Universidad Nacional de Misiones. Facultad de Ingeniería. Maestría en Docencia Universitaria

Maestranda
Julieta Edith Kornel

Las representaciones sociales de los estudiantes acerca del conocimiento matemático

Tesis de Maestría presentada para obtener el título de "Magíster en Docencia Universitaria"

Director
Mgter. Pablo Daniel Vain

Este documento es resultado del financiamiento otorgado por el Estado Nacional, por lo tanto, queda sujeto al complimiento de la Ley N° 26.899.

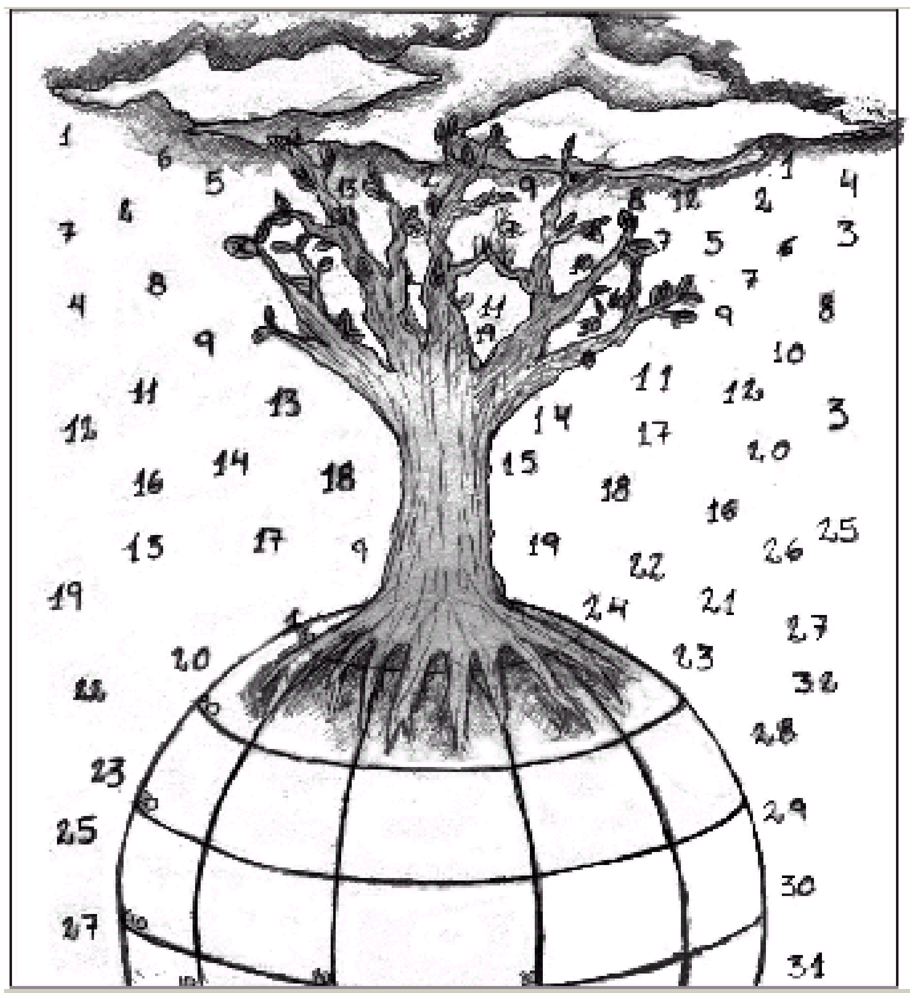
Oberá (Misiones), 2005

UNIVERSIDAD NACIONAL DE MISIONES

FACULTAD DE INGENIERÍA – OBERÁ (MNES)

MAESTRÍA EN DOCENCIA UNIVERSITARIA

"LAS REPRESENTACIONES SOCIALES DE LOS ESTUDIANTES ACERCA DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO"



KORNEL , JULIETA EDITH

-AÑO 2005-

“LAS REPRESENTACIONES SOCIALES DE LOS ESTUDIANTES ACERCA DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO”

KORNEL , JULIETA EDITH

“Tesis presentada a la Maestría en Docencia Universitaria, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Misiones, como requisito parcial para la obtención del grado académico de Magister en Docencia Universitaria”

-AÑO 2005-

UNIVERSIDAD NACIONAL DE MISIONES
FACULTAD DE INGENIERÍA – OBERÁ (MNES)
MAESTRÍA EN DOCENCIA UNIVERSITARIA

"LAS REPRESENTACIONES SOCIALES DE LOS ESTUDIANTES ACERCA DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO"

- **MAESTRANDO: KORNEL , JULIETA EDITH**
- **DIRECTOR: MGTER. VAIN, PABLO DANIEL**
- **AÑO: 2005**

AGRADECIMIENTOS

A la Universidad Nacional de Misiones, y en particular a la Facultad de Ingeniería (Oberá), por haber generado un espacio destinado a los docentes con deseos de aprender.

Al Magister Pablo Vain , Orientador de esta tesis, por sus valores humanos y formación profesional.

A Alejandra, Anahí, Bárbara, Camila, Federico, Larissa, Martín, Mercedes, estudiantes que participaron en esta investigación, por la responsabilidad y la energía positiva demostrada durante todo el trabajo.

A mi Madre, Yani y Carlos por acompañarme en este proyecto.

A mi Padre por su presencia a pesar de su ausencia

Y a Angelina, mi hija, por iluminar mi vida.

RESUMEN

Este trabajo de investigación afronta el estudio de las representaciones sociales de los alumnos acerca del conocimiento matemático. Se trata entonces de mostrar cómo es representado por los alumnos, del tercer ciclo de la Educación General Básica, el universo de la matemática.

El problema surge de un fenómeno educativo: las interpretaciones y comprensiones que generan los alumnos acerca del conocimiento matemático. Muchas de estas interpretaciones son ampliamente compartidas con otros actores de la comunidad educativa; y no sólo contienen aspectos conceptuales de la matemática sino también revelan aspectos afectivos de la relación de los alumnos con ella.

Lo dicho anteriormente da cuenta de un origen social del modelo según el cual los alumnos interpretan al conocimiento matemático. Por ello, siguiendo la línea teórica iniciada por Moscovici, y reubicando la problemática del aprendizaje escolar en un modelo psicosocial, aquí se estudian los significados e interpretaciones subjetivas de los alumnos acerca de dicho conocimiento.

Al trabajar con las representaciones sociales, se observa que éstas entretejen significados de la matemática que podrían influir en el aprendizaje escolar, lo cual realza la importancia real de este estudio.

ÍNDICE

Primera Parte

MARCO TÉORICO

Segunda Parte

METODOLOGÍA

Tercera Parte

ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN

Primera parte
MARCO TEÓRICO

Capítulo 1

Una Caracterización de las Matemáticas

1.1. Las matemática y su caracterización

1.1.1. La caracterización de las matemáticas en este contexto. Una tarea difícil

Caracterizar las matemáticas en el marco de las relaciones entre las representaciones sociales de los alumnos acerca del conocimiento matemático y su aprendizaje escolar no es tarea fácil.

Aquí las matemáticas forman parte de un entramado de relaciones entre la ciencia y su proceso de enseñanza y aprendizaje; proceso complejo en tanto expresa el entrecruzamiento de cuestiones de diversa índole: gnoseológica, epistemológica, psicológica, lingüístico, sociológica y sociolingüística. Esta contextualización de las matemáticas me lleva a abordar el conocimiento matemático desde el reconocimiento de la existencia de relaciones entre epistemología y enseñanza/aprendizaje.

"El reconocimiento de la existencia de las relaciones entre epistemología y enseñanza/aprendizaje forma parte de una especie de consenso, a veces tácito, a veces explícito, dentro de la comunidad científica que trabaja en el ámbito de la didáctica de la ciencias. Así, con cierta frecuencia aparecen en las revistas especializadas trabajos con títulos tales como Filosofía de la ciencia, ciencia y

educación científica (Hodson 1985); "Epistemología e historia en la enseñanza de la ciencia" (Rogers 1982); "Epistemología y educación científica" (Gawthoron et al 1978); "Filosofía de la ciencia y enseñanza de las ciencias" (Terhart 1988) o "La metodología científica y la enseñanza de las ciencias: una relaciones controvertidas2 (Gil Pérez 1986), por ejemplo.

Por otra parte se invoca, muy a menudo, la coherencia entre una perspectiva de aprendizaje científico y la moderna filosofía de la ciencia como un argumento de cualificación, como la apelación a un criterio de autoridad. La filosofía de la ciencia se convierte, entonces, en un tipo de conocimiento superior capaz de iluminar los procedimientos de enseñanza y las ideas sobre aprendizaje (Terhart 1989)" (López Rupérez, 1990)[1].

En consonancia con este planteamiento, en el campo de la educación matemática, Steiner (1987)[2] resume en seis tesis su postura respecto a la epistemología que debe regir la educación matemática. Según estas tesis epistemológicas, la filosofía de las matemáticas se proyecta en una forma de concebir la enseñanza, y a la vez, la forma de concebir la enseñanza lleva implícita una visión particular y filosófica de la matemática.

> **"Tesis 1: De manera general, toda concepción, toda epistemología, toda metodología y filosofía de las matemáticas contiene – a menudo de una manera implícita – ideas, orientaciones o gérmenes de teorías de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas" (p.8).**

> **"Tesis 2: La forma de concebir la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas – más específicamente: los fines y objetivos (taxonomías), los**

---

[1] LÓPEZ RUPÉREZ, F. (1990). EPISTEMOLOGÍA Y DIDÁCTICA DE LAS CIENCIAS. UN ANÁLISIS DE SEGUNDO ORDEN. Revista Enseñanza de las Ciencias. Vol.8. Nº1. Pág. 65-66. Edita: ICE de la Universitat Autónoma de Barcelona. Servei de Formació Permanent de la Universitat de Valéncia. España.

[2] STEINER (1987). Citado en FLORES MARTÍNEZ, P. (1998). CONCEPCIONES Y CREENCIAS DE LOS FUTUROS PROFESORES SOBRE LA MATEMÁTICA, SU ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE. Pág. 16. Editorial Comares. Granada.

programas, libros de texto, currícula, metodologías de enseñanza, principios didácticos, teorías de aprendizaje, diseños de investigación en educación matemática (modelos, paradigmas, teorías, etc.), e igualmente las concepciones de los profesores sobre las matemáticas y la enseñanza de las matemáticas – llevan con ellos o descansan sobre una visión particular epistemológica y filosófica de las matemáticas, aunque de manera implícita" (p.8).

Otro autor que desde la didáctica de las matemáticas propone una teoría de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en esta dirección es G. Brousseau (Brousseau , 1986;1989)[3]. Su teoría de situaciones didácticas se basa en un análisis previo de la actividad matemática, de la reflexión sobre el papel que juega en ella la organización axiomática y deductiva, así como los inconvenientes de usar tal organización como modelo de enseñanza.

Esta proclamada articulación entre epistemología y enseñanza/aprendizaje de las matemáticas es objeto de estudio de diversas disciplinas: filosofía de las matemáticas, sociología del conocimiento, psicología, etc. Por ello, abordar qué son las matemáticas desde este enfoque me demanda , por un lado, acercarme al contorno o a las fronteras con otras ramas de conocimiento, y me encuentro con terrenos cuya rotulación "matemáticas" ya no es tan indiscutible ni tan compartida. Y, por otro lado, reconocer las relaciones existentes entre epistemología de las matemáticas y su proceso de enseñanza y aprendizaje para considerar, en esta caracterización, aquellos aspectos epistemológicos que se proyectan en la enseñanza y aprendizaje de la disciplina.. Todo esto sugiere que, efectivamente, construir esta caracterización de las matemáticas en este marco es una tarea difícil

1.1.2. Aclaraciones sobre aspectos vinculados al desarrollo de la caracterización

Antes iniciar el desarrollo de la caracterización quiero hacer tres aclaraciones.

---

[3] BROUSSEAU, G . (1986; 1989) .Citado en FLORES MARTÍNEZ, P. (1998). Op. Cit. Pág. 66.

La primera es que en el trabajo hablo de matemática (en singular) o matemáticas (en plural); ambos términos son usados con el mismo significado.

La segunda es que el lector observará que algunos aspectos de las matemáticas están abordados con mayor profundidad que otros o temas importantes son omitidos. Esto no responde a la importancia u olvido del aspecto sino al objetivo que se persigue con esta producción.

Lo último es recordar que este trabajo no es en epistemología de la matemática, por ello quienes lo lean puede que no sean matemáticos o no tengan relación alguna con las matemáticas, para facilitar la lectura comprensiva algunos términos técnicos están definidos a pie de página.

1.2. Presentación de las matemáticas

1.2.1. Desde el marco que plantea el trabajo

Todo contextualización de las matemáticas pone en juego ciertos significados del conocimiento matemático. En este trabajo, las matemáticas están contextualizadas por las situaciones de enseñanza y aprendizaje que se plantean en la escuela, particularmente en el aula, lugar donde intencionalmente se concretan las nombradas situaciones. Así, por ejemplo[4], Federico expresa de esta manera *qué es la matemática*[5]:

> ***"La matemática es una ciencia. Es más compleja que cualquier otra materia porque hay que razonar y entender lo que se expresa con símbolos (números y signos). En esta materia se trabajan con muchos símbolos que se utilizan para resolver situaciones de la vida cotidiana. Muchas personas dicen que la***

[4] Utilizo el ejemplo como planteamiento del tema no como una interpretación surgida del trabajo de investigación.

[5] Federico es un alumno de 9º año de la escuela que fue escenario de la investigación. Las expresiones que transcribo corresponden a una actividad realizada con todo el curso que consistía en una composición literaria de género libre titulada ¿Qué es la matemática?

matemática las marea y que nunca serían buenos para la matemática. Para mi para entenderlas es cuestión de practica y dedicación a partir de las reglas y propiedades que nos enseñan los profesores. Particularmente me gusta matemática creo que es porque de chiquito me interesó la idea de sumar y restar mi plata. La matemática se divide en grupos donde hay más símbolos o ángulos como geometría."

Conjeturando algunos significados, podría decir que Federico caracteriza a la matemática como una *ciencia* que se distingue por: a) poseer una *estructura interna determinada* (un conjunto de reglas y propiedades), b) exhibir una *complejidad* asociada a *los objetos matemáticos , al lenguaje y* al *método que utiliza* c) ser *funciona*l (la matemática vinculada a la resolución de problemas) , d) *útil* (por tener la capacidad de satisfacer , en este caso, una necesidad personal), e) estar *conformado por distintas ramas* (él refiere a la aritmética y la geometría), y f) plantear *exigencias cognitivas* para conocerla.

Esta caracterización describe aspectos relacionados a qué tipo de conocimiento es el conocimiento matemático, qué son y qué existencia tienen los objetos matemáticos, qué es el lenguaje matemático, cómo es la estructura interna de las matemáticas, cuál es método matemático, qué relación tienen las matemáticas con la realidad y con las otras ciencias, cuántas matemáticas existen, qué tipo de tipo de vínculos afectivos conlleva las matemáticas , y sin duda varias otras cuestiones de diversa índole referidas a lo que es el conocimiento matemático. Muchas de las ideas en esta materia están enraizadas en las distintas visiones de la filosofía de la matemática. Entonces, para abordar los aspectos planteados, es necesario revisar las distintas corrientes filosóficas sobre el pensamiento matemático. De ellas me ocupo a continuación.

1.2.2. Desde las corrientes del pensamiento matemático

Las corrientes filosóficas sobre el pensamiento matemático presentan a las matemáticas desde una determinada visión por su distinción en el plano epistemológico. Algunas de ellas han ido calando y, en consecuencia, dejando sus huellas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la disciplina

Platonistas, formalistas, racionalistas, empiristas, intuicionistas y falibilistas plantean una epistemología particular de las matemáticas y se proyectan en el proceso de enseñanza/aprendizaje de la disciplina.

Un marco teórico en este sentido lo propone Gómez Chacón, I.M (2000)[6]; quien centra las señaladas concepciones de la matemática y las concepciones del proceso de enseñanza / aprendizaje en torno a tres elementos: la matemática, el alumno y el contexto en que accede al conocimiento[7].

De acuerdo con lo dispuesto, ahora continúo con el desarrollo de las distintas corrientes desde los siguientes autores: Babini, J. (1947)[8], Davis, P y Hersh, R. (1988)[9], Dou, A. (1970)[10] .

Los platónicos

En el siglo VI a. de J.C. aparecen en el mundo griego – Grecia, la costa de Asia Menor, la Magna Grecia al sur de Italia, y más tarde, en el siglo III a. de J.C., la gran ciudad de Alejandría – un grupo de hombres que no sólo se dedicaban a la ciencia por razones de tipo técnico, por ejemplo, resolviendo problemas de astronomía y de agrimensura con miras prácticas y concretas, sino que cultivaban la ciencia por sí misma y empiezan a construir un cuerpo de doctrina abstracta, con un contenido nada trivial y con un método que confiere a las verdades halladas unos caracteres de necesidad y universalidad.

Queda de esta forma instituida ese cuerpo de doctrina como un saber demostrativo en el cual las relaciones establecidas se justifican por procesos lógicos, apareciendo en un primer plano la exigencia de coherencia y de exactitud. Se inaugura un saber unitario y estricto, el saber racional por excelencia, la "mathesis" tal como la

[6] GOMEZ CHACÓN, I.M (2000). MATEMÁTICA EMOCIONAL. Pág.182. Editorial Narcea. Madrid.

[7] No profundizaré sobre este marco teórico porque aparece desarrollado en el capítulo 2.

[8] BABINI, J. (1947). ORIGEN Y SENTIDO DE LA CIENCIA. Espasacalpe. Buenos Aires

[9] DAVIS, P y HERSH, R. (1988). EXPERIENCIA MATEMÁTICA. Editorial Labor SA. Barcelona.

[10] DOU, A. (1970). FUNDAMENTOS DE LA MATEMÁTICA. Editorial Labor SA. Barcelona

llamaron los pitagóricos estableciendo también una división en ramas que perduró por muchos siglos: la matemática como estudio de la cantidad discreta ya sea en sí misma (aritmética) o en relación a otra (música) o la cantidad continua, de manera estática (geometría) o móvil (astronomía).

Entre los principales autores de ese cuerpo de doctrina menciono a Pitágoras y su escuela, Hipócrates de Quío, Eudoxo y Euclides; todos ellos familiarizados con la filosofía de Platón, es decir de opiniones platónicas.

Según los platónicos las matemáticas constituyen un cuerpo único de conocimientos, correcto y eterno, independientemente de que se puedan aplicar al mundo físico. Los objetos matemáticos son reales, y su existencia, un hecho objetivo independiente por completo del conocimiento que de ellos tengamos; son objetos definidos que poseen propiedades definidas, conocidas unas, desconocidas muchas otras. No son tales objetos, como es obvio, ni físicos ni materiales. Su existencia se halla fuera del espacio y del tiempo de la existencia física. Son inmutables; no fueron creados y no pueden cambiar ni desaparecer. Toda cuestión provista de significado que pueda hacerse al respecto de un objeto matemático tiene respuesta definida, seamos o no capaces de determinarla. En el platonismo, los matemáticos son científicos empiristas, como los geólogos. Nada pueden inventar, porque todo está ya presente. Todo cuanto pueden hacer es descubrir. El hombre al descubrirlas no desarrolla las matemáticas sino el conocimiento matemático que tiene de ellas.

Para Platón, la misión de la filosofía era descubrir el verdadero conocimiento que se oculta tras el velo de la opinión y la apariencia, del cambio y la ilusión del mundo temporal. Las matemáticas desempeñaban en esta tarea un papel central, pues el conocimiento matemático era el más destacado ejemplo de conocimiento independiente de la experiencia sensorial, el conocimiento de las verdades necesarias y eternas. Platón argumenta que: a)Conocemos verdades de la geometría[11] que no hemos aprendido ni por enseñanza ni por experiencia, b)este conocimiento es ejemplo de las verdades universales e invariables que, efectivamente, podemos

[11] Platón hace referencia a la geometría porque para los griegos matemáticas significaba geometría. Por ello, la filosofía de las matemáticas que podemos encontrar en Platón o Aristóteles es la filosofía de la geometría.

percibir y conocer y c)tiene que existir, en consecuencia, un reino de verdad invariable y absoluta, que es fuente y fundamento de nuestro conocimiento.

El quehacer matemático se plantea aquí como la búsqueda de relaciones en referencia a entidades ideales, simples, como son por ejemplo, las figuras geométricas. La exactitud y precisión, la necesidad de las conclusiones obtenidas, se deben precisamente a que no se trabaja sobre la complejidad y diversidad de lo real, sino sobre entidades abstractas, simplificadas, llevadas a su forma pura, al caso límite ideal.

Rigor deductivo y abstracción representativa e idealizante a la vez, dieron a la matemática griega otra de sus notas distintivas: su carácter estático. No es una matemática de procesos, sino de relaciones inmodificables, tal como corresponde a un orden ideal como el concebido por el platonismo.

A Platón le debemos el prestigio que alcanzó la matemática como forma de "episteme" que permite el acceso al saber más elevado; pero prestigia a la matemática solamente como la ciencia pura, sin apreciar sus posibles aplicaciones prácticas, imponiendo con esto un límite que marcó a toda la matemática griega.

Los platónicos[12] *presentan a las matemáticas desde una visión estática y como un conjunto de verdades eternas y universales que pueden ser descubiertas.*

Los racionalistas

Para Spinoza, Descartes y Leibniz , todos ellos filósofos racionalistas, la geometría desempeñó un papel semejante al que con Platón. Los racionalistas, como ya hiciera Platón, consideraban que la facultad de la razón es un rasgo innato de la mente humana, mediante la cual podemos percibir verdades a priori, independientemente de la observación.

La razón era la facultad que permitía al hombre conocer lo bueno y conocer lo divino. Era en las matemáticas donde mejor se apreciaba la existencia de esta facultad. Las matemáticas partían de verdades evidentes por sí mismas, y procedían a

[12] En el plano epistemológico, las posturas platónicas se identifican con epistemologías realistas, por la consideración de existencia y realidad de los objetos matemáticos.

descubrir verdades ocultas, merced a cuidadosos razonamientos. Las verdades de las geometrías trataban de formas ideales, cuya existencia le resultaba palmaria a la mente, poner su ser en tela de juicio hubiera sido signo de ignorancia o de locura.

Las matemáticas y la religión fueron los ejemplos más preeminentes de conocimiento alcanzado mediante la razón. El que fuera el conocimiento de la bondad en Platón, quedó transmutado, en el pensar de los racionalistas del Renacimiento, en el conocimiento de Dios.

Los racionalistas presentan a las matemáticas como creación de la razón, se considera el carácter innato de las ideas matemáticas y el método axiomático como el garante absoluto de la certeza de las proposiciones obtenidas mediante él.

5.5.2. Los empiristas

Los empiristas, a manos de Locke y Mill entre otros, fueron una de las corrientes responsables de hacer sucumbir a las epistemologías racionalistas. La sabiduría convencional de la ciencia pasó a ser credo de que la realidad fundamental es el universo material, y de que los únicos métodos legítimos de adquisición de conocimiento son el experimento y la observación.

Los empiristas sostenían que todo conocimiento, exceptuando el conocimiento matemático, es fruto de la observación. No solían ocuparse de explicar de dónde procede el conocimiento matemático. Con excepción de John Stuart Mill que propuso una teoría empirista del conocimiento matemático, que afirmaba que las matemáticas son una ciencia natural, no diferente de las demás. Por ejemplo, sabemos que 3+4=7, porque observamos que al reunir una pila de tres botones con una pila de cuatro botones se obtiene una pila de siete botones.

Los empiristas presentan a las matemáticas como una resultante idealizada de procesos de abstracción con base empírica.

Los formalistas

Según los formalistas no hay objetos matemáticos. La matemática consiste meramente en axiomas, definiciones y teoremas; con otras palabras: fórmulas. En una concepción extrema, lo único que hay son reglas mediante las cuales se pueden deducir fórmulas a partir de otras, pero las fórmulas no se refieren a nada; son nada más ristras de símbolos. Como es natural, el formalista sabe que las fórmulas matemáticas son aplicables a problemas físicos. Cuando una fórmula recibe interpretación física adquiere un significado, y puede ser, ora verdadera, ora falsa. Ahora, esta veracidad o falsedad tiene que ver con la interpretación física concreta. En tanto que fórmula puramente matemática no tiene significado, y tampoco tiene asignando valor de verdad.

Para el formalista contemporáneo, las matemáticas, desde la aritmética en adelante, no son más que un juego de deducciones lógicas. El formalista define las matemáticas como la ciencia de la demostración rigurosa. En otros campos una teoría puede ser defendible a causa de su plausibilidad o con el fundamento de la experiencia. Pero en matemáticas, dice el formalista, o se tiene demostración o no se tiene nada.

Toda demostración lógica ha de tener un punto de partida. Por consiguiente, el matemático ha de comenzar con ciertos términos no definidos, más algunos enunciados no demostrados referentes a estos términos, denominados “axiomas”. Por ejemplo, tenemos en geometría plana dos términos no definidos, “punto” y “recta”, y el axioma “Dados dos puntos distintos cualesquiera, existe exactamente una recta que los contiene”. El formalista hace notar que la importancia lógica de este enunciado no depende de ninguna imagen mental que podamos asociar con él.

Si damos a los términos punto y recta alguna interpretación, dichos axiomas pueden pasar a ser verdaderos o falsos. Es de presumir que existan algunas interpretaciones en las que sean verdaderos, pues de lo contrario carecería de sentido interesarse por ellos. No obstante, en lo que a las matemáticas concierne, la interpretación que se dé a los axiomas es irrelevante. Tan sólo nos interesan las deducciones lógicamente válidas que podamos obtener a partir de ellos.

Los resultados deducidos por este procedimiento se llaman teoremas. No se puede afirmar que un teorema sea verdadero , lo mismo que no se puede decir que los axiomas sean verdaderos. En tanto que enunciados de la matemática pura no son ni verdaderos ni falsos, pues aluden a términos no definidos. En matemáticas, todo cuanto se puede decir es que los teoremas son consecuencia lógica de los axiomas.

Así pues, los enunciados de los teoremas no tienen contenido en absoluto; no se refieren a nada. Por otra parte, según el formalista, están libres de toda posible duda o error, porque el proceso de deducción y demostración rigurosa no deja lagunas ni escapes.

En relación al formalismo quiero reseñar suscintamente dos aspectos de esta corriente dada su relevancia en el plano epistemológico y didáctico : el primero es su conexión con el positivismo lógico. Esta escuela filosófica abogaba por una ciencia unificada, codificada en un cálculo lógico formal y con un único método deductivo. Sostenía que la formalización[13] había de ser el objetivo a lograr en todas las ciencias y que la matemática es una rama de la lógica, sin duda extensa y con vida propia, pero cuyo método se identifica con el propio método de la lógica[14]. Como consecuencia, el positivismo lógico en la filosofía de la ciencia conduce a la formalización. Esto fortalece las ideas postuladas por el formalismo, transformando a esta corriente del pensamiento matemático en la filosofía dominante en el campo de las matemáticas y, consecuentemente, en el campo de la educación matemática.

El segundo aspecto refiere a la concepción formalista de las matemáticas. La formalización significó para las matemáticas no sólo una unificación de lenguaje, sino un principio de sistematización, ya que la unificación se logra por identificación de diferentes miembros de una clase por una propiedad común. Se plantea de este modo la idea de la matemática como ciencia de relaciones y se expone a una matemática que ya no refiere a entidades sino que el objeto de estudio son las

---

[13] La formalización es el proceso merced al cual las matemáticas son adaptadas al procesamiento mecánico. Un texto formalizado es una ristra de símbolos. Al manipularlos, sea por una máquina, sea por un matemático, se obtiene otra ristra similar. Las manipulaciones de símbolos pueden constituir, por sí mismas, materia prima para una teoría matemática.

[14] Se concibe así la matemática como una disciplina universal que regiría todas las formas de argumentación. Yo no voy a profundizar sobre las relaciones que existen entre la matemática y la lógica. La discusión al respecto constituye un aspecto muy importante para una teoría de fundamentos. Y esto no se corresponde con el fin que persigue este trabajo. Aquí me propongo caracterizar las matemáticas y, necesariamente, debo hacer referencia a la lógica, ya que ésta se ocupa de la estructura de las proposiciones y de las reglas del razonamiento deductivo que intervienen en el método matemático.

relaciones mismas. Con una progresiva abstracción y generalización[15], se logra la elaboración de sistemas a partir de una libre estipulación de postulados que definen su estructura, sin que haya referencia a determinadas entidades. Así, finalmente, **"(...) las estructuras matemáticas se convierten propiamente hablando, en los únicos objetos de la matemática"**(Bourbaki, 1962)[16], y éstas quedan caracterizadas como propiedades formales definidas axiomáticamente[17]. La idea de estructura fue el instrumento adecuado, permitiendo la unificación de diversas ramas y logrando teorías abarcadoras a partir de principios generales. De este modo, los formalistas plantean una concepción de las matemáticas basada en la noción de estructuras.

---

[15] La abstracción en matemáticas se utiliza con varios sentidos diferentes (aunque relacionados). Primer sentido: La abstracción en cuanto idealización. En la materialización de un objeto matemático (ej. Una recta mediante el trazo de una línea recta con lápiz y regla) existe una idea, una representación mental de línea recta ideal, que es una abstracción matemática. La idealización se produce como resultado final de un proceso de perfección. Segundo sentido: la abstracción en tanto extracción. Cuatro pájaros. Cuatro naranjas. El uso de la palabra "cuatro" implica la existencia de un proceso de abstracción, proceso en el cual ha sido aislada una característica común de los pájaros y de las naranjas. Aquí, en un contexto, son objetos. Allá, en otro contexto, números abstractos cuya existencia, según parece, es independiente de naranjas y pájaros.

-La generalización consiste en pasar del examen de un objeto al examen de un conjunto de objetos, entre los cuales figura el primero; o pasar del examen de un conjunto limitado de objetos al de un conjunto más extenso que incluya al conjunto limitado. Ahora bien, lo general recoge algunas características de lo particular; pero no puede recogerlas todas, pues la misma particularidad le confiere a cada objeto privilegios adicionales. Uno de los beneficios de la generalización es la consolidación de la información: diversos hechos íntimamente relacionados quedan pulcra y económicamente embalados en un solo paquete. La generalización amplía el escenario en el que acontecen los hechos, su efecto es la expansión del material existente.

[16] BOURBAKI, M. (1962). Citado en DE ZAN, M.E. (2000). INTEDISCIPLINARIEDAD Y EPISTEMOLOGÍA EN ORDEN A UN PROYECTO PEDAGÓGICO. La Matemática en su historia. Nexos. Programa Articulación Educación Media Universidad. Universidad Nacional de Entre Ríos. Impreso en Artes Gráficas Yusty. Entre Ríos.

[17] Los postulados de un sistema matemático expresan las relaciones entre los elementos y operaciones del sistema, y se constituyen en la base axiomática de la cual se derivan los teoremas. Los axiomas definen implícitamente las propiedades formales de las estructuras y operaciones primitivas, que por derivación dan lugar a estructuras abstractas más complejas.

Formalistas y platonistas se encuentran en bandos opuestos en lo tocante a las cuestiones de existencia y realidad; pero no sostienen querella alguna acerca de los principios de razonamiento permisibles en el ejercicio de las matemáticas.

Los formalistas presentan a las matemáticas como una creación de la razón , basada en la noción de estructura , con un método (axiomático-deductivo) y un lenguaje preciso (lenguaje formal)-

Los intuicionistas [18]

La corriente intuicionista postula que la matemática es el estudio de un cierto tipo –matemático – de construcciones mentales. Una definición perfecta, sin ambigüedad, de qué es lo que constituye una construcción mental como construcción matemática, no se puede dar. Pues la intuición de lo que es esa construcción matemática mental es irreductible a otros conceptos matemáticos. El trabajo del intuicionista consiste en desarrollar esa construcción mental, discutirla, suscitarla en otros, incluso estructurarla y formalizarla lo mejor posible, pero a sabiendas de que todo eso no es más que un proceso de aproximación. La construcción mental matemática es en cuanto tal primigenia; es decir, que no puede ser reducida o fundada en algo matemático anterior, que sea más radical o primitivo.

