

# Análisis de la apropiación de saberes instrumentales.

Ana I. Gervasoni, Nora B. Marrone, Nora M. Sosa y Silvia C. Sureda<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Facultad de Ciencias Económicas.  
Universidad Nacional de Misiones  
3300 Posadas. (Misiones)  
E-mail: noramsosa@gmail.com

**Resumen.** Este trabajo presenta los resultados de una investigación donde se abordan a las funciones lineales como una de las representaciones teórica más simple para vincular diferentes magnitudes y sus variaciones. A través de ellas se busca que los estudiantes sean capaces de realizar la conversión entre los diferentes registros de representación semiótica - Gráfico, Tabular, Simbólico y Lenguaje coloquial- para modelizar comportamientos complejos de problemas de la actuación profesional. El objetivo de esta investigación es conocer las representaciones mentales que un estudiante del ciclo común de las carreras de grado de la FCE de la UNaM tiene sobre las funciones lineales.

Para relevar los datos de la investigación se realizó la siguiente secuencia: preparación de encuestas abiertas y cerradas, realización del pre test, selección de la muestra, recolección de datos y procesamiento parcial de los datos. Se analizaron respuestas de dos grupos, clasificados según el avance alcanzado en la currícula de la carrera. En particular, algunos resultados dan cuenta de la imposibilidad de analizar la función sin asignar valores particulares a los parámetros, y en general se les presentó dificultad al contextualizar esos parámetros. Otra situación conflictiva se presentó al momento de identificar cuál era el conjunto de datos que definían a una función lineal. En conclusión, se percibe que no interpretan en su totalidad las bases teóricas necesarias. En este contexto de la investigación emanan dificultades y hasta conflictos en el orden de los procesos cognitivos que interactúan en la adquisición de saberes y destrezas propios de la trayectoria académica de los estudiantes.

**Palabras claves:** Variables, transferencia de aprendizaje, función lineal, representación semiótica.

## 1 INTRODUCCIÓN

En el trayecto académico de los estudiantes de los dos primeros años de las carreras de grado que se dictan en la Facultad de Ciencias Económicas (FCE) de la Universidad Nacional de Misiones (UNaM) se presentan dificultades para interpretar las relaciones funcionales que existen entre las variables que intervienen al momento de analizar un fenómeno, como así también la imposibilidad de reconocer las distintas representaciones de una función frente a una situación problemática. Este conflicto se traslada a los cursos superiores, donde se evidencian inconvenientes en la descripción de las relaciones existentes entre las variables económicas.

La idea de la dependencia de una variable respecto de otra es una de las nociones básicas sobre las que se fundamentan las ciencias económicas; de allí la importancia

que adquiere el concepto de función en las distintas carreras de la FCE.

El tema “funciones” atraviesa la currícula de la carrera, tanto vertical como horizontalmente, iniciándose su tratamiento en las primeras y continuando con su análisis e interpretación en materias de los cursos.

El objetivo de esta investigación es conocer las representaciones mentales que un estudiante del ciclo común de las carreras de grado de la FCE de la UNaM tiene sobre las funciones lineales.

En este trabajo se abordan las funciones lineales como la representación teórica más simple que vincula diferentes magnitudes y sus variaciones. A través de ellas se busca que los estudiantes sean capaces de realizar la conversión entre los diferentes registros de representación semiótica - Gráfico, Tabular, Simbólico y Lenguaje coloquial- para modelizar comportamientos complejos de problemas económicos. Según afirma el economista británico del siglo XX Keynes “...el economista debe comprender los símbolos y expresarse en palabras corrientes” mencionado en Maya Muñoz (2010) [1].

Se aborda la aproximación al concepto de función lineal desde un enfoque cognitivista y se trabaja sobre las representaciones mentales de los objetos matemáticos y su aprendizaje significativo. Se analiza el acceso a un objeto matemático mediante distintas representaciones semióticas en distintos registros – algebraico, verbal, numérico y gráfico-considerándose esencial la abstracción y generalización del concepto de función.

Según Duval (1998) [2], las distintas representaciones semióticas de un objeto matemático son absolutamente necesarias para la apropiación de saberes. Un registro se caracteriza por signos como trazos, íconos, símbolos asociados a una red semántica. Y entendemos a un registro como un medio de representación capaz de representar una idea o concepto.

