

FUNCIONES DE FORMA RELATIVA POLINOMIALES EN *Araucaria angustifolia* (Bert.) O. Ktze.¹

Ramón Alejandro FRIEDL (*)
Rubén Alberto COSTAS (**)
Norma Elizabeth ORUE (**)
Andrés AMARILLA (***)
Juan Pablo CINTO (***)

RESUMEN

Las funciones de forma relativa constituyen una de las maneras alternativas para la determinación de volúmenes de árboles.

Se trabajó con datos de una muestra de árboles colectados en la Estación Forestal Manuel Belgrano, San Antonio, Misiones, cuyas edades oscilaban entre 27 y 42 años, sus diámetros entre 12 y 64 cm y sus alturas entre 12 y 24 m.

Se ajustó el modelo polinomial de quinto grado a los datos de los árboles con y sin corteza, empleándose un algoritmo de mínimos cuadrados condicional.

Se obtuvieron excelentes ajustes y se recomienda el uso de las ecuaciones logradas en el procesamiento de datos de inventarios realizados en la Estación.

Palabras claves: funciones de forma, polinomio de quinto grado, *Araucaria angustifolia*, Argentina.

POLYNOMIALS RELATIVE TAPER FUNCTIONS IN *Araucaria angustifolia* (Bert.) O. Ktze

SUMMARY

Relative taper functions constitute one of the alternative ways for determination of tree volumes.

Data was taken from a sample of 61 felled trees belonging to Estación Forestal Manuel Belgrano, Misiones, Argentine. Their ages oscillates between 27 to 42 years, the diameter at breast height from 12 to 64 cm, and the height between 12 to 24 m.

The fifth grade polynomial model was fitted to describe the mean profile with and without bark.

A very good fitting was obtained and therefore it is recommended the use of the resulting equations for the processing of inventory data to be made at the station.

¹ Trabajo realizado dentro del marco del Convenio Instituto Forestal Nacional - Universidad Nacional de Misiones (1986).

(*) Ing. Ftal., M. Sc., Profesor de Dasometría, Director del Proyecto, Facultad de Ciencias Forestales. Eldorado. Misiones.

(**) Ings. Ftales., Docentes de la Cátedra de Dasometría, Colaboradores del Proyecto. Facultad de Ciencias Forestales. Eldorado. Misiones.

(***) Estudiantes de Ingeniería Forestal, Colaboradores del Proyecto, Facultad de Ciencias Forestales. Eldorado. Misiones.

Key words: taper functions, polynomials, *Araucaria angustifolia*, Argentine.

INTRODUCCION

Las funciones de forma relativa constituyen al igual que las tablas de volúmenes una de las maneras alternativas que propone la dasometría moderna para la determinación de los volúmenes de árboles en pie.

Técnicamente, las funciones de forma son funciones estadísticas que describen a través de una ecuación, gráfico o tabla, el perfil medio de una muestra de árboles.

El uso adecuado de las funciones de forma, permite resolver los siguientes problemas cotidianos en el procesamiento de datos de inventarios forestales:

- Determinar la altura donde se produce un determinado diámetro (altura comercial).

- Determinar el diámetro que se produce a una altura dada.

- Determinar volúmenes parciales o totales por integración de la función.

Dichas características descriptas transforman a las funciones de forma en herramientas relativamente más flexibles que las tablas de volúmenes, debido a que su uso no está restringido a límites comerciales fijos, lo cual es conveniente en situaciones donde se pueden obtener productos con varios destinos y donde las dimensiones de dichos productos varía con el tiempo.

Los objetivos del trabajo fueron:

- Obtener funciones de forma relativas para su utilización futura en la Estación.

- Ajustar el polinomio de quinto grado a los perfiles medios con y sin corteza y evaluar analítica y gráficamente dichos ajustes.

MATERIALES Y METODOS

Localización y características de las plantaciones

Los árboles de la muestra fueron seleccionados de las plantaciones de la especie existentes en la Estación Forestal Manuel Belgrano, situada en el Departamento Manuel Belgrano, Misiones, Argentina.

La superficie total de las plantaciones muestreadas fue de 375,94 ha, cuyas eda-

des oscilaban entre 27 y 42 años y las densidades entre 188 y 539 árboles por hectárea.

