx.mx	S 1-dx	K (minúsculo) -ln S
Huevo	1	4608		1	0,087			0,913	0,091
Ninfa I	2	3660		0,913	0,159			0,841	0,173
" II	3	3024		0,754	0,276			0,724	0,323
" III	4	1917		0,478	0,258			0,742	0,298
" IV	5	882		0,220	0,094			0,906	0,099
" V	6	506		0,126	0,076			0,924	0,079
Adulto	7	202	112	0,050		5,600	39,200		

1,063

$l_x = N_i / N_0$

$R_0 = 5,600$

$K = \Sigma k = 1,063$

$D_x = l_x - l_{x+1}$

$T = \frac{39,200}{5,600} = 7,000$

$R_0 = \Sigma l_x . m_x$

$T = \frac{\Sigma l_x . m_x . x}{R_0}$

$r = \frac{\ln 5,600}{7,000} = 0,246$ meses^{-1}

$r = \frac{\ln R_0}{T}$

2) La tasa intrínseca o instantánea de crecimiento es r. y presenta un valor de 0,246. meses^{-1}

En respuesta al productor la contestación que debería preocuparse urgente por su producción. Dado que la población está creciendo a un ritmo acelerado porque Ro es > a 1 (tasa de reproducción Neto) y r es > a 0 (cero)

3) La mortalidad en todo el ciclo de vida presenta un valor de K: 1.063

X	N	lx	mx	dx	S	K
1	4008	1		0,087	0,913	1,645
2	3660	0,913		0,087	0,913	1,645
3	3024	0,826		0,192	0,808	0,213
4	1917	0,634		0,174	0,826	0,191
5	882	0,460		0,114	0,886	0,121
6	506	0,574		0,175	0,825	0,192
7	202	0,399	112			

$R_0 = \Sigma lx \cdot mx$

$R_0 = 0{,}399 \cdot 112$

$R_0 = \underline{44{,}688}$ (TASA DE REPRODUCCION NETA)

b) $K = \Sigma k$

$K = \underline{4{,}007}$ (MEDIDA DE MORTALIDAD)

$T = lx \cdot mx \cdot x / R_0$

$T = 0{,}399 \cdot 112 \cdot 7 / 44{,}688$

$T = \underline{7}$ (TIEMPO PROMEDIO DE GENERACIÓN)

a) $r = \ln R_0 / T$

$r = \ln 44{,}688 / 7$

$r = \underline{0{,}543}$ (TASA INTRÍNSECA DE CRECIMIENTO)

$lx = N_1 / N_0$ (PROBABILIDAD DE SUPERVIVENCIA A LA EDAD x)

$dx = lx - lx+1$ (PROBABILIDAD DE MUERTE A LA EDAD x)

BIBLIOGRAFÍA

- Alfaro, C (2006) *Las ideas de Polya en la resolución de problemas*. Cuadernos de investigación y formación en Educación Matemática.

- Arnal, J., Del Rincón, D. y Latorre, A. (1992). *Investigación Educativa. Fundamentos y metodologías*. Barcelona. Editorial Labor.

- Barquero, B., Bosch, M. y Gascón, J. (2007). *La modelización matemática como instrumento de articulación de las matemáticas del primer ciclo universitario de ciencias: Estudio de la dinámica de poblaciones.* En L. Ruiz Higueras, A. Estepa & F. J. García (Eds.), *Matemáticas, escuela y sociedad. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico* (pp. 531-544). Jaén: Publicaciones de la Universidad de Jaén.

- Bazán, J. L. y Aparicio, A. S. (2012) *Las actitudes hacia la Matemática-Estadística dentro de un modelo de aprendizaje*. Universidad de Sao Paulo-Brasil.

- Cañadas Santiago, M. y otros (2002) *Materiales Didácticos para la Resolución de Problemas.* Grupo Pi. funes.uniandes.edu.co/268/1/CannadasM02-2748.PDF.