Uno de los exponentes que expresa las ideas de esta corriente es Kant. La obra de Kant trató de unificar las dos tradiciones contrapuestas de racionalismo y empirismo. La metafísica kantiana es continuación de la herencia platónica, de la búsqueda de certidumbre e intemporalidad en el conocimiento matemático.

Kant trazó una tajante distinción entre los nóumenos, las cosas en sí mismas, que jamás podremos conocer, y los fenómenos, las apariencias, que son cuanto nuestros sentidos pueden decirnos de ellas. Su preocupación principal era el conocimiento *a priori* , un conocimiento intemporal e independiente de la experiencia. Distinguía dos tipos de conocimiento apriorístico: lo "*analítico a priori*" , es lo que sabemos verdadero por análisis lógico, por el significado mismo de los términos que están siendo utilizados , y lo *"sintético a priori"* , un conocimiento a priori de otra

[18] También conocida como constructivismo

naturaleza, que va más allá de las trivialidades lógicas. Nuestras intuiciones acerca del tiempo y del espacio son, según Kant, conocimientos de esa clase. Kant explica su naturaleza apriorística afirmando que estas intuiciones son propiedades inherentes de la mente humana. Las verdades de la geometría y la aritmética nos son impuestas por el funcionamiento mismo de nuestras mentes, lo cual explica por qué son ciertas para todos y cada uno e independiente de la experiencia.

Los intuicionistas presentan a las matemática como un tipo de conocimiento de carácter no empírico, con objetos que son creaciones libres de la mente y con significado y existencia real únicamente aquéllos que puede ser " construidos" por procedimientos finitísticos a partir de ciertos objetos primitivos..

La tentativa por establecer una base para la indubitabilidad matemática ha sido la pretensión que caracteriza a todas estas corrientes filosóficas. La obra de Imre Lakatos ofrece una alternativa diferente en el campo de la filosofía de la matemática, dando lugar a la creación de una nueva corriente sobre el pensamiento matemático y, en consecuencia, a una visión epistemológica particular denominada epistemologías falibilistas.

Los falibilistas

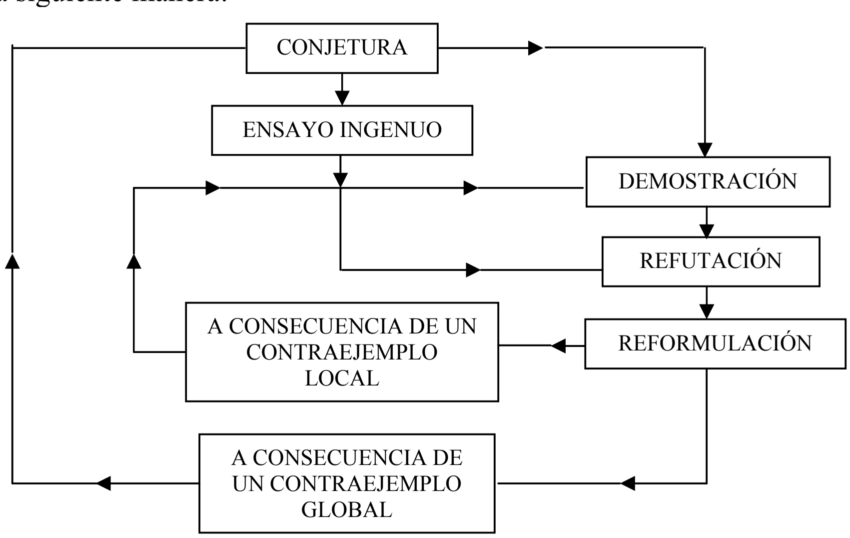
Lakatos, filósofo matemáticamente culto, era seguidor de la teoría de Popper sobre el conocimiento científico. Pooper sostenía que las teorías científicas no son inductivamente inferidas a partir de hechos; son más bien inventadas con el carácter de hipótesis, especulaciones, e incluso conjeturas y son despúés sometidas a ensayos experimentales mediante los cuales tratan los críticos de refutarlas. Una teoría solamente tiene derecho a ser considerar científica, decía Popper, cuando puede, al menos en principio, ser puesta a prueba y expuesta a quedar refutada. Cuando una teoría sobrevive a tales pruebas puede ser considerada provisionalmente establecida; pero nunca *demostrada.* Es posible que una teoría científica sea objetivamente verdadera, pero nosotros jamás podremos tener certeza de que lo es.

En su obra titulada *Proofs and Refutatión*, Lakatos intenta mostrar que sí es posible una filosofía matemática acorde con las ideas de Popper, presentando una imagen distinta, el retrato de una matemática viva y en crecimiento y no fosilizada en axiomas formales. En *Proofs and* presenta el desarrollo de una idea matemática a partir de un problema y una conjetura, al tiempo que ante nuestros ojos va adquiriendo forma una teoría, en el calor del debate y el desacuerdo, y la duda va cediendo el paso a la certeza, y la certeza, a la duda renovada.

Para Lakatos, las matemáticas, lo mismo que las ciencias naturales, son falibles y no indubitables; que también crecen gracias a la crítica y a la corrección de teorías que nunca están enteramente libres de ambigüedades y en las que siempre cabe la posibilidad de error o de omisión. Se parte de un problema o una conjetura, y se buscan simultáneamente demostraciones y contraejemplos. Las nuevas demostraciones explican los contraejemplos viejos, los contraejemplos nuevos minan y socavan las demostraciones anteriores. En este contexto de matemática informal – matemática en proceso de crecimiento y descubrimiento - “demostración” no significa un procedimiento mecánico que lleve a la verdad desde la hipótesis a las conclusiones en irrompible encadenamiento. Significa más bien explicaciones, justificaciones, elaboraciones que hacen la conjetura más plausible, más convincente, al tiempo que va adquiriendo mayor detalle y precisión bajo la presión de los contraejemplos.

Cada paso de la demostración es por sí mismo materia criticable, crítica que puede se mero esceptismo o puede consistir en la producción de un contraejemplo a un razonamiento particular. Lakatos llama “contraejemplos globales” a los ejemplos que ponen tela de juicio pasos concretos del razonamiento; los ejemplos que contradicen no el razonamiento, sino sus conclusiones, son contraejemplos globales.

El “descubrimiento” matemático que plantea Lakatos es un proceso que se puede resumir de la siguiente manera:



En este proceso los conceptos matemáticos no permanecen inmutables una vez creados. Los conceptos cambian[19], impelidos por la tensión que les produce el estar involucrados en pruebas y refutaciones. Es importante subrayar que el resultado del proceso de tensión entre conceptos, teoremas y pruebas no es la delimitación del verdadero concepto, sino la creación de nuevos conceptos.

La corriente falibilistas presenta a las matemáticas como una ciencia que se desarrolla a través de un proceso de crítica y sucesivo refinamiento de las teorías y del avance de teorías nuevas que compiten entre sí. Las matemáticas son falibles, correctibles, producto de la actividad humana y, en consecuencia, provistas de significado.

Con los falibilistas culmino la descripción de las corrientes del pensamiento matemático; quedando así desarrolladas las perspectivas de las matemáticas de cada una de ellas.

A estas presentaciones subyacen, explícita o implícitamente, ideas en relación al conocimiento matemático que caracterizan a las matemáticas ; paso ahora a relatar algunas de ellas.

1.3. La naturaleza de las matemáticas

En la naturaleza de las matemáticas, y desde el punto de vista ontológico, las preguntas que se suscitan son, entre otras: ¿qué son los objetos matemáticos? ¿qué existencia tienen los objetos matemáticos? ¿qué relación tienen los objetos matemáticos con la naturaleza? [20].

1.3.1.Su existencia

[19] Esto no quiere decir que las modificaciones de un concepto indiquen que el concepto original era erróneo y que tengamos que ver la historia de los conceptos matemático como un avance hacia la verdad.

[20] FLORES MARTÍNEZ (1998). Op. Cit. Pág 42.

Siguiendo a Klein (1985)[21] , en relación a la naturaleza del conocimiento matemático, se establecen dos posturas extremas:

1. Las matemáticas constituyen un *cuerpo único de conocimientos*, correcto y eterno, independientemente de que se puedan aplicar al mundo físico. Las verdades matemáticas son, entonces, *descubiertas*, no inventadas. El hombre al descubrirlas no desarrolla las matemáticas sino el conocimiento que tiene de ellas. Este corpus matemático está situado, para algunos matemáticos, en un mundo fuera del hombre, mientras que otros matemáticos lo consideran incrustado en la razón humana.
2. Las matemáticas son por entero un *producto del pensamiento humano*. La veracidad de los asertos matemáticos, al no existir un corpus externo de referencia, debe estar en la razón.

Desde el enfoque de Klein estaríamos en dos posiciones extremas en lo que hace a las matemáticas y su modo existencia:

Las matemáticas *se descubren*/ las matemáticas *son un creación humana.*

En el primer extremo se encuentra la postura platónica. En el extremo opuesto se encontraría la postura que relativiza el conocimiento, al considerarlo generado por la mente humana **falible. Klein sitúa aquí a los intuicionistas y formalistas.**

Cañón (1993)[22] plantea que el conocimiento es simultáneamente descubrimiento y creación; es creación ya que los conceptos solo existen cuando se formulan; es descubrimiento en base a que esa creación no puede ser arbitraria, sino que obedece a una cierta necesidad que está en función del grado de desarrollo adquirido hasta el momento en que se produce.

---

[21] KLEIN (1985) Citado en FLORES MARTÍNEZ, P. (1998). Op. Cit. Pág 42.

[22] CAÑÓN LOYES, C. (1993) . LA MATEMÁTICA: CREACIÓN O DESCUBRIMIENTO. Pág 354-458. Universidad Pontificia de Comillas. Madrid.

1.3.2.Su mundo

Para Davis y Hersh. (1988)[23] se tienen dos informaciones claras relativas de la naturaleza de las matemáticas.

1. El hecho Nº 1 *es que las matemáticas son invención humana. Los matemáticos lo saben bien, pues son ellos quienes las inventan*.
2. El hecho Nº2 es *que estas cosas que traemos al mundo, estas figuras geométricas y estas funciones aritméticas y estos operadores algebraicos nos resultan misteriosos a nosotros, sus creadores. Tienen propiedades que descubrimos tan sólo a costa de gran esfuerzo; tienen propiedades que nos esforzamos vanamente en descubrir; tienen todavía otras propiedades que ni siquiera sospechamos*. Toda la actividad de la resolución de problemas en matemáticas es demostración del hecho Nº2.

El formalismo está construido a partir del hecho Nº1. Reconoce que las matemáticas son creación de la mente humana. Los objetos matemáticos son imaginarios.

El platonismo se funda en el hecho Nº2. El platónico reconoce que las matemáticas tienen sus propias leyes, a las que ha de obedecer. En cuanto construyamos un triángulo rectángulo de catetos a y b e hipotenusa h, tendremos $a^2 + b^2= h^2$ tanto si nos gusta como si no. Ignoro si el número 1 375 803 627 es primo o no, pero sé que no depende de mi el decidir que lo sea; es cosa ya decidida tan pronto lo escribo.

Enfocado desde el platonismo el hecho Nº1 es inaceptable. Dado que los objetos matemáticos son lo que son, desafiando a nuestra ignorancia y a nuestros prejuicios, tienen que ser reales en un sentido independiente de las mentes humanas. Existen de alguna forma que no podemos explicar o comprender; existen fuera de este mundo material, fuera de la mente humana.

---

[23] DAVIS, P y HERSH, R. (1988). Op. Cit. Pág.290-292.

Davis, P. J. y Hersh R. (1988) consideran que las categorías filosóficas deberían ser ampliadas para no producir este truncamiento en las matemáticas. En este sentido, y tomando como base la experiencia matemática, exponen sus posturas relativa a la naturaleza de las matemáticas.

Para su formulación, los autores parten de dos hechos: "*Las matemáticas son creación nuestra; tratan de ideas que tenemos en nuestras mentes"* (hecho Nº1) y "*Las matemáticas son una realidad objetiva, en el sentido de que los objetos matemáticos tienen propiedades definidas, que podemos o no ser capaces de descubrir"*(hecho Nº2). Luego, compatibilizan los hechos y desarrollan su visión en relación a la naturaleza de las matemáticas : "*las matemáticas son una realidad objetiva que no es ni subjetiva ni física. Es una realidad ideal (es decir, no física) que es objetiva (externa a la consciencia de toda persona). De hecho, el ejemplo de las matemáticas es la prueba más fuerte, más convincente de la existencia de tal realidad" (Pág 291)*.

El mundo en el que residen las matemáticas de Davis, P. J. y Hersh R es el Mundo 3 de Karl Popper[24]. Es el mundo en que residen la consciencia social, las tradiciones, el lenguaje, las teorías, las instituciones sociales, toda la cultura no material de la humanidad. Su existencia es inseparable de la consciencia individual de los miembros de la sociedad. Pero son de naturaleza diferente a los fenómenos de la consciencia individual.

Para estos autores, las matemáticas no son el estudio de una realidad preexistente, ideal e intempórea. Ni tampoco una especie de juego de ajedrez con símbolos y fórmulas preestablecidas. Es más bien la parte de los estudios humanos que es capaz de alcanzar un consenso cuasi-científico, capaz de establecer resultados *reproducibles*. Las matemáticas sí tienen una materia, y sus enunciados tienen significado. Sin embargo, tal significación ha de buscarse en la comprensión compartida de seres humanos, y no en una realidad externa y extrahumana. En este respecto, las matemáticas se asemejan a una ideología, a una religión, a una forma artística; tratan de significados humanos, y solamente son comprensibles en el

---

[24] Popper ha introducido los términos Mundo1, Mundo 2 y Mundo 3 para distinguir los tres principales niveles de la distinta realidad.

contexto de una cultura. Con otras palabras, las matemáticas son una disciplina humanística. Son una de las humanidades. La característica peculiar de las matemáticas, la que las distingue de las restantes humanidades es cualidad científica. Sus conclusiones se nos imponen, al igual que las conclusiones de la ciencia natural. No son meros productos de opinión, y no están sujetas a disensión permanente, como las ideas de las críticas literarias.

Es evidente que Davis, P. J. y Hersh R. no conciben a las matemáticas desde postura platónica o formalista. Ellos muestran unas matemáticas desde las ideas de Lakatos y Popper., destacando, entre otras, las cualidades de:

Ser de las humanidades, por su carácter artístico , provistas de significados y comprensibles en el contexto de una cultura

Esta perspectiva está emparentada con la que considera a las matemáticas como un fenómeno cultural (Bishop, 1988)[25] ; y representa una alternativa a la concepción tradicional de la matemática como un conocimiento libre de valores culturales y desligado de la cultura; que proporciona proposiciones universalmente verdaderas; y que cualquier ser racional, de cualquier cultura y en cualquier momento histórico puede reconocerlas como verdaderas y comprender su significado.

1.3.3. Su razón de ser

Chemello, G. (1992)[26] , como la comunidad matemática en general, refiere a los problemas como uno de los componentes esenciales de la naturaleza del

[25] BISHOP, A. (1988). ASPECTOS SOCIALES Y CULTURALES DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA. Revista Enseñanza de las Ciencias. Vol.6 Nº. Pág. 121-125. Edita: ICE de la Universitat Autónoma de Barcelona. Servei de Formació Permanent de la Universitat de Valéncia. España.

[26] Esta referencia aparece en el modelo epistemológico de la matemática propuesto por la autora en CHEMELLO, G. (1992). LA MATEMÁTICA Y SU DIDÁCTICA. NUEVOS Y ANTIGUOS DEBATES En didácticas especiales. Estado de debate. Pág.54. Editorial Aique.

conocimiento matemático, identificándolos así como el tipo de cuestiones que le otorgan a la matemática su razón de ser.

"...La historia de la disciplina muestra claramente cómo estos conocimientos están en evolución continua, y que en dicha evolución, que no es lineal, el rol de motor lo desempeñan los problemas de distinto tipo" (Chemello, 1992).

En esta misma línea, se encuentra Félix Klein [27] quien afirma que la matemática se desarrolla *resolviendo problemas* ya establecidos con métodos nuevos; ello provoca un doble efecto: se comprenden mejor las viejas cuestiones y se originan nuevos. Se produce una ampliación del horizonte matemático – progreso en amplitud- por la adopción de nuevos puntos de vista y también una profundización del mismo – progreso en profundidad – por la adopción de nuevos puntos de vista que han debido adoptarse para resolver problemas.

Algunos de estos problemas han sido de tipo práctico, surgidos de la experiencia[28]. Así, por ejemplo, muchos aspectos de la geometría, responden, en sus orígenes, a la necesidad de resolver problemas de la agricultura – como en la antigua Grecia la necesidad de poder prever los cambios para regular siembras y cosechas, exigieron mediciones y el estudio minucioso de las posiciones relativas de los astros y sus trayectorias – o arquitectura, como los cálculos necesarios para construir templos y pirámides. Los sistemas de numeración surgieron de la necesidad de contabilizar y registrar la cantidad de productos de la misma especie, y efectuar más rápidamente los cálculos; y la estadística se originó en la elaboración de los primeros censos demográficos. Actualmente, el uso extendido de computadoras plantea nuevos problemas que son motor de las investigaciones en cálculo numérico.

Otro factor de desarrollo es la resolución de problemas que se plantean en la interrelación con otras disciplinas. El cálculo diferencial e integral se desarrolló en

[27] KLEIN, F. Citado en CHEMELLO, G. Op. Cit. Pág.54

[28] Estoy haciendo referencia a la etapa empírica de la matemática. En la que de manera desordenada y espontánea surge en diversas épocas y lugares un saber de tipo práctico, un conjunto de reglas y procedimientos que facilitan el cálculo y las mediciones para la vida cotidiana y que se han establecido más bien en base a la experiencia que sobre bases estrictamente racionales; este conjunto de conocimientos constituye el germen de lo que más adelante será la ciencia matemática.

los siglos XVII y XVIII en relación con problemas de la Física. Jean Dieudonné describe este proceso de creación de un matemático que recibe un problema de un colega físico: "...primero trata de formularlo de una manera que le resulte comprensible, después cuando lo ha comprendido y le ha dado una forma puramente matemática, procura resolverlo, lo cual plantea montones de cuestiones que acaban de fructiferar y proporcionar, a menudo, resultados muy notables. Pero la física es fuente de inspiración no sólo por sus métodos. En efecto, si el físico supone que el fenómeno debe satisfacer principios de máximo y mínimo: entonces el matemático busca una función que dé un mínimo, y a veces este procedimiento tiene éxito.

Estos ejemplos muestran que están equivocados quienes plantean - los formalistas - que toda la matemática se refiere a conceptos vacíos de significados, que no tienen relación con el mundo real – los platónicos - y sus fenómenos -

El tercer tipo de problemas que ha sido también factor de desarrollo de la matemática son aquéllos puramente matemáticos, cuyo origen es la curiosidad, el ejercicio de la sagacidad o el deseo de enfrentarse al desafío de resolver enigmas. Este interés de razonar lógicamente con independencia de la aplicación al mundo real de los resultados obtenidos dio origen en muchas oportunidades a nuevas teorías matemáticas que posteriormente encontraron campos de aplicación.

Esta ubicación de los problemas - como razón de ser - identifica a la matemática como un tipo de *conocimiento funcional* - vincula el conocimiento matemático con situaciones prácticas (extramatemáticas) o puramente matemática (intramatemáticas) - cuyo origen son *los problemas* que surgen de las necesidades matemáticas individuales y sociales. Desde este punto de vista, *"hacer matemática" es "resolver problemas"*; postura que concibe a los problemas como un elemento que engloba a los demás elementos constitutivos del conocimiento matemático.

La funcionalidad de las matemáticas y su identificación con la resolución de problemas son las dos características de las matemáticas que, a mi entender, gozan de mayor popularidad.

No se puede desconocer que, en cualquier momento histórico, las ideas matemáticas que se han desarrollado han pretendido responder a los problemas concretos de cada época. Problemas que en la mayoría de los casos provienen de actividades tan dispares como el comercio, la agricultura, la astronomía, la navegación, la guerra... y en épocas más recientes la Física, la Medicina, la Biología, la Economía, la Sociología, la Ingeniería...

Pero, *¿cómo esta ciencia formal, abstracta puede ser el instrumento que permite en tantas ciencias, desentrañar y expresar lo real*?. La respuesta me traslada a tratar dos aspectos de las matemática: su relación con la realidad y la utilidad del conocimiento matemático. El tratamiento será en el orden enunciado.

1.4. Las matemáticas y la realidad

1.4.1.La relación matemáticas - realidad: posturas filosóficas

La vinculación de matemáticas y realidad es algo que ha preocupado frecuentemente a filósofos y científicos. Espontáneamente aceptamos esta vinculación y la utilidad que esta ciencia ha prestado en la vida práctica y en la ciencia, corroboran esta idea; la cuestión se hace sumamente problemática sin embargo, cuando tenemos que dar cuenta de esta correspondencia, cuando tenemos que proporcionar las razones que explican cómo esta ciencia formal, abstracta pueda ser el instrumento que permite en tantas ciencias, desentrañar y expresar lo real.

El regreso a los orígenes de esta ciencia puede darnos el argumento que explican esta cuestión. Así como los hechos lógicos y lingüísticos – sostiene Babini- los hechos matemáticos impregnan la atmósfera en la cual vive el hombre, ocultándose, sin que el hombre lo advierta, tras de innumerables sucesos de la vida diaria: el contar, medir, calcular, operados en los actos cotidianos, sin que aparezcan en un primer plano o se haga referencia a ellos como operatividad pura. Sin ser conscientes de ello, los hombres realizan operaciones y resuelven problemas que implican procesos matemáticos. **“En su vida de relación, el hombre sin advertirlo, cuenta constantemente y todos los pueblos, primitivos o no, han incorporado a su léxico común, aunque a veces de manera rudimentaria, palabras para designar los números más pequeños y las fracciones más simples. El contar, como el hablar y**

el pensar, constituye un proceso tan fuertemente arraigado en el hombre que resulta inimaginable que alguna vez haya sido inventado o descubierto"[29]. Es al hacer explícitos estos procesos cuando comienza a gestarse la matemática; el hombre descubre estos hechos inmersos en la práctica cotidiana **"los limpia y descarna de todo contacto extramatemático, y los cristaliza en una estructura especial construyendo con ellos una ciencia"**[30]**.** En otros términos, constituye el objeto matemático.

Este argumento me sugiere dos preguntas: ¿será que la realidad tiene una estructura matemática? o ¿ es que nuestro pensamiento estructura los objetos, matematizando?. Las respuestas a ellas suponen posturas filosóficas matemáticas distintas. Esto se debe a que **"la forma en que se concibe la relación entre los objetos matemáticos y la naturaleza está íntimamente ligada a la consideración de los objetos matemáticos"** (Flores Martínez, 1998)[31]**.**

Cañon (1993)[32] identifica dos posturas extremas. Una de las posturas es que el universo, en sus manifestaciones, se expresa espontáneamente en lenguaje matemático. De acuerdo con esta concepción, las matemáticas han evolucionado justamente como trasunto simbólico del universo. No es maravilla, así pues, que las matemáticas funcionen; tal es precisamente la razón misma de su existencia. Es el universo quien ha impuesto las matemáticas a la humanidad.

Esta postura concuerda con la concepción platónica. El platonismo matemático postula que las matemáticas existen con independencia de los seres humanos; se encuentran en algún lugar exterior, flotando eternamente alrededor de nosotros en un mundo de ideas platónicas que todo invaden y penetran. Las matemáticas son universales.

Pero hay otra concepción. La que considera que las matemáticas resulta de idealizar los procesos de abstracción que se han realizado con objetos y problemas relacionados con la naturaleza y la experiencia. **"La matemática surge de esta interacción continua entre la mente y la realidad. La realidad es como una**

---

[29] BABINI, J. Op. Cit. Pág.43

[30] BABINI, J. Op.Cit. Pág.45

[31] FLORES MARTÍNEZ, P. (1998). Op. Cit. Pág. 46.

[32] CAÑON LOYES, C. (1993). Op. Cit. Pág. 405

filigrama de estructura extraordinariamente fina que actúa como un estímulo necesario para que, en la interacción mente – realidad, surja el edificio conceptual de la matemática. La mente se acerca a ella y se adapta a esa realidad, en un intento que parece suficiente para que los problemas simples con los que se ocupa al comienzo, mediante los que esquemas crea. Tales esquemas no tienen porqué coincidir enteramente con la realidad. son aproximaciones a ella, pero nunca acabarán por abarcarla toda" (Guzmán, 1995)[33]. Esto supone que la naturaleza adquiere significado en cuanto la mente humana interactúa con ella, de manera que el conocimiento matemático se constituye en una sucesión cambiante de modelos intermediarios entre la naturaleza percibida y el individuo

Davis, P. J. y Hersh R. (1988)[34] se diferencian de Cañon (1993) en la segunda postura. Según estos autores la segunda concepción sostiene que las aplicaciones de la matemática a la realidad se producen por decreto. Se crean multitud de estructuras y sistemas matemáticos. Tanta es la complacencia que sienten los matemáticos por lo que hacen o crean, que deliberadamente se esfuerzan por lograr que las diversas facetas físicas y sociales del universo se amolden lo más posible a ello. La segunda idea es que las teorías de la matemática aplicada son meramente "modelos matemáticos". La utilidad de un modelo reside precisamente en el éxito que alcance en remedar o predecir la conducta del universo.

Esta última postura ha venido haciéndose más y más popular. Lo que en generaciones precedentes hubiera sido enseñado como "teoría de tal y tal" hoy tiene la mera denominación de "modelo de tal y tal" . Así es como en la actualidad se considera que un aspecto esencial de la matemática como práctica consiste en construir un modelo matemático de la realidad que se quiere estudiar, trabajar con dicho modelo e interpretar los resultados obtenidos en este trabajo para contestar a las cuestiones planteadas.

---

[33] GUZMÁN, M. (1995) citado por GÓMEZ CHACÓN, I.M. Op.Cit. Pág.189.

[34] DAVIS, P. J. Y HERSH R (1988). Op.Cit. Pág.67

Esta situación plantea una visión de la matemática en la que gran parte de su actividad puede identificarse con una actividad de *modelización matemática*. En otras palabras, un aspecto esencial de la actividad matemática consiste en construir un modelo de la realidad que se quiere estudiar.

1.4.2. Los modelos matemáticos

Análisis conceptual

Considerando el análisis conceptual que proponen Castro, E. y Castro, E. (1997)[35], el término modelo es polisémico. El diccionario Vocabulario Científico y Técnico (Real Academia de Ciencias, 1990), establece con carácter general que modelo es un "esquema conceptual susceptible de un tratamiento matemático, que interpreta o predice el comportamiento de un sistema en que se desarrolla un fenómeno determinado. Réplica a pequeña escala de un determinado sistema."

Bachelard[36] da los siguientes significados al término modelo: Arquetipo al que nos referimos, al que consideramos ejemplar y al que tratamos de imitar. Prototipo de una clase donde se agrupan objetos, hechos, procesos o situaciones con características similares al prototipo. Estructura hipotética de la realidad, inaccesible a la evidencia directa. Esquematización construida con una multiplicidad de datos de la experiencia (de la realidad) que proporciona una abstracción satisfactoria de cómo funcionan las cosas. El modelo es una abstracción de una realidad fenomenológica y sirve de intermediario entre dicha realidad y un determinado campo teórico. El estudio e investigación de la realidad da lugar a la construcción del modelo.

Según Swertz (1989)[37] el término modelo evoca la imagen de una entidad física. Un modelo, en el sentido usual de la palabra, es una réplica, frecuentemente a escala, de algún objeto. Pero no toda la realidad es de naturaleza física, así los modelos

---

[35] CASTRO, E. y CASTRO, E (1997). REPRESENTACIONES Y MODELIZACIÓN. En La Educación Matemática en la Escuela Secundaria. Cap. IV..Editorial Horsori.

[36] BACHELARD citado por CASTRO, E. y CASTRO, E . Pág.106.

[37] SWERTZ (1989) citado por CASTRO, E. y CASTRO, E . Pág.106.

teóricos son colecciones de principios o reglas que de describen exactamente el comportamiento de un fenómeno en la mente de un observador; se habla, pues, de modelo económico, modelo demográfico, etc. En este sentido, cuando la matemática es base de un modelo teórico se crea un modelo matemático.

A partir de estos significados del término modelo, Castro, E. y Castro, E.(1997) destacan que *un modelo es una esquematización abstracta de la realidad*, entendiendo que esta realidad puede pertenecer al mundo de los fenómenos o al de los conceptos. Esto hace de los modelos poderosos instrumentos conceptuales, que permiten a los sujetos alcanzar y representar múltiples relaciones y estructuras que se presentan en la realidad, las cuales y dada su complejidad, no son comprensibles y manejables en muchas ocasiones fuera del modelo.

"Un modelo matemático – dice Aris, R (1978) - es cualquier sistema completo y compatible de ecuaciones matemáticas, diseñadas para que se correspondan con alguna otra entidad, su prototipo". Tal prototipo puede ser una entidad física, biológica, social, psicológica o conceptual, tal vez, incluso, otro modelo matemático. El término "ecuaciones" puede ser reemplazado por "estructura", pues no siempre se trabaja con modelos numéricos" (Davis y Hersh , 1988)[39].

Como lo señala Aris los modelos son de uso en todas las ramas de la ciencia. También en matemática elemental se utiliza el término modelo en un sentido genérico; así, se dice: *matematizar la realidad a través de un modelo* cuando determinados hechos y sus relaciones se expresan a través de términos y relaciones matemáticas abstractas. Por ejemplo, la acción de multiplicar "a" con "b" se esquematiza mediante el modelo "$a \bullet b$". Se podría decir que esta expresión simbólica modeliza la acción de reunir "b" colecciones de "a" elementos cada una (o viceversa).

De acuerdo con lo anterior *modelo matemático es una estructura matemática que aproxima o describe ciertas relaciones de un hecho o fenómeno.*

Ahora bien, cuando se trabaja con $a \bullet b$ en un contexto cardinal concreto puede decirse también que este contexto proporciona un modelo manipulativo para $a \bullet b$, o en caso que se trabaje con su representación cartesiana, puede decirse que ésta

[39] DAVIS, P. J. Y HERSH R (1988). Op.Cit. Pág.67

facilita un modelo gráfico de $a \bullet b$; en tanto ambos ejemplifican el concepto de multiplicación.

Como se observa, la noción de modelo *es relativa*: el concepto es un modelo abstracto para los fenómenos y éstos, a su vez, ofrecen modelos concretos para el concepto. En el primer caso se trata del esquema conceptual, mientras que en el segundo de una réplica o maqueta.

Clases de modelos

La noción de modelo, además de ser relativa, admite la consideración de tipos muy distintos y de diversas clasificaciones. Castro, E y Castro, E. (1987)[40] plantean las tres distinciones o dicotomías para clasificar modelos consideradas por Fischbein (1987). La primera dicotomía distingue entre *modelos intuitivos* y *modelos abstractos*. Los modelos intuitivos son de tipo sensorial, pueden ser percibidos, representados o manipulados, tal como la maqueta de un edificio o polígonos troquelados para construir poliedros; las relaciones matemáticas, fórmulas o funciones, son modelos abstractos de ciertas realidades concretas. Un modelo intuitivo no es necesariamente reflejo directo de una realidad. los modelos intuitivos son sustitutos válidos y aceptables que permiten trabajar nociones intuitivamente difíciles.

Otra dicotomía distingue entre: *modelos explícitos* y *modelos implícitos* . En ocasiones los modelos se elaboran para una situación concreta, con el propósito de llegar más fácilmente a una solución; en otros casos, los modelos se producen automáticamente y se usan tácitamente en conexión con una realidad.