Los suelos donde se desarrollan las mismas corresponden a las Unidades Cartográficas 8 y 9 (Laserre, 1980).

Metodología utilizada

En la construcción de una función de forma, establecidos los objetivos y la población donde aplicarla, se requiere de la selección de una muestra de árboles, de la recolección de los datos a campo, del ajuste y evaluación de las funciones ajustadas.

Selección de la muestra. Para la selección de los árboles de la muestra se utilizaron inicialmente datos obtenidos de un inventario realizado al instalar las parcelas permanentes (Friedl, 1991).

En función de dichos datos se establecieron los rangos de variación de los diámetros y las alturas por clase de edad y total.

La muestra de árboles se seleccionó de manera que se tuviese una cantidad aproximadamente igual de árboles por clase diamétrica y que los árboles dentro de una clase diamétrica cubriesen las variaciones de alturas existentes dentro de la clase.

Asimismo se controló la distribución de los árboles por clase de edad e inclusive su localización dentro de las plantaciones, de manera que se cubriesen las variaciones de edad y estuviesen dispersos en el terreno.

El tamaño de la muestra fue de 61 árboles, los cuales presentaban diámetros a la altura del pecho que variaban de 12 a 64 cm y alturas que variaban entre 12 y 24 m. La distribución de los mismos en clases de diámetro y altura se presentan en la Tabla 1.

Levantamiento de los datos. Las circunferencias a la altura del pecho se obtuvieron con cinta diamétrica en el árbol en pie, mientras que la altura total se obtuvo sumando a la altura del tocón, la longitud total del fuste la cual se determinó con cinta en el árbol apeado.

Una vez apeado el árbol, se determinaron las circunferencias con corteza y el espesor de la corteza, en cada una de las

Tabla 1. Distribución de los árboles de la muestra en clases de diámetro y altura.

clases de dap (cm)	altura total (m)													Total	
	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24		
10-14,9	2		1	1	1										5
15-19,9				2	2	1	1								6
20-24,9		2			1	1	1		1	1					7
25-29,9					1		3	2		1					7
30-34,9						3	1	3							7
35-39,9								1	3	2	1				7
40-44,9									2	2	1	1			6
45-49,9									2	1	1				4
50-54,9								1		1		2	1		5
55-59,9										1	1		1		3
60-64,9													3		3
65-69,9												1			1
Total	2	2	1	3	5	5	6	7	8	9	4	4	5	61	

siguientes alturas preestablecidas: 0,1; 0,3; 0,7; 1,3; 2,0 y luego de 2 en 2 metros hasta el ápice del árbol.

Las circunferencias con corteza se determinaron con cinta, registrando los datos en cm, mientras que el del espesor de la corteza, extrayendo con el barreno de Pressler una muestra radial de la misma y midiendo luego su espesor con una regla y registrando los datos en mm.

Los datos fueron registrados en planillas previamente confeccionadas al efecto.

Modelo ajustado. Fue ajustado el modelo polinomial de quinto grado, el cual permite generalmente describir adecuadamente el perfil medio de una muestra de árboles, inclusive sus inflexiones caracte-

rísticas. Además se caracteriza por su fácil ajuste, su flexibilidad para describir la forma de los fustes y por poseer una integral inmediata, que facilita la determinación de los volúmenes.

Dicho modelo ha sido aplicado con éxito en numerosas situaciones tales como Peters (1971), trabajando con datos de *Araucaria araucana* (Mol.) C. Koch levantados en Chile; Hosokawa (1980), Burguer, Hosokawa y Machado (1980), Glade y Hosokawa (1984), trabajando con datos de *Araucaria angustifolia* levantados en Brasil y Friedl y Glade (1988), trabajando con datos de *Eucaliptus grandis* levantados en Argentina.