- CONFEDI. (2008) *Competencias para el acceso y la continuidad de los Estudios Superiores*. Comisión de enseñanza XLIV Reunión Confedi- Santiago del Estero.

- De La Ossa, V., De La Ossa-Lacayo, A. (2010) *Relación entre la Enseñanza de las Matemáticas y las Ciencias Biológicas* - Relation Between Mathematics And Biological Sciences Teaching - Rev. Cienc. Anim. Colombia.

- Díaz Barriga, A. (2006) *El enfoque de competencias en la Educación. ¿Una alternativa o un disfraz de cambio?* Perfiles Educativo. vol. XXVIII, núm. 111, pp. 7-36.

- EDUTEKA (2005). *Competencias en Matemáticas (OCDE/PISA).* Traducción realizada de “Competencias en Matemáticas” del documento “The PISA Asssessment Framework” publicado (en inglés, en formato PDF). http://www.pisa.oecd.org/.

- Etchegaray, S. (2000). A*nálisis Epistemológico y Didáctico de Nociones Elementales de La Teoría de Números*. Tesis de Maestría. Universidad Nacional de Río Cuarto. Argentina.

- Farnós, J. (2016) *¿Qué es el aprendizaje basado en competencias?* https://juandomingofarnos.wordpress.com/2016/04/18/que-es-el-aprendizaje-basado-en-competencias.

- García, F. (2005). *La Modelización como herramienta de articulación escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales.* Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de las Ciencias. Universidad de Jaén.

- Gascón, J. (2002a). *Geometría sintética en la eso y analítica en el bachillerato*. *¿Dos mundos completamente separados?* SUMA, 39; 13-25.

- Godino, J. (2002). *Perspectiva semiótica de la competencia y comprensión matemática.* XVI Convengo Mazionale: Incontri con la Matemática. Castel San Pietro Terme. Bologna.

- Godino, J. (2003) Fun*damentos de la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas para Maestros*. Matemática y su Didáctica para Maestros. España. Proyecto Edumat – Maestros.

- Godino, J. (2004). *Teoría de las Funciones Semióticas. Un enfoque Ontológico-Semiótico de la Cognición e Instrucción Matemática.* Monografía. Grupo de Investigación sobre Teoría de la Educación Matemática de la Universidad de Granada. Programa de Doctorado de Didáctica de la Matemática.

- Godino, J.D. , Batanero, C. y Font, V. (2003) *Fundamentos de la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas para Maestros* - Matemáticas y su Didáctica para Maestros - Proyecto Edumat-Maestros - Departamento de Didáctica de la Matemática Facultad de Ciencias de la Educación Universidad de Granada.

- Gómez, B. (2015) *Siguiendo una línea de investigación en pensamiento numérico y algebraico.* Universidad de Valencia. Avances y realidades de la Educación Matemática.

- González Marí, J. L. (2015). *Modelos y marcos teóricos en la investigación en pensamiento numérico en España.* En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), Investigación en Educación Matemática XIX (pp. 21-37). Alicante: SEIEM.

- Grau, J (2011). *Taller de Tesis. Módulo 4. Metodología y Métodos para Investigar.* Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional del Comahue. Fundación para el desarrollo de los Estudios Cognitivos.

- Grau, J (2011). T*aller de Tesis. Módulo 6. Análisis de Contenido.* Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional del Comahue. Fundación para el desarrollo de los Estudios Cognitivos.

- Íñiguez Porras, F. J. (2015). *El desarrollo de la competencia matemática en el aula de ciencias experimentales*. Revista Iberoamericana de Educación. Vol. 67, núm. 2 (15/03/15), pp. 117-130, Organización de Estados, OEI/CAEU.

- Lajusticia, A. y Puig, L. (2003) *Una Actividad Matemática organizada en el marco de los Modelos Teóricos Locales: Razón Y Proporción* En la Escuela Primaria. Universidad de Valencia.