La tercera dicotomía distingue entre *modelos analógicos* y *modelos paradigmáticos*. En el primer caso el modelo y su original pertenecen a dos sistemas conceptuales distintos, aunque existen semejanzas sistemáticas entre ellos que permiten asumir la existencia de otras semejanzas. En el caso de los modelos paradigmáticos el original consiste en una cierta clase de entidades mientras que el modelo viene dado por un ejemplar o una subclase de la categoría considerada.

[40] CASTRO, E. y CASTRO, E . (1997) . Op. Cit. Pág.107.

Estos tipos de modelos ofrecen un versión simplificada de una serie de hechos o ideas originales, lo cual permite un mejor y más completo control de un conjunto de datos y relaciones entre ellos.

Si bien este es un relato sobre los modelos matemáticos en relación con la realidad, quiero hacer referencia, dada su correspondencia con el trabajo, a los modelos que ejemplifican las ideas y conceptos matemáticos. Son los *modelos heurísticos* y responden a la caracterización dada por Fischbein (1987)[41]

> *"Un sistema B representa un modelo del sistema A si, sobre la base de cierto isomorfismo, una descripción o una solución producida en términos de A puede reflejarse consistentemente en términos de B y viceversa"*

Según esta descripción el modelo ofrece al usuario, generalmente resolutor de un problema, un esquema que sustituye al concepto original y que, por sus cualidades, está mejor adaptado a la naturaleza del pensamiento humano que el original; esto facilita al resolutor su tarea, de ahí la ventaja del uso de estos modelo.

La utilidad general de un modelo heurístico es doble; por una parte, facilita la interpretación de propiedades o relaciones matemáticas y, por otra, ayuda a resolver problemas o cuestiones matemáticas dotando a sus enunciados de una concreción física.

Los modelos matemáticos y la realidad

Ya he planteado que modelizar una situación de la vida real significa matematizarla. También que el proceso mediante el cual se construye y desarrolla un modelo matemático se conoce con el nombre de modelización matemática. Autores como de Lange (1987) y Swertz (1991)[42] consideran cinco pasos en todo proceso de modelización de situaciones reales. Transcribo el inicio de cada paso para dar cuenta que "los problemas" atraviesan cada uno de ellos.

[41] FISCHBEIN (1987). Citado en CASTRO, E. y CASTRO, E . Op. Cit. Pág.111.

[42] LANGE (1987) Y SWERTZ (1991). Citado en CASTRO, E. y CASTRO, E . Op. Cit.Pág.110

1. Identificar un problema real ...
2. Interpretar el problema matemáticamente...
3. Emplear teorías y herramientas matemáticas para abordar y obtener la solución del problema...
4. Evaluar e interpretar la solución del problema...
5. Refinar la solución la solución técnica para obtener mejor respuesta en los problemas que quedan bajo la consideración del modelo

Queda así reflejado que la modelización matemática es, fundamentalmente, una forma de resolución de problemas de la vida real; pero no es una forma cualquiera, sino que conlleva la consideración del problema como un todo. Para ello, no sólo tiene en cuenta la solución del mismo sino que exige la utilización de un gran número de estrategias matemáticas[43].

He caracterizado "hacer matemáticas" como una actividad de modelización y ésta, a su vez, fundamentalmente, es una forma de resolución de problemas que exige la utilización de un gran número de estrategias matemáticas. Esta exigencia sumada la naturaleza abstracta de sus objetos confiere a la matemática la visión de *conocimiento complejo* (base epistemológica compleja)

Más adelante desarrollaré otro aspecto de los modelos: el lugar que ocupan como uno de los *medios* que proporcionan información adecuada para la elaboración de imágenes mentales y potencian la formación del conocimiento matemático[44].

1.4.3. Matemáticas conscientes y matemáticas inconscientes

Continuando con el tratamiento de la relación entre las matemáticas y la realidad, voy a exponer una categorización de las matemáticas propuesta por Davis y Hersh

[43] Más adelante expreso el sentido de estrategias matemáticas.

[44] A este aspecto lo profundizaré más adelante.

(1988)[45] que, a mi modo de ver, refuerzan la idea de cómo funcionan las matemáticas en la realidad.

Aceptando la creencia de que el universo natural está regido por leyes matemáticas, hay que dar por válido que el universo y todo cuánto en él se halla están efectuando continuamente operaciones matemáticas. Se llama Matemática “inconsciente” a las acciones de carácter matemático que sea inherentes al universo. La *matemática inconsciente* acontece y progresa con independencia de lo que nadie pueda pensar; no es posible impedirla ni desconectarla. Es natural, espontánea, automática. No precisa de cerebro ni de dispositivos especiales de cálculo. No requiere de esfuerzo ni potencia intelectuales. En cierto sentido, la flor o el planeta son computadoras de sí mismos.

En oposición, podríamos distinguir las matemáticas “conscientes”. *Las matemáticas conscientes* parecen estar limitadas a los humanos y, posiblemente, a algunos de los animales superiores. Las matemáticas conscientes son las que habitualmente conocemos por matemáticas. Su adquisición es en gran medida fruto de una formación específica. Parecen tener lugar en el cerebro. Se tiene una consciencia especial de que se están o no se están produciendo. De ordinario están ligadas a un lenguaje abstracto y simbólico. Suelen valerse de lápiz y papel, de instrumentos matemáticos, de libros de consulta.

Entonces, Davis y Hersh (1988) proponen una distinción de las acciones matemáticas según éstas sean inherentes:

al universo: *matemáticas inconscientes* / al ser humano: *matemáticas conscientes*

Pero la actividad matemática consciente no siempre se vale de símbolos abstractos. Puede desarrollarse merced a un “sentido de los números”, a un “sentido espacial” o “cinestético”. Por ejemplo, la respuesta al problema de si cabrá un determinado objeto en cierta caja suele tener gran fiabilidad, a pesar de que su fundamento no es más que una hojeada. No suele estar claro qué subyace a estos sentidos especiales. Tanto si representan experiencia almacenada, soluciones de tipo

[45] DAVIS, P. J. Y HERSH R (1988). Op. Cit. Pág.222-224.

analógico realizadas sobre la marcha, o conjeturas inspiradas aunque en buena parte aleatorias, el hecho que subsiste es que a este tipo de juicios suele llegarse rápida y correctamente. Aunque se tenga plena consciencia del problema, tan sólo se es parcialmente consciente de los medios por los que se logra la solución. La reflexión posterior al acto pone de manifiesto una mezcla de operaciones que se superponen en parte. No existe, pues, una divisoria netamente trazada que separe a la actividad matemática consciente de la inconsciente.

Matemáticas analógicas y matemáticas analíticas

La actividad matemática consciente se divide en dos categorías: analógica-experimental y analítica.La actividad matemática de *tipo analógico* es muchas veces fácil, puede llevarse a cabo rápidamente, y seguramente no utilizará símbolos – o serán muy pocos – pertenecientes a las estructuras simbólicas abstractas de la matemática "de escuela". Hasta cierto punto, tal matemática está al alcance de casi todos quienes se desenvuelven en un mundo de relaciones espaciales y entre la tecnología cotidiana. Es posible que los resultados de esta forma de matemática no vengan expresados en palabras, sino en "comprensión", "intuición" u "ojo clínico"

En *las matemáticas analíticas* lo predominante es el material simbólico. Casi siempre son difíciles de realizar. Consumen tiempo a raudales. Son fatigosas. Existen una preparación técnica especial. Para conferirles fiabilidad suelen requerir una constante verificación por parte de la cultura matemática. Son muy pocas las personas que cultivan las matemáticas analíticas. Las matemáticas analíticas son elitistas y autocríticas. Los profesionales de sus manifestaciones más elevadas forman una "talentocracia".

Ejemplo: ¿Cuánto líquido contiene esta jarra?

Solución analógica: Viértase el líquido en una medida graduada, y léase directamente el volumen correspondiente.

Solución analítica: Aplíquese la fórmula del volumen de un cono truncado. Mídanse las dimensiones lineales pertinentes, y realícense los cálculos.

Son bastantes los problemas para los que se dispone de soluciones analógicas y de soluciones analíticas. Puede ocurrir también que se disponga de uno de los dos tipos, pero no del otro, o que se carezca de ambos.

De ordinario, para atacar un problema se utiliza una combinación de ambas tácticas. En el mundo real, cuando sea preciso construir modelos o sistemas materiales, las soluciones analíticas, por buenas que sean, han de ser cuidadosamente ajustadas por la falta de verificación experimental de las matemáticas (carácter apriori). Las solución analógica parece encontrarse más próxima a los procesos matemáticos inconscientes que acontecen en el universo.

Esta clasificación propuesta por Davis y Hersh (1988) resignifica el sentido de "hacer matemáticas". Hasta aquí daba la sensación de que "hacer matemáticas" se restringía a las matemáticas analíticas. Con la consideración de las matemáticas analógicas, son pocas las personas que nunca participaron en una actividad matemática. En este sentido, se presenta a las matemáticas como un *conocimiento necesario y funcional* a la realidad; acortándose así la distancia que la separa de la realidad.

1.5. La utilidad de las matemáticas

Las relaciones de la matemática con la realidad me lleva a abordar la utilidad de las matemáticas. Considero que parte de la respuesta está contenida explícita o implícitamente en puntos ya desarrollados. De todos modo, pienso que es importante revisar algunas cuestiones en relación al tema. La importancia radica en que la consideración que se concede en distintas épocas a los resultados "útiles", combinada con los confusos significados atribuidos a "utilidad" ha provocado arduas discusiones acerca de qué es fructífero y qué no; afectando a la enseñanza y aprendizaje de la disciplina.

1.5.1. Significados y campos de acción de la utilidad matemática.

Una postura en relación a la “utilidad matemática” ha estado ligada a platonistas y formalistas. La misma considera que la belleza de la matemática es la razón de su estudio, y que su utilidad es secundaria. En tanto, **“las posturas utilitaristas (Ernest, 1989) abogan por una matemática basada en las otras ciencias, rechazando el juego de los resultados de las matemáticas especulativas** (Flores Martínez, 1998)[47] . Así se plantea la utilidad y la belleza como dos cualidades excluyentes entre sí cuando se trata de las matemáticas. En discordancia con estas posturas se encuentra Cañon, C. (1993)[48] que considera que la belleza y la utilidad de las matemáticas no pueden separarse entre sí, ni separarlas del conocimiento matemático.

Tal vez esta dicotomía entre utilidad y belleza derive de dos principios. Uno de ellos es el ampliamente difundido principio de que la mente prevalece sobre la materia, que el espíritu es más elevado que la carne , y que el universo mental es superior al universo físico. Esta reputada superioridad de la mente sobre la materia encuentra expresión en la declaración de principios de las matemáticas que las conciben como la forma más noble y más pura del pensamiento; que se deducen de la mente pura sin auxilio apenas del mundo exterior, y al que no necesitan devolver nada. De este modo, existe un sentimiento tácito y universalmente difundido de que las matemáticas de las aplicaciones tienen algo de antiestético[49].

El otro principio está enlazado con el anterior ya que deviene también del carácter dual de las matemáticas. Su dualidad entre ciencia natural, que persigue encontrar y entender las leyes de la naturaleza, y filosofía o arte, en el sentido más puro y platónico de esta disciplina. Entonces, la belleza estaría en la matemática filosofía; cuando, en realidad, “hace matemáticas” quien busca propiedades de los números primos. Pero también “hace matemáticas” quien calcula el tiempo necesario para el crecimiento de una especie determinada.

---

[47] FLORES MARTÍNEZ, P. (1998). Op. Cit. Pág. 48.

[48] CAÑON, C (1993).Op.Cit. Pág. 405.

[49] En los últimos años este sentimiento se fue modificando. La matemática de las aplicaciones es hoy considerada de buen estilo. A decir verdad, esta tendencia no está libre de relación con los cambios mercado laboral académico.

Según Santaló (1997)[50] la dualidad de la matemática podría pensarse como consecuencia de su extensión y que, por tanto, sus distintos aspectos[51] son partes alejadas de un mismo cuerpo original, cada día más distanciadas entre sí. Pero este distanciamiento y poca conexión entre sus partes son sólo aparentes. La unidad de la matemática es indisoluble y poco se puede avanzar en una dirección si se pierden de vista las otras ramas hermanas. Las aplicaciones son el estímulo y muchas veces la guía de la matemática pura. Pero sin ésta, la matemática aplicada se agota rápidamente y se convierte en cúmulo de recetas rutinarias sin perspectiva de progreso.

"Los utilitaristas que ven de las cosas sólo su parte útil para un mejoramiento de la vida material, necesitan la matemática como herramienta, como instrumento indispensable para las transacciones comerciales, para dominar y aprovechar las fuerzas de la naturaleza y para mantener y desarrollar el progreso tecnológico. Los idealistas, cuyo énfasis está en el hombre como espíritu y en la perfección del alma y del conocimiento, también necesitan matemática, como el mejor camino para "facilitar al alma los medios de elevarse desde la generación hasta la verdad y la esencia" (Platón, *La República,* VII, 525). En los dos aspectos la matemática es profunda. Sus aplicaciones son esenciales para desenvolvernos en la vida y sus concepciones alimentan lo más puro del espíritu"(Santaló, 1997)[52].

De esta manera, los dos aspectos – matemática pura y matemática aplicada – de la ciencia matemática deben ser considerados en un mismo nivel de importancia por su utilidad. Esta postura supone un *conocimiento matemático provechoso* en cualquiera de sus aspectos.

[50] SANTALÓ, L. Y COLABORADORES (1997). ENFOQUES. HACIA UNA DIDÁCTICA HUMANÍSTICA DE LA MATEMÁTICA. Pág.21. Editorial Troquel. Argentina.

[51] Los distintos aspectos también se plantean como si fueran dicotómicos: - matemática pura / matemática aplicada, matemática ciencia/ matemática arte, matemática herramienta/matemática filosofía y matemática rutina/matemática fantasía -

[52] LUIS SANTALÓ Y COLABORADORES (1997). Op. Cit. Pág.22.

Quienes consideran también la "utilidad matemática" son Davis y Hersh (1988)[53]. Estos autores proponen una definición de la palabra – una cosa es útil si tiene la capacidad de satisfacer una necesidad humana - y dan cuenta de los múltiples significados que el término encierra:

"Un pedagogo, podría decirnos que las matemáticas son útiles porque nos enseñan a pensar y razonar con precisión. Un arquitecto o un escultor, podría decirnos que la matemática es útil porque llevan a la percepción y creación de belleza visual. Un filósofo por que permiten escapar de la realidad de la vida cotidiana. Un profesor de matemática podría asegurar que la matemática es útil porque permite ganarse el pan y la sal. Los editores verían la utilidad en la oportunidad de vender libros. El astrónomo o el físico dirán que la matemático resulta útil porque es el lenguaje de la ciencia. Un ingeniero civil asegurará que la matemática le permite construir un puente. Un matemático dirá en el seno de las propias matemáticas, un sistema matemático es útil cuando es aplicable a otro sistema matemático".

Así, ponen de manifiesto que los significados abarcan elementos de tipo estético, filosófico, histórico, psicológico, pedagógico, comercial, científico, tecnológico y matemático.

Como se observa, si bien los significados abarcan elementos de distinto tipo, el papel de las matemáticas en todos los casos es el mismo: las matemáticas son un *medio* para responder a determinadas cuestiones.

Esta presentación, muestra al conocimiento matemático como *herramienta* para resolver situaciones.

1.5.2. Matemática pura y matemática aplicada: dos campos en tensión

A partir de la consideración de la matemática pura y matemática aplicada, Santaló; L (1986)[54] alerta sobre dos peligros inherentes a esta doble faz: la polarización en un solo aspecto y la extrapolación más allá de sus límites. En

[53] DAVIS, P. J. y HERSH R (1988). Op. Cit. Pág.68.

[54] LUIS SANTALÓ Y COLABORADORES (1997). Op. Cit. Pág.22

relación a la polarización , el peligro es principalmente, en la enseñanza, toda enseñanza polarizada en una de las dos facetas de la matemática será incompleta y dará una formación defectuosa. Respecto a la extrapolación, es un peligro inherente a toda ciencia y a toda filosofía, que en la matemática es especialmente peligrosa por su falta de "verificación experimental" por su carácter a priori. En sentido práctico hay quien pide más a la matemática de lo que puede dar.

Ahora, tomando la idea del Dr. Santaló, me interesa focalizar la atención en los peligros que supone para la ciencia y la enseñanza esta polarización [55] .

Si se dirige la actividad matemática únicamente a las aplicaciones (matemática aplicada) y a los cálculos necesarios para las mismas la ciencia matemática termina por estancarse y perder vitalidad. En caso que se dedique la actividad matemática solamente a las especulaciones teóricas (matemática pura), alejada de los problemas de la vida real, se transforma en pura filosofía o en un conjunto de virtuosismos del pensamiento, que se desvanecen por falta de alimento que suministran la naturaleza y sus fenómenos.

Y, ¿cómo se manifiesta esta polarización en la enseñanza?. Según mi punto de vista una enseñanza basada en las aplicaciones "escondería" una de las características de las matemáticas, a la que debe gran parte de su belleza, que es su estructura coherente y sistematizadora. Por otro lado, una enseñanza basada en las reglas de una lógica estricta e inflexible haría "desaparecer" las cuestiones o tareas reales que originaron las matemáticas[56] y "escondería" el verdadero método matemático; el que siguen los matemáticos cuando hacen matemáticas, saltando razonamientos e intuyendo resultado. Y esto poco tiene que ver con el camino lógico-formal de las matemática.

Entonces, ¿cómo se puede contrarrestar esta polarización?. **"(...) Los mejores resultados se han obtenido siempre y cuando ambos aspectos – matemática aplicada y matemática pura - se han desarrollado armoniosamente, apoyándose**

[55] Este interés responde a los fines de esta caracterización.

[56] Cuestiones que ya hice referencia en el apartado La naturaleza de las Matemáticas, ítem "Su razón de ser"

uno a otro" (Santaló, 1986 b)[57] . En este sentido, en la enseñanza de la matemática se debería considerar la "utilidad matemática" desde una conjunción del mundo de las ideas y del mundo de las acciones.

En esta perspectiva, los resultados útiles son los que surgen de una visión de la matemática donde la "utilidad matemática" tiene su origen en las diversas cuestiones que emergen de los intereses internos o externos a ella. Pero, además, es considerada en sus distintos aspectos – ciencia y arte , herramienta y filosofía, rutina y fantasía – .

Esta postura supone una visión de *matemática abierta*, en el sentido de que la matemática se abren a cuestiones externas a ella, y que encuentra parte de su productividad fuera de la matemática pero, a su vez, *dicta sus propias leyes.*

1.6. La organización de las matemáticas

Tal como lo expresé la matemática nace como respuesta a un problema o un conjunto de cuestiones. Pero, ¿cómo se manifiesta esa respuesta? . Como una primera aproximación podría decir que se cristaliza en un conjunto de objetos ligados entre sí por diversas relaciones, esto es, en una organización matemática.

Dicha organización está constituida por determinados elementos, tiene un dinámica, presenta cualidades, utiliza recursos para su funcionamiento y se desarrolla de determinadas maneras. En este apartado voy a considerar éstas cuestiones.

1.6.1.Los problemas

Entrar a la organización de la matemática que considera a los problemas como razón de ser me demanda explicitar qué se entiende por problemas.

[57] SANTALO, L (1986). LA MATEMÁTICA EN LA EDUCACIÓN. Pág.8. Editorial Docencia. Buenos Aires.

Utilizando el sentido que le otorga Polya, G.(1965)[58], propongo dos tipos de problemas: “problemas por resolver” y “problemas por demostrar (o probar)”. El propósito de un problema por resolver es descubrir cierto tipo de objeto, la incógnita del problema. Estos problemas pueden ser teóricos o prácticos, abstractos o concretos; son problemas serios o simples acertijos. Podemos buscar incógnitas de todo tipo o tratar de encontrar, de obtener, de adquirir, de producir o construir todos los objetos imaginables. Por ejemplo, en un novela policíaca, la incógnita es un asesino. En la ecuación $x + 2 = 0$, la incógnita es un número.

El propósito de un problema por demostrar consiste en mostrar de modo concluyente la exactitud o falsedad de una afirmación claramente enunciada. Por ejemplo, un testigo que afirme que el acusado se hallaba en casa cierta noche, obliga al juez a investigar si dicha afirmación y a justificar su opinión sobre bases tan sólidas como sea posible. La demostración del Teorema de Pitágoras constituye otro de esos problemas.

Los principales elementos de un problema matemático por resolver son, la incógnita, los datos y la condición. Ejemplo: “construir un triángulo de lados a, b y c.”. La incógnita es el triángulo, los datos son las tres magnitudes a, b y c y la condición es que los tres lados del triángulo por construir tengan, respectivamente, esas magnitudes. En el caso de un problema matemático por demostrar, sus principales elementos son la hipótesis y la conclusión del teorema que hay que demostrar o refutar. Ejemplo: “Si los cuatro lados de un cuadrilátero son iguales, las dos diagonales son perpendiculares entre sí”. La segunda parte de la frase es la conclusión, la primera, que empieza pos “si”, es la hipótesis.

Los problemas por resolver en muchas oportunidades se califican en “problemas de rutina”. Tomando como ejemplo la construcción del triángulo de lados a, b y c ; su resolución consiste en seguir un precepto experimentado, y esto implica seguir paso a paso, sin ninguna originalidad , la traza de una rutina.

[58] POLYA, G. (1965). CÓMO PLANTEAR Y RESOLVER PROBLEMAS. Pág. 161-162. Editorial Trillas. México.

A partir del enfoque de Polya, voy a tomar la idea Puig, L (1997)[59] que afirma que **"(...) la resolución de problemas engloba la prueba de teoremas en dos sentidos. En el primer sentido, la resolución de problemas engloba la prueba de teoremas considerada globalmente ya que la prueba de teoremas no es sino un tipo de resolución de problemas de probar.**

En el segundo sentido, más importante, la resolución de problemas engloba la prueba de teoremas en la resolución de cada problema en particular; en efecto, lo que caracteriza a la resolución de problemas en matemática, incluso cuando se trata de problemas de probar, es que la obtención del resultado tiene que acompañarse de un argumento que justifique que el resultado obtenido verifica las condiciones del problema, esto es, cualquier problema es un problema de probar o , si es de resolver, contiene un problema de probar – el problema de probar que el resultado encontrado verifica las condiciones del enunciado".

1.6.2. Los elementos constitutivos de la organización matemática

A los elementos que constituyen la organización matemática los voy a considerar desde el planteo de Chevallard, Y, Bosch, M. y Gascón, J. (1997)[60] que describen a las matemáticas en término de "obra" . Tomando esta perspectiva, cabe entonces la pregunta: ¿cómo está constituido el argumento de una obra matemática?. Los autores nombrados identifican elementos *técnicos*, *tecnológicos* y *teóricos*. Una *técnica* es una "manera de hacer" determinada que permite realizar las tareas

[59] PUIG, L. (1997). ANÁLISIS FENOMENOLÓGICO. Pág. 73-74. En la educación matemática en la escuela secundaria. Vol.12. Editorial Horsori. Barcelona..

[60] CHEVALLARD, Y., BOSCH, M. y GASCÓN, J. (1997). ESTUDIAR MATEMÁTICAS. El eslabón perdido entre la enseñanza y aprendizaje. Pág. 123-125. Editorial Horsori.. Barcelona. Propongo este planteo que lo titulan ¿de qué está hecha una obra matemática? porque esta perspectiva integra cuestiones epistemológicas y didácticas que se corresponden con este trabajo. Aclaración: refieren a una obra, y en particular una obra matemática, porque son creadas por el hombre , responden siempre a un conjunto de cuestiones, de necesidades, aunque éstas pueden haberse perdido u olvidado en años.

problemáticas en cuestión de una forma relativamente sistemática y segura[61]. La explicación y utilización sistemática de una de una técnica provoca que las cuestiones iniciales relativamente poco precisas pueda formularse como verdaderos problemas matemáticos. Además, al resolverse nuevos problemas imprevisibles inicialmente, las técnicas permiten agrupar los problemas en *tipos de problemas*.

Para que una técnica pueda ser utilizada de manera normalizada, debe aparecer como algo a la vez correcto, comprensible y justificado. Por ello, la existencia de una técnica supone que también exista en su entorno un discurso interpretativo y justificativo de la técnica y de su ámbito de aplicabilidad o validez. A este discurso sobre la técnica se lo llama *tecnología* que, además de justificarla y hacerla inteligible, también tiene la importante función de aportar elementos para modificar la técnica con el fin de ampliar su alcance, superando así sus limitaciones y permitiendo en algunos casos la producción de una nueva técnica.

Este discurso matemático requiere una interpretación y justificación. Es decir un nuevo discurso matemático suficientemente amplio como para interpretar y justificar la tecnología. Es decir, la tecnología de la tecnología de la técnica. A este discurso se lo llama *teoría asociada a una técnica* y es , en cierto modo, el fundamento matemático último.

He dicho anteriormente que los problemas son el tipo de cuestiones que le otorgan a la matemática su razón de ser o, lo que es equivalente, que la matemática se construye como respuesta a un tipo de tareas problemáticas. También expresé que esta respuesta se constituye a partir de cuatro elementos esenciales: *los tipos de problemas* que surgen de las cuestiones iniciales; las *técnicas* que permiten resolver estos problemas; las *tecnologías* que hacen comprensibles las técnicas y las *teorías* que sirven de fundamento a las tecnologías. Como voy a usar aquí el término problemas en el sentido propuesto en el punto anterior, podría decir que cada uno de

[61] Aunque los algoritmos constituyen un tipo particular de técnicas, es importante no confundir ambas nociones. Sólo en ocasiones excepcionales una técnica matemática puede llegar a sistematizarse hasta tal punto que su aplicación esté totalmente determinada y pueda, por tanto, ser considerada como un algoritmo. En general, la aplicación de una técnica matemática siempre mantiene cierto grado de indeterminación, aun y cuando su definición sea precisa y por grande que sea el dominio que el estudiante tenga de ella.

los elementos esenciales que constituyen la matemática supone un "problema de resolver". Por ejemplo, en la resolución de una técnica está presente un problema de rutina y en la tecnología y teoría de esa técnica está presente un problema de probar. Este hecho extiende el significado del término problemas.

Este planteo sobre la organización de la matemática la presenta con una *base epistemológica problematizada*; donde las técnicas generan nuevos problemas y apelan a nuevos resultados tecnológicos que, a su vez, permiten desarrollar técnicas ya establecidas, así como abordar y plantear nuevas cuestiones. En este sentido, se interpreta a la matemática como una *organización dinámica*. En contraposición a una visión de la matemática como una *organización estática* y determinada de antemano.

Hecha la descripción de la constitución del argumento, paso a relatar algunas cualidades y recursos.

1.6.3. Algunas cualidades de las matemáticas

Cualidades

Para exponer más fácilmente algunas de sus cualidades tomo como punto de partida las opiniones de dos personajes que protagonizaron la obra matemática:

> **"Más allá de la belleza sensible, coloreada y sonora, debida al centelleo de las apariencias, única que el bárbaro conoce, la ciencia nos revela una belleza, una belleza superior, una belleza inteligible, únicamente accesible, diría Platón, "a los ojos del alma", debida al orden armonioso de las partes, a la correspondencia de las relaciones entre ellas, a la euritmia de las proporciones, a las formas y a los números. El trabajo del científico que descubre las analogías entre los organismos, las semejanzas entre los grupos de fenómenos cualitativamente diferentes, el isomorfismo de dos teorías matemáticas es semejante al artista" (Poincaré)[62] .**

---

[62] POINCARÉ . Citado por GÓMEZ CHACÓN, I.M. Op.Cit. Pág.189.

"Una de las características de las matemáticas, a la que debe gran parte de su belleza, es su estructura coherente y sistematizadora" (Santaló, 1986c)[63].

Como se observa, los dos personajes dan testimonio del atractivo estético de la obra matemática. Expresan su belleza nombrando cualidades internas que la caracterizan.

Poincaré alude al *orden* como una de las cualidades que le otorgan belleza a las matemáticas. El fenómeno que podríamos llamar creación de *orden* a partir del caos es fuente de vigorosos sentimientos de goce estético personal. **"Hasta cierto punto, el objeto mismo de las matemáticas es la creación de orden allí donde previamente parecía imperar el caos, es la extracción de invariancia de entre el desconcierto y la confusión"** (Davis, P. J. y Hersh R, 1988)[64]**.**

Es la creación del orden, y particularmente del orden intelectual, uno de los grandes talentos que poseen los humanos, y se ha sugerido que la matemática es la ciencia del orden intelectual completo.

El orden en las matemáticas se cristaliza, y esto lo señalan ambos protagonistas, en la *estructura coherente y sistematizadora* de las matemáticas[65]. Una estructura que desde Euclides[66] a Bourbaki han procurado ordenar bajo las reglas de una lógica estricta e inflexible, dándole la nota de *rigor;* lo cual es magnífico desde el punto de

---

[63] Santaló, L. (1986). LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA EN LA ESCUELA MEDIA. Pág.15. Editorial Docencia. Argentina.

[64] Davis, P. J. y Hersh R. (1988) Op. Cit. Pág.

[65] Las nociones de estructura y sistema he desarrollado sucintamente al presentar la corriente formalista.

[66] De todas las ramas matemáticas la primera que alcanza las condiciones de un sistema demostrativo es la Geometría, axiomatizada por Euclides en el siglo III A.C. quien en sus "Elementos" recopila y sistematiza el saber geométrico de su tiempo, incluyendo también las propiedades de los números expresables en lenguaje geométrico. El mayor mérito de Euclides está en la construcción lógica, articulando los teoremas conocidos de tal manera que las verdades matemáticas se deriven deductivamente, y cubriendo los cortes con nuevas demostraciones.

vista de la ciencia ya que le confiere *unificación*[67], *seguridad* y *armonía.* También es magnífico para el trabajo del matemático porque esta estructura de las matemáticas le da la posibilidad de *explorar distintas estrategias matemáticas* para responder a una cuestión; y esto supone una *alta dosis de creatividad* e *imaginación* para descubrir nuevas relaciones o nuevos sentidos en relaciones ya existentes.

Su estructura coherente y sistematizadora confieren a las matemáticas: orden, rigor, unificación, seguridad, armonía y exploración por distintas vías, revelado así un *tipo de conocimiento con alta dosis de creatividad e imaginación.*

1.6.4.Los recursos que utilizan las matemáticas

Empleo el término recursos en el sentido de medios que utiliza la obra matemática para lograr su propósito: la respuesta a una tarea problemática. Aquí centraré mi atención en uno de los medios que, fundamentalmente, se usa para comunicar las ideas matemáticas: las representaciones. Si bien en este punto hago alusión a las representaciones externas no puedo dejar de hacer referencia a las representaciones internas. Esta alusión es importante por las relaciones existentes entre ambas modalidades de representación y , a su vez, porque ambas están fuertemente ligadas al proceso de enseñanza y aprendizaje de los conceptos matemáticos.

Las representaciones externas son las notaciones simbólicas o gráficas, específicas para cada noción, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos así como sus características y propiedades más relevantes.

"Se postula que los signos, gráficos o notaciones, con soporte físico externo, que usamos para la representación tienen un equivalente en la mente del sujeto que los utiliza, lo que hace necesario distinguir entre representaciones externas y representaciones internas. Las relaciones existentes entre estas dos modalidades de representación las expresa Duval (1993) en los siguientes

---

[67] La unificación, que consiste en el establecimiento de relaciones entre objetos aparentemente diversos, es a un tiempo una de las grandes fuerzas motrices de las matemáticas y una de las más caudalosas fuentes de satisfacción estética.

términos: desde un punto de vista genético, las representaciones mentales y las representaciones externas no pueden verse como dos dominios diferentes. El desarrollo de las representaciones mentales se efectúa como una interiorización de las representaciones externas; la diversificación de representaciones de un mismo objeto o concepto aumenta la capacidad cognitiva de los sujetos y, por consiguiente, su capacidad de pensamiento sobre ese objeto o concepto. De manera recíproca, las representaciones externas, como son lo enunciados en el lenguaje natural, las fórmulas algebraicas, las gráficas, las figuras geométricas, entre otras muchas, son el medio por el cual los individuos exteriorizan sus imágenes y representaciones mentales haciéndolas accesibles a los demás” (Castro y Castro, E. 1997)[68].