La fórmula del modelo polinomial de quinto grado, es la siguiente:

$$\frac{d_i}{d_{0,1}} = \beta + \beta_1 \left(\frac{h_i}{H}\right) + \beta_2 \left(\frac{h_i}{H}\right)^2 + \beta_3 \left(\frac{h_i}{H}\right)^3 + \beta_4 \left(\frac{h_i}{H}\right)^4 + \beta_5 \left(\frac{h_i}{H}\right)^5$$

o bien:

$$dr = \beta + \beta_1 hr + \beta_2 hr^2 + \beta_3 hr^3 + \beta_4 hr^4 + \beta_5 hr^5$$

donde:

- dr: diámetro relativo
- hr: altura relativa
- di: diámetro a la altura h_i
- $d_{0,1}$: diámetro con corteza al décimo de la altura total
- H: altura total
- $\beta, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$: coeficientes del modelo

Transformación de los datos. Antes de realizar el ajuste de las funciones, se procedió a transformar los datos. Para ello considerando a cada árbol aisladamente se realizaron las siguientes secuencias de pasos:

- dividir la altura total por 10,
- determinar por interpolación lineal los diámetros con corteza al décimo de la altura.
- dividir las series de diámetros con y sin corteza por el diámetro al décimo de la altura con corteza. Obteniendo las series de diámetros relativos con y sin corteza.
- dividir las alturas de medición por la altura total, obteniendo una serie de alturas relativas.

A todos los árboles se le adiciona un dato final $dr=0$ y $hr=1$ correspondiente al ápice.

Procedimiento de ajuste. Para el ajuste de las funciones de forma relativas se utilizaron los datos transformados de todos los árboles de la muestra, obteniéndose una función para los datos de diámetros con corteza y otra para los datos sin corteza.

El método de ajuste aplicado es el de los mínimos cuadrados condicionados, el cual difiere del método de los mínimos cuadrados comunes, pues se imponen ciertas

restricciones a los coeficientes de la ecuación, de manera que la curva obtenida pase necesariamente por algunos puntos predeterminados Freese (1978).

En este caso la restricción impuesta, permite asegurar que la función ajustada pase por el punto de coordenadas $hr=1$ y $dr=0$, correspondiente al ápice, esto se logra aplicando la siguiente restricción:

$$\beta + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 = 0$$

Evaluación de las Ecuaciones Ajustadas. En la definición de los indicadores se emplea la siguiente notación:

- y_i : i-ésimo diámetro relativo estimado ($1 \leq i \leq n$)
- \hat{y}_i : i-ésimo diámetro relativo calculado
- \bar{y} : media aritmética muestral de los diámetros relativos
- n : tamaño de la muestra
- k : número de variables independientes del modelo

Para evaluar y comparar el ajuste de cada uno de los modelos y realizar su posterior selección, se consideraron los siguientes indicadores estadísticos:

Prueba de "F": planteada la hipótesis de si existe o no regresión entre la variable dependiente y las variables independientes del modelo, "F" es el estadístico que se obtiene al efectuar el cociente de las variancias muestrales, y su contraste con un valor teórico permite verificar la hipótesis planteada.

La determinación de dicho estimador muestral se realiza a través de la siguiente fórmula:

$$F = \frac{\text{Cuadrado medio de la regresión}}{\text{Cuadrado medio residual}} = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 / (k-1)}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 / (n-k-1)}$$

Si el valor de "F" muestral es mayor que el valor teórico o tabular, entonces existe regresión estadísticamente significativa entre la variable dependiente y las variables independientes del modelo al nivel significación.

Coefficiente de determinación (r^2): expresa en tanto por uno, la proporción de la variación total de la variable dependiente explicada por la variación de las variables independientes del modelo. Según este criterio, el mejor modelo sería aquel cuyo valor de r^2 estuviese más próximo del valor ideal 1. La determinación de dicho estadístico se realiza empleando la siguiente fórmula.

El intervalo de variación del coeficiente de determinación es $0 \leq r^2 \leq 1$, siendo que un valor de $r^2 = 1$, indica un ajuste perfecto, en cuyo caso la línea o plano de ajuste pasa exactamente por todos los puntos observados; mientras que un valor de $r^2 = 0$

$$r^2 = \frac{\text{Suma de cuadrados de la regresión}}{\text{Suma de cuadrados totales}} = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

representa la ausencia total de relación entre las variables, en cuyo caso las variaciones de la variable dependiente son totalmente aleatorias o explicadas por otras variables independientes no contenidas en el modelo.

Error estándar de los residuos (syx): es simplemente la raíz cuadrada del cuadrado medio residual, obtenida de la tabla de análisis de la variancia aplicado a la regresión ajustada.