- Méndez Iglesias, M. (1999) *La evolución en marcha: conceptos, lógica y Metodología en la Ecología Evolutiva. Evolución y Filogenia de Arthropoda.* Sección V: Ecología Evolutiva. Bol. S.E.A., nº 26,1999: 595-603. Depto Biología de Organismos y Sistemas (Ecología), Universidad de Oviedo.

- Ministerio de Educación. (2007). *Instructivo para presentación de Propuestas de Investigación Educativa* en el Sistema Nacional de Educación.

- Perrenoud, P. (2000) *Construir competencias. Entrevista con Philippe Perrenoud,* Universidad de Ginebra. Observaciones recogidas por Paola Gentile y Roberta Bencini. Texto original de una entrevista "El Arte de Construir Competencias " original en portugués en Nova Escola (Brasil), pp.19-31.

- Pianka, E. (1982). *Ecología Evolutiva*. Universidad de Texas, Austin. Barcelona. Ediciones Omega.

- PISA (2003). *Marcos teóricos de PISA 2003: la medida de los conocimientos y destrezas en matemáticas, lectura, ciencias y resolución de problemas* / OCDE. —

Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia, Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo.

- PISA. (2006) Programa PISA de la OCDE. *Qué es y para qué sirve*. Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos, París.

- Polo, V. (2013) *Modelos matemáticos en ecología: aplicación al dilema halcón vs. Paloma. Ecosistemas.* Revista científica de Ecología y Medio Ambiente. Asociación Española de Ecología Terrestre. Ecosistemas 22(3):6-11. Doi.: 10.7818/ECOS.2013.22-302

- Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada: Comares.

- Puig, L. (2006). *Sentido y elaboración del componente de competencia de los modelos teóricos locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos*. En Bolea, P.; González, Mª. J. y Moreno, M. (Eds.) Investigación en Educación Matemática. Actas del Décimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (pp.107-126) Huesca: Instituyo de Estudios Altoaragoneses / Universidad de Zaragoza.

- Rico, L. (2005). *La competencia matemática en PISA*. En VI Seminario de Primavera. La enseñanza de las Matemáticas y el Informe PISA. Madrid: Fundación Santillana.

- Rodríguez Gómez, D. y Valldeoriola Roquet, J, (2014). *Metodología de la Investigación*. Universitat Oberta de Catalunya.

- Rojano Ceballos, T. y Butto Zarzar, C. (2010). *Pensamiento algebraico temprano: El papel del entorno Logo.* México. Educación Matemática. Vol.22 no.3.

- Salas Zapara, W. (2005) *Formación por Competencias en Educación Superior. Una aproximación conceptual a propósito del caso colombiano*. Revista Iberoamericana de Educación.

- Salganik, L; Rychen, D, Moser, U. y Konstant, J. (2002) Definic*ión y selección de Competencias.* Proyectos sobre Competencias en el Contexto de la OCDE. Análisis de base teórica y conceptual.

- Sánchez Santamaría, J. (2013) *Paradigmas de la Investigación Educativa: de las Leyes Subyacentes a la Modernidad Reflexiva*. Revista Interdisciplinar. ENTELEQUÍA.

- Smith, T. y Smith, R. (2007) *Ecología*. Ed. Pearson. Addison Wesley.

- Tobón Tobón, S.; Pimienta Prieto, J. y García Fraile, J. (2010) *Secuencias Didácticas: Aprendizaje y Evaluación de Competencias*. México. Ed. Pearson.

- Vain, P. (1997). *Los Rituales Escolares y las Prácticas Educativas*. Posadas, Argentina. Editorial Universitaria. Universidad Nacional de Misiones.

- Vergnaud, G. (2007). *Forma operatoria y forma predicativa del conocimiento*. I Encuentro nacional sobre Enseñanza de la Matemática. Traducción de María Rita Otero, Conicet – Niecyt, UNICEN, Tandil, Argentina.

- Villamil Camelo, M. (s f) *Análisis descriptivo del proceso de solución de un problema matemático realizado por un estudiante para profesor de matemáticas.* https://www.monografias.com/trabajos101/analisis-descriptivo-solucion-problema-matematico.