Desde este punto de vista, las representaciones externas, juegan una doble función[69]: actúan como estímulo para los sentidos en los procesos de construcción de nuevas estructuras y permiten la expresión de conceptos e ideas en los sujetos que las utilizan.

Dentro de las representaciones externas se suelen distinguir las representaciones digitales, discretas, de carácter alfanumérico, que se pueden simular mediante programas informáticos y cuya sintaxis viene descrita mediante una serie de reglas de procedimiento, y las representaciones analógicas, continuas, de tipo gráfico o figurativo, cuya sintaxis viene dada principalmente por reglas de composición y convenios de interpretación. En matemáticas estas dos familias se denominan, comúnmente sistemas de representación simbólicos o sistemas de representación gráficos, respectivamente.

Estos planteamientos llevan a incluir las diferentes escrituras simbólicas, el lenguaje natural, las figuras y gráficos, las tablas, cuadros y las notaciones algorítmicas que expresen un modo de operar como sistemas de representación en matemáticas. Se habla de sistemas de representación en vez de representación simplemente porque el conjunto de símbolos, gráficos y reglas que permite representar una estructura matemática han de responder a su carácter sistémico.

---

[68] CASTRO, E Y CASTRO, E. (1997) Op. Cit. Pág.101.

[69] Ambas funciones importantes en el proceso de enseñar y aprender. Esto lo analizaré en el Cap. 2.

En matemáticas, generalmente, para un mismo objeto existen diversos sistemas de representación. Cada uno de los distintos modos de representar proporciona una información que utilizando otro sistema dificultaría su comprensión o la escondería. Tener dominio sobre el objeto matemático implica conocer sus principales representaciones, el significado de cada una de ellas, así como operar con las reglas internas de cada sistema; también implica convertir o traducir unas representaciones en otras, detectando qué sistema es más ventajoso para trabajar con determinadas propiedades.

La traducción entre distintos sistemas de representación no es una cuestión trivial para las matemáticas ni para su aprendizaje. Para las matemáticas, los usos de distintos sistemas de representación de un mismo objeto matemático no sólo enriquecen su significado, sino que también posibilitan establecer nuevas relaciones; existiendo la posibilidad de crear conocimientos, e integrar distintas ramas de las matemáticas. La historia de las matemáticas proporciona innumerables ejemplos de esto.

De este modo, se presenta a las matemáticas como tipo de conocimientos que usa *distintos tipos de lenguajes* – coloquial, simbólico y gráfico - para comunicar sus ideas.

Funciones de los sistemas de representación

Un sistema de símbolos constituye un modo específico de representación, un lenguaje de la ciencia que, según Skemp, R. (1993)[70] , satisface las siguientes funciones:

Facilitar la comunicación. Dado que los conceptos son objetos puramente mentales y no hay forma de observar directamente el contenido de la mente es necesario un medio visible que permita el acceso a los productos de la mente. El símbolo es un medio visible que está conectado a una idea, que es su significado.

[70] SKEMP, R. (1993). PSICOLOGÍA DEL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS. Cap. V. Ediciones Morata. Madrid.

Registrar el conocimiento. Entre las características de las ideas están el ser invisibles, inaudibles y perecederas; esto hace necesario un registro de las mismas que asegure la comunicación.

Formación de clasificaciones múltiples correctas. Un mismo objeto se puede clasificar de múltiple formas. Por la asignación de un símbolo a la clasificación somos capaces de concentrar nuestra atención sobre propiedades diferentes del mismo objeto. Cuanto más símbolos se puedan ligar a un objeto mayor será el número de clasificaciones en que pueda intervenir el mismo.

Hacer posible la actividad reflexiva. Esta actividad permite a las personas ser conscientes de sus propios conceptos y esquemas, percibir sus relaciones y estructuras y llegar a manipularlas de diversas maneras.

Ayuda para mostrar las estructuras. Por la reflexión los individuos son conscientes de sus ideas y la relación que existe entre ellas. La selección correcta de símbolos puede ser de gran ayuda para evocar los conceptos correctos, o un obstáculo si no se eligen adecuadamente.

Automatizar manipulaciones rutinarias. El progreso en matemáticas exige que los procesos elementales se hagan automáticos, liberando así la atención del individuo que podrá centrarla en nuevas ideas. Esto se lleva a cabo separando el concepto del símbolo y llegando a manipular éste de acuerdo con hábitos adecuadamente formados.

Actividad mental creativa. El uso de símbolos asociados a un concepto posibilita el control voluntario, la comunicación y el registro de conocimiento.

En términos generales se puede decir que los símbolos, en particular, los símbolos matemáticos ayudan a generalizar ideas y a aplicar dichas ideas a diversas situaciones.

Relaciones entre representaciones y modelos

En forma muy sucinta voy a explicar la relación entre estas dos nociones. En el campo de las matemáticas, se distinguen, generalmente, tres tipos de modelos: *modelos concretos*, que representan una idea matemática mediante un objeto tridimensional; *modelos pictóricos*; que representan ideas matemáticas mediante diagramas e ilustraciones y *modelos simbólicos*, que representan estructuras matemáticas por medio de un sistema de símbolos y reglas específicos, comúnmente aceptados, que comprende conceptos, operaciones y relaciones. Estos dos últimos tipos de modelos son lo que he denominado representaciones.

1.7. Las formas de desarrollo de las matemáticas

1.7.1.Las posturas filosóficas

Hablar de las formas de desarrollo de las matemáticas sugiere el tratamiento del método matemático.

Respecto de cuál es el método de la matemática, parece claro hoy que el uso del método axiomático es una de las características de la matemática contemporánea. Dicho método que abandona las ideas intuitivas para quedarse sólo con las relaciones entre los entes considerados permite exponer la matemática sistemáticamente y de manera rigurosa. Sin embargo, su eficacia en la construcción de nuevas nociones es disentida por quienes hacen hincapié en el valor de la intuición y en el método inductivo para el proceso de descubrimiento.

Esta diferencia de opiniones en realidad tiene sus raíces en las visiones filosóficas de las matemáticas. Ernest (1991)[71] diferencia la visión absolutista, que se caracteriza por considerar que el conocimiento matemático está compuesto de verdades absolutas, de la visión falibilista, según la cual la verdad matemática es falible y corregible y no puede verse como absoluta. Argumenta que las escuelas

[71] ERNEST (1991) citado por FLORES MARTÍNEZ, P. (1998). Op. Cit.Pag.51

absolutistas - el logicismo y el formalismo- caen en un círculo vicioso al tratar de establecer la verdad de las proposiciones matemáticas, ya que cualquier sistema matemático depende de un conjunto de supuestos, y al intentar establecer la verdad de estos supuestos se llega a una regresión infinita.

La postura falibilista está basada en las matemáticas informales de Lakatos. Las matemáticas informales de Lakatos son una ciencia en el sentido de Popper, que se desarrolla a través de un proceso de crítica y sucesivo refinamiento de las teorías y del avance de teorías nuevas que compiten entre sí , y no mediante las pautas deductivas de las matemáticas formalizadas.

En consonancia con este planteamiento, Douady (1986)[72] identifica "hacer matemáticas" con resolver problemas, adaptar lo que conocemos al contexto, hacer conjeturas e intentar validarlas o refutarlas. Desde esta perspectiva en la fase exploratoria[73] juega un papel importante lo que el matemático George Polya llamó el pensamiento matemático plausible o conjetural, es decir, el "arte" de formular hipótesis y conjeturas que nos parecen acertadas, de examinar su validez y contratarlas, de reformularlas para obtener nuevas hipótesis susceptibles de ser puestas a prueba, etc.

Este proceso no implica desconsiderar en el trabajo del matemático la labor demostrativa - basada en el razonamiento demostrativo - sino apreciar que la prueba a su vez es descubierta mediante el razonamiento plausible y mediante la intuición.

Estas concepciones sobre las formas de desarrollar las matemáticas están emparentadas con los dos paradigmas que operan sobre los modos de concebir el trabajo matemático. El paradigma de lo dialéctico y de lo algorítmico, dando lugar a una clasificación de la matemática en *Matemática algorítmica y matemática dialéctica*

1.7.2. Matemática algorítmica y matemática dialéctica

---

[72] Citado por FLORES MARTÍNEZ, P. (1998). Op. Cit Pág. 51

[73] fase del trabajo matemático en la que no se dispone de una formulación suficientemente precisa del problema dado y que vuelve a parecer, cuando, aun disponiendo de un enunciado matemático preciso, no se sabe cuáles serán las herramientas matemáticas más adecuadas para abordarlo.

Davis. y Hersh (1988)[74] distinguen los dos paradigmas identificando a las matemáticas, según el paradigma que establecen correspondencia, en:

Matemática dialéctica / matemática algorítmica

La *matemática dialéctica* aporta intuición e inteligencia de los problemas, y da libertad de acción. La *matemática algorítmica* utiliza un "algoritmo" para resolver el problema.

"La *matemática dialéctica* es una ciencia rigurosamente lógica, en la cual los enunciados son, sean verdaderos o falsos, y donde los objetos de propiedades específicadas, o existen, o no existen. La *matemática algorítmica* es un instrumento para la resolución de problemas. En ella interesa no solamente la existencia de un objeto matemático; interesan sobre todo las credenciales de su existencia. La *matemática dialéctica* es un juego intelectual que se desarrolla según reglas acerca de las cuales existe alto grado de consenso. Las reglas de juego de la *matemática algorítmica* pueden variar según la urgencia del problema que tengamos en manos. Nunca hubiéramos logrado poner un hombre en la luna si nos hubiéramos empeñado en que las trayectorias fueran computadas con rigor dialéctico. Las reglas pueden variar también en función del equipo de computación disponible. La *matemática dialéctica* invita a la contemplación. La *algorítmica*, a la acción. La *matemática dialéctica* proporciona inteligencia e intuición de los problemas. La *matemática algorítmica* genera resultados" (Henrici)[75].

Al compararlos, los paradigmas de lo dialéctico y de lo algorítmico presentan un claro y distintivo corrimiento, y quienes han trabajado en uno de éstos modos pueden muy bien sentir la impresión de que las soluciones correspondientes al otro no son "juego limpio", que no son "lícitas". Sufren de "shock paradigmático".

[74] DAVIS, P. J. Y HERSH R. (1988) Op. Cit. Pág.139-141

[75] HENRICI. Citado en DAVIS, P. J. Y HERSH R. (1988) Op. Cit. Pág.141

1.8.Los modos de pensar en matemáticas

1.8.1. Los razonamientos

Es indudable que este tema está fuertemente ligado con el punto anterior. La relación existente se establece porque según la concepción del método matemático se destacan los tipos de pensamiento de las matemáticas. Aquí no haré la distinción de pensamientos por el método sino que abordaré los tipos de pensamientos que suponen las dos posturas filosóficas.

Para iniciar el tema, tomo la descripción que hace Dou, A.(1970)[76] en relación al método propio de las matemáticas:

> ***"El primer elemento fundamental y primera determinación de la esencia del método matemático desde su creación por los griegos hay que ponerlo en esa manera típica y peculiar de llevar el razonamiento, de carácter exclusivamente inteligible, que obliga al asentimiento de unas verdades atemporales, fuera del espacio y extrañamente universales. La raíz última del método matemático parece, pues, que hay que ponerla en la aplicación de esa actividad típica y peculiar de la inteligencia. La comprensión refleja de lo que es método matemático se traduce, por tanto, en una comprensión de cómo comprendemos las verdades matemáticas, es decir, en una comprensión de cómo ejercitamos esa actividad típica y peculiar de la inteligencia".***

Dou, A. da cuenta de esta manera que *lo esencial del método matemático estriba en el razonamiento matemático* que se aplica a objetos matemáticos y ello no de una manera trivial o esporádica, sino constituyendo un sistema de verdades coherente, profundo e interesante. Este sistema de verdades, en cuanto formuladas y estereotipadas, puede considerarse como la cristalización del razonamiento matemático.

---

[76] DOU, A.(1970). Op. Cit. Pág.15

Este planteamiento del método matemático atribuye a las matemáticas el carácter de *ciencia basada en el razonamiento* o *un tipo de pensamiento*

¿Qué tipos de razonamiento se aplican a los objetos matemáticos?. El razonamiento que hace referencia Dou, A es el que caracteriza a las matemáticas de modo único: el razonamiento lógico-deductivo.

Razonamiento lógico-deductivo

El razonamiento lógico – deductivo utiliza el matemático para confirmar la solución del problema de modo definitivo. Para lo cual es necesario una demostración rigurosa, que implica someterse a las reglas de inferencia lógica que rigen el razonamiento deductivo.

Caracterizo el razonamiento deductivo como aquel de cuyas premisas se pretende que suministren pruebas concluyentes para afirmar la verdad de su conclusión. **"La teoría de la deducción, que trata tanto la lógica tradicional como la simbólica , es la que intenta explicar la relación entre las premisas y la conclusión de un razonamiento válido y de establecer técnicas para juzgar los razonamientos deductivos, es decir, para discriminar entre las deducciones válidas y las que no lo son"**(Copi, I.M., 1995)[77].

Este razonamiento lógico-deductivo es uno de los ingredientes de las demostraciones[78]. Y las demostraciones desempeñan el papel de validación y certificación en la comunidad matemática; son el sello de la autoridad. Por ello, este razonamiento es considerado en la comunidad matemática como la forma de razonamiento matemático preferente; y su más alta expresión lo señala como rito y celebración de la razón pura.

La postura anterior no deja de ser un simplificación porque, como lo plantea Polya, un maestro del pensar matemáticamente, en la fase exploratoria juegan un papel importante el "razonamiento heurístico"[79] y la intuición.

---

[77] COPI, I.M. (1995). INTRODUCCIÓN A LA LÓGICA. Pág. 167. Ediciones Eudeba. Bs. As.

[78] Los otros ingredientes son: abstracción, formalización y axiomatización.

[79] También se lo identifica como pensamiento matemático plausible o conjetural.

Razonamiento heurístico

"El razonamiento heurístico es un razonamiento que se considera no como definitivo y riguroso, sino simplemente como provisional y plausible[80] y cuyo objeto es descubrir la solución del problema propuesto. El razonamiento heurístico es de empleo frecuente. No se llega a una certeza plena sino después de haber obtenido la solución completa, pero hasta ahí nos contentaremos con frecuencia con una hipótesis más o menos plausible. En la construcción de una demostración rigurosa el razonamiento heurístico juega el mismo papel que el andamiaje en la construcción de un edificio"(Polya, 1965)[81].

En el proceso de descubrimiento el razonamiento heurístico se basa con frecuencia sobre otros dos: el *razonamiento por analogía* y el *razonamiento inductivo*. Tanto el razonamiento por analogía como el inductivo no pretenden ser matemáticamente seguros. Estos razonamientos no pueden clasificarse de válidos o inválidos. Todo lo que se pretende de ellos es que tengan una cierta probabilidad.

En relación al *razonamiento por analogía*, si bien no es difícil definir la analogía, subsiste el problema de caracterizarlo . "**Pero puede describirse, pues, en términos muy generales, como un razonamiento en que las premisas afirman primero la similaridad de dos cosas en dos aspectos y, segundo, que una de esas cosas tiene una tercera característica, de lo cual extrae la conclusión de que la otra cosa también tiene esa característica"**.(Copi, 1995)[82].

El razonamiento inductivo conduce al descubrimiento de leyes generales a partir la observación, la regularidad y la coherencia; sus instrumentos más visibles son la generalidad, la particularización y la analogía. Una tentativa de generalización parte de un esfuerzo para comprender los hechos observados; se basa en la analogía y se verifica en nuevos casos particulares.

---

[80] La palabra plausible es en realidad una palabra inglesa que significa "posible, verosímil, convincente"

[81] POLYA, G. Op. Cit. Pág. 173-174.

[82] COPI, I.M. (1995).Op. Cit. Pág. 399.

La intuición

La palabra *intuición* encierra diversos significados y gran controversia entre los filósofos. Por ello, ahondaré un poco más este tipo de pensamiento.

En ocasiones parece ser lo opuesto a riguroso. En otras significa visual. También significa plausible, o convincente sin demostración. En otras ocasiones significa inspirado en un modelo físico, o en algunos ejemplos importantes (en esta acepción, lo intuitivo casi es lo mismo que heurístico) o la encontramos a la intuición en el sentido de lo holístico o integrador, lo contrario a detallado o analítico.

En todas las acepciones anteriores, la noción de intuición sigue siendo bastante vaga; su aspecto cambia algo al pasar de una acepción a otra. En un prefacio de un texto, un autor puede ufanarse de haber evitado valerse de lo meramente intuitivo, es decir, de ayudarse de figuras y diagramas en sus demostraciones. Como muestra se pueden leer un par de frases entresacadas de la introducción de la obra de Jean Dieudonné sobre Algebra lineal y Geometría Elemental[83]:

"Me he permitido también no introducir ninguna figura en el texto..."
"Es deseable liberar al alumno cuánto antes de la camisa de fuerza de las "figuras" tradicionales hablando lo menos posible de ellas (exceptuando, naturalmente, punto, recta y plano)..."

En esta postura esta presente el modelo formalista de la matemática. La corriente formalista ha llevado a muchos expositores de esta ciencia a considerar como prioritaria la exposición "formal" de la matemática y a considerar como andaderas inútiles, cuando no perjudiciales, los apoyos en la intuición visual de los conceptos y procesos.

También podemos encontrar otro autor que puede enorgullecerse de haber resaltado los aspectos intuitivos, esto es de haber tratado de comunicar la importancia física y visual de una teoría matemática, o de haber proporcionado una deducción heurística de un teorema, y no sólo su verificación formal. Miguel de Guzmán (1996) en su libro "El Rincón de la Pizarra" transmite la intuiciones visuales que

[83] Expresiones extraídas del libro de GUZMAN, M.(1996). EL RINCÓN DE LA PIZARRA. Pág.31. Ediciones Pirámide. Madrid.

apoyan y en muchos casos han dado origen a los conceptos y procesos matemáticos más básicos e importantes[84].

Con cualquiera de estas interpretaciones , lo intuitivo es en cierta medida un elemento controvertido. Para algunos , en el "hacer matemáticas", la intuición es deseable (los falibilistas) y para otros no tanto (formalistas).

Según Davis y Hersh (1988)[85] el problema consiste en explicar el fenómeno del conocimiento intuitivo en matemáticas, en hacerlo inteligible. Siendo este el problema fundamental de la epistemología matemática. Esto es, ¿qué sabemos, y de qué modo lo sabemos?.

Para responder a tal cuestión , los autores proponen que nos formulemos las preguntas: ¿qué enseñamos, y cómo lo enseñamos?. O mejor aún, ¿qué tratamos de enseñar, y por qué nos parece necesario enseñarlo?.

La respuesta de ellos es: "tratamos de enseñar conceptos matemáticos, no formalmente (a base de memorizar definiciones) sino intuitivamente, a través de ejemplos, problemas, desarrollando una capacidad de pensar que sea expresión de haber internalizado con éxito alguna cosa. ¿Qué? una idea matemática intuitiva."

Es decir, la intuición no es una percepción directa de algo existente externa y eternamente. Es el efecto que provoca en la mente la experiencia de ciertas actividades de manipulación de objetos concretos (en una fase posterior, de marcas de un papel, e incluso de imágenes mentales). Como fruto de esta experiencia, hay algo en la pupila de la mente (un residuo, un efecto) que constituye la representación de la idea matemática. Una representación que es equivalente a la mía, en el sentido de que ambos obtenemos la misma respuesta a cualquier pregunta que se nos haga; o si nuestras respuestas son distintas, comparamos nuestras notas y averiguamos cuál es la respuesta correcta Tenemos intuición porque tenemos representaciones mentales de los objetos matemáticos. Adquirimos estas representaciones no por memorización de fórmulas verbales, sino a través de reiteradas experiencias.

En el dominio de las ideas, de los objetos mentales, aquellas ideas cuyas propiedades son reproducibles son llamados objetos matemáticos, y el estudio de los objetos mentales con propiedades reproducibles se denomina matemática. La

[84] Más adelante abordaré el tema conocimiento matemático y visualización.

[85] DAVIS, P. J. Y HERSH (1988). Op. Cit. Pág. 283-284.

intuición es la facultad merced a la cual podemos considerar o examinar estos objetos (internos, mentales). La intuición en este sentido incluye cualquiera de los diversos significados dados a la palabra.

1.8.2. El estilo cognitivo en matemáticas

Visualización Matemática

Cuando expuse las formas de desarrollo de las matemáticas hice una descripción comparativa entre matemática algorítmica y matemática dialéctica . En tanto que el descubrimiento matemático puede tener componentes de una o de la otra, en esencia estoy tratando de diferencias de estilo cognitivo.

La diferencia de estilo cognitivo, en realidad, radica en las *estrategias* que se ejecutan sobre las representaciones de conceptos y relaciones matemáticas. Estas estrategias comprenden al razonamiento y a las destrezas pero no se reducen a ellos; las estrategias procesan dentro de una estructura conceptual y, por tanto, pueden existir estrategias diferentes para alcanzar un mismo resultado. El uso de distintas estrategias suponen dominio de la red conceptual, grandes dosis de creatividad e imaginación para descubrir nuevas relaciones o nuevos sentidos en relaciones existentes.

Los modelos gráficos y distintos tipos de representaciones son estrategias y , a su vez, expresiones de un estilo cognitivo vinculado a la *visualización matemática*

El término *visualización* se emplea, por lo general, con referencia a figuras o representaciones pictóricas ya sean éstas externas o internas, es decir, sobre soporte material (papel, pantalla, etc) o en la mente. Se aprecia así que en la idea de visualización aparecen dos facetas básicas complementarias, una externa a los sujetos (con soporte material) y otra interna a los mismos sujetos (imagen mental).

De este modo, la noción de visualización o pensamiento visual está fuertemente ligada a la capacidad para la formación de imágenes mentales. Lo que caracteriza a una imagen mental es hacer posible la evocación de un objeto sin que el mismo esté presente. Y esta acción cognitiva desempeña un papel muy importante en la actividad matemática.

La influencia de las imágenes mentales en el pensamiento matemático está reflejada en el libro de Hadamard. El matemático se esforzó por descubrir cómo pensaban en realidad científicos y matemáticos famosos mientras llevaban a cabo su trabajo. Hablando de aquellos con quienes estableció contacto durante un estudio informal, Hadamard escribió: "Prácticamente todos...no sólo evitan utilizar palabras mentales, sino también ...utilizar mentalmente signos algebraicos o de significado preciso...se valen de imágenes vagas" (p.84) y "...las imágenes mentales de los matemáticos cuyas respuestas he recibido son con la mayor frecuencia visuales, aunque pueden ser también de otros tipos, como por ejemplo, cinéticas"(pág.85) (Davis y Hersh, 1988) [86].

Los expertos poseen imágenes visuales, modos intuitivos de percibir los conceptos y métodos, de gran valor y eficacia en su trabajo creativo y en su dominio del campo en que se mueven. Mediante ellos son capaces de relacionar, de modo muy versátil y variado, constelaciones frecuentemente muy complejas de hechos y resultados de teorías y a través de tales redes significativas son capaces de escoger, de manera natural y sin esfuerzo, los modos de ataque más eficaces para resolver los problemas con que se enfrentan.

La visualización aparece así como algo profundamente natural tanto en el nacimiento del pensamiento matemático como en el descubrimiento de nuevas relaciones entre objetos matemáticos, y también, naturalmente, en la transmisión y comunicación propias del quehacer matemático.

Desde este planteamiento se considera que el conocimiento matemático *se recibe y se transmite, prioritariamente, mediante dos canales: el auditivo y el visual (y, de manera complementaria, por el tacto). Postura que se corresponde con en empirisimo filosófico.*

Este planteo suscita la necesidad de referirme , aunque sean brevemente, a las tres posturas filosóficas de cómo se adquiere el conocimiento matemático: *empirismo , racionalismo y constructivismo*[87].

[86] DAVIS, P. J. Y HERSH, R. (1988). Op. Cit. Pág.227.

[87] Me refiero a las más relevantes por su proyección en la enseñanza y aprendizaje de la matemática.

Posturas filosóficas

Los empiristas defienden que el conocimiento se justifica por los sentidos. **"Los sentidos son los factores de nuestra inteligencia y los agentes de nuestras facultades"**(Michelet, 1988)[88].

Los racionalistas sitúan en la razón el único órgano de conocimiento, reconocen la necesidad de estructuras fundamentales de conocimiento para organizar las experiencias en categorías o sistemas lógicos, y afirman que se trata de estructuras genéticamente preprogramadas.

La postura constructivista que tiene a Kant como referente filosófico, y resulta de los trabajos de Piaget, considera que los aspectos fundamentales del conocimiento no están preformulados en los genes ni son directamente adquiridos del mundo exterior, sino que son construidos por el propio individuo. El individuo construye sus conocimientos en interacción con el medio, en actividades orientadas por objetivos formulados en sí mismo.

1.8.3. Las actitudes matemáticas

Resolver una situación matemática implica siempre, en mayor o menor medida, un reto intelectual Se sabe, más o menos, a dónde se quiere llegar, pero generalmente se ignora el camino. Ante esta situación, vale la pena considerar cuáles son las tesituras más apropiadas para afrontar el desafío mental y cuáles pueden ser los rasgos de la actitud que pueden perjudicar seriamente el modo de proceder en el quehacer matemático.

En tal sentido, Guzmán, M. (1994 b)[89] en su libro "Para pensar Mejor" destina la primera parte, "Bloqueos y desbloqueos", para explicar la actitud sana y adecuada para situarse ante la tarea intelectual que le demanda la resolución de una situación matemática. Las observaciones y reflexiones que presenta el matemático están fundamentalmente basadas en el examen detenido de sus propias experiencias en el intento de pensar mejor en el campo de la matemática, en el intercambio de ideas con compañeros así como en la exploración atenta de sus formas de pensar y de sus

[88] MICHELET (1988) citado por CASTRO, E. y CASTRO, E. (1997) Op. Cit. Pág. 95.

[89] GUZMÁN, M. (1994). PARA PENSAR MEJOR. Pág. 31-81. Ediciones Pirámide. Madrid.

alumnos en la universidad, en el estudio pausado de las grandes obras de los clásicos en el arte de intentar hacer más eficaz la utilización del dinamismo mental del hombre, como Descartes, Bacon, Balmes, Polya... , y en el seguimiento cercano de la producción sobre el tema.

La actitud adecuada

Frente el desafío de resolver un problema caben diversas actitudes negativas que pueden obstaculizar el avance: *miedo a lo desconocido, nerviosismo* a tratar de echar a andar, *prisa por acabar* cuanto antes y *cierta desazón ante la prueba*. Para contrarrestar estas amenazas, según Guzmán (1994), una actitud sana y adecuada es:

Confianza. Ante un problema concreto hay que pensar: "es nuevo para mí, pero muchos otros han pasado antes por él o por otros semejantes. Con seguridad yo también puedo".

Paz, tranquilidad. Sin prisas. En cualquier tarea intelectual es conveniente evitar en lo posible ser llevado por la prisa, y para cuando esto resulte inevitable y las tomas de decisión rápidas resulten insoslayables, es necesario prepararse con un entrenamiento adecuado.

Disposición de aprender, curiosidad. La situación en la que un problema coloca al resolutor, puede constituir, desde esta mirada, una verdadera oportunidad, no una amenaza.

Gusto en la actividad mental, gusto por el reto. Frente a la actividad que un problema va a proporcionar al resolutor, éste puede decirse, con toda verdad: "Va resultar muy satisfactorio. Lo puedo pasar muy bien. Como en un paseo por el monte, tal vez quede al final cansado, pero ciertamente saldré enriquecido y estéticamente satisfecho, si lo enfoco con el espíritu adecuado.

Atención a los posibles bloqueos. Se podría decir con bastante justificación que los que sobresalen en un cierto campo son aquellos que han logrado encauzar adecuadamente un conjunto de sus talentos que colabora armoniosamente en una dirección determinada. Para el logro de tal aptitud es necesario liberarse de los bloqueos del pensamiento que impiden el ejercicio de tanta potencia.

Los bloqueos

Guzmán, M., (1994) explora algunos tipos de bloqueos más comunes a partir de la distinción en tres grupos: *bloqueos de origen afectivo, bloqueos de tipo cognoscitivo* y *bloqueos culturales y ambientales*.

Bloqueos de origen afectivo. En este grupo se encuentra: la apatía, abulia, pereza ante el comienzo, los miedos (miedo al fracaso, miedo al ridículo, miedo al examen), las ansiedades y la repugnancia.

Bloqueos de tipo cognoscitivo. Aquí están : las dificultades en la percepción del problema, la incapacidad de desglosar el problema, los bloqueos en el ataque del problema (esto tiene relación con *la información* que tenga el resolutor sobre problema semejantes al que tiene que resolver), la visión estereotipada, la tendencia al juicio crítico y la rigidez mental.

Bloqueos culturales y ambientales. Se incluyen en este conjunto: la sabiduría popular (son los consejos del sentir ambiental . Por ejemplo: "busca la respuesta correcta ", "no es lógico", "sigue las normas" y "hay que ser prácticos") y las ideas inertes (las ideas que se reciben y no se utilizan. Por ejemplo: hacer largas divisiones con papel y lápiz cuando hoy se cuenta con calculadoras).

La consideración de las actitudes matemáticas y los bloqueos presenta a las matemáticas como un tipo de conocimiento que *plantea determinadas exigencias cognitivas (en este caso, actitudes)* y *obstáculos de distinto tipo*.

1.9. Las matemáticas y la cultura

1.9.1. Las matemáticas como objeto cultural

Para finalizar quiero destacar la *condición de objeto cultural* de las matemáticas, como herramienta de trabajo inserta en un proceso histórico-social donde es producida y que ella ayuda a producir.

Como muestra de tal distinción, veamos algunos ejemplos[90]: es probable, que el carácter utilitario de la geometría egipcia, haya surgido de la presión de las necesidades prácticas. Según Heródoto, "el rey de Egipto, tenía repartida la tierra entre los egipcios, dándole a cada uno una porción igual y rectangular de la tierra, con la obligación de pagar por un año cierto tributo. Si alguna porción era disminuida por el río, el rey enviaba a medir la tierra para hacer pagar el tributo sólo de lo que hubiese quedado de tierra. Yo creo que allí nació la geometría y que después pasó a los griegos".

En la sociedad griega, que tenía esclavos para trabajar, surgió una clase dirigente que pudo alejarse de los problemas prácticos y dedicarse a las especulaciones intelectuales y artísticas. La estructura social fue sin duda la base de su gusto por las abstracciones.

En la India, la sociedad de actividad pastoril, nómada con constantes invasiones de otros pueblos y frecuentes alteraciones político-sociales, puede ser asociada a una mayor necesidad de comunicación escrita y a una necesidad inmediata de adaptación a nuevas situaciones. Su sistema de numeraciones, que incluía el cero de posición para la representación de grandes números, sólo fue usado en el mundo occidental medio milenio después de su creación.

Estos ejemplos, señalan a las matemáticas como producto de una actividad humana desarrollada en el marco de una cultura[91].

---

[90] los ejemplos son citados por CHEMELO, G. (1992). Op.Cit. Pág. 61 - 62

[91] Cultura entendida en el sentido que propone Tylor (1871): "La cultura o civilización, tomada en un sentido etnográfico amplio, es esa totalidad compleja que incluye conocimientos, creencias, artes, modalidades, leyes, costumbres y cualesquiera otras capacidades y hábitos adquiridos por el hombre

En este sentido , se presenta a *las matemáticas como un conocimiento cultural*

También esta condición de objeto cultural de la matemática, que es posible reconocer en pueblos y productos muy alejados en el tiempo, pone en evidencia dos características de la matemática.

La primera distingue a la matemática como *un conocimiento no selectivo; en* contraposición a una visión de *la matemática hermética, una ciencia de los elegidos*[92].

La segunda característica esta vinculada a la relación de dependencia de la matemática del entorno cultural y, consecuentemente, el impacto de la matemática en dicho entorno.