Coefficiente de variación de los residuos ($syx \%$): es un estadístico usado para indicar la calidad del ajuste, que se determina expresando el error estándar de los residuos (syx), como un porcentaje de la media aritmética muestral de los diámetros relativos. Al usar este criterio, se selecciona el modelo que presente menor $syx \%$. La fórmula para su determinación es la siguiente

$$syx \% = \sqrt{\frac{\text{Cuadrado medio residual}}{\text{Media aritmética de los diámetros relativos}}} \cdot 100 = \frac{syx}{\bar{y}} \cdot 100$$

Para evaluar gráficamente el ajuste, se confeccionó un gráfico en un sistema diámetro relativo-altura relativa, de los puntos observados y la curva ajustada.

Procesamiento de los datos. La grabación, verificación y el procesamiento de los datos se realizó en el Centro de Cómputos del Instituto Subtropical de Investigaciones Forestales, dependiente de la Facultad de Ciencias Forestales, Eldorado, Misiones, a través de una computadora compatible con el sistema operativo MS-DOS.

Para efectuar la grabación y transformación de los datos, la obtención de los coeficientes, de la tabla de análisis de variancia, de las estadísticas de ajuste, así como de la representación gráfica de los diagramas de dispersión de los datos y de la curva ajustada, se empleó el mismo conjunto de programas utilizados por Friedl y Glade (1988).

RESULTADOS Y DISCUSION

Las Tablas 2, 3 y 4 y la Figura 1, presentan los resultados obtenidos para la fun-

ción de forma con corteza. Mientras que las Tablas 5, 6 y 7 y la Figura 2, presentan los resultados obtenidos para la función de forma sin corteza.

Tabla 2. Función de forma relativa con corteza. Coeficientes de regresión obtenidos

Coefficiente	Estimador
β_0	1,20804110
β_1	-3,69690819
β_2	19,53146540
β_3	-51,03748926
β_4	59,03369101
β_5	-25,03880006

Tabla 3. Función de forma relativa con corteza. Análisis de variancia

Fuentes de Variación	Sumas de Cuadrados	Grados de Libertad	Cuadrados Medios
Regresión	89,828	5	17,9656
Residuos	1,887	862	0,0022
Total	91,715	867	0,1058

Tabla 4. Función de forma relativa con corteza. Tamaño de la muestra y estadísticas de ajuste

Número de puntos muestrales	868
Coefficiente de determinación (r^2)	0,9794
Coefficiente de variancias (F)	8.205
Error estándar de los residuos (syx)	0,0468
Coefficiente de variación de los residuos (syx %)	5,9370

Tabla 5. Función de forma relativa sin corteza. Coeficientes de regresión obtenidos

Coefficiente	Estimador
β_0	1,17675974
β_1	-3,19483257
β_2	17,25214578
β_3	-46,05101834
β_4	53,75719377
β_5	-22,94024839

Tabla 6. Función de forma relativa sin corteza. Análisis de variancia

Fuentes de Variación	Sumas de Cuadrados	Grados de Libertad	Cuadrados Medios
Regresión	88,614	5	17,7227
Residuos	1,950	862	0,0023
Total	90,564	867	0,1045

Tabla 7. Función de forma relativa sin corteza. Tamaño de la muestra y estadísticas de ajuste

Número de puntos muestrales	868
Coefficiente de determinación (r^2)	0,9784
Cociente de variancias (F)	7.834
Error estándar de los residuos (syx)	0,0476
Coefficiente de variación de los residuos (syx %)	6,0673

Figura 1. Función de forma relativa con corteza. Diagrama de dispersión de los datos y curva ajustada