Para detectar la apropiación de saberes y la posibilidad de emplear distintos registros de representación semiótica en la enseñanza de las funciones lineales diseñó y se aplicó un test relacionado con los contenidos pertinentes. Para ello se analizan las respuestas provenientes de dos grupos de estudiantes seleccionados y categorizados según la asignatura a la que asisten: 1. Estudiantes de la asignatura Área Matemática del Ciclo de Nivelación, primera asignatura del área Matemática y 2. Estudiantes de la asignatura Álgebra correspondiente al primer año del Ciclo Común de las carreras de grado, segunda asignatura del área Matemática.

Asimismo se inicia la indagación acerca del proceso de transferencia como instrumento válido para la apropiación de los aprendizajes.

“La transferencia, se puede definir como la habilidad de aplicar lo que ha sido aprendido en un determinado contexto a nuevos contextos...” según Byrnes, mencionado en [3]... Si bien no hay acuerdos acerca de la naturaleza de la transferencia del conocimiento y cómo se produce, parece existir un consenso generalizado al señalar la instrumentación de analogías como el recurso más utilizado en el aprendizaje.

Siguiendo un enfoque cognitivista, se encomendó a un grupo de estudiantes la tarea de realizar la conversión entre los registros gráficos, algebraicos, tabulares, y en lenguaje corriente de diversas funciones lineales.

En ese marco se trabajó con los profesores del Área de Humanidades de la asignatura Problemática Filosófica de la FCE.

Los interrogantes que fundamentan este trabajo son:

El estudiante

- ¿Identifica las variables que participan en un determinado fenómeno económico?
- ¿Reconoce que una variable depende de otra u otras en una función?
- ¿Visualiza en una función lineal un modelo de simplificación y abstracción de la realidad?
- ¿Interpreta que en una función lineal el cambio que sufre la variable dependiente ante un cambio unitario de la variable independiente es una cantidad fija?
- ¿Reconoce en un gráfico o en una tabla la relación entre las variables presentadas?
- ¿Grafica una función lineal y la relaciona con los resultados ofrecidos por los modelos?
- ¿Utiliza los conceptos aprendidos sobre funciones lineales en la resolución de una situación problemática concreta?
- ¿Utiliza técnicas para el estudio de la teoría y desarrollo de la práctica?

Para analizar la construcción que hace el estudiante del objeto matemático “Funciones Lineales” se hace referencia a algunos elementos de estudio basados en un enfoque cognitivista. Según plantean Gómez, Sanjosé y Solaz-Portolés (2012) [3] “El enfoque cognitivista como programa de investigación en Didáctica de la Matemática tiene como principales elementos de análisis a las representaciones o esquemas mentales de objetos matemáticos, el aprendizaje significativo, entendido como proceso mediante el cual un nuevo contenido se integra a un esquema cognitivo ya existente en la mente del individuo, las motivaciones y actitudes entre otras de acuerdo a lo señalado por Font.”

El enfoque cognitivista tiene como uno de sus propósitos de estudio a las representaciones mentales que un estudiante puede tener sobre un objeto matemático. En ese marco se toman los aportes de Colombano, Formica y Camós (2012) [4]. donde plantea que sólo es posible acceder a objetos matemáticos mediante representaciones semióticas que se dan en distintos registros tales como verbal, algebraico, numérico y gráfico y que la conversión entre representaciones de un registro a otro juega un papel fundamental en el aprendizaje.

Partimos de la hipótesis que es posible identificar cuáles son las competencias que poseen aquellos estudiantes que demuestran un desempeño adecuado en las primeras asignaturas de las carreras, como así también detectar si las mismas no se encuentran desarrolladas en los estudiantes que no alcanzan el desempeño esperado. Estas competencias en matemática, son consideradas como habilidades que habrán de desarrollar los estudiantes ante la presencia de una situación problemática específica en función de un aprendizaje significativo, pudiendo justificar suficientemente los diferentes algoritmos que se siguieron hasta la solución pertinente.

Al mismo tiempo con el avance en las asignaturas del área matemática a lo largo de la carrera, se reconoce la necesidad del desarrollo de competencias facilitadoras de la formulación y comprensión de problemas y encontrar el modo de resolverlos, pudiendo predecir y estimar resultados de modo que, concluida la etapa de negociación de significados, logren expresar conclusiones mediante la utilización del vocabulario matemático específico, empleando términos, símbolos, relaciones y propiedades pertinentes.

## 2 MATERIALES Y MÉTODO

Las relaciones funcionales entre variables constituyen el instrumento explicativo por excelencia a la hora de analizar los fenómenos relativos a los problemas económicos. De ahí que esta investigación sea básica y del tipo descriptiva interpretativa.