1.9.2. Las relaciones de las matemáticas con el entorno cultural

El reconocimiento de la dependencia de la matemática con el entorno cultural no data de muchos años. Ya que el criterio general mantenía lo contrario.

"**Después de todo, se argumentaba "menos por menos es igual a más", en todas partes, y los triángulos en cualquier lugar del mundo tienen ángulos que suman 180 grados en total. Sin embargo, este punto de vista confundía la "universalidad de la verdad" de las ideas matemáticas, con la base cultural de este conocimiento. De acuerdo en que esas afirmaciones son ciertas en cualquier parte del mundo, ya que las ideas se descontextualizan y abstraen de manera tal que "obviamente" se pueden aplicar en cualquier sitio. Pero, ¿de dónde surgen los números negativos? ¿Por qué los ángulos de un triángulo suman 180º y no 100º?. Porque las ideas matemáticas tienen una historia cultural. Ese el porqué. Las ideas religiosas no son diferentes y, desde luego, podemos fácilmente**

---

como miembro de la sociedad.". Citado por BISHOP, A. J. (1999). ENCULTURACIÓN MATEMÁTICA. Pág. 21. Editorial Paidós. Barcelona.

[92] Mito que se traduce en la enseñanza en la justificación de los privilegios y la consecuente selección de estudiantes.

reconocer distintas religiones en diferentes culturas. ¿Podremos también reconocer la existencia de distintas matemáticas" (Bishop, 1988 b)[93].

De este modo, Bishop, A.J (1988) plantea el tema de la dependencia de la matemática con el entorno, citando además una serie de fuentes de información que aclaran de forma convincente que las matemáticas que nosotros conocemos son un hecho cultural, y que otros grupos culturales han creado ideas que claramente son "otras matemáticas". Es decir, que *todos* los grupos culturales desarrollan matemáticas, igual que todos los grupos desarrollan lenguaje, religión, juegos y arte.

Además, todos los grupos culturales desarrollan sus propios lenguajes, religiones, etc. De la misma forma lo hacen con sus propias matemáticas. Así, a las diferentes sociedades y culturas le corresponden distintos tipos de productos matemáticos. Como consecuencia, se puede *reconocer la existencia de diferentes matemáticas.*

Esta situación plantea, una visión de las matemáticas con *diferentes significados* y, posiblemente, con *diferentes modos de acceso y producción de conocimiento* según los grupos culturales

En la segunda característica, incluí el impacto de la matemática en el entorno cultural. Sobre este rasgo me referiré a continuación.

1.9.3. El impacto de las matemáticas en el entorno cultural

El impacto de la matemática en nuestro entorno cultural es evidente. Nuestros artefactos mecánicos, eléctricos, químicos, son leyes matemáticas encarnadas a través de la poderosa tecnología que disfrutamos.

Nuestra arquitectura revela estructuras matemáticas subyacentes. Nuestros sistemas de organización manifiestan esquemas matemáticos que les sirve de soporte. Nuestros medios de información y de comunicación son cada vez más potentes gracias a los avances de la informática, que aúna de forma espectacular los progresos

[93] BISHOP, A. J. (1988) .Op. Cit. Pág. 123

matemáticos y tecnológicos. Incluso nuestra música, nuestro arte en general, va siendo fuertemente impregnado e influenciado por el sentido matemático.

Lo revelan los hechos, la ciencia y la tecnología están invadidas por ideas matemáticas. Es así como en nuestro mundo, cada vez más tecnológico, la matemática ha sido desarrollada para servir a las necesidades de ciencia y la tecnología, bien de manera directa, bien indirectamente a través de estructuras sociales creadas para potenciarla[94].

Pero, ¿cómo se complementa esta idea de la matemática como objeto cultural y la matemática en la tecnología?. La matemática como fenómeno cultural (Bishop, 1999) nos ofrece una manera de hacerlo.

White (1959)[95] argumenta que "**las funciones de la cultura son, por un lado, relacionar al hombre con su entorno y, por otro, relacionar al hombre con el hombre"(**Pág.8) y agrupa los componentes de la cultura en cuatro categorías:

Ideológica: se compone de creencias, depende de símbolos, filosofías.

Sociológica: costumbres, instituciones, normas y pautas de comportamiento Interpersonal.

Sentimental: actitudes, sentimientos relacionados con personas, comporta – miento.

Tecnológica: fabricación y empleo de instrumentos y utensilios.

Además de mostrar que estos cuatro componentes están relacionados entre sí, White argumenta convincentemente[96] que **"el factor tecnológico es el básico; todos los demás dependen de él. Además, el factor tecnológico determina, por lo**

[94] Esta situación también se proyecta en la enseñanza de la matemática. La enseñanza de la matemática se ha ido gradualmente convirtiendo más y más en preparación matemática, insistiendo en instruir a los alumnos en cómo, mediante métodos matemáticos correctos, obtener resultados adecuados. ha dado como resultado una preparación muy selectiva. Lo que ha dada como resultado una preparación selectiva ya que considera sólo a aquellos estudiantes que tienen la habilidad de obtener muchas respuestas correctas .

[95] WHITE (1959) Citado por BISHOP, A.J. Op.Cit. Pág.34-35

[96] Plantea un argumento teórico que no lo voy a explicitar porque, según mi entender, no es necesario

menos de una manera general, la forma y el contenido de los factores social, filosófico y sentimental" (pág. 19).

Naturalmente, la idea de tecnología cultural no se debe limitar a la maquinaria o a utensilios como hachas, palas o cuerdas. Algunos autores como Bruner[97] argumentan que el hombre ha evolucionado "vinculándose con sistemas instrumentales nuevos y externos y no mediante cambios morfológicos manifiestos" (`pág.1.). Según Bruner, hay tres categorías de sistemas instrumentales. En la tercera están los amplificadores de la capacidad de razonamiento; y el desarrollo humano crucial en esta categoría está relacionado con los símbolos. La matemática es un ejemplo por excelencia de "amplificador de la capacidad de razonamiento del ser humano"" y, como fenómeno cultural, tiene un importante componente "tecnológico", empleando la terminología de White. *La matemática es, en esencia, una "tecnología simbólica"* (Bishop, A.J.).

Así, las matemáticas como objeto cultural pueden ser *entendidas* como una *tecnología simbólica*.

Esta tecnología simbólica permite al individuo controlar recursos, prestigio y deferencia dentro de la cultura. **"Si cultivamos estrategias y estilos pertinentes al empleo de tecnología simbólica (las matemáticas), tendremos a disposición la correspondiente gama de tecnologías. Si no cultivamos aptitudes matemáticas, el resultado es una "incompetencia funcional" y la incapacidad de emplear este tipo de técnica"** (Cole y Bruner, 1971)[98].

Con el desarrollo de este apartado finalizo la caracterización de las matemáticas. Creo haber abordado con más o menos profundidad los distintos aspectos de las matemáticas.

En cada uno de los nueve aspectos propuestos fui considerando – con líneas laterales - la visión o presentación de las matemáticas que plantean las características de esta disciplina. Estas visiones o presentaciones se proyectan en la enseñanza y

[97] BRUNER. Citado por BISHOP, A.J. Op.Cit. Pág.36

[98] COLE Y BRUNER, 1971. Citado por BISHOP, A.J. Op. Cit. Pág.36

aprendizaje de las matemáticas configurando distintas propuestas didácticas. A ésta últimas subyacen formas de concebir la enseñanza y el aprendizaje. Esta situación se reflejará en el capítulo siguiente.

Capítulo 2

La enseñanza y El aprendizaje de las Matemáticas

Para abordar el tema de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es necesario preguntarse al mismo tiempo qué son las matemáticas, en qué consisten y para qué sirve hacer matemáticas. Las repuestas a estas preguntas irán armando una visión de las matemática como ciencia y del modo de conocerla – modelo epistemológico – que indudablemente forma parte de su modo de enseñanza y aprendizaje– modelo didáctico.

En el capítulo precedente he desarrollado una caracterización de las matemáticas donde puse en evidencia que no existe una única respuesta a estas preguntas. Las distintas visiones de la filosofía de las matemáticas proponen diferentes respuestas . De este modo se plantea la coexistencia de distintos modelos epistemológicos de las matemáticas. A su vez, he considerado la existencia de relaciones entre epistemología y enseñanza / aprendizaje. Tiene sentido entonces plantear la coexistencia de diferentes modelos didácticos. Éstos suponen distintos modos de concebir la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En el presente capítulo de ocuparé de ellos.

2.1. Los niveles de análisis de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

El tratamiento de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas puede hacerse desde diferentes conceptualizaciones de la educación y, considerando que éstas se concretan en cada instrumentación didáctica, comenzaré por explicitar aquéllas de las cuales parto.

Entiendo a la educación como una cuestión social y que la tarea del docente en el aula está inmersa en un contexto institucional y social que condiciona y le da significado. Es posible, entonces, tomar distintos niveles de análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática que se dan en el aula: el de la sociedad, el de la escuela, el del aula misma.

Un análisis a *nivel social* implica considerar que la enseñanza de la matemática está influenciada por las expectativas que de ella tiene la sociedad. En este nivel de análisis se plantean estas, entre otras tantas , preguntas : ¿los jóvenes salen preparados de la escuela para el mercado de trabajo?, ¿adquieren en las escuelas las mínimas herramientas matemáticas que les permitan desenvolverse en el mundo cada vez más complejo?, ¿está la enseñanza de la matemática orientada de tal modo que hace cierta la igualdad de oportunidades?.

Respecto de las consideraciones a *nivel institucional* es posible preguntarse: ¿en qué medida la escuela funciona como facilitadora u obstaculizadora de los aprendizajes?, ¿de qué manera el estilo de cada escuela – rígido, flexible, democrático, autoritario – determina las características del proceso de enseñanza y aprendizaje?, o también ¿cuáles son las características del rol docente y en qué medida la escuela lo condiciona?

El último es el *nivel del aula.* En este nivel se debaten las siguientes cuestiones: a) en relación al aprendizaje: ¿qué es aprender? , ¿qué es saber matemáticas?, ¿ cómo aprender?, ¿en qué orden se deben secuenciar los contenidos de aprendizaje?, b) en relación a la enseñanza: ¿qué es enseñar?, ¿cómo enseñar?, ¿cómo ayudar a superar las dificultades?.

Por el interés de este trabajo, no abordaré directamente los dos primeros niveles de análisis –social e institucional –de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Pero creo que es importante señalarlos porque entiendo que la didáctica incluye estas dimensiones de análisis; el ámbito institucional de la didáctica de las matemáticas trasciende los límites de la escuela, ya que ciertas instituciones e individuos interactúan alrededor de tareas que hacen necesaria la creación, la transformación, el intercambio y la difusión de conocimientos matemáticos. Me alejo de este modo de las concepciones de la didáctica de las matemáticas que consideran que sólo les compete estudiar y proponer técnicas y métodos de enseñanza. Entonces, aquí, el abordaje de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, será en el nivel del aula.

2.2. Las relaciones entre epistemología y enseñanza /aprendizaje: una propuesta

Según Steiner (1987)[99], **"la forma de concebir la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas – más específicamente: los fines y objetivos (taxonomías), los programas, libros de texto, currícula, metodologías de enseñanza, principios didácticos, teorías de aprendizaje, diseños de investigación en educación matemática (modelos, paradigmas, teorías, etc.), e igualmente las concepciones de los profesores sobre las matemáticas y la enseñanza de las matemáticas – llevan con ellos o descansan sobre una visión particular epistemológica y filosófica de las matemáticas, aunque de manera implícita."**.

En consonancia con este planteamiento, Gómez Chacón, I.M. (2000)[100] propone un marco teórico centrado en las visiones de la matemática y del proceso de enseñanza / aprendizaje que giran en torno de tres elementos: la matemática, el alumno y el contexto en que este accede al conocimiento.

[99] Citado en FLORES MARTÍNEZ, P. (1998). Op. Cit. Pág. 16.

[100] GOMEZ CHACÓN, I.M (2000). Op. Cit. Pág.182.

EPISTEMOLOGÍAS	VISIÓN DE LA MATEMÁTICA[101]	VISIÓN DE LA ENSEÑANZA/ APRENDIZAJE
OBJETIVISTAS Presentan una visión estática de la matemática como un conjunto de verdades eternas y universales que pueden ser descubiertas.	**La matemática como descubrimiento. Epistemologías realistas.** ***Matrices Teóricas: La pitagórica y la platónica***	• **Visión del aprendizaje** * Aprender es recordar - El Menón de Platón - Sócrates y la Mayéutica. - Polya en resolución de problemas.
		• **Visión del aprendizaje** * Aprender es recordar - El Menón de Platón - Sócrates y la Mayéutica. - Polya en resolución de problemas. * Aprender es adquirir la capacidad de comportarse de una determinada manera: Conductismo - Skinner, 1970 - Enseñanza

[101] En esta columna de la matriz original figuran los nombres de las distintas corrientes del pensamiento con la visión de las matemáticas que presenta cada una de ellas. Como en este trabajo la presentación de las matemáticas desde cada corriente está en el capítulo anterior aquí sólo identificaré las corrientes del pensamiento.

		programada - Objetivos operativos • **Visión de la enseñanza** El profesor como conductor de la actividad de los alumnos
CENTRADAS EN EL SUJETO Presentan las ideas matemáticas en relación con la razón y colocan a los sujetos en el centro de la actividad mental de construcción del conocimiento	**La matemática como creación de la razón.** - **Epistemologías racionalistas** - *Epistemologías formalistas* - **Epistemologías intuicionistas**	• **Visión del aprendizaje** * Aprender es procesar información. Cognitivismo - Ausubel (1976) - Piaget (1976) - Aprendizaje significativos - Modelo de psicología del procesamiento de la información • **Visión de la enseñanza** **El centro del proceso de enseñanza/aprendizaje se pone en el alumno.** El profesor sabe que los conceptos matemáticos son

		difíciles de captar en su totalidad y que el proceso de resolución de problemas es creativo y perceptible, que exige método y necesita de un lenguaje para expresarse. El profesor como facilitador. Se tiene en cuenta los errores
CENTRADAS EN LA CONSTRUCCIÓN SOCIAL DEL CONOCIMIENTO	- *Epistemologías falibilistas* - *Epistemologías empiristas*	• **Visión del aprendizaje** Construcción social del conocimiento matemático. Privilegian el medio social como parte integrante del proceso de cambio cognitivo. Vigotski Comunicación e interacción en el aula. • **Visión de la enseñanza** Profesor como mediador.

Surgen así, teóricamente, tres modelos didácticos en las matemáticas[102]. El criterio elegido para la clasificación es la conexión que existe entre los distintos modos de

[102] Digo teóricamente porque en la práctica se presentan modelos didácticos que se originan por la combinación de elementos de estos tres.

presentar y conocer las matemáticas – modelos epistemológicos - y la concepción intrínseca del aprendizaje sostenida por las teorías psicológicas del aprendizaje.

Pérez Gómez, A.I (1989) [103] distingue, por sus potenciales implicaciones didácticas, dos amplios enfoques en la interpretación del aprendizaje: las teorías asociacionistas y las teorías mediacionales. Cada una de ellas con sus diferentes corrientes; el conductismo pertenece a las teorías asociacionistas y la psicología genético-cognitiva (Piaget, Bruner, Ausubel, Inheler), psicología genético-dialéctica (Vigotsky, Luria, Leontiev, Rubinstein, Wallon) y la teoría del procesamiento de información pertenecen a las teorías mediacionales.

La diferencia sustancial es que la primera familia – teorías asociacionistas – concibe al aprendizaje en mayor o menor grado como un proceso ciego y mecánico de asociación de estímulos y respuestas provocado y determinado por las condiciones externas, ignorando la intervención mediadora de variables referentes a la estructura interna. La explicación del influjo de las contingencias externas sobre la conducta observable, y la organización y manipulación de tales contingencias para producir, en consecuencia, las conductas deseadas, son la clave del arco de esta teoría de aprendizaje.

La segunda familia, por el contrario, considera que en todo aprendizaje intervienen, de forma más o menos decisiva, las peculiaridades de la estructura interna. El aprendizaje es un proceso de conocimiento, de comprensión de relaciones, donde las condiciones externas actúan mediadas por las condiciones internas. La explicación de cómo se construyen condicionadas por el medio, los esquemas internos que intervienen en las respuestas conductuales es su problema capital y un propósito prioritario.

Por los objetivos que persigue este trabajo no voy a detenerme en la explicación de los principios y supuestos que configuran estas teorías psicológicas del aprendizaje. Ellos se manifestarán en el análisis de los tres modelos didácticos de las matemáticas. En esta dirección me dirijo a continuación

---

[103] PÉREZ GÓMEZ, A. I. (1989) . En SACRISTAN, J. G.y PÉREZ GÓMEZ, A. I. COMPRENDER Y TRANSFORMAR LA ENSEÑANZA. Pág.36. Ediciones Morata. Madrid.

2.3. Los modelos didácticos

2.3.1. Los modelos y su ubicación en el tiempo

Los modelos didácticos se corresponden, además, con tres períodos diferenciados por la agenda de las didácticas de las matemáticas. Al decir de Chemello, G. (1992)[104]: el tradicional, el moderno y el actual.

El período tradicional – identificado como *matemática tradicional* - se inicia con la inclusión de las matemáticas en los programas escolares, desde los orígenes de la escuela y se prolonga hasta comienzos de los años 50. En ese momento había consenso en todo el mundo respecto de los resultados de esa enseñanza: los adultos no recordaban casi nada de lo aprendido, y los estudiantes rechazaban esta disciplina por difícil y aburrida.

La sociedad, conmovida por los impactos tecnológicos quiso renovar la formación de sus ciudadanos y que adquirieran, en la escuela, nuevos conocimientos y sobre todo nuevas capacidades para continuar aprendiendo fuera del sistema formal. El miedo de retrasarse respecto de las producciones científicas, sumado la crisis de fundamentos de las matemáticas[214], generaron en los matemáticos la necesidad de introducir las nuevas producciones. Se propone entonces un nuevo plan, el de la llamada *matemática moderna*.

A partir de los años 70 en Europa y EEUU, y una década después en nuestro país, este plan entra en crisis pues no logra los resultados esperados. La enseñanza de la matemática cae en nuevos debates teóricos; en las aulas subsisten prácticas que muestran concepciones de períodos anteriores y, a su vez, aparecen nuevas propuestas que se apoyan en conclusiones de nuevos caminos de investigación en matemáticas. Estos nuevos caminos teóricos orientan la *matemática actual.*

La matemática tradicional, la moderna y la actual se sustentan en un modelo tanto del conocimiento matemático – modelo epistemológico - como del propio sistema de enseñanza. Se me aparece así la necesidad de describir la enseñanza de las

[104] CHEMELLO, G. (1992). Op. Cit. Pág.69

[214] En el capítulo 1 está explicitada esta crisis.

matemáticas en los tres periodos. Esta descripción mostrarán la formas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que conciben estos modelos que, por isomorfismo, denominaré *modelo tradicional, modelo moderno y modelo actual*.

2.3.2. Consideraciones teóricas que orientan la descripción de los modelos

La primera consideración es señalar que para describir los modelos didácticos me apoyaré en la idea de *contrato didáctico*, tal como Brousseau lo ha definido:

"conjunto de comportamientos (específicos) del maestro que son esperados por el alumno, y conjunto de comportamientos del alumno que son esperados por el maestro, y que regulan el funcionamiento de la clase y las relaciones maestro –alumnos-saber, definiendo así los roles de cada uno y la repartición de las tareas: ¿quién puede hacer qué?, ¿quién debe hacer qué?, ¿cuáles son los fines y los objetivos?..." [106]

Sin olvidar que el contrato didáctico no rige todos los aspectos de la relación maestro –alumnos- saber. Existe primero un contrato más general y visible, el *contrato pedagógico,* que regula las interacciones entre alumnos y profesores que no dependen del contenido de estudio. A su vez, el contrato pedagógico aparece como una parte específica de un contrato más amplio, el *contrato escolar*, que gobierna la escuela.

Así, podré observar las situaciones didácticas a través de las relaciones que se "juegan" en el sistema didáctico (maestro-alumnos-saber) y que dan lugar a tres modelos de interacción - *modelo normativo* (centrado relación docente –objeto de conocimiento) , *modelo incitativo (*centrado en la relación alumno –docente) y *modelo aproximativo* (alumno – objeto de conocimiento) (Charnay, R.) [107] - y enfocar los debates (ya enunciados en el punto 10.) en torno a cada uno de ellos.

---

[106] Extraído de CHARNAY, R. APRENDER (POR MEDIO) DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS. Pág.54. En Parra, C. e Sainz, I. (Comps.). Didácticas de Matemáticas. Cap.III. Ediciones Paidós. Buenos. Aires.

[107] Extraído de CHARNAY, R. Op.Cit. 54-55

La segunda consideración es que estos debates suscitan la concurrencia de dos disciplinas de indagación científica bien diferentes. Por un lado, tengo la enseñanza de las matemáticas , cómo se enseñan , y por otro, el aprendizaje de las matemáticas, cómo se aprenden.

Las teorías del aprendizaje describen cómo el sujeto aprende, es decir, cómo se apropia y construye el conocimiento y, en función de ello, modifica su conducta y avanza en su comprensión. Las teorías instructivas tratan de emitir conclusiones sobre cómo la enseñanza debería llevarse a cabo. Unas teorías son descriptivas y las otras prescriptivas, y las conexiones entre ambas deben o deberían estar consolidadas.

Considerando este planteo, el tratamiento de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas debería ser por separado. Pero en la dinámica del aula ambas dimensiones se dan juntas. Por, ello, en la descripción que realizaré del modelo tradicional, modelo moderno y modelo actual ambos ejes se entrecruzan.

Las características particulares sobre los distintos aspectos de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas tomo como referencia un trabajo en tal sentido realizado por Chemello, G. (1992)[108].

2.4. Modelo tradicional

Este modelo está vinculado con la enseñanza tradicional de la matemática. La enseñanza tradicional se funda en los principios de la escuela tradicional y se asocia al modelo de interacción denominado normativo.

Aquí, *, las matemáticas son pensadas como una colección de técnicas y tecnologías aisladas. En consecuencia, son concebidas como una organización estática y determinadas de antemano*

Dentro de este marco, se interpretan del siguiente modo las preguntas que se debaten en el nivel del aula.

[108] CHEMELLO, G. (1992). Op. Cit. Pág.70-97

2.4.1. Qué es aprender, cómo aprender y qué es saber matemáticas.

La concepción de aprendizaje que sustenta este modelo es la derivada de la psicología empirista[97]. La psicología empirista concibe que la noción de las cosas se deriva de imágenes mentales, intuiciones y percepciones. El origen de las ideas es la experiencia sensible y el sujeto tiene un papel insignificante en la adquisición de conocimientos, es una tabla rasa sobre la que éstos se van imprimiendo. De esta forma, el conocimiento procede de los sentidos que dotan a la mente de imágenes, que se asocian entre sí según tres leyes: la contigüidad, la similitud y el contraste. Estos son los tres principios básicos del pensamiento y del aprendizaje en el empirismo humano y , a su vez, el núcleo central de la teoría psicológica del conductismo (Pozo , 1994)[109].

"Dos son los supuestos fundamentales en que se asientan las diferentes técnicas y procedimientos didácticos del conductismo: por una parte, la consideración del aprendizaje como un proceso ciego y mecánico de asociación de estímulos, respuestas y recompensas; por otro, la creencia en el poder absoluto de los reforzadores siempre que se apliquen adecuadamente sobre unidades simples de conductas (Pérez Gómez, 1989) [110].

Apoyado en estos principios, el aprendizaje es concebido en forma receptivista, *aprender matemáticas se reduce a memorizar, ejercitar y repetir.*

En este sentido, se considera que con la memorización se logra la conservación del conocimiento y que el ejercicio (práctica repetitiva) es la respuesta a la fijación del conocimiento en la memoria.

---

[97] Hay que recordar que en el platonismo, los matemáticos son científicos empiristas, como los geólogos. Nada pueden inventar, porque todo está ya presente. Todo cuanto pueden hacer es descubrir. El hombre al descubrirlas no desarrolla las matemáticas sino el conocimiento matemático que tiene de ellas.

[109] POZO, J.I. (1994). TEORÍAS COGNITIVAS DEL APRENDIZAJE. Pág.25. Ediciones Morata.Madrid.

[110] PÉREZ GÓMEZ, A. I. (1989) . En SACRISTAN, J. G.y PÉREZ GÓMEZ, A. I. COMPRENDER Y TRANSFORMAR LA ENSEÑANZA. Pág.36. Ediciones Morata. Madrid.

Una figura representativa de este modo de concebir el aprendizaje de las matemáticas es el psicólogo asociacionista E. L. Thorndike, quien , en cierta manera, **"es el "padre fundador" de la psicología de la enseñanza de las matemáticas**"(Resnick y Ford, 1998)[111].

Thornidke (1922) postuló cierto número de leyes del aprendizaje que desde entonces han promovido la discusión y los debates y dos de las cuales son reproducidas concisamente por Orton (1998) [112].

(1) La ley del ejercicio

La respuesta a una situación se asocia con esa situación y cuánto más se emplee en una determinada situación, más fuertemente se asociará con ésta. Por otro lado, el uso infrecuente de la respuesta debilita la asociación.

La retención de las tablas de multiplicar , la práctica intensiva de un mismo tipo de ejercicios y la palabra clave para asociar la cuenta al problema son tres de los muchos ejemplos que se conectan con esto.

(2) La ley del efecto[113]

Las respuestas acompañadas o inmediatamente seguidas por una satisfacción ofrecen mayor probabilidad de repetirse cuando se produzca de nuevo la situación, mientras que las respuesta acompañadas o inmediatamente seguidas por la incomodidad tendrán menor probabilidad de repetirse.

Son muchas las maneras que el alumno puede obtener satisfacción o incomodidad frente a una respuesta. El modo de proporcionar satisfacción o

---

[111] RESNICK, L.B y FORD, W.W (1998). LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS Y SUS FUNDAMENTOS PSICOLÓGICOS. Pág. 25. Editorial Paidós. Barcelona.

[112] ORTON, A. (1998). DIDÁCTICAS DE LAS MATEMÁTICAS. Pág.56-57. Ediciones Morata. Madrid.

[113] También conocida como principio de refuerzo.

incomodidad no necesariamente es un modo intrínseco también puede ser extrínseco. Por ejemplo, la respuesta correcta a un ejercicio brinda satisfacción y el alumno se ve reforzado y, muchas veces, recompensado con una buena nota. La respuesta incorrecta puede tener como consecuencia un castigo, desde luego, en forma de una nota baja, que produzca incomodidad y que, teóricamente, determine que no vuelva a repetirse semejante clase de trabajo.

Según Thornidke, cuando se daba una respuesta determinada a un estímulo dado, y a dicha respuesta seguía una recompensa, entonces se empezaba a formar un vínculo o asociación entre el estímulo y la respuesta. Cuánto más frecuentemente se recompensaba un par estímulo – respuesta, más fuerte se hacía el vínculo. Por tanto, la ley del efecto sugería que uno de los medios importantes del aprendizaje humano era la práctica seguida de recompensas.

Traducido esto al proceso de enseñanza / aprendizaje de las matemáticas, un buen sistema de ejercicios y de práctica requiere presentar los vínculos de forma cuidadosamente programada, para que los vínculos más importantes se practiquen con más frecuencia, y los menores, con menos frecuencia. La importancia está determinada por la escala de dificultad.

De este modo, a*prender matemáticas es alcanzar una posición dentro de una escala y saber matemáticas es alcanzar un determinado nivel en esa escala.*

Esta forma de concebir el aprendizaje de las matemáticas está asociada a definición de las matemáticas como un conjunto de técnicas para realizar cálculos. Sustentado esto en la perspectiva conductista, confiar un conocimiento a la memoria es importante para su tratamiento eficaz , por ello el aprendizaje memorístico es útil.

Así , las *exigencias cognitivas en el aprendizaje de las matemáticas en este modelo son dos: retención y memorización y empleo de algoritmos (o técnicas)* [114].

---

[114] Planteo la clasificación de las actividades mentales inmersas en el aprendizaje de las matemáticas desde ORTON, A . (1988). DIDÁCTICAS DE LAS MATEMÁTICAS. Pág.38-45. Ediciones Morata. Madrid.

Promoviendo de esta manera, al decir de Skemp (1976)[115], una comprensión instrumental, y no una comprensión relacional, con base en un conocimiento instrumental de las matemáticas.

El *conocimiento instrumental* de la matemática, es conocimiento de un conjunto de "planes preestablecidos" para desarrollar tareas matemáticas. La característica de estos "planes" es que se prescriben procedimientos paso a paso a ser seguidos en el desarrollo de una tarea dada, en los cuales cada paso determina el siguiente. El *conocimiento relacional* de la matemática, en contraste, está caracterizado por la posesión de estructuras conceptuales que permiten a quien las posee construir diferentes planes para desarrollar una tarea asignada (Skemp , 1978)[116].

2.4.2. Qué es enseñar y cómo enseñar

En este modelo, los *objetivos* de la enseñanza de la matemática están concebidos como fines de la misma, no como objetivos de aprendizaje o como aprendizajes a los que deben arribar los educandos . Por ejemplo: el conocimiento aritmético posibilitará el desarrollo de las siguientes facultades psíquicas: la atención, el razonamiento, el juicio, la reflexión, la memoria.

Es decir, que las intenciones educativas que expresa el curriculum[117], se refieren a los contenidos sobre los que versa el aprendizaje. **En su versión más pura, la vía de acceso por los contenidos supone que las intenciones educativas se concretan a partir de un análisis de los posibles contenidos de la enseñanza, seleccionando los que poseen un mayor valor formativo. Se parte pues del principio de que los**

---

[115] ORTON, A . (1988). Op.Cit. hace referencia a esta distinción. Pág.44

[116] SKEMP, R. (1978). Citado en VILANOVA, S. y Otros. CONCEPCIONES Y CREENCIAS SOBRE LA MATEMÁTICA. UNA EXPERIENCIA CON DOCENTES DEL 3º CICLO DE LA EGB. Revista Iberoamericana de Educación. Experiencias e Innovaciones. http:/www.campus-oei.org/revista/delectores.htm.

[117] Refiero al curriculum en el mismo sentido que lo hace Coll (2001): "el proyecto que preside las actividades educativas, precisa sus intenciones y proporciona guías de acción adecuadas y útiles para los profesores que tienen la responsabilidad directa de su ejecución. Para ello, el curriculum proporciona informaciones concretas sobre qué enseñar, cómo enseñar y qué, cómo y cuándo evaluar. En COLL, C. (2001). PSICOLOGÍA Y CURRICULUM. Pág.31-32. Editorial Paidós. Buenos Aires.

contenidos – entendiendo por tales las materias concretas , los conocimientos con los que entra en contacto el alumno (Peterson, 1976) –poseen valores intrínsecos importantes para la formación y, por lo tanto, es tarea de la enseñanza seleccionarlos y organizarlos con el fin que el alumno pueda asimilarlo (...) ” (Coll, 2001)[118].

En este sentido, *las actividades de enseñanza/ aprendizaje* mediante las cuales se pone en contacto al alumno, así como *los resultados del aprendizaje*, *dependen y son subsidiarios a las matemáticas.*

Los *contenidos* son presentados como un listado de temas y capítulos, es decir el saber se presenta fragmentado y con abuso de detalles. El plan incluye aritmética y geometría euclidiana. Cada parte es enseñada por separado.

La disciplina es presentada como un conjunto de verdades inmutables, mostrando sólo los productos terminados sin dar idea de las dificultades que hubo que superar para construir cada noción. Estas se secuencian para su enseñanza según la lógica interna de la disciplina y la organización que la matemática tiene en el momento de seleccionar esos contenidos. Esta organización pluralista entiende que cada rama tiene sus propios métodos y objetos de estudio.