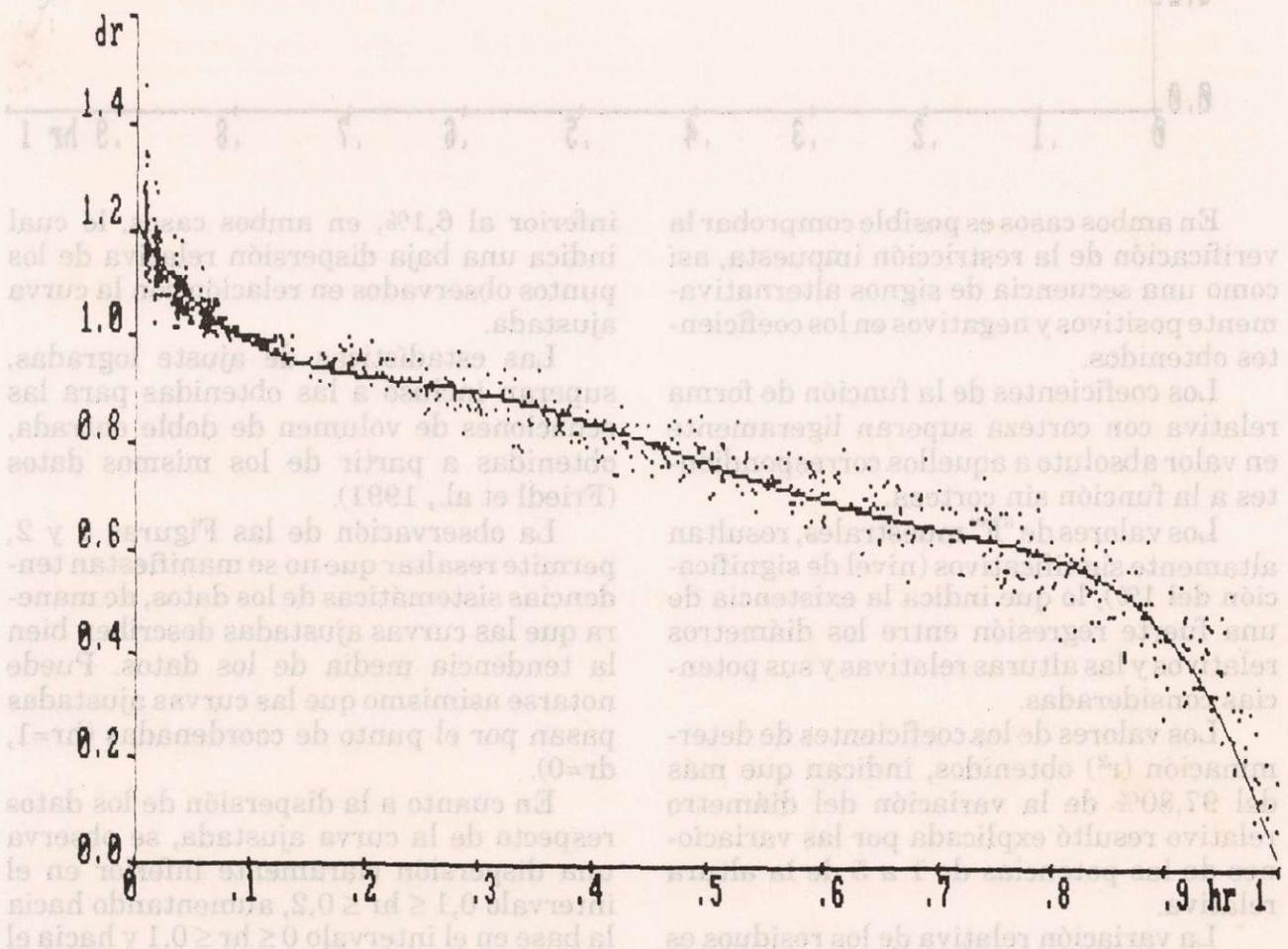
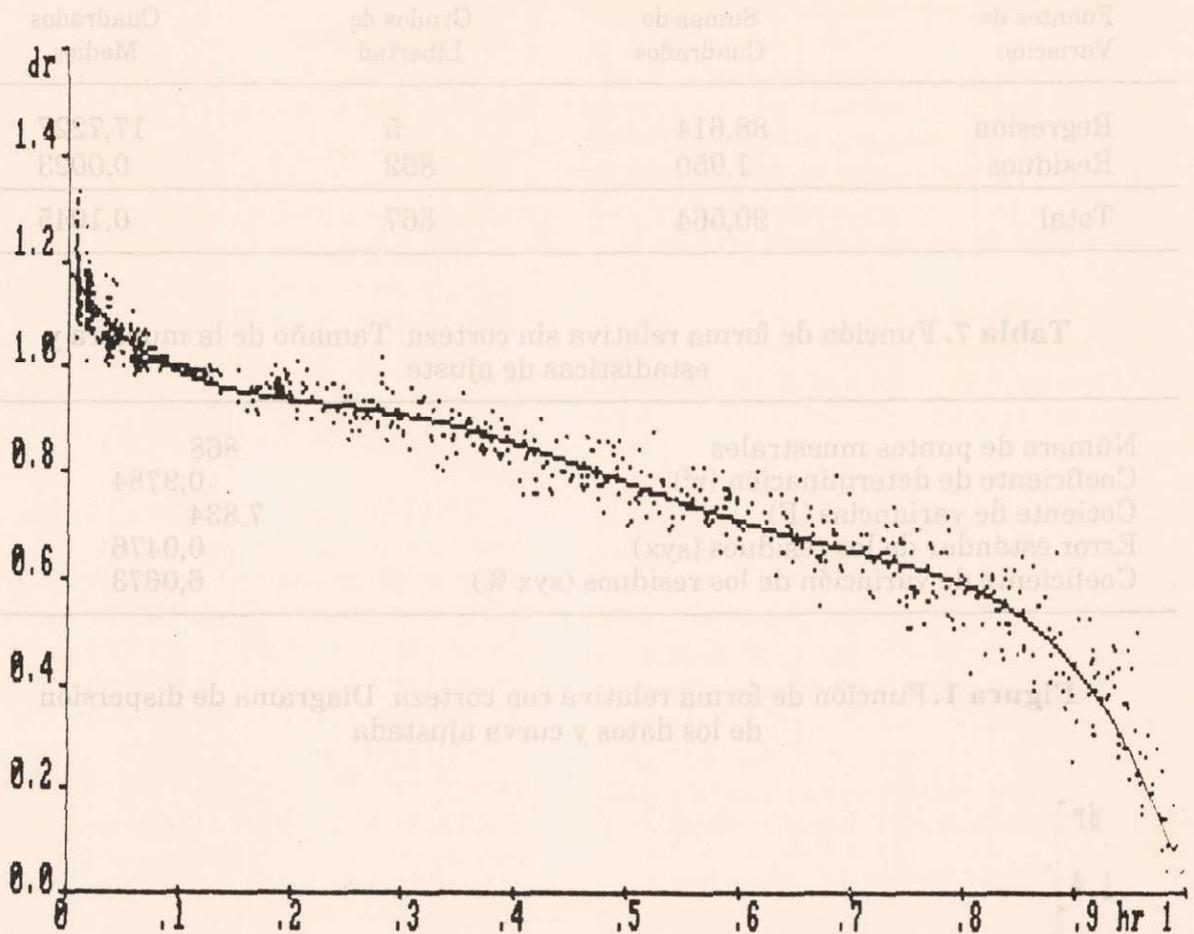