Las funciones lineales, se abordan desde las primeras experiencias del ingresante a la FCE con las matemáticas. En este nivel se requiere que represente gráficamente a la función lineal, mediante los dos parámetros de toda recta, la ordenada al origen y la raíz.

En la asignatura correlativa, Álgebra, no sólo debe graficar correctamente sino también realizar el análisis de los distintos tipos de ecuaciones lineales, rectas que pasan por dos puntos, la utilización de éstas en la modelización de la oferta, de la demanda, del costo y del ingreso y la formulación de las ecuaciones de equilibrio respectivas. Estos contenidos se presentan nuevamente en Análisis Matemático, asignatura correlativa de Álgebra, y son necesarios para comprender el concepto de derivada y realizar la aplicación correspondiente en el análisis marginal de funciones económicas. En la asignatura Estadística I se requiere haber desarrollado competencias y habilidades relacionadas con este concepto e instrumentarlas en la formulación e interpretación de modelos de regresión lineal, entre otras aplicaciones. Esto sería un indicador que se está logrando transferencia de conocimiento.

Según Mochón, F. y Beker (1996) [5], los procedimientos empleados en economía para explicar los fenómenos a estudiar y formular las relaciones entre variables son: el literario (verbal), el matemático y el geométrico (representaciones gráficas), destacando que las funciones expresadas en forma gráfica y analítica permiten simbolizar comportamientos complejos de problemas económicos, apelando a la función lineal como la representación teórica más simple para expresar las relaciones entre variables en forma algebraica, tabular y gráfica.

Para realizar este trabajo de investigación se elaboró la siguiente secuencia.

- Preparación de encuestas abiertas y cerradas
- Realización del pre test.
- Selección de la muestra
- Recolección de datos
- Procesamiento parcial de los datos

La encuesta fue pre-testeada con un pequeño grupo de alumnos, luego de su puesta a punto, su versión definitiva se presentó a dos grupos de alumnos ingresantes a las carreras de grado de la FCE.

Las muestras fueron seleccionadas al azar, ya que se les invitó a participar voluntaria y anónimamente a toda la población de alumnos de ambas asignaturas analizadas, un poco más del 50% de la población accedieron a realizar la prueba.

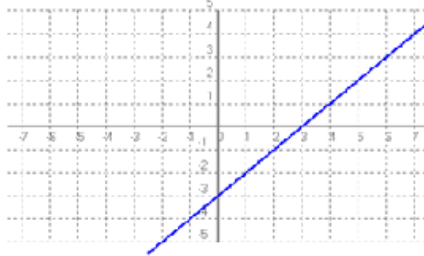
Para la recolección de datos se presentó un cuestionario basado en el utilizado por Peralta García (2002) [6] para evaluar el cambio entre las distintos tipos de representaciones analizadas. En esta instancia el instrumento de medición presentaba preguntas con respuestas del tipo abiertas y cerradas, los datos se relevaron en forma presencial y en papel. El alumno tenía la posibilidad de representar a las funciones gráficamente sobre ejes cartesianos definidos. En ese marco se les solicitó que contestaran un cuestionario que abordaba contenidos propios del nivel secundario (nivel educativo anterior), referidos a funciones lineales, el cual se presenta a

continuación.

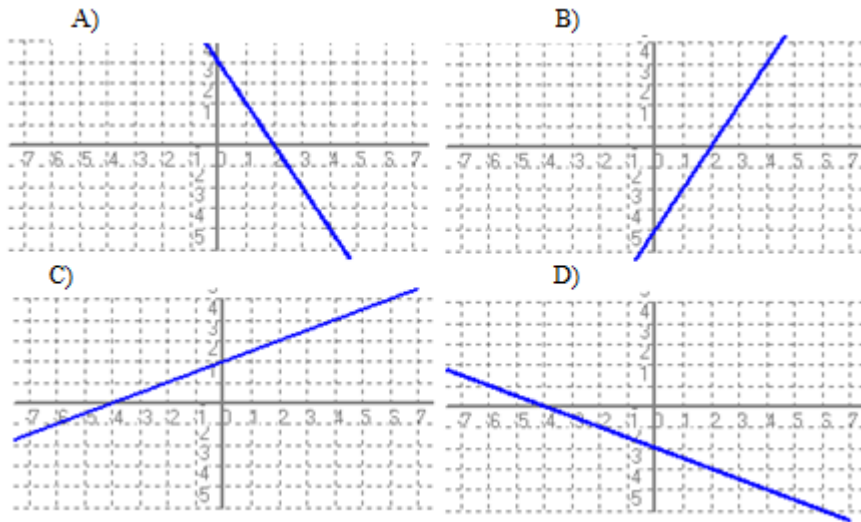
**CUESTIONARIO I**

1- Represente gráficamente una función cuya ecuación sea  $y = ax + b$ . Considere  $a < 0$  y  $b > 0$ , sin dar valores numéricos a  $a$  y  $b$ .