Así, el *cuerpo de conocimientos matemáticos que se tratan en la enseñanza no es unificado y es independiente del entorno cultural.*

Al no ser presentado como un cuerpo unificado se produce preponderantemente una configuración del conocimiento conocida como *conocimiento tópico*. **“(...) El énfasis está puesto más en nombrar correctamente el término aislado, que utilizarlo en determinada operación. Se enfatiza la ubicación del contenido en determinado orden y secuencia donde el orden se**

[118] COLL, C. (2001). Op. Cit. Pág.57. Aquí es importante señalar que en este modelo no se conciben los contenidos desde la visión flexible actual. Ahora los contenidos incluyen elementos de naturaleza diversas como hechos, conceptos, sistemas conceptuales, procedimientos, e incluso valores.

circunscribe exclusivamente en una relación de contigüidad entre los elementos" (Edwars, 1985) [119].

En consonancia con esta presentación, la enseñanza de la geometría comprende las definiciones de la figura geométrica, la descripción de los elementos, las construcciones y las fórmulas de superficie, perímetro y volumen. En la aritmética se incluye la enseñanza de las operaciones con números enteros y fraccionarios.

Los procedimientos convencionales de cálculo están presentados como los únicos posibles y aparecen con énfasis especial, lo que se traduce en un aprendizaje mecánico de algoritmos, sin que interesara su fundamentación ni su comprensión. Por ello,

* *La destreza en los cálculos es un objetivo de primer orden en la enseñanza*
* *el profesor se inclina a reducir el contenidos a las técnicas; los alumnos son enfrentados a objetos y deben usarlos como herramienta.*

Los problemas de geometría se reducen a la sustitución de valores en fórmulas de perímetro, superficie o volumen, y los de aritmética a la aplicación de las operaciones con números según modelos fijos de procedimientos – problemas tipos -. En ambos casos se propone un aprendizaje teórico inicial y luego una aplicación práctica de los mismos, lo que manifiesta que teoría y práctica como dos instancias separadas en la constitución de un conocimiento y como momentos sucesivos en su adquisición. Es decir que se distinguen en el aula el trabajo con la técnica y la tecnología.

Así , se sitúa al problema como *criterio del aprendizaje*[120]

---

[119] EDWARS, V. (1985). LA RELACIÓN DE LOS SUJETOS CON EL CONOCIMIENTO. Pág. 35. Parte de la Tesis de Maestría vinculada al Programa Interdisciplinario de Investigación en Educación.PIIE.

[120] Extraído de CHARNAY, R. Op. Cit. Pág. 57.

mecanismos
- * lecciones (adquisición)
- * ejercicios (ejercitación)

sentidos
- * problemas (utilización de los conocimientos para el alumno, control para el maestro)

Con esta ubicación de los problemas, se considera la resolución de problemas como un aspecto secundario dentro del proceso didáctico global. Se ignoran las tareas dirigidas a elaborar estrategias de resolución de problemas y, por lo tanto, los problemas tienen a ser trivializados y descompuestos en ejercicios rutinarios. La idea subyacente es que hay que partir de lo fácil, de lo simple, para acceder a lo complejo, y que un conocimiento complejo puede ser, para el aprendizaje, descompuesto en una serie de conocimientos fáciles de asimilar y que, finalmente, todo aprendizaje debe ir de lo concreto a lo abstracto.

"Una característica importante de este punto de vista radica en el supuesto implícito de que los problemas son algo ajeno a las teorías matemáticas o, en todo caso, no juegan ningún papel importante en su constitución. Los problemas pueden utilizarse entonces para aplicar, ejemplificar o consolidar los conceptos teóricos e, incluso, para motivarlos, introducirlos o justificarlos pero, en cualquier caso, estas funciones de los problemas son consideradas como "meramente pedagógicas" en el sentido negativo de "no constitutivas del conocimiento matemático" propiamente dicho. Se trata de concesiones hechas con la única finalidad de que el alumno adquiera un cuerpo de conocimientos que forman una teoría determinada de antemano; el proceso de constitución de esta teoría no sólo no se cuestiona , sino que puede ignorarse por completo" (Gascón, 1994)[121].

[121] GASCÓN, J. (1994). EL PAPEL DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS. Pág. 39. En Revista de Educación Matemática. Vol.6. Nº3.

De esta manera, *desde la enseñanza se ignora absolutamente los procesos de la actividad matemática como tal y, en consecuencia, no concede ninguna importancia – epistemológica ni didáctica – a la génesis y el desarrollo de conocimientos matemáticos*.

"Añadiré que uno de los defectos más graves (...) es el de considerar los problemas como si fuesen aislados y descontextualizados. Esto significa, por una parte, que los problemas se tratan individualmente y nunca como representantes de ciertas clases de problemas (excepto el caso trivial de las clases algoritmicas (...)) y, por otra, que se tiende a presentar los problemas separados de su contexto, sin ninguna conexión con el sistema (matemático o extramatemático) a partir del cual surgen de manera natural en el seno de una actividad matemática" (Gascón, 1994)[122]**.**

El aislamiento y la descontextualización de los problemas son características de este modelo didáctico

Las actividades de aprendizaje se reducen a la exposición verbal por parte del profesor, pues prima el verbalismo en detrimento de la observación, la reflexión y la experiencia vivida. Los estudiantes deben estar atentos, escuchar e imitar. Los errores son adjudicados a la distracción o a la poca capacidad de los estudiantes y, para evitarlos o corregirlos, se confía nuevamente en la repetición de ejercicios.

Esta interpretación del conflicto, del error o del problema en el proceso de aprendizaje escolar y las acciones que se desprenden por la ley del efecto se corresponden con la concepción que sustenta dicha interpretación. En este sentido, **"es lógico, preciso y coherente para el conductismo, eliminar el error y negar o invisibilizar el conflicto, ya que estos son una expresión de "conductas**

[122] GASCÓN, J. (1994). OP.Cit. Pág. 41.

desviadas" y, por lo tanto, deben ser eliminadas y sustituidas por las repuestas correctas en virtud del estímulo presentado (Boggino, 2000)[123]**.**

Desde esta perspectiva, el error es considerado como lo opuesto al aprendizaje y, consecuentemente, debe ser eliminado.

La lógica de interacción entre docentes y alumnos que plantea el modelo normativo – que excluye la explicitación de la elaboración de los alumnos - sumada a la forma de presentación de los contenidos ya descripta (conocimiento tópico) , produce una *relación de exterioridad* entre el alumno y el conocimiento matemático.

Esto significa que el alumno concibe el conocimiento matemático como problemático e inaccesible.

Por ello, demanda **"pistas que le permitan el acceso a la respuesta correcta, proceso que se "toma por" la apropiación del contenido que deja al sujeto en posición de exterioridad. (...) la relación se vuelve mecánica, exterior y "exitosa"** (Edwars, 1985)[124].

En este modelo , l*a evaluación* es concebida como actividad terminal del proceso de enseñanza/aprendizaje y es intrascendente respecto de este proceso. Sólo sirve para acreditar que el alumno ha adquirido ciertos mecanismos de cálculo y memorizado algunas definiciones.

En consecuencia, la evaluación se utiliza aquí con criterio sumativo, en orden de poner una calificación al alumno. Se la ubica como un acto final desprendido de las acciones propias de la enseñanza y el aprendizaje, contraponiéndose al principio de

---

[123] BOGGINO, N. (2000). APRENDIZAJE, OBSTÁCULO y DIVERSIDAD. En LA ESCUELA POR DENTRO Y EL APRENDIZAJE ESCOLAR. Pág. 37. Ediciones Homo Sapiens. Rosario- Santa Fe - Argentina

[124] EDWARS, V. Op.Cit.Pág.28.

que evaluación no es ni puede ser apéndice de la enseñanza ni del aprendizaje; es parte de la enseñanza y del aprendizaje (Celman, 1998)[125].

Así ,el papel de la evaluación de matemáticas es el de comprobación, de constatación, de verificación, por medio de pruebas o exámenes, de la memorización y mecanización de los contenidos para establecer la posición del alumno en la escala de valoración.

2.5. El Modelo Moderno

Este modelo de la enseñanza de las matemáticas se funda sobre los principios de la escuela nueva. La escuela nueva intenta ofrecer una alternativa en la transformación de la sociedad. Ella propicia el surgimiento de cuánto hay de bueno en la naturaleza del niño. La escuela se asienta sobre el respeto a sus necesidades físicas y psíquicas, y tiene en cuenta las leyes de la psicología infantil y los intereses y predisposiciones individuales en una atmósfera de respeto, de libertad, de actividad espontánea.

Bajo estos principios, el estudiante es el centro del proceso de enseñanza/aprendizaje y, en consecuencia, las situaciones didácticas se asocian con el modelo de interacción denominado incitativo.

En este modelo*, las matemáticas son pensadas como una estructura jerárquica de técnicas y tecnologías*

Considerando este marco, profesores y estudiantes dan los siguientes sentidos a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

---

125 CELMAN, S. (1998). ¿ES POSIBLE MEJORAR LA EVALUACIÓN Y TRANSFORMARLA EN UN HERRAMIENTA DE CONOCIMIENTO? Pág.37. E.n la evaluación de los aprendizajes en el debate didáctico contemporáneo. Editorial Paidós. Buenos Aires.

2.5.1. Qué es aprender , cómo aprender y qué es saber matemáticas

Las teorías mediacionales constituyeron un destacado jalón en la evolución de la enseñanza y aprendizaje de las ciencias. La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas no es ajena a esta situación e inicia su propuesta de cambio.

Un pilar en el que se asienta la propuesta de cambio es la psicología del desarrollo que permite conocer las posibilidades del niño a nivel intelectual y su evolución a medida que éste crece. La psicología genético-cognitiva aporta información que la pedagogía intenta incorporar: fundamentalmente la concepción de inteligencia y cómo ésta se constituye a partir de la acción. La orientación piagetiana es constructivista, frente al empirismo de la teoría de la formación exógena y al innatismo de la endógena. Para Piaget la inteligencia funciona por elaboraciones sucesivas de estructuras que se desequilibran hacia estados de mayor equilibrio a partir de los intercambios asimiladores y acomodadores entre el organismo y el medio.

Teniendo en cuenta los planteamientos de la teoría piagetiana, se destacan siete conclusiones de muy decisiva importancia para facilitar y orientar la regulación didáctica de los procesos de enseñanza (Pérez Gómez,1989) [126]: el carácter *constructivo y dialéctico* de todo proceso de desarrollo individual, la importancia de la *actividad* del alumno para el desarrollo de las capacidades cognitivas superiores, el lugar central del *lenguaje* como instrumento insustituible de las operaciones intelectuales más complejas, la importancia de *conflicto cognitivo* para provocar el desarrollo del alumno, la cooperación para el desarrollo de las estructuras cognitivas, la distinción y la *vinculación entre desarrollo y aprendizaje* y la estrecha vinculación de las *dimensiones estructural y afectiva* de la conducta.

Para Ausubel el aprendizaje significativo constituía un proceso a través del cual se asimilaba el nuevo conocimiento, relacionándolo con algún aspecto relevante y ya existente de la estructura cognitiva individual. Si no existían aún en la mente conceptos básicos a los que pudiera ligarse el nuevo conocimiento, éste tendría que aprenderse de memoria y almacenarse de un modo arbitrario y desconectado

---

[126] PÉREZ GÓMEZ, A. I. (1989) .Op.Cit. Pág 45

(aprendizaje memorístico). Si el conocimiento nuevo era asimilado dentro de la estructura cognitiva existente como una unidad ligada y si tenía lugar una apropiada modificación del conocimiento previo (acomodación), el resultado era un aprendizaje significativo.

"Nótese el papel destacado que juega el conocimiento previo del alumno en el aprendizaje significativo. En efecto, "el factor más importante que influye sobre el aprendizaje es la cantidad, claridad y organización de los conocimientos que ya tiene el alumno. Estos conocimientos ya presentes (en el momento de iniciar el aprendizaje), constituidos por hechos, conceptos, relaciones, teorías y otros datos de origen no perceptivo, de los que el alumno puede disponer en todo momento, constituyen su estructura cognoscitiva" (Ausubel y Robinson)[127]**.**

También en el aprendizaje significativo de Ausubel es importante la disposición positiva del individuo respecto del aprendizaje. Una disposición tanto coyuntural o momentánea como permanente o estructural. Esta condición se refiere al componente motivacional, emocional, actitudinal que está presente en el aprendizaje.

Sobre estas bases teóricas, en este modelo se entiende que el aprendizaje – considerado como un proceso de donación de sentido, de significado, a las situaciones en las que se encuentra el individuo -provoca la modificación y la transformación de las estructuras que al mismo tiempo, una vez modificadas, permiten la realización de nuevos aprendizajes de mayor riqueza y complejidad.

Es por ello que, desde esta perspectiva , a*prender matemáticas es alcanzar un modelo cualitativamente diferente al que se poseía antes de ese aprendizaje*

La anterior preponderancia del lenguaje en la enseñanza, se traslada ahora a la acción, los métodos activos dejan buena parte de las iniciativas y esfuerzos espontáneos a los alumnos y reemplazan la transmisión de verbal de los conocimientos por la facilitación de su descubrimiento. Se entiende que es fundamental para el aprendizaje significativo una comprensión de las estructuras matemáticas[128].

---

[127] Citados por Novak, 1982. En COLL, C. (2001). Op. Cit. Pág. 39

[128] El significado de estructuras matemáticas fue explicitado en el Cap. I.

Así, en este modelo, *el aprendizaje por descubrimiento y el aprendizaje de las estructuras matemáticas son dos principios básicos para el aprendizaje significativo*

Dos figuras representativas de este modo de concebir el aprendizaje de las matemáticas son el psicólogo Jerome Bruner y el profesor de matemáticas Z.P. Dienes.

En su propio trabajo, Bruner combinó los objetivos de la psicología experimental con los del estudio del trabajo del aula, y sus experimentos en el aula se refirieron sobre todo al aprendizaje de las matemáticas. Era un gran defensor de las relaciones de trabajo próximas entre los psicólogos, los educadores y los matemáticos, y colaboró en sus experimentos en el aula con Zoltan P. Dienes.

Brunner, apoyándose en parte en las ideas de Piaget, elabora una teoría cognitiva del desarrollo conceptual que implica cierta secuencia de enseñanza. Afirma que las estructuras matemáticas se pueden ir formando en las mentes de los estudiantes a base de proporcionarles experiencias que les permitan desarrollar representaciones enactivas, icónicas y simbólicas de los conceptos, en ese orden.

"Las representación enactiva es "un modo de representar eventos pasados mediante una respuesta motriz adecuada" (...). El segundo modo de representación, el icónico, nos separa un paso de lo concreto y de lo físico para entrar en el campo de las imágenes mentales (...) . La representación simbólica, que para Bruner es la tercera manera de capturar las experiencias en la memoria, se posibilita sobre todo por la aparición de la competencia lingüística" (Resnick y Ford, 1998)[129].

Se plantea la hipótesis de que estas representaciones mentales sean las formas o modos en que se recuerdan las experiencias de aprendizaje, y, un último extremo, los conceptos.

Zoltan Dienes, apoyándose también en la teoría piagetiana, se centra en el empleo de materiales matemáticos concretos en una secuencia de experiencias de aprendizaje, similar a la de Bruner, a la que denominó el "ciclo de aprendizaje".

---

[129] RESNICK, L.B y FORD, W.W (1998). Op. Cit. Pág.139-140.

“Sugiere que los conceptos estructurales se descubren y se refinan al irse dedicando a los niños a las manipulaciones dirigidas de materiales que materializan físicamente los conceptos de maneras diferentes. La instrucción y la práctica se pueden organizar de forma que pongan más de manifiesto las diferencias entre los aspectos relevantes de los conceptos y los no relevantes, y que expongan a los niños a toda gama de variaciones perceptuales y matemáticas de dichos conceptos” (Resnick y Ford, 1998)[130].

Así, *aprender matemáticas es inventar o reconstruir por reinvención a partir de la acción*

Postura a la que subyace la idea que el objetivo de toda educación intelectual no es saber repetir o conservar verdades acabadas, sino aprender a conquistar por uno mismo la verdad, aunque cueste tiempo y rodeos hacerlo.

También supone que la retención y la memorización y la resolución de algoritmos son más fáciles si lo que se ha aprendido es significativo en relación con la estructura de conocimientos ya existente en la mente del que aprende. Por ello, a diferencia del modelo anterior, aquí se plantea el aprendizaje de conceptos como otra de las exigencias cognitivas para el aprendizaje de las matemáticas.

De este modo, las *exigencias cognitivas en el aprendizaje de las matemáticas son tres: retención y memorización, empleo de algoritmos y aprendizaje de conceptos* [131].

Promoviendo, también a diferencia del modelo anterior, la comprensión relacional de las matemáticas (Skemp, 1976) [132].

2.5.2. Qué es enseñar y cómo enseñar

[130] RESNICK, L.B y FORD, W.W (1998). Op. Cit. Pág.154

[131] ORTON, A . (1998). Op. Cit. Pág.46-50.

[132] Citado en ORTON, A . (1988). Op.Cit. Pág.44

En este modelo, los *objetivos* de la enseñanza de las matemáticas se centran en los logros de los alumnos, estimular el desarrollo de la capacidad para establecer relaciones o lograr que el niño se inicie en el aprendizaje racional de las cuatro operaciones, son ejemplos de ello.

Es decir, que las intenciones educativas que expresa el curriculum , se refieren a los resultados de aprendizaje que se espera obtener. Esta vía de acceso **"supone que las intenciones educativas se concretan a partir de la consideración y del análisis de los aprendizajes que debe realizar el alumno como consecuencia de su participación en el proceso educativo. Tanto las actividades concretas de enseñanza/aprendizaje, como los contenidos particulares en torno a los cuales se organizan, se eligen en función a los resultados esperados, que se convierten de esta manera en el elemento rector de la planificación educativa** (Coll, 2001)[133].

Como aquí las intenciones educativas están asociadas con una interpretación cognitiva del aprendizaje[134] , los aprendizajes esperados se definen en términos de habilidades o destrezas cognitivas. **"Se trata de identificar los procesos cognitivos más importantes para el aprendizaje, con el fin de confeccionar un repertorio de destrezas independientes de contenidos específicos y, por lo tanto, susceptibles de aplicarse a una variedad de situaciones** (Eisner y Vallace, 1974)[135]**.**

En esta óptica, las *actividades de enseñanza/aprendizaje como los contenidos están supeditados al logro de un conjunto de destrezas cognitivas.*

Algunos trabajos de Bruner ejemplifican este enfoque. Coll (2001)[136] señala que, en opinión de Bruner , los efectos deseables de la educación escolar no deben referirse tanto a la adquisición de items específicos de conocimiento, o a la

---

[133] COLL, C(2001). Op. Cit. Pág. 54-55

[134] La otra posibilidad sería la interpretación conductista de los aprendizajes. Así, las intenciones educativas se expresarían mediante los objetivos de ejecución, es decir, enunciando los cambios que deben poderse observar en la conducta de los alumnos al término del proceso educativo.

[135] Citados por COLL, C(2001). Op. Cit. Pág. 55.

[136] COLL, C(2001). Op. Cit. Pág. 55

adquisición de determinadas pautas de comportamiento, como a la adquisición de destreza cognitivas que puedan realizarse y aplicarse a una amplia gama de situaciones. Por ejemplo: la capacidad de identificar la información relevante para un problema dado, para interpretarla, para clasificarla de forma útil, etc.

La propuesta de contenidos planteada por este modelo trata de disminuir la separación entre la matemática que se enseña y la que se crea por la investigación. Se propicia la introducción de nuevos contenidos y una presentación distinta respecto al enfoque anterior. Apartándose de la intuición, esta presentación en forma axiomática y deductiva, comienza con la parte más abstracta de la disciplina, apoyándose en concepciones de los matemáticos contemporáneos como ha sido planteado [137].

Así , *el cuerpo de conocimientos que se tratan en la enseñanza muestra únicamente el método lógico – deductivo como forma de desarrollo de las matemáticas*

Y se olvida que **"el método matemático, el que siguen los matemáticos para sus descubrimientos no es el lento y pesado camino de la lógica, sino que saltan razonamientos e intuyen resultados que luego exponen poco a poco, mediante una serie de razonamientos atomizados. Una cosa es "descubrir" y otra "exponer el descubrimiento" y, en la enseñanza hay que enseñar a descubrir más que enseñar a exponer lo descubierto**" (Santaló, 1986)[138].

Las tradicionales aritmética y geometría se convierten en conjunto de números y conjunto de puntos. En ambos casos se parte de la noción de conjunto y las relaciones de pertenencia e inclusión, las operaciones con conjuntos y la clasificación de relaciones para definir número natural, número racional, etc.

Se propone analizar las propiedades de las operaciones con números naturales, y también las propiedades de las relaciones desde los primeros grados, suponiendo que

---

[137] Recordar que este modelo está asociado a las ideas de los formalistas señaladas en el cap.1. Allí expliqué qué es una estructura matemática.

[138] SANTALÓ, L. (1986). Op. Cit.Pág.16.

estos análisis culminarían con la comprensión de las nociones de grupo o de relación de orden y finalmente de estructura. En este sentido,

* *la utilización del lenguaje formal es un objetivo de primer orden en la enseñanza. Se conciben las matemáticas expresadas en lenguaje formal y*
* *el concepto de las matemáticas esta basado en la noción de estructura*

Estos presupuestos epistemológicos desde los cuáles el conocimiento matemático ha sido formalizado le da preponderantemente la forma de un *conocimiento como operación*. Esto significa que, en la enseñanza, el sentido de las operaciones con los objetos matemáticos se construye en el interior de las estructuras matemáticas. **"(...)El énfasis está puesto en la aprehensión de la forma, de la estructura abstracta, independientemente del contenido. El conocimiento, entonces, se presenta como mecanismos e instrumentos que permiten "pensar". Es en función de este objetivo que la presente forma de conocimiento se introduce como esencialmente opuesto a la "memorización"; donde reconocer resulta ser el correcto uso de mecanismos e instrumentos. El acento en la replicabilidad de las formas generales en casos específicos redunda, por ejemplo, en las reiteradas "ejercitaciones" a que son sometidos los alumnos"** (Edwars, 1985) [139].

De esta manera, *el conocimiento matemático (como operación) se presenta frecuentemente en la escuela como aquél que permite razonar, pensar; aquél que es opuesto a la memorización*

En este modelo la relación profesor-alumnos no es rígida. La dinámica de interacción entre ellos es alta. Sin embargo, la formalización lógica y abstracta del conocimiento lo torna inaccesible. El alumno toma una posición de subordinación respecto al conocimiento que se presenta y, en consecuencia, establece una *relación de exterioridad* con el conocimiento. Es decir que en la relación alumno - conocimiento se reproduce la situación descripta en el modelo tradicional.

[139] EDWARS, V. Op.Cit. Pág. 35.

Las actividades de enseñanza se dividen nuevamente – también como en el modelo tradicional –en dos momentos: uno teórico, inicial, y uno de aplicación a problemas posterior. Es decir que el trabajo con la técnica y la tecnología se presentan como instancias de trabajo separadas. La diferencia es que en el momento teórico, se propone a los alumnos trabajar con algún tipo de material de apoyo y se pone énfasis en la participación activa del alumno. Al principio, se desea que el alumno sea un demandante activo, ávido de conocimientos funcionalmente útiles.

En este contexto, se sitúa al problema como *móvil de aprendizaje*[140]

Motivación	* *situación basada en lo vivido*
Mecanismo	* *aporte de conocimientos* * *práctica, ejercicios*
Resignificación	* *problemas*

Así, se tiende a identificar la actividad matemática con la exploración de problemas no triviales; es decir, con las tareas que se realizan cuando todavía no se sabe gran cosa de la solución; luego se tantean algunas técnicas (o métodos) para comprobar adonde nos pueden llevar, se intenta aplicar éste o aquel resultado, se buscan problemas semejantes, etc. En otras palabras, se le concede una preeminencia absoluta al momento exploratorio en la resolución de problemas.

“Una definición muy precisa de lo que se entiende dentro de este modelo por “exploración de problemas no triviales”, se puede encontrar por ejemplo, en Arsac (1988) cuando define “problema abierto” y describe la “práctica del problema abierto”. Se trata de problemas en cuyos enunciados no se sugiere el procedimiento de resolución (prohibe explícitamente descomponer el problema

[140] Extraído de CHARNAY, R. Op. Cit. Pág. 57.

en ejercicios) y que se encuentran en un dominio conceptual con el que los alumnos tienen cierta familiaridad. Así pueden tomar fácilmente "posesión" de la situación y empezar a hacer ensayos, conjeturas, proyectos de resolución y contraejemplos, que constituyen tareas típicas de la actividad exploratoria de resolución de problemas" (Gascón, 1994)[141].

De este modo, se *identifica "enseñar" y "aprender matemáticas", con enseñar y aprender esta actividad exploratoria*

Pero en este modelo los "problemas abiertos" producen dispersión de los contenidos. Situación que no es casual. La necesidad de ligar los problemas a situaciones "naturales" que, a su vez, son a menudo demasiado complejas para permitir al alumno construir por sí mismo las herramientas y la dependencia a "lo ocasional" obstaculizan lograr la coherencia de los conocimientos. En consecuencia, los problemas son algo ajeno a la estructura de las matemáticas que este modelo intenta mostrar.

Es decir que, en lo que respecta a la relación que existe entre los problemas y el conocimiento matemático, *los problemas no son constitutivos del conocimiento matemático*

Si bien aquí se intenta superar al conductismo clásico, **"coloca en su lugar una especie de "activismo" que no deja de constituir otra modalidad de psicologismo ingenuo fundamentada, en este caso, en una interpretación muy superficial de la psicología genética"** (Gascón, 1994)[142]. Por lo que respecta al aislamiento y la descontextualización de los problemas, que ya era preocupante en el modelo tradicional, puedo decir que no hace más que agravarse en este modelo.

---

[141] GASCÓN, J. (1994). Op. Cit. Pág. 42. Dos aclaraciones: la primera es que el autor señala que la cita de Arsac (1988) en este marco no lo identifica con él. La segunda es que Gascón habla de paradigma modernista, la palabra modelo en la transcripción es mía por la terminología que utilizo en el trabajo.

[142] GASCÓN, J. (1994). Op. Cit. Pág. 42.

Entonces, nuevamente*, el aislamiento y la descontextualización de los problemas son características de este modelo didáctico*

Las *actividades de aprendizaje* o tareas que el docente propone tiene al estudiante como protagonista; él debe elaborar un código de representación o descubrir dónde hay un error en un procedimiento o proponer y llevar a cabo un plan de acción para probar una hipótesis. La resolución de la tarea involucra procedimientos que el estudiante elige para tratar de alcanzar el éxito. En la puesta en marcha del procedimiento utiliza algunas alternativas, luego las abandona por otras, sin que cada secuencia de acciones sea conocida por él en el comienzo de la tarea. Él elige cada secuencia de acciones, sustituyendo las adoptadas hasta descubrir la solución. Los aspectos de invención y descubrimiento surgen entonces en el interjuego entre las teorías que va armando, que lo acercan al objetivo que persigue y las secuencias de acciones implementadas llamadas también estrategias de resolución. Este planteo supone el siguiente modo de concebir cómo el alumno aprende matemáticas:

Se aprende matemáticas únicamente por actividades. Se llega a aprender proporcionando a los estudiantes teorías personales.

En este modelo la concepción del error cambia. Es considerado como la presencia en el alumno de un esquema cognitivo inadecuado y no solamente como consecuencia de una falta específica de conocimiento o de un despiste (como en el modelo tradicional).

El error con la visión de que hay un proceso de construcción del conocimiento aparece como indicador de ese proceso. En este sentido,

e*l error es concebido como la manifestación de las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas*.

"Estas dificultades se conectan y refuerzan en redes complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en los alumnos en forma de errores" (Socas, M.1997)[143].

Aceptando que la naturaleza de las dificultades del aprendizaje de las matemáticas es de diversa índole y que se conectan y se refuerzan en redes complejas, Socas (1997) las agrupa en cinco grandes categorías: las dos primeras asociadas a la propia disciplina (la complejidad de los objetos matemáticos y los procesos de pensamiento matemático) , la tercera ligada a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las matemáticas, la cuarta en conexión con los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos, y una quinta, relacionada con las actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas.

Annie Berté (2000)[144] aborda el problema de las dificultades del punto de vista del alumno en términos de obstáculos. Siguiendo el orden planteado por Socas (1997), Berté (2000) a los obstáculos los denomina: obstáculos epistemológicos, obstáculos didácticos, obstáculos ontogenéticos y obstáculos culturales. Mientras que Brousseau, G. (1983)[145] considera que los obstáculos que se presentan en el sistema didáctico son los tres primeros señalados por Berté (2000)

Socas (1997) caracteriza en dos grupos las causas principales de los errores en el aprendizaje de las matemáticas. Errores que tienen su origen en un obstáculo y errores que tienen su origen en una ausencia de sentido. Estos últimos, tendrían dos procedencias distintas, una, relacionada con las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos y a los procesos de pensamiento matemático, y otra, relacionada con las dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas.

El profesor situado en una postura cognitiva se coloca en la posición que el error lo ha construido el alumno, y es, por tanto, una estructura cognitiva del dominio. Por

---

[143] SOCAS, M. (1997). DIFICULTADES, OBSTÁCULOS Y ERRORES EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA. Pág. 125. En La Educación Matemática en la Escuela Secundaria. Op. Cit. Cap. V

[144] BERTÉ, A. (2000). MATEMÁTICA DE EGB3 AL POLIMODAL. Pág.195-197. Editorial A.Z. Buenos Aires.

[145] Citado por SOCAS, M. (1997). Op. Cit. Pág. 136.

ello, para modificar esa estructura cognitiva errónea y la sustituya por la correcta, el profesor debe facilitar actividades que provoquen conflicto y haga tambalear esa estructura cognitiva errónea.

Es así como, en este modelo*, el profesor debe arbitrar estrategias de enseñanza/aprendizaje de prevención y remedios de las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas.*

Estas estrategias supone combinar estrategias generales y específicas a largo plazo con estrategias particulares e inmediatas. La prevención requiere arbitrar estrategias de enseñanza /aprendizaje de las matemáticas, con estrategias específicas dependiendo del contenido a tratar. Como estas estrategias tienden a minimizar las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, la prevención debe estar orientada de manera general por las dificultades planteadas por Socas (1997).

Los remedios tienen que ver más con el día a día, con la interacción diaria en clase entre el profesor y el alumno. Las estrategias de remedio van dirigidas a superar un obstáculo, a dar sentido a los objetos matemáticos o a crear una actitud afectiva y emocional positiva hacia las matemáticas.

La concepción de *evaluación* también cambia, y es entendida como parte del proceso de adquisición de un nuevo contenido, cuya finalidad es reorientar ese proceso, ajustarlo.

Aquí, *las actividades de evaluación se entrelazan con las actividades que se desarrollan en el interior del proceso total*

Este punto de vista se centra en que *para evaluar hay que comprender*, lo cual supone que se ha hecho un juicio razonado de algún aspecto de una trabajo desarrollado por los alumnos ante una tarea; se trata de una visión distinta de la tradicional, en la que no se trata de comprender ningún proceso de aprendizaje, sino de establecer un éxito o un fracaso.

2.6. El modelo actual

Actualmente en las aulas se pueden encontrar los modos de concebir las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje de los modelos tradicional y moderno ; e incluso un mismo docente con su grupo de alumnos pueden pasar, en distintos momentos, por actividades muy tradicionales y por otras pseudoconstructivistas.

Nuevos caminos de investigación han ido armando algunas propuestas didácticas. Ellas incluyen , por un lado, el contexto y por otro, los contenidos mismos. Digo que incluyen el contexto porque ni las investigaciones psicogenéticas, ni los pedagogos de las matemáticas habían abordado el tema de la adquisición de conocimiento en la escuela.

Muchas de estas investigaciones fueron realizadas por investigadores franceses y ginebrinos desde fines de los años 70. Entre ellos , Guy Brousseau, profesor e investigador del IREM[146] de Burdeos, quien en la década de los setenta plantea un nuevo paradigma de la didáctica de las matemáticas: la *didáctica fundamental* .