Figura 2. Función de forma relativa sin corteza. Diagrama de dispersión de los datos y curva ajustada



En ambos casos es posible comprobar la verificación de la restricción impuesta, así como una secuencia de signos alternativamente positivos y negativos en los coeficientes obtenidos.

Los coeficientes de la función de forma relativa con corteza superan ligeramente en valor absoluto a aquellos correspondientes a la función sin corteza.

Los valores de "F" muestrales, resultan altamente significativos (nivel de significación del 1%), lo que indica la existencia de una fuerte regresión entre los diámetros relativos y las alturas relativas y sus potencias consideradas.

Los valores de los coeficientes de determinación (r^2) obtenidos, indican que más del 97,80% de la variación del diámetro relativo resultó explicada por las variaciones de las potencias de 1 a 5 de la altura relativa.

La variación relativa de los residuos es

inferior al 6,1%, en ambos casos, lo cual indica una baja dispersión relativa de los puntos observados en relación con la curva ajustada.

Las estadísticas de ajuste logradas, superan incluso a las obtenidas para las ecuaciones de volumen de doble entrada, obtenidas a partir de los mismos datos (Friedl et al., 1991).

La observación de las Figuras 1 y 2, permite resaltar que no se manifiestan tendencias sistemáticas de los datos, de manera que las curvas ajustadas describen bien la tendencia media de los datos. Puede notarse asimismo que las curvas ajustadas pasan por el punto de coordenadas ($hr=1$, $dr=0$).

En cuanto a la dispersión de los datos respecto de la curva ajustada, se observa una dispersión claramente inferior en el intervalo $0,1 \leq hr \leq 0,2$, aumentando hacia la base en el intervalo $0 \leq hr \leq 0,1$ y hacia el

ápice en el intervalo $0,2 \leq hr \leq 0,96$.