2- Escriba la ecuación de la función graficada:



3- Identifique cuál de las siguientes gráficas corresponde a la función  $y = -2x + 4$



4- Analice las tablas de valores y determine si alguna / as representan una función lineal.

Tabla 1

x	y
-2	8
0	0
2	8
6	36
7	49
8	64

Tabla 2

x	y
2	11
4	10
6	9
8	8
10	7
12	6

Tabla 3

x	y
-5	5
-3	3
0	0
1	1
4	4
6	6

5- Por cada \$100 que se invierten, un banco paga anualmente \$18. Si se depositan \$12.000, ¿Cuánto dinero se retirará al cabo de 5 años?

En una segunda instancia se encuestó a alumnos que habían aprobado la asignatura Ciclo de Nivelación Área Matemática y cursaban la correlativa inmediata Álgebra. En esta oportunidad se modificó el acceso al instrumento de medición. Se presentó online, a través de un link en el aula virtual de la asignatura

El cuestionario mencionado se presenta a continuación:

## CUESTIONARIO II

Su última materia del área matemática fue cursada en: \*

- 1er cuatr. 2015
- 2do cuatr. 2014
- 1er cuatr. 2014
- 2do cuatr. 2013
- 1er cuatr. 2013
- 2do cuatr. 2012
- 1er cuatr. 2012
- Otro:

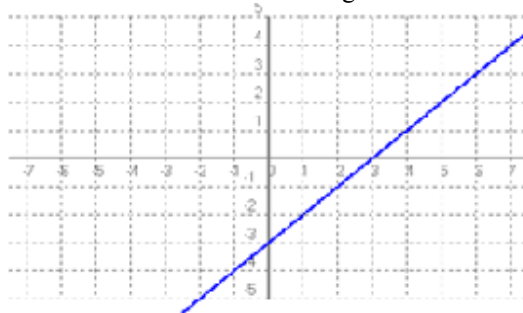
Materias del área matemáticas aprobadas y/o cursadas \*

- Ciclo de Nivelación Área Matemáticas
- Álgebra
- Análisis Matemático
- Estadística I
- Estadística II
- Matemáticas para Economistas

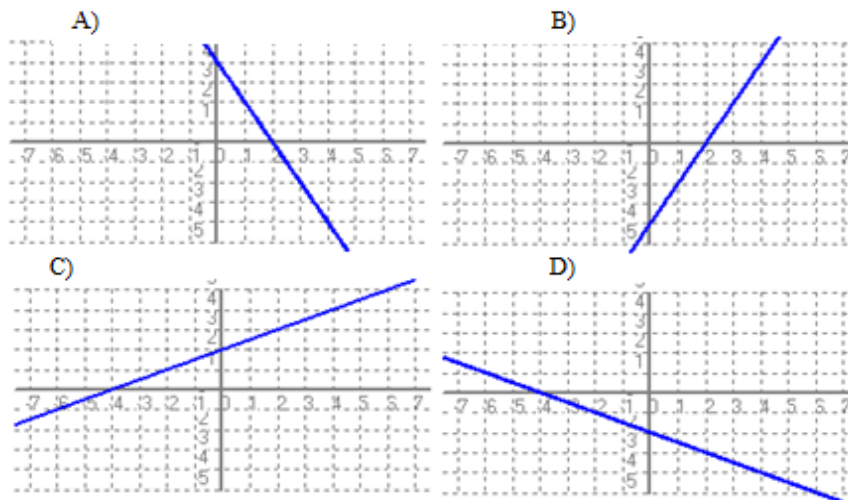
1) Indique cuales afirmaciones resultan correctas para la representación gráfica de una función cuya ecuación sea  $y = ax + b$ , considerando que  $a < 0$  y  $b > 0$ ,

- Corta al eje x a la derecha de 0
- Corta al eje y a la arriba de 0
- Corta al eje y a la debajo de 0
- La raíz Corta al eje x a la izquierda de 0
- Corta al es positiva
- la raíz es negativa

2) Escriba la ecuación de la función graficada:



3) Identifique cuál de las siguientes gráficas corresponde a la ecuación  $y = -2x + 4$



- A     
  B     
  C     
  D

4) Analice las siguientes tablas y determine cual/cuales representa/n una función lineal

Tabla 1

x	y
-2	8
0	0
2	8
6	36
7	49
8	64

Tabla 2

x	y
2	11
4	10
6	9
8	8
10	7
12	6

Tabla 3

x	y
-5	5
-3	3
0	0
1	1
4	4
6	6

- [A] Tabla 1      [B] Tabla 2      [C] Tabla 3      [D] Ninguna

5) Un comercio que vende sillas ofrece 30 unidades cuando el valor unitario en el mercado es de \$100 y 40 sillas si cada una se vende a \$110. Suponiendo que la oferta es lineal escriba la ecuación.

Algunas consignas precisaban de respuestas múltiples para llegar al resultado, buscando recuperar conocimientos previos y elaborar nuevos. Esta modalidad de acceso al cuestionario tuvo la desventaja de no permitir recuperar el gráfico realizado por el alumno.

### 3 RESULTADOS

En este apartado se presenta el análisis de las respuestas obtenidas clasificadas según el avance en las asignaturas correspondientes al área matemática que presentaban los individuos que participaron.

Un primer grupo corresponde a aquellos alumnos que no habían aprobado ninguna asignatura correspondiente al área matemática en el nivel universitario (Cuestionario I). Luego se presenta el análisis correspondiente a respuestas obtenidas de una muestra de alumnos que cursaron y aprobaron la primera asignatura del área matemática y cursaban la asignatura correlativa inmediata (Cuestionario II).

De las respuestas obtenidas de los alumnos pertenecientes al primer grupo, ingresantes a las distintas carreras de la FCE- se observa:

Análisis de la consigna 1: En la asignación de una gráfica para la ecuación correspondiente a una función lineal dada en forma general, los alumnos reconocen con mayor facilidad la ordenada al origen y la representan correctamente en el gráfico. En general confunden la pendiente con el valor de la raíz y en algunos casos lo especifican en el gráfico. Algunos alumnos asignan valores particulares a los parámetros  $a$  y  $b$  de la función presentada  $y = ax + b$ , equivocando la interpretación de la consigna.

Análisis de la consigna 2: En el caso donde debían analizar los valores de la pendiente y ordenada al origen a partir de la interpretación de una gráfica, se observa que solamente el 20% no responde a la pregunta. De los que respondieron, la mayoría establece correctamente el valor de la ordenada al origen, mientras que asignan incorrectamente el signo de la pendiente. Nuevamente se observan casos en los que asignan a la pendiente el valor de la raíz.

Análisis de la consigna 3: En este ítem los alumnos debían optar por uno de cuatro gráficos presentados, en los cuales se combinaban signos y valores de los parámetros “ $a$ ” y “ $b$ ” en diversas formas. Se observa que el 50% de los encuestados elige la opción correcta y el 15% no responde a la pregunta. El resto responde de manera incorrecta.

Análisis de la consigna 4: En el ítem donde los alumnos debían identificar una función lineal a partir de distintas tablas, más del 30% no responde a la consigna, mientras que aproximadamente el 50% la responde correctamente. No se observa en las encuestas los razonamientos que siguieron para tal elección, tampoco se solicitó que justificaran la respuesta.

Análisis de la consigna 5: Ante el conflicto presentado en forma de problema de aplicación a la economía se observa que el 75% de los encuestados realizó algún planteo para resolverlo. El 30% arribó a la respuesta correcta mediante cálculos de proporcionalidad.

De las respuestas obtenidas de los alumnos que aprobaron Área Matemática y cursan la asignatura Álgebra (Cuestionario II):

Análisis de la consigna 1: A partir del análisis que debían realizar dada la condición de los parámetros de una ecuación lineal, este grupo de alumnos pudo resolver correctamente las cuestiones referidas a establecer los puntos destacados de la gráfica. Menos del 5 % se equivocó al designar el signo de las raíces de la ecuación.

Análisis de la consigna 2: Más del 90% de los encuestados no pudo escribir correctamente la ecuación de la recta partiendo de la representación gráfica, ni establecer el signo de la pendiente y el valor de la ordenada al origen.

Análisis de la consigna 3: El 100% de los alumnos pudo identificar cuál de las gráficas presentadas correspondía a una función lineal.

Análisis de la consigna 4: No se evidenciaron inconvenientes al momento de identificar cual o cuales tablas correspondían a funciones lineales.