Brousseau vislumbró la necesidad para la didáctica de utilizar un modelo propio de la actividad matemática, dado que los modelos epistemológicos que se utilizaban no se habían construido para responder a los mismos problemas que se plantea la didáctica. Su mayor contribución consistió en subrayar que todo fenómeno didáctico tiene un componente matemático esencial; inaugurándose así una nueva vía de acceso al análisis de los fenómenos didácticos: el propio conocimiento. De esta forma, Brousseau elabora la *teoría de situaciones didácticas* que permite abordar la problemática didáctica desde un punto de vista sistémico. Dicha teoría modeliza el conocimiento matemático enseñado en el interior de un sistema didáctico.

Esta ampliación esencial de la problemática didáctica provocó una transformación importante en la naturaleza de la didáctica de las matemáticas. Yves Chevallard (1997)[147] , epistemólogo y matemático del IREM, dentro del marco de la didáctica fundamental, plantea recorrer el camino inverso: partir del hombre

[146] IREM: Son los Institutos de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas creados en Francia luego de la Reforma Educativa de fines de los años 60, con la que se impuso la enseñanza de la matemática moderna.

[147] CHEVALLARD, Y., BOSCH, M. y GASCÓN, J. (1997).. Op.Cit. Pág.76

haciendo matemáticas para constatar que lo didáctico es denso en lo matemático y que todo fenómeno matemático tiene un componente didáctico esencial. A este punto el punto de vista inaugurado por Yves Chevallard (1997)[148] se lo conoce como *enfoque antropológico de lo didáctico*.

Es así como en este trabajo, el modelo didáctico actual se inscribe dentro del marco general de la llamada *didáctica fundamental* y se fundamenta , principalmente, en el *enfoque antropológico de lo didáctico.*

Siguiendo con la misma estrategia de desarrollo que en los modelos anteriores, señalo que el modelo de interacción asociado a esta propuesta es el llamado modelo aproximativo.

Aquí, *las matemáticas son pensadas como un cuerpo dinámico e integrado de conocimientos en continuo desarrollo*

Dentro de este enfoque, éstas son las repuestas a las cuestiones que se debaten al nivel del aula.

2.6.1. Qué es aprender, cómo aprender y qué es saber matemáticas

En este marco se considera que las teorías psicológicas del aprendizaje, en tanto teorías generales, son insuficientes para explicar el aprendizaje de las matemáticas. Como plantea Vergnaud (1984)[149], **“es bastante trivial decir que el aprendizaje depende de los contenidos a ser aprendidos. Pero sabemos que muchas teorías de aprendizaje han tratado de librarse de los contenidos, con el objetivo de alcanzar un status de teorías generales. Este es el caso de varias teorías estructurales tanto como de teorías generales fallaron en ayudar a los maestros a entender las dificultades encontradas en los estudiantes para**

---

[148] Además este enfoque da respuestas al planteo de este trabajo.

[149] VERGNAUD, G. (1984). Citado en el Documento Curricular “MATEMÁTICA Y SU ENSEÑANZA”. Pág.4 .Materiales de Enseñanza destinados a la capacitación docente. Programa de Transformación de la Formación Docente (PTFD). Ministerio de Cultura y Educación. Buenos Aires. 1994.

conceptos específicos y competencias específicas. Es teóricamente disputable que el conocimiento se desarrolla a lo largo de la misma clase de procesos de biología, historia, física y matemáticas, o incluso la geometría del triángulo y la geometría del espacio".

Aunque se reconoce que los instrumentos generales de pensamiento intervienen en la adquisición de conocimientos matemáticos, se afirma y se coloca como objeto de estudio la especificidad de los contenidos y de los procesos de apropiación

Esta especificidad se revela al pensar el contenido matemático como históricamente situado, culturalmente marcado y cuya enseñanza se produce en un contexto social definido y organizado: la escuela.

Ahora bien, a pesar de la consideración de la insuficiencia de las teorías generales, este enfoque no deja de partir de una teoría de conocimiento. Es muy marcada en este sentido la influencia de la teoría piagetiana. Da cuenta de la situación las elecciones ideológicas que orientan el aprendizaje de las matemáticas según Roland Charnay [150]. Ellas se basan en la pregunta *"¿cómo aprenden los alumnos?"*

1. *Los conocimientos no se apilan, no se acumulan*, sino que pasan de estado de equilibrio a estados de desequilibrio, en el transcurso de los cuales los conocimientos anteriores son cuestionados. Una nueva fase de equilibrio corresponde entonces a una fase de reorganización de los conocimientos, donde los nuevos saberes son integrados al saber antiguo, a veces modificado (cf. Piaget).

2. *El rol de la acción en el aprendizaje.*

Piaget también subraya el rol de "la acción" en la construcción de conceptos. Se trata de la actividad propia del alumno que no se ejerce forzosamente en la manipulación de objetos materiales, sino de una acción con una finalidad, problematizada, que supone una dialéctica pensamiento-acción muy diferente de una simple manipulación guiada, tendiente a menudo a una tarea de constatación por parte del alumno...Hay que subrayar aquí el rol de la anticipación: la actividad

---

[150] Extraído de CHARNAY, R. Op.Cit. 59-60

matemática consiste a menudo en la elaboración de una estrategia, de un procedimiento que permite anticipar el resultado de una acción no realizada todavía o no actual sobre la cual se dispone de ciertas informaciones.

3. *Sólo hay aprendizaje cuando el alumno percibe un problema para resolver...*

...es decir cuando reconoce el nuevo conocimiento como respuesta a una pregunta. Aquí también podemos recurrir a Piaget, para quien el conocimiento no es ni simplemente empírico (constataciones sobre el medio) ni preelaborado (estructuras innatas), sino el resultado de una interacción sujeto-medio (cf. arriba punto 2). Lo que da *sentido* a los conceptos o teorías son los problemas que ellos o ellas permiten resolver.

Así, es la resistencia de la situación la que obliga al sujeto a acomodarse, a modificar o percibir los límites de sus conocimientos anteriores y a elaborar nuevas herramientas (idea de conflicto cognitivo). Habrá que tener esto en cuenta para la elección de las situaciones.

En la misma perspectiva, se tiende a preferir la motivación propia de la actividad propuesta (dificultad que se desea salvar, franquear) a la motivación externa (necesidades de la vida corriente, observaciones) cuyo interés, sin embargo, no se debe descartar: el problema es entonces percibido como un desafío intelectual.

4. *Las producciones de los alumnos son una información sobre su "estado de saber"*

En particular, ciertas producciones erróneas (sobre todo si ellas persisten) no corresponden a una ausencia de saber sino, más bien, a una manera de conocer (que a veces ha servido en otros contextos) contra la cual el alumno deberá construir el nuevo conocimiento. El alumno no tiene jamás la cabeza vacía: no puede ser considerado como una página en blanco sobre la cual será suficiente imprimir conocimientos correctos y bine enunciado.

5. *Los conceptos matemáticos no están aislados.*

Hay que hablar más bien de campos de conceptos entrelazados y que se consolidan mutuamente: de ahí la idea de proponer a los alumnos campos de problemas que permitan la construcción de estas redes de conceptos que conviene elucidar previamente (tarea que pasa a ser fundamental)

6. *La interacción social es un elemento importante en el aprendizaje*

Se trata tanto de las relaciones maestro-alumnos como de las relaciones alumnos-alumnos, puestas en marcha en las actividades de formulación (decir, describir, expresar), de prueba (convencer, cuestionar) o de cooperación (ayuda, trabajo cooperativo): idea de conflicto sociocognitivo, sobre todo entre pares.

A partir de estas posturas, se desprende una respuesta a la pregunta *¿qué es aprender matemáticas?*. Desde esta perspectiva:

Aprender matemáticas es construir el sentido de los conocimientos y la actividad matemática esencial es la resolución de problemas y la reflexión alrededor de los mismos.

Construir el sentido del conocimiento no es solamente reconocer las situaciones para los cuales es útil sino también conocer los límites de utilización: bajo qué condiciones se cumplen ciertas propiedades, en qué casos es necesario apelar a otra técnica o concepto, cómo se relacionan entre sí los diversos conceptos, cuáles son las formas de representación más útiles de tratar y obtener información, cómo se puede controlar la adecuación de la respuesta, cómo recomenzar desde el error..

Esta actividad supone que el alumno debe ser capaz no sólo de repetir o rehacer, sino también de resignificar en situaciones nuevas, de adaptar, de transferir sus conocimientos para resolver nuevos problemas. Todo esto implica el uso de estrategias cognitivas y metacognitivas vinculadas a la resolución de problemas.

Este planteo del quehacer matemático es aplicado por Brousseau a la formulación de una hipótesis educativa fuerte: el trabajo intelectual del alumno debe ser en ciertos momentos comparable a la actividad científica. **"Saber matemáticas no es solamente saber definiciones y teoremas para reconocer la ocasión de utilizarlos y de aplicarlos, es "ocuparse de problemas" en un sentido amplio que incluye encontrar buenas preguntas tanto como encontrar soluciones. Una buena**

reproducción, por parte del alumno, de la actividad matemática exige que éste intervenga en la actividad matemática, lo cual significa que formule enunciados y pruebe proposiciones, que construya modelos, lenguajes, conceptos y teorías, que los ponga a prueba e intercambie con otros, que reconozca los que están conformes con la cultura matemática y que tome los que son útiles para continuar su actividad” (Chevallard, , Bosch y Gascón, 1997)[151].

Desde esta perspectiva, las *exigencias cognitivas en el aprendizaje de las matemáticas no se reducen a la retención y memorización , empleo de algoritmos y al aprendizaje de conceptos, sino que es fundamental la resolución de problemas*[152].

Se entiende así que la resolución de problemas es generadora de un modo de apropiación del conocimiento matemático que no sigue un simple proceso acumulativo sino que produce verdaderas reestructuraciones conceptuales.

2.6.2. Qué es enseñar y cómo enseñar

En este modelo uno de los *objetivos* esenciales de la enseñanza de las matemáticas es que lo que se ha enseñado esté cargado de significado, tenga sentido para el alumno. Se entiende que haciendo aparecer las nociones matemáticas como herramientas para resolver problemas es como se permitirá a los alumnos construir el sentido.

En esta postura está presente una concepción de las matemáticas que recupera el hecho de que los conocimientos matemáticos se producen como soluciones a problemas específicos que los seres humanos han enfrentado en un tiempo o en otro y que subraya que son los problemas que le han dado origen los que han dado sentido a la matemática producida.

---

[151] CHEVALLARD, Y., BOSCH, M. y GASCÓN, J. (1997). Op.Cit. Pág. 213-214. Obsérvese cómo en esta visión de las matemáticas que defiende Brousseau se enfatiza el carácter de éstas como actividad o quehacer humano , en la línea sostenida por Lakatos, pero también se tiene en cuenta su condición de lenguaje simbólico, de sistema conceptual y procedimental.

[152] ORTON, A . (1998). Op. Cit. Pág.50-52.

Para Brousseau (1986) la presentación axiomática es una presentación clásica de la matemática, que parece maravillosamente adaptada a la enseñanza, **"pero, esta presentación borra completamente la historia de estos saberes, es decir la sucesión de dificultades y de cuestiones que han provocado la aparición de conceptos fundamentales, su uso para plantear nuevos problemas, la inclusión de nuevas técnicas y de cuestiones nacidas de progresos de otros sectores, el rechazo de ciertos puntos de vista considerados falsos o torpes y las innumerables querellas al respecto. Enmascara el verdadero funcionamiento de la ciencia, imposible de comunicar y describir fielmente desde el exterior, para poner en su lugar una génesis ficticia"** [153].

Se concibe así que estos saberes no son fijos e inamovibles sino que se transforman al ser utilizados en otros tiempos, sociedades, condiciones culturales e incluso institucionales que aquellas en que nacieron.

Es decir, *se destaca la naturaleza social y cultural del conocimiento matemático*

Traducido esto al proceso de enseñanza, se asume que el saber científico va cambiando de contexto en sucesivas etapas hasta transformarse en un saber escolar que es objeto de enseñanza para el docente y de aprendizaje para el alumno.

Se da lugar de esta manera al fenómeno de transposición didáctica que , en el marco del enfoque antropológico de Yves Chevallard (1997), es **"el conjunto de transformaciones adaptativas que sufre una obra (matemática) para ser enseñada..."** [154].

Es así, como en este modelo, las matemáticas escolares se presentan como obras con unas características propias que la diferencian en muchos aspectos de las obras matemáticas originales. Estas características específicas provienen del hecho que las obras del curriculum tienen que ser reconstruidas para poder ser enseñadas en la escuela, es decir, recreadas bajo ciertas condiciones que no coinciden ni pueden coincidir con las condiciones que hicieron posible su construcción inicial.

[153] BROUSSEAU (1986) . Citado en FLORES MARTÍNEZ, P. (1998). Op. Cit. Pág 67.

[154] CHEVALLARD, Y., BOSCH, M. y GASCÓN, J. (1997). Op. Cit. Pág.136. La palabra matemática entre paréntesis es mía.

Desde este punto de vista, el problema de la elaboración del curriculum, que en los modelos anteriores había sido considerado como un problema psicopedagógico, tiene un componente matemático esencial. No se trata únicamente de una cuestión de secuenciación y temporalización de los contenidos, que desemboca en el problema de la metodología de la enseñanza, sino de realizar un trabajo matemático de reorganización de los elementos técnicos, tecnológicos y teóricos que componen cada obra de acuerdo a las cuestiones que ésta responde.

Desde esta perspectiva, *la elaboración del curriculum se trata, en definitiva, de una verdadera reconstrucción creativa de las obras que lo forman.*

Estas obras constituyen , en sentido amplio, lo que Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997) [155] denomina una organización praxeológica matemática u obra. Esta organización u obra, producto de la actividad humana, surge como respuesta a una cuestión o conjunto de cuestiones que resultan problemáticas para una determinada comunidad en un momento histórico específico.

Dicha organización, como toda actividad humana, presenta dos aspectos inseparables: la práctica matemática o "praxis" que consta de tareas y técnicas, y el discurso razonado o "logos" sobre dicha práctica que está constituido por tecnologías y teorías.

Los tipos de problemas y técnicas asociadas constituyen un "saber hacer" que hacen referencia a la praxis. Pero para que dichas técnicas puedan existir se deben poder explicar, hacer inteligibles y justificar. Los discursos que las describen, explican y justifican constituyen la tecnología, y el argumento formal que permite justificar rigurosamente dicha tecnología, la teoría. Estos dos elementos constituyen el logos para la praxis y se corresponde con el "saber".

Así, se pueden distinguir dos niveles diferentes pero inseparables que se van construyendo y definiendo en un proceso dialéctico entre ambos: praxis y logos se hallan íntimamente relacionados y la articulación entre ambos permite dar forma a la praxeología matemática.

---

[155] CHEVALLARD, Y., BOSCH, M. y GASCÓN, J. (1997). Op. Cit. Pág.274

Se trata entonces de una modelización dinámica de la organización u obra matemática: las técnicas generan nuevos problemas y apelan a nuevos resultados tecnológicos que, a su vez, permiten desarrollar técnicas ya establecidas, así como abordar y plantear nuevas cuestiones

De este modo, *el cuerpo de conocimiento que se trata en la enseñanza es dinámico, unificado y sistémico.*

En este modelo se conforma un nuevo modo de interpretar la resolución de problemas, y su papel en su proceso de enseñanza de las matemáticas. En tal sentido, señalaré algunos aportes de Josep Gascón (1994) [156] .

En primer lugar se considera que todo problema de matemáticas es el punto de partida de un (virtual) campo de problemas. Los problemas se agrupan en función de las técnicas matemáticas que se pueden utilizar para estudiarlos. No son los problemas concretos, aislados, los que tienen sentido o interés matemático.

En segundo lugar, se postula que este proceso de estudio de campos de problemas se lleva a cabo mediante la utilización y, sobre todo, la producción de técnicas de estudio. Esto presupone un desarrollo interno de las técnicas en manos de los alumnos que provoca nuevas necesidades teóricas. Surge así una relación funcional entre dos momentos de la actividad matemática: del momento de la técnica al momento teórico.

En tercer lugar, se considera que toda actividad matemática puede ser interpretada como un proceso de estudio de campos de problemas teóricos que, de nuevo, requiere técnicas de estudio específicas y, consiguientemente, teorías que den razón de estas técnicas. La actividad matemática se muestra así como esencialmente recursiva, y en la que no es posible hacer una distinción absoluta entre práctica matemática y teoría matemática; sólo puede hacerse una distinción relativa y hablar de la teoría asociada a una cierta práctica matemática.

[156] GASCÓN, J. (1994). Op. Cit. Pág. 48-51

Desde esta perspectiva, *enseñar matemáticas consistirá en hacer que el alumno sea capaz de estudiar ciertos campos de problemas de manera autónoma. Esto es, posibilitar que el alumno llegue a dominar e incluso a producir- a su nivel - técnicas de ciertos campos de problemas*

Para ello se plantea desde la enseñanza un modelo de interacción – modelo aproximativo - centrado en la construcción del saber por el alumno. Este modelo supone que es principalmente a través de la resolución de problemas elegidos por el docente como el alumno construye su saber, en interacción con los otros alumnos, y que la resolución debe intervenir así desde el comienzo de la clase.

En este marco, se sitúa al problema *como recurso de aprendizaje*[157]

La resolución de problemas como *fuente*, *lugar y criterio de elaboración del saber*

- Acción
    - * Situación–problema (el alumno busca procedimientos de resolución)
- Formulación Validación
    - * Formulación-confrontación de los problemas, puesta a prueba
    - * Nueva situación con diferentes obstáculos: nuevos procedimientos, etc.
- Institucionalización
    - * Nueva herramienta
    - * Ejercitación
    - * Síntesis, lenguaje convencional
    - * Problemas: evaluación para el maestro, resignificación para el alumno

Por lo que respecta a la descontextualización de los problemas escolares (de la actividad matemática de la que surgen), se podría trazar una línea de

[157] Extraído de CHARNAY, R. Op. Cit. Pág. 58

contextualización creciente desde el modelo moderno hasta el modelo actual. En este enfoque los problemas sólo adquieren pleno sentido en el contexto de un sistema y, según el cual, la resolución de un problema pasa siempre por la construcción explícita de un modelo del sistema subyacente.

Se considera así que un aspecto esencial de la actividad matemática consiste en construir un modelo (matemático) de la realidad que queremos estudiar, trabajar con dicho modelo e interpretar los resultados obtenidos en este trabajo para contestar a las cuestiones planteadas inicialmente. Gran parte de la actividad matemática puede identificarse, por lo tanto, con una actividad de modelización matemática.

Aquí, se caracteriza el hacer matemáticas como un trabajo de modelización .

Esta perspectiva de la enseñanza propone, además, un modelo dinámico del proceso de estudio , entendido éste como el proceso de creación o recreación de una organización matemática como al producto mismo de dicho proceso. Se podría considerar también como el proceso en que el profesor y los alumnos construyen una praxeología matemática.

El proceso de estudio, no es un proceso homogéneo, sino que está estructurado en diferentes momentos. Cada momento hace referencia a una dimensión o aspecto de la actividad de estudio, más que a un período cronológico preciso.

El momento del primer encuentro hace referencia a los objetos matemáticos que constituyen un tipo de problemas; el momento exploratorio relaciona un determinado tipo de problemas – o espacio de problemas - con la técnica adecuada para abordarlos; el momento del trabajo con la técnica se refiere al dominio, puesta a punto y nueva creación de técnicas matemáticas; el momento tecnológico-teórico hace referencia, como indica su nombre, a los dos niveles de justificación de la práctica matemática; y los momentos de institucionalización y evaluación se refieren, por fin, a la obra en su conjunto.

En este proceso de estudio, por un lado, los alumnos no pueden generalmente conocer de antemano el camino que deben recorrer a lo largo del estudio, ni entender las razones por las cuales el profesor les conduce hacia tal o cual tipo de problemas, abordándolos con tal o cual técnica de resolución. Por otro lado, el profesor tampoco será siempre capaz de prever todas las dificultades que podrán surgir a lo largo del proceso de estudio, ni las reacciones de los alumnos frente a ellas. Esta doble apertura es una característica esencial de la relación entre el profesor y los alumnos.

El profesor en este modelo no controla de una manera absoluta el desarrollo del proceso de estudio. Así, la *relación profesor – alumnos es una relación abierta. En la medida que el profesor organiza la enseñanza para intentar cerrar esta relación, provoca un empobrecimiento del aprendizaje matemático de los alumnos.*

Esta situación produce un cambio fundamental en la visión de los roles de profesor y alumno. Ya no se considera al profesor de matemáticas sólo como un enseñante, ni a los alumnos como meros sujetos de aprendizaje.

Este cambio de perspectiva es importante en varios sentidos. En primer lugar, la actividad matemática ya no aparece como dependiente en cada instante de la voluntad del profesor, y su desarrollo adquiere condicionantes propios, con cierta independencia de los actores.

En segundo lugar, los roles de profesor y alumno son menos rígidamente definidos. Aunque siga existiendo una asimetría entre ambos, aparecen nuevos puntos de contacto, dado que ahora se trata de realizar conjuntamente una tarea matemática.

Se podría plantear las tareas del profesor en dos categorías dependientes. La primera contempla aquellas tareas relativas a la organización de los dispositivos de estudio. Esto se corresponde con la tarea de reconstrucción que hace el profesor de las organizaciones matemáticas escolares que aparecen en los programas oficiales y en los manuales para ser enseñandas. La segunda está formada por las tareas de ayuda al estudio. Esto tiene relación con la propuesta y organización de una serie de situaciones con distintos obstáculos para que los alumnos “accedan a las obras matemáticas”.

En tercer lugar, se produce un cambio importante en el equilibrio de responsabilidades tanto del profesor como del alumno. El profesor ya no tiene que decidir en cada instante cuál ha de ser la actividad puntual de los alumnos y deja de considerarse el único responsable de la actitud, motivación y quehacer de éstos.

El profesor le pide al alumno que se incluya, se interrogue y que lo haga poniendo explícitamente en juego sus conocimientos anteriores. El alumno ensaya busca, propone soluciones, las confronta con sus compañeros, las defiende o las discute. Esto no sólo hace creciente la responsabilidad del alumno sino que también produce una *relación de interioridad* del sujeto con el conocimiento. **" El sujeto se apropia de un contenido que requiere de su (sujeto) elaboración. (...) la relación se vuelve significativa, es decir, con valor intrínseco para el sujeto"** (Edwars, 1985)[158].

A través de la descripción de este modelo se observa que en este enfoque no cambia la concepción de error y de evaluación en el sentido tratado en el modelo anterior (moderno)

[158] EDWARS, V. (1985). Op.Cit. Pág. 28.

Capítulo 3

Las Representaciones Sociales

En este capítulo voy a intentar precisar el alcance de la noción que estudiaré en esta investigación: Las representaciones sociales

Partiendo del concepto de representaciones sociales que propongo para trabajar en esta investigación, paso a desarrollar la teoría de las representaciones desde un enfoque que destaca la vinculación de los elementos teóricos que intervienen directa o indirectamente en la definición práctica de una representación social. Finalmente, el interés del trabajo me lleva a abordar el lugar de las representaciones sociales en la construcción del conocimiento de los alumnos, previo al conocimiento disciplinar.

3.1. El concepto central: Representación social

Una dificultad que se presenta en este trabajo es encontrar el modo de formular el concepto de representaciones sociales desde el cual se abordará la investigación.

Esta situación responde a que dicho concepto puede encontrarse en diferentes textos de psicología y psicología social e investigaciones de distintos campos de estudio y ellos dan cuenta de una amplitud de definiciones en relación a esta categoría.

Sumado a esto, la teorización de dicha noción ha sido cuestionada. Los críticos demandan precisión y rigor conceptual . Entre ellos, **Jahoda (1988) , quien (...) considera que las definiciones formuladas por los psicólogos sociales son imprecisas y exhiben una debilidad epistémica llamativa, incluso cierta inconsistencia, lo que debería obligar a un mayor rigor en la caracterización de sus propiedades y una definición más ajustada del término”** (Castorina, J. A. y Kaplan, C. V. , 2003)[159].

Pero también ha sido razonablemente defendida. Según Serge Moscovici (1988)[160] , el fundador de la teoría de las representaciones sociales (Farr, R)[161], semejante crítica es reveladora de una incomprensión por parte de los detractores del estatuto teórico de las representaciones sociales y no aceptable sin más, porque una definición rigurosa no es un punto de partida sino de llegada en la formación de una disciplina científica.

En consonancia con el planteo de Moscovici, Castorina y Kaplan (2003)[215] adjudican a la amplitud del término la entidad de posible factor desencadenante de la crítica y dan razón a la posición de Moscovici argumentando que **“(...) la propia diversidad de concepciones y definiciones , por insatisfactoria que sea, a partir**

---

159 CASTORINA, J. A. Y KAPLAN, C. V. (2003). LAS REPRESENTACIONES SOCIALES: PROBLEMAS TEÓRICOS Y DESAFÍOS EDUCATIVOS. Pág.10-11. En Castorina,J. A. (comp). Representaciones sociales. Problemas teóricos y conocimientos infantiles. Editorial Gedisa. España.

160 Citado por CASTORINA, J. A. Y KAPLAN, C. V. (2003). Op. Cit. Pág.11.

161 Robert Farr distingue entre precursores y fundadores de disciplinas académicas. Para Farr, Durkheim es un fundador de la sociología y su concepto de la representación colectiva es importante. Desde el punto de vista de Farr, Moscovici da un giro en la interpretación de las representaciones, al adoptar un punto de vista psicosociológico en lugar de psicológico – individual. Por ello, llama a Durkheim el ancestro y a Moscovici el fundador de las representaciones sociales. FARR, R. (2003). DE LAS REPRESENTACIONES COLECTIVAS A LAS REPRESENTACIONES SOCIALES: IDA Y VUELTA. Pág. 163-165. En En Castorina,J. A. (comp). Op. Cit. Cap. 7.

215 CASTORINA, J. A. Y KAPLAN, C. V. (2003). Op. Cit. Pág.11.

de la obra de Moscovici no indica necesariamente un déficit inherente a la producción teórica, sino más bien un nivel de elaboración asociado con diferentes tipos de investigación, cada uno con su propio sesgo".

Así, **(...) la importancia epistémica de los conceptos y de las teorías en las disciplinas sociales reside en la medida en que una serie de significados permiten hacer ampliamente "visibles" los fenómenos del campo estudiado y en los problemas que es capaz de suscitar".**

Tomando en consideración el argumento de Castorina y Kaplan (2003), es preciso dejar en claro el concepto de representaciones sociales que orientará la colocación del "Zoom" a la hora de hablar de las representaciones sociales de los alumnos acerca del conocimiento matemático.

Como ya lo he dicho en el capítulo 1, el conocimiento matemático en este trabajo se inscribe dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática en la escuela. Y, en este marco , se puede afirmar que el sentido del conocimiento matemático que construye el alumno no surge de una construcción racional aislada en las alturas de su nivel metacientífico.

Pensar lo contrario sería, por un lado, **"...plantearse la enseñanza como si el alumno partiera de cero, sin tener en cuenta sus representaciones, de una gran tenacidad, que no se dejan abolir fácilmente por una enseñanza sistemática"** (Astolfi, J. P., 1978)[163]. Por otro lado, implicaría perder de vista que esta enseñanza sistemática se desarrolla en la institución escolar y en la vida del aula, donde **"(...)el docente y el estudiante son activos procesadores de información y de comportamiento, pero no sólo ni principalmente como individuos aislados, sino como miembros de una institución cuya intencionalidad y organización crea un concreto clima de intercambio, genera roles y patrones de conducta individual,**

---

[163] ASTOLFI, J.P. (1978). LES REPRESENTATIONS DES ENFANTS EN SITUATION DE CLASSES. (Rev. Fran. de Péd. 45, pp 126-128). En: GIL PÉREZ, D. (1983). TRES PARADIGMAS BÁSICOS EN LA ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS. Revista Enseñanzas de las Ciencias. (1983).Vol. 1. Pág. 26. Edita: ICE de la Universitat Autónoma de Barcelona con la colaboración del Vicerectorat d´Investigació de la Universitat de Valencia. España.

grupal, colectiva y desarrolla en definitiva una cultura peculiar (...)" (Pérez Gómez, 1992)[164] .

En este contexto, el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática es esencialmente un proceso social, por lo tanto el sentido del conocimiento matemático que construye el alumno es una actividad cognitiva, llevada a cabo en situaciones de interacción social en las que el sujeto, como sujeto social, hace intervenir en su elaboración ideas, valores y modelos provenientes de esa cultura peculiar.

En consecuencia, en el sentido que otorga el alumno al conocimiento matemático a través de su aprendizaje están presentes, en forma manifiesta o latente, las representaciones sociales - entendidas como un "(...) conjunto de conceptos, percepciones, significados y actitudes que los individuos de un grupo social comparten en relación consigo mismos, y los fenómenos del mundo circundante" (Sirvent, M., 1993)[165] - sobre el dominio en cuestión.

Es desde este planteo que se aborda las representaciones sociales de los alumnos acerca del conocimiento matemático.

Entonces, cabe señalar que el concepto de representación social de María T. Sirvent es el que utiliza esta investigación y la línea teórica iniciada por Serge Moscovici y autores que continuaron con su perspectiva, como Denise Jodelet actúa como el marco de referencia para desarrollar los elementos teóricos que lo caracterizan.

3.1.1. Definiciones y algunos elementos teóricos

---

[164] PÉREZ GÓMEZ, A.I. (1992) ENSEÑANZA PARA LA COMPRENSIÓN. Pág. 89. En SACRISTÁN, J. G. Y PEREZ GÓMEZ, A. I. (1992) COMPRENDER Y TRANSFORMAR LA ENSEÑANZA. Ediciones Morata. Madrid.

[165] SIRVENT, M. (1993). LA INVESTIGACIÓN PARTICIPATIVA APLICADA A LA RENOVACIÓN CURRICULAR. Revista Latinoamericana de Innovaciones Educativas. Año V. Nº13. Buenos Aires. Citado en: VAIN, P. (1997). LOS RITUALES ESCOLARES Y LAS PRÁCTICAS EDUCATIVAS. Pág. 27. Editorial Universitaria. Posadas. Referencia extraída de libro cuyo autor es VAIN, P. (1997). LOS RITUALES ESCOLARES Y LAS PRÁCTICAS EDUCATIVAS. Pág. 27. Editorial Universitaria. Posadas.

El concepto de representación social intenta restituir en la psicología social la conciencia de lo social, aportando los medios para comprender la vida social desde una perspectiva psicológica. Este tipo de perspectiva es un pre-requisito necesario para entender la influencia de las relaciones sociales en los procesos psicológicos.

Con esta intención Moscovici define las representaciones sociales como[166]

> **"Sistemas de valores, ideas y prácticas que tienen una doble función: en primer lugar, establecer un orden que permita a los individuos orientarse en su mundo social y material y dominarlo; y, en segundo término, permitir la comunicación entre los miembros de una comunidad, aportándoles un código para el intercambio social y un código para denominar y clasificar de manera inequívoca los distintos aspectos de su mundo y de su historia individual y grupal" (Moscovici, 1973)** [167].

Esta definición nos lleva a un sistema de pensamientos que permite la relación con el mundo y con los demás; a la comprensión de los procesos que proporcionan marcos de interpretación y construcción de la realidad; a los fenómenos cognitivos que aportan elementos afectivos, normativos y prácticos que organizan la comunicación social y constituyen una forma de expresión que revela identidades individuales y sociales.

La definición de representación social así formulada considera elementos mentales, afectivos y sociales, como el lenguaje y la comunicación, es decir, procesos psíquicos y sociales.

---

[166] Según Duveen, G. y Lloyd, B. (2003), en esta definición de Moscovici se consideran las representaciones sociales como tipos particulares estructuras con una determinada función pero también como el proceso mediante el cual dichas estructuras se construyen y modifican. Es decir que en el tratamiento de las representaciones sociales nos podemos referir a éstas como estructuras o como proceso. Para evitar la confusión, voy a adoptar la misma postura que los autores nombrados. Cuando me refiero a las representaciones sociales como estructuras usaré "una representación social" o "las representaciones sociales". En el caso de referirme a las representaciones como proceso usaré "la representación social".