Dicho aumento de la variación, puede asociarse al hecho de haberse trabajado con árboles de 27 a 42 años de edad y a la modificación de la forma del fuste con la edad, hecho comprobado en *Araucaria angustifolia* por Burger et al (1980) y Friedl (1989). De ser así, una menor dispersión de los datos se podría lograr, estratificando los datos por clase de edad de los árboles.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Los resultados obtenidos permiten formular las siguientes conclusiones y recomendaciones:

- Se han obtenido excelentes ajustes, de manera que el modelo polinomial de quinto grado describe correctamente la tendencia media de los datos.

- Las estadísticas de ajuste obtenidas superan a las obtenidas para tablas de volúmenes de doble entrada a partir de los mismos datos.

- El ajuste logrado en el caso de la función de forma relativa con corteza supera levemente al obtenido para la función sin corteza.

- Se recomienda el uso de las funciones ajustadas en el procesamiento de datos de inventarios realizados en la Estación.

AGRADECIMIENTOS

El equipo de trabajo reconoce a los Miembros de la Comisión Coordinadora del Convenio IFONA-UNaM, por el apoyo recibido.

El equipo de trabajo de campo agradece profundamente la amable atención y colaboración prestada por el Ing. Ftal. Luis Tejera y su esposa Ing. Ftal. Nidia de Tejera, técnicos de la Estación Manuel Belgrano del Instituto Forestal Nacional.

Se reconoce especialmente al Ing. Agr., M. Sc. Jorge Enrique Glade por el uso del sistema preparado en forma conjunta con el primer autor en 1987.

Asimismo se expresa un sincero agradecimiento al alumno Andrés Amarilla de la Facultad de Ciencias Forestales, así como a los Sr. Marcos Ferreyra y Sr. R. Pintos del IFONA, por la colaboración prestada en los trabajos de campo. También al Sr. Maximino

Pérez y Sr. Milciades Segovia por los servicios administrativos.

BIBLIOGRAFIA

BURGER, D.; HOSOKAWA, R. T.; MACHADO, S. A. 1980. Desenvolvimento de forma de *Araucaria angustifolia* (Bert.) O. Ktze. En: Forestry Problems of Genus *Araucaria*. FUPEF. Curitiba, pág. 320-329.

DRAPER, W. y SMITH, H. 1966. Applied regression analysis. John Wiley & Sons. New York. 407 pág.

FREESE, F. 1978. Linear regression methods for forest research. For. Prod. Lab. For. Serv. 87 pág. (Agriculture Handbook 317)

FRIEDL, R. A. 1989. Dinâmica e Prognose da forma dos fustes em povoamentos plantados de *Araucaria angustifolia* (Bert.) O. Ktze. Disertación de Maestria. Curso de Pós-Graduação em Engenharia Florestal, Universidade Federal do Paraná. Curitiba. 167 pag.

FRIEDL, R. A.; COSTAS, R. A.; MAIOCCO, D. C.; GRANCE, L. A.; PALAVECINO, J. A. 1991. Construcción de tablas de volúmenes estándares para *Araucaria angustifolia* (Bert.) O. Ktze. Trabajo presentado a las VI Jornadas Técnicas. Facultad de Ciencias Forestales. Eldorado. Octubre/1991.

GOULDING, C. J. y MURRAY, J. C. 1976. Polynomial taper equations that are compatible with tree volume equations. New Zealand Jor. For. Sci., 5 (3), pág. 312-322.

KOZAK, A.; MUNRO, D. D.; SMITH, J. H. G. 1969. Taper functions and their application in forestry inventory. For. Chron. 45 (4). pag. 278-283.

HOSOKAWA, R. T. 1980. Contribuição para definir a sucessão de cortes dos povoamentos objetivando a persistencia das rendas nas empresas florestais. APEF. Curitiba. 96 pag.

HOSOKAWA, R. T. y GLADE, J. E. 1984. Valoración de una plantación forestal para definir el costo de la materia prima industrial. En: III Jornadas Técnicas sobre Bosques Implantados. Actas (Tomo II). Facultad de Ciencias Forestales. Eldorado, pág. 92-112.