Análisis de la consigna 5: En el problema de aplicación a la economía en lo que se refiere a la representación de la función oferta, el 65% no respondió y menos del 20% lo hizo correctamente. Al momento de escribir la ecuación de la función oferta estos porcentajes se repitieron. En el ítem que evalúa la interpretación que hacen los alumnos del valor correspondiente a la ordenada al origen, el porcentaje correspondiente a “no responde” alcanzó el 80%.

#### 4 DISCUSIÓN

Al momento de ingreso a la Universidad y después de haber comenzado a transitar las asignaturas del Área matemática se espera que el alumno no sólo conozca y reconozca al objeto de estudio desde distintas perspectiva sino también poder usarlo en forma flexible, situación que no se presenta en las respuestas dadas y debe modificarse.

Es preciso generar una secuencia didáctica, en donde las actividades propuestas integren distintas representaciones (tabular, gráfica y algebraica), prestando especial atención en el concepto de pendiente y su paso de lo gráfico a lo algebraico. Trabajar desde lo gráfico a lo algebraico con actividades donde deban realizar transformaciones dentro de la misma representación y convertirlas a otras representaciones.

Debemos considerar a la hora de diseñar las secuencias didácticas que el uso de distintos graficadores disponibles on line aumenta las posibilidades del uso de las representaciones gráficas y sus implicaciones en la articulación entre representaciones.

Desde nuestro punto de vista, nos inclinamos por el uso reflexivo de la tecnología como una herramienta para la construcción de conceptos matemáticos que se reflejen en la resolución de problemas,

#### 5 CONCLUSIONES

Los estudios realizados nos permiten inferir que los estudiantes muestran dificultades en el aprendizaje conceptual de las funciones lineales y en la articulación y conversión de los distintos registros de representación semiótica.

Se observa que:

- La mayoría de los alumnos responde correctamente cuando se trabaja en un solo registro, con una clara preferencia por el registro algebraico
- Manifiestan la imposibilidad de coordinar dos o más registros, especialmente entre los registros gráfico y algebraico
- Presentan dificultades en resolución de situaciones problemática que implican el pasaje del lenguaje coloquial al gráfico o analítico.
- En el lenguaje simbólico ( $y = ax + b$ ) reconocen la ordenada al origen no así a la pendiente, a la que confunden con el valor correspondiente a la raíz. En la ecuación de la recta “ $a$ ” y “ $b$ ” son tomados como los puntos de corte a los ejes cartesianos. En esa discriminación el parámetro “ $b$ ” se corresponde con su valor, pero a la pendiente “ $a$ ” le asignan el valor correspondiente a la raíz, sobre el eje de las

abscisas.

- Presentan dificultades para convertir una representación en otra, lo que estaría dando cuenta de una conceptualización deficiente de las funciones lineales y la imposibilidad de aplicarlas a las Ciencias Económicas.
- . Se percibe que efectúan una aplicación mecánica de las fórmulas, sin interpretar en su totalidad las bases teóricas utilizadas.

Durante el proceso, en el contexto de la investigación emanan dificultades y hasta conflictos en el orden de los procesos cognitivos que interactúan en la adquisición de saberes y destrezas propios de la trayectoria académica de los estudiantes. Por ello este proyecto pretende ser un aporte en la producción y transferencia de conocimientos atendiendo la multiplicidad de campos disciplinares en su necesaria interacción y articulación a lo largo de la currícula.

## 6 REFERENCIAS

1. Maya Muñoz, G. (2010) Matemáticas básicas para economistas. Ensayos de Economía; Vol. 20, núm. 36, 225-228 0121-117x.
2. Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Investigaciones en Matemática Educativa II, (Editor F. Hitt). Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 173 a 201.
3. Gómez, C. B., Sanjosé, V., & Solaz-Portolés, J. J. (2012). Una revisión de los procesos de transferencia para el aprendizaje y enseñanza de las ciencias, Didáctica de las Ciencias Experimentales y Sociales 26, pp. 200.
4. Colombano, V., Formica, A., y Camós, C. (2012). Enfoque cognitivista. en M.Pouchulu, & M.Rodríguez, Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos. Villa María, Córdoba, Argentina: EDUVIN. pp. 115 a 142.
5. Mochón, F. y Beker, V. (1996) Economía. Principios y aplicaciones, España, Mc GrawHill.
6. Peralta García, J. (2002) Dificultades para articular los registros gráfico, algebraico y tabular: el caso de la función lineal. Memorias de la XII Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas, Universidad de Sonora. México, pp.166-173.