[167] Citado por DUVEEN, G. y LlOYD, B. (2003). Pág. 29-30. En Castorina,J. A. (comp). Op. Cit. Cap.2.

En este sentido, las representaciones sociales ocupan una posición mixta en la encrucijada de una serie de conceptos sociológicos y psicológicos (Moscovici, 1988)[168].

En consecuencia, la noción de representaciones sociales nos sitúa en el punto donde *se intersectan lo psicológico y lo social*.

Miradas desde esta perspectiva, las representaciones sociales se producen, se recrean y se modifican en el curso de las interacciones y las prácticas sociales: este es su estatus ontológico. Justamente, lo que permite calificar de sociales a las representaciones no son tanto sus soportes individuales o grupales como el hecho de que sean elaboradas durante los intercambios comunicativos y la intersección en las instituciones.

Se puede afirmar entonces que un rasgo esencial de las representaciones sociales es su génesis social

Expresado de otra manera, se puede decir en cuanto a las representaciones sociales , que su génesis es colectiva y no individual, ya que su sustrato no son los individuos tomados aisladamente; sino el conjunto de individuos. En esta génesis es necesario tener en cuenta distintos factores: los procesos de representación individual, las acciones e interacciones entre individuos y grupos y sobre el objeto; las características de la comunidad y las del objeto.

Según Moscovici (1979)[169] pueden seguirse tres criterios para diferenciar las representaciones sociales de las individuales:

---

[168] Citado por CASTORINA, J. A. Y KAPLAN, C. V. (2003). En Castorina,J. A. (comp). Op. Cit. Pág.10.

[169] Extraído de un documento de trabajo publicado por el Instituto de Investigaciones en Ciencias de la Educación (Facultad de Filosofía y Letras) - U.B.A. Este trabajo es una Tesis de Especialización de Posgrado en Ciencias de la Educación cuya autora es la Prof. Anahí Mastache y la Directora Dra. Marta Souto de Asch

* criterio cuantitativo: una representación es social si se encuentra extendida en la comunidad;
* criterio de producción: una representación es social si es la expresión de una organización social, si es *"producida, engendrada colectivamente"* (Moscovici, 1979, pág. 51).
* criterio funcional: una representación es social si contribuye al *"proceso de formación de las conductas y de orientación de las comunicaciones sociales"* (Idem, pág. 52).

En consecuencia, reconocer una representación social implica considerar los tres criterios a la vez, puesto que ninguno de los tres por sí solo garantiza el reconocimiento de todas las representaciones sociales y sólo de ellas.

Denise Jodelet (1996)[170] define representación social como una forma de conocimiento social ,el saber de sentido común, constituyéndose en "(...) modalidades de pensamiento práctico orientados hacia la comunicación, la comprensión y el dominio del entorno social , material e ideal"(Jodelet, 1996).

Para esta autora, las representaciones permiten a los sujetos interpretar lo que les sucede, e incluso, dar sentido a lo inesperado; sirviéndoles para clasificar las circunstancias, los fenómenos y los individuos con quienes tienen algo que ver, siendo además teorías que permiten establecer hechos sobre ellos. "(...)Y a menudo, cuando se les comprende dentro de la realidad concreta de nuestra vida social, las representaciones sociales son todo ello junto" (Jodelet , 1996)[216].

Las representaciones sociales tienen que ver con la forma como nosotros, sujetos sociales, aprehendemos los acontecimientos de la vida diaria, lo que sucede en nuestro ambiente, las informaciones que circulan, las personas de nuestro entorno próximo y lejano.

---

[170] JODELET, D. (1996). LA REPRESENTACIÓN SOCIAL: FENÓMENOS, CONCEPTO Y TEORÍA. Pág. 474. E.n S. Moscovici (Comp.). Psicología Social II. Editorial Paidós. Barcelona.

[216] JODELET (1996). Op. Cit. Pág. 472

De este modo, la noción de representaciones designa una forma de conocimiento específico, ese que habitualmente se denomina conocimiento de sentido común. "(...) Este conocimiento se constituye a partir de nuestras experiencias, pero también de las informaciones, conocimientos, y modelos de pensamiento que recibimos y transmitimos a través de la tradición, la educación y la comunicación social" (Jodelet , 1996)[217].

Se trata entonces de un conocimiento, en muchos aspectos, *socialmente elaborado* y *compartido*.

En sus múltiples aspectos, es un conocimiento que se utiliza con la intención de dominar esencialmente nuestro entorno, comprender y explicar los hechos e ideas que se presentan en nuestra vida cotidiana, actuar sobre y con otras personas, ubicarnos respecto a ellas, dar respuestas a las preguntas que nos plantea el mundo, etc.

Es decir, se trata de un *conocimiento práctico* que participa en la *construcción social de nuestra realidad*

La intención hasta aquí es presentar las definiciones de representaciones sociales desde la línea de análisis adoptada para este trabajo y reconocer algunos elementos teóricos. A continuación me voy a ocupar de las propiedades fundamentales de las representaciones sociales ya que esto me permitirá adentrarme en el análisis de lo que podría llamar la "anatomía" del objeto que intento estudiar.

3.1.2. Propiedades fundamentales de las representaciones sociales

Mirada desde la perspectiva de Moscovici, la teoría de las representaciones sociales comparte una base epistemológica con la teoría piagetiana y otras tendencias constructivistas de la psicología y las ciencias sociales, ya que considera al sujeto y

[217] JODELET (1996). Op. Cit. Pág. 473

al objeto de conocimiento como correlativos y co-constitutivos y rechaza la idea de que esos términos designen entidades independientes. **"(...) El corolario ontológico de esta postura es que las representaciones sociales forman parte de las realidades representadas y que esta constitución (o construcción) se lleva a cabo a través del anclaje y la objetivación. De esta manera, se confiere al *contenido* de lo que se construye la misma significación que al proceso de construcción y así se confirma la postulación de Moscovici, quien sostenía que las representaciones son siempre representaciones de *algo*** (Moscovici, 1976a, 1984)[173].

En este sentido, la teoría de las representaciones sociales no es una psicología de la cognición referida a la vida social, sino más bien una teoría que sitúa las actividades psicológicas en la vida social.

En las teorías psicológicas cuyas definiciones de las actividades psicológicas están centradas en los conceptos de actitudes o atribución, la cognición social es un conjunto de procesos cognitivos relacionados con estímulos sociales, siendo éstos tomados como algo dado, ya que no se postula una teoría acerca de la vida social. Esta situación las lleva a plantear que la cognición humana es una actividad de mentes individuales que se enfrentan al mundo social

Las teoría de las representaciones sociales plantean lo contrario. Tal como lo expresan Gerard Duveen y Bárbara Lloyd (2003)[174], **"(...) las actitudes y atribuciones surgen como consecuencia de la participación en la vida social y conforman la punta visible de un iceberg que tiene como base oculta las verdaderas estructuras que permiten al sujeto construir actitudes y atribuciones significativas. Y continúan, (...) Esta perspectiva se centra en los sistemas de representaciones sociales que permiten a los grupos construir una comprensión o una teoría de la vida social. "(...) Por esta razón, las representaciones sociales, además de ser representaciones de algo, son también representaciones de *alguien* o de *algún colectivo* (...). La interdependencia entre las representaciones sociales y los colectivos para los cuales funcionan hace que la vida social se considere siempre una construcción y no un hecho dado".**

Por ello, siempre debemos recordar esta idea:

---

[173] Citado por DUVEEN, G. y LlOYD, B. (2003). Op. Cit. Pág. 31.

[174] Citado por DUVEEN, G. y LlOYD, B. (2003). Op. Cit. Pág. 32.

Toda representación social es representación de *algo* y de *alguien*

Acotando más esta idea, se puede decir , por una parte, que una representación social se define por *un contenido*. El contenido de una representación hace referencia a la representación como producto. En su contenido, la representación está estructurada por una significación que ordena lo percibido en un sistema coherente. Son parte del contenido de las representaciones las informaciones, imágenes, opiniones, actitudes, categorías, sistemas de referencia, etc. Por otra parte, como la representación es la representación de un sujeto (individuo, familia, clase, etc.), en relación con otro sujeto, **"(...) la representación es tributaria de la posición que ocupan los sujetos en la sociedad, la economía, la cultura"** (Jodelet , 1996)[175].

En relación al contenido, desde la perspectiva de Moscovici , los elementos constitutivos de las representaciones sociales son[176]:

* La Información: se refiere al volumen de conocimientos que el sujeto posee de un objeto social, a su cantidad y calidad, la cual puede ir desde la más estereotipada hasta la mas original.
* La actitud: expresa la orientación general, positiva o negativa frente al objeto de representación.

En consecuencia, conocer o establecer una representación social implica determinar qué se sabe (información), qué se cree, cómo se interpreta (campo de la representación) y qué se hace o cómo se actúa (actitud).

[175] JODELET (1996). Op. Cit. Pág. 475-478.

[176] Citado por NIEVA REYES, B.C. y LIEBANO, S.J. (1998). LAS REPRESENTACIONES SOCIALES DENTRO DEL PROCESO DE SALUD ENFERMEDAD ORAL EN POBLACIONES URBANO – MARGINALES Y SU RELACIÓN CON LOS DISCURSOS Y LAS PRÁCTICAS INSTITUCIONALES. Revista de la Federación Odontológica Colombiana. Nº194. URL: http:/www.encolombia.com/foc. índice.htm.

Lo expuesto anteriormente plantea cuatro elementos constitutivos de las representaciones sociales. La información, que se relaciona con lo que "yo sé". La imagen que se relaciona con lo que "veo". Las opiniones con lo que "creo". Las actitudes con lo que "siento"; elementos éstos que se toman como guía para el análisis de la información.

Otras características de las representaciones sociales se desprenden del análisis que realiza Jodelet, D. (1996)[177] del hecho de representar.

Como lo plantea la autora, el acto de representar implica reemplazar, sustituir. La representación es un representante mental de algo y de alguien. Remite a otra cosa ya sea mítica o imaginaria, en este acto de sustituir la representación se autonomiza de lo que representa disponiendo de un poder creativo.

En palabras de Jodelet: **"(...) La representación mental , social , no solamente restituye de modo simbólico algo ausente, sino que puede sustituir lo que está presente (...)"**

Así , la representación tiene dos caras: una *faz figurativa* que es el aspecto de imagen; y una *faz simbólica o significante*, en el sentido de que restituye de modo simbólico algo ausente. Ambas fases son inseparables: a toda figura corresponde un sentido y a todo sentido, una figura. La representación tiene la función de sustituir el sentido por una figura, es decir de objetivar; y de sustituir la figura por un sentido, es decir de fijar los materiales que entran en la composición de una representación.

Particularidad que garantiza a la representación su *carácter de imagen y la propiedad de poder intercambiar lo sensible y la idea, la percepción y el concepto* y, además, su *carácter simbólico* y *significante*

"(...) La representación siempre significa algo para alguien y (para uno mismo o para otra persona) y hace que aparezca algo de quien la formula, su parte de interpretación. Debido a ello, no es simple reproducción, sino *construcción* y conlleva en la comunicación una parte de *autonomía* y de *creación individual o colectiva*" (Jodelet, 1996).

[177] JODELET (1996). Op. Cit. Pág. 476.

Es decir que las representaciones son construcciones subjetivas. No son meras copias o reflejos de la realidad, son producto de un proceso de construcción a partir de todas las informaciones que el sujeto tiene del objeto a ser representado.

La estructura de las representaciones es el resultado de un proceso de construcción permanente. La adquisición de nuevas representaciones se realiza siempre por su incorporación al sistema de representaciones ya establecido, al que a su vez modifica en cierto sentido. Esto implica que siempre haya una parte de actividad de construcción y de reconstrucción en el acto de representación.

De este modo, una representación social, tiene un *carácter constructivo* y un *carácter autónomo y creativo*

También se impone otra característica: toda representación, por más que sea individual , conlleva algo social. Lo social está dado porque las categorías que estructuran y expresan la representación son tomadas de un fondo común de cultura. Son categorías de lenguaje ; provenientes no sólo de la sabiduría acumulada, sino además de la ciencia, del discurso científico.

El pasaje del plano de la ciencia al de la representación social implica una discontinuidad, en el que las experiencias y teorías se modifican cualitativamente en sus alcances y contenidos al subordinar la construcción de la representación a un valor social que nunca es neutro.

Para Moscovici y Jodelet , este pasaje se elabora de acuerdo con dos procesos fundamentales: la objetivación y el anclaje. De ellos me ocupo ahora.

3.2. La construcción del conocimiento desde las representaciones sociales

El proceso de construcción de las representaciones sociales no limita a éstas a las reglas del discurso lógico ni las reglamenta por los procesos de verificación empírica y falsación. Más bien una representación social se concibe como una entidad configurada por dos funciones complementarias: la objetivización y el anclaje.

Estas dos funciones son interdependientes, sin embargo, para su análisis se pueden distinguir como dos momentos distintos en el proceso de construcción y transformación de una representación social

3.2.1 La Objetivización. Proceso por el cual una representación se materializa

En Rodrigo, M. J., Rodríguez, A. y Marrero, J. (1993)[178], el proceso de objetivización se describe como aquél que hace que el conocimiento se "materialice", esto es, que se descontextualice el discurso y se transforme en un esquema figurativo simple, concreto, formado con imágenes vividas y claras. Finalmente, lo convierte en un concepto ontológico, en una imagen cuasisensorial, en una cuasimetáfora. En otras palabras, constituye el sentido común o la forma de comprensión que crea el sustrato de imágenes y significados sin los que la colectividad no puede operar. Lo más característico de la objetivación es que materializa ideas en experiencias, convirtiendo así lo no familiar en familiar.

Jodelet (1996)[179] señala las tres fases que implica la objetivización:

* La construcción selectiva: Retención selectiva de elementos que después son libremente organizados. Dicha selección se da junto a un proceso de descontextualización del discurso y se realizan en función de criterios culturales y normativos. **"(...) Se retiene solo aquello que concuerda con el sistema de valores"** (Jodelet, 1996).

* El esquema figurativo: El discurso se estructura y objetiviza en un esquema figurativo de pensamiento, sintético, condensado, simple, concreto, formado con

---

[178] RODRIGO, M.J., RODRÍGUEZ, A. y MARRERO, J. ((1993). LAS TEORÍAS IMPLÍCITAS. UNA APROXIMACIÓN AL CONOCIMIENTO COTIDIANO. Pág. 45 Editorial Visor. España.

[179] JODELET, D. (1996). Op. Cit. Pág. 481-486. En el texto, JODELET identifica a las fases de la siguiente manera: a) Selección y descontextualización de los elementos de la teoría, b) Formación de un "núcleo figurativo" y c) Naturalización. En el trabajo planteé un cambio en la identificación de cada fase. Esto no modifica su esencia conceptual sino que responde a la necesidad que surge de la mirada al proceso de objetivización como la constitución formal de un conocimiento

imágenes vividas y claras; **"(...)los conceptos teóricos se constituyen en un conjunto gráfico, coherente que permite comprenderlos en forma individual y en sus relaciones"**. (Jodelet, 1996).

* La Naturalización: el modelo figurativo siendo un elemento del pensamiento se convierte en elemento de la realidad, en referente del concepto. **"(...) El modelo figurativo utilizado como si realmente demarcara fenómenos, adquiere un status de evidencia: una vez considerado como adquirido, integra los elementos de la ciencia en una realidad de sentido común"** (Jodelet, 1996) .

Jodelet destaca también la importancia de este modelo de la objetivización en su triple carácter de: construcción selectiva / esquema figurativo / naturalización. Como lo expresa la autora, **"(...) Este modelo revela la tendencia del pensamiento social a proceder por medio de construcción "estilizada", gráfica y significante"** (Jodelet, 1996) .

Así , por ejemplo, una persona que se dirige a otra utiliza los signos de la lengua para "darle a ver" su representación en una "esquematización" compuesta por imágenes. Esta es construida en función de los objetivos perseguidos en la comunicación. De este modo, la esquematización queda subordinada a una finalidad social que se traduce como una construcción selectiva subordinada a un valor social. **"(...) Un juego de enmascaramiento y de acentuación de los elementos que constituyen el objeto de la representación produce una visión de este objeto marcada por una distorsión significante. Dicho fenómeno está emparentado con lo que Piaget (1976) definió como "pensamiento socio -céntrico", por oposición al pensamiento técnico y científico: un conocimiento elaborado para servir a las necesidades, valores e intereses del grupo"** (Jodelet, 1996).

Como consecuencia, la objetivización confiere a la representación el status de marco e instrumento para orientar las percepciones y los juicios en una realidad construida en forma social.

También otorga sus herramientas al anclaje, segundo proceso de la representación social que paso a describir seguidamente.

3.2.2 El Anclaje. Proceso de significación e interpretación

Rodrigo, M. J., Rodríguez, A. y Marrero, J. (1993)[180] explican el anclaje como el proceso que posibilita la inserción de las representaciones sociales en sistemas cognitivos. Para ello, articula una "red de significados en torno al esquema figurativo de la representación, insertándola y relacionándola con otros elementos del universo simbólico"(Páez, 1987)[181].

Es evidente que las cosas que no están clasificadas y que no tienen nombre, no existen subjetivamente. Sólo clasificando lo no clasificado y nombrando lo desconocido, somos capaces de imaginarlo y representarlo.

Por esta razón, la representación es, sobre todo, un sistema de clasificación y denotación.

Según Jodelet (1996)[182], el proceso de anclaje , situado en una relación dialéctica con la objetivización, articula las tres funciones básicas de la representación: función cognitiva de la integración de la novedad, función de interpretación de la realidad y función de orientación de las conductas y las relaciones sociales.

Para esta autora, el proceso de anclaje se descompone en varias modalidades – *el anclaje como asignación de sentido*, *el anclaje como instrumentación del saber* , *anclaje y objetivación* y *el anclaje como enraizamiento en el sistema de pensamiento* - que permiten comprender: cómo se confiere el significado al objeto representado; cómo se utiliza la representación en tanto que sistema de interpretación del mundo social, marco e instrumento de conducta; cómo se opera su integración dentro de un sistema de recepción y la conversión de los elementos de este último relacionados con la representación.

---

180 RODRIGO, M.J., RODRÍGUEZ, A. y MARRERO, J. (1993). Op. Cit. Pág. 45.

181 PÁEZ, (1987). Citado por RODRIGO, M.J., RODRÍGUEZ, A. y MARRERO, J. (1993). Op. Cit. Pág. 45

182 JODELET, D. (1996). Op. Cit. Pág. 486-494

De acuerdo con el análisis realizado desde Jodelet, las representaciones no sólo expresan relaciones sociales sino que también contribuyen a constituirlas. Son instrumentos de referencia que permiten comunicar en un mismo lenguaje y, a la vez, también permiten influenciar.

Compartir representaciones, otorgándoles un mismo sentido, da cohesión a un grupo y expresa su identidad[183]. Así, estas representaciones se convertirán en sistemas de clasificación y evaluación tanto de individuos como de acontecimientos.

En consecuencia, la representación objetivizada, naturalizada y anclada, es utilizada para interpretar, orientar y justificar los comportamientos (Páez, 1987)[184].

Ahora bien, tal como lo señala Jodelet, una representación no surge de la nada, ésta no se inscribe sobre una tabla rasa, sino que siempre encuentra "algo que ya había pensado", latente o manifiesto.

Hay un sistema de representación preexistente que se pone en contacto con la novedad, esto sucede justamente por el carácter creador y autónomo de la representación social. Habría "conversiones" de experiencias, de percepciones que conducirán a una nueva visión.

Pero por otro lado la "familiarización con lo extraño", junto con el anclaje, hará prevalecer los antiguos marcos de pensamiento, alineándolo en lo ya conocido (Moscovici, S. ,1981)[185].

Hacer propio algo nuevo es relacionarlo con lo que ya conocemos, poder explicarlo con nuestras palabras; pero cuando nombramos, enumeramos, clasificamos, siempre hacemos un juicio que nunca es neutro, sino que está revelando la teoría que se tiene del objeto en sí. En la base de toda categorización, un sustrato representativo sirve de presuposición.

Así, el sistema de representación proporciona los marcos, las señales a través de las que el anclaje clasificará dentro de lo no familiar y explicará de una forma familiar.

---

[183] Este aspecto del proceso de anclaje resulta importante desde el punto de vista del análisis teórico de una representación

[184] Citado por NIEVA REYES, B.C. y LIEBANO, S.J. (1998). Op. Cit.

[185] Citado por JODELET, D. (1996). Op. Cit. Pág. 491.

Este sistema de clasificación presupone una base de representación compartida colectivamente. Las propias categorías son establecidas socialmente.

El anclaje garantiza la relación entre la función cognitiva básica de la representación y su función social. Además, proporcionará a la objetivización sus elementos gráficos, en forma de preconstrucciones, a fin de elaborar nuevas representaciones.

Hasta aquí he presentado el esquema según el cual, desde la línea teórica iniciada por Moscovici , se construye la representación social. El interés del trabajo me lleva a tratar el lugar de las representaciones en el aprendizaje.

3.3. Representaciones sociales y aprendizaje

El hecho de entender que las representaciones sociales de los alumnos acerca del conocimiento matemático están presentes en sus actividades relacionadas con dicho conocimiento plantea la existencia de relaciones entre las representaciones sociales y el aprendizaje.

Respecto a estas relaciones, **"(...) se podría afirmar que para la psicología del desarrollo cognitivo es un problema abierto el hecho de que las ideas de los niños dependan de las creencias compartidas por su comunidad y los psicólogos sociales deben enfrentar la cuestión de que las ideas acerca de la sociedad de todo agente están asociadas con algún tipo de construcción intelectual"** (Duveen, 1994)[218].

En conformidad con la afirmación anterior, es preciso analizar el lugar de las representaciones sociales en el aprendizaje disciplinar tomando en consideración, como mínimo, las interpretaciones del tema que surgen de estudios provenientes tanto del campo de la psicología social como de la psicología cognitiva.

Desde la perspectiva de la psicología social, Castorina y Kaplan (2003)[219], en el marco de las representaciones sociales y la adquisición de los conocimientos

[218] Citado por CASTORINA, J. A. Y KAPLAN, C. V. (2003). Op. Cit. Pág.16.

[219] CASTORINA, J. A. Y KAPLAN, C. V. (2003). Op. Cit. Pág.16-22

sociales[220], consideran el lugar de las representaciones sociales en la construcción del conocimiento de los alumnos, previo al aprendizaje escolar, y en su cambio conceptual, a partir de la discusión de la tesis según la cual la concepción psicosocial de cómo adquieren los niños las representaciones sociales se contrapone por razones teóricas a la concepción constructivista del desarrollo cognoscitivo.

Utilizando resultados de trabajos de investigación propios y de otros autores que comparten en líneas generales la teoría de las representaciones sociales inaugurada por Moscovici, Castorina y Kaplan (2003) argumentan su posición contraria respecto a la tesis y proponen un campo de colaboración entre la psicología social y la psicología del desarrollo cognitivo.

Según estos autores, la cuestión central a debatir desde la psicología social sería: ¿la apropiación por los niños de las representaciones preexistentes es pasiva o involucra alguna actividad individual?. Y, desde la psicología del desarrollo sería: ¿en qué medida intervienen las representaciones sociales en la construcción de ideas de los niños?.

Así, exploran algunas respuestas a estas dos preguntas basándose en estudios realizados (Castorina y Lenzi, 1992; Lenzi y Castorina, 1996; Lenzi y Castorina, 2000; Faigenbaum, 2000) sobre los conocimientos infantiles acerca de una institución.

Estos estudios dan cuentan **"(...) de que la elaboración individual de los conocimientos sociales asume peculiaridades que son indicadoras del contexto de reciprocidad comunicativa y sobre todo de las fuertes presiones o restricciones institucionales (Castorina, Faigenbaum, Kohen Kohen, Zerbino, Tabusch y Clemente, 2001). O (...) Como afirman Emler, Ohana y Dikinson, en las ideas de los niños sobre la sociedad cuenta de un modo relevante lo que las instituciones hacen con ellos"**.

Sin lugar a dudas, según Castorina y Kaplan, **"(...) las creencias dominantes, vinculadas a la escuela o a otras instancias culturales e institucionales,**

[220] Si bien CASTORINA, J. A. Y KAPLAN, C. V (2003) hablan de conocimientos sociales considero que es válido transponer este análisis al campo de las matemáticas dado el carácter social del conocimiento matemático en tanto que es producido en un proceso histórico –social que, además, él ayuda a producir.

preexisten a los niños y son una materia prima indispensable para sus hipótesis acerca de la normativa escolar".

Como derivación de los estudios realizados, estos autores expresan que en la adquisición de las ideas sobre las instituciones, las representaciones sociales influyen en la construcción de hipótesis y constituyen un trasfondo que restringe lo cognoscible de la institución para los niños.

De este modo, para esta perspectiva de análisis, las representaciones sociales pasan a formar parte del marco epistémico o núcleo de creencias que orienta la construcción conceptual individual.

En este sentido, la transmisión social forma parte del conocimiento infantil, pero se trata de una transmisión que es resignificada por la actividad constructiva. Pensar lo contrario, es decir, **"(...) eliminar toda elaboración individual en la asimilación de las representaciones sociales equivale a retornar a la vieja escisión entre individuo y sociedad por la vía de suprimir uno de sus términos"** (Ellias, 1983)[221].

A partir de estos resultados, Castorina y Kaplan plantean el campo de colaboración entre la psicología social y la psicología del desarrollo cognitivo fundado en el reconocimiento de ciertos principios ontológicos y epistemológicos comunes. Ellos son, **"(...) Básicamente, la postulación de relaciones constitutivas entre individuo y sociedad, rechazando su escisión; que la sociedad no es conocida como si fuera una cosa sino en tanto entramado de relaciones significativas en la comunicación y una tesis constructivista, nítidamente opuesta a la pasividad del sujeto, en la transmisión de las representaciones sociales y en las interacciones cognitivas con el objeto social(...)"**.

El análisis realizado por Castorina y Kaplan se enlaza con el lugar de las representaciones sociales en el aprendizaje escolar de conocimientos disciplinarios en el sentido que los valores y la dimensión afectiva asociados a las creencias compartidas forman parte del marco epistémico que orienta la construcción

[221] ELLIAS (1983). Citado por CASTORINA, J. A. Y KAPLAN, C. V. (2003). Op. Cit. Pág.20.

individual. Y, según algunos autores (Guyón et.al., 1993)[222] los valores y la dimensión afectiva asociados a las creencias compartidas resisten al aprendizaje, en el sentido de constituir "obstáculos epistemológicos" para la reformulación de las ideas en dirección al saber que se ha de enseñar.

Para finalizar la interpretación del lugar de las representaciones en el aprendizaje desde la perspectiva de la psicología social, se puede decir que en la formación de los saberes previos de los alumnos y en el aprendizaje de las disciplinas influyen las restricciones y compromisos valorativos que forman parte de su marco epistémico. Esto significa que el cambio conceptual de los alumnos lleva a afrontar el desafío que plantea la persistencia de las creencias sociales antes y durante la enseñanza.

Como lo mencioné al iniciar este epígrafe, el análisis del lugar de las representaciones sociales en el aprendizaje también se realizará considerando las interpretaciones del tema desde la psicología cognitiva.

Pozo, Sanz, Gómez Crespo y Limón (1991)[223] , investigadores en este campo de estudio, refieren a las representaciones sociales como concepciones inducidas de los alumnos, de origen social, constitutivas con otras dos – concepciones espontáneas, de origen sensorial, y concepciones análogas , de origen analógico– de las ideas de los alumnos cuando aprenden ciencia.

Antes de avanzar quiero señalar , por un lado, como lo manifiestan los autores, que estas tres concepciones levemente diferenciadas no establecen tres tipos de ideas, ya que las cosas pueden ser bastantes más complejas, al haber una continua interacción entre estos factores. Por otro lado, expreso que aquí se focaliza la atención en la interpretación de las concepciones del punto de interés del trabajo: las representaciones sociales. No obstante, se harán algunas conexiones con las otras concepciones.

---

[222] GUYÓN ET.AL., (1993). Citado por CASTORINA, J. A. Y KAPLAN, C. V. (2003). Op. Cit. Pág.21.

[223] POZO, J.A., SANZ, A., GÓMEZ CRESPO , M.A. y LIMÓN, M. (1991). LAS IDEAS DE LOS ALUMNOS SOBRE LA CIENCIA: UNA INTERPRETACIÓN DESDE LA PSICOLOGÍA COGNITIVA. Pág 83-91 . Revista Enseñanza de las Ciencias. Vol.9. Nº1. Edita: ICE de la Universitat Autónoma de Barcelona. Servei de Formació Permanent de la Universitat de Valéncia. España

Respecto a las representaciones sociales, para Pozo, Sanz, Gómez Crespo y Limón éstas tomarían ciertas palabras –conceptos del discurso científico divulgado a través de los medios, asimilándolo al "sentido común social", con lo que desvirtuarían buena parte del significado de los conceptos científicos.

Esa asimilación está determinada en buena medida por los procesos cognitivos individuales basados esencialmente en el uso de reglas de inferencia causal de tipo heurísticos. De entre ellas, hay una de carácter más general ya que no informa sobre cuál puede ser la causa de un fenómeno sino sobre cuándo debe ponerse en marcha la búsqueda de causas. Esta se expresa cuando **"(...) los alumnos tienden a *explicar los cambios*, *no los estados*"** (Driver 1988, Driver, Guesne y Tiberghein, 1985)[224].

Junto a este principio general, existen otra serie de reglas más específicas que vendrían a informar sobre cuáles son las causas más probables de un hecho. Entre estos heurísticos se encuentran , sin entrar en profundizaciones , el de *accesibilidad*, la atribución a la causa más accesible a la memoria o que se recupera con mayor facilidad, el de *semejanza,* la creencia que existe una semejanza básica entre las causas y los efectos, el de *contigüidad espacial*, la proximidad entre causa y efecto y, por último, el de *covariación*, la atribución de causalidad a los hechos que suceden sistemáticamente.

Según el análisis realizado por Pozo, Sanz, Gómez Crespo y Limón, estas reglas de inferencia causal determinarían en gran medida *los contenidos* de las ideas de los alumnos.

Del análisis anterior se infiere que la psicología cognitiva sitúa a las representaciones sociales dentro del marco conceptual que configura las ideas del alumno

Además, como señalan los autores , la asimilación **"(...) supondría normalmente la formación de un "esquema figurativo" o una imagen social, que permitiría objetivar los elementos seleccionados y terminarían por deformar el significado**

[224] Citado por POZO, J.A., SANZ, A., GÓMEZ CRESPO , M.A. y LIMÓN, M. (1991). Op. Cit. Pág.85

del discurso científico. De esta forma , la producción científica se convierte en producción social o si se prefiere en ideología”.

Por último destaco el valor que asignan Pozo, Sanz, Gómez Crespo y Limón a la utilización de las representaciones sociales en el campo de las ciencias. Según sus palabras, **“(...) el análisis de las concepciones científicas de los alumnos como representaciones sociales pueden ayudar a esclarecer el origen social de algunas ideas científicas, (...) además de dotar a la educación científica de la función de la función de establecer la comprensión de la ciencia a partir de procesos y conceptos alejados del sentido común”**.

Segunda Parte

METODOLOGÍA

Capítulo 4

Metodología de la Investigación

Antes de precisar el planteamiento epistemológico y los procedimientos metodológicos[193] constitutivos del diseño metodológico, es necesario definir los **objetivos** de esta investigación.

Como objetivo general señalo la intención de *"describir, analizar e interpretar las representaciones sociales acerca del conocimiento matemático de los estudiantes del 3º ciclo de la EGB"*. A su vez, para la consecución del mismo, tendré que (objetivos específicos): a)Describir y analizar los modos de comprender, valorar, comunicar y actuar, en relación con el conocimiento matemático que desarrollan los estudiantes, en tanto sujetos en interacción con otros, b)Analizar, interpretar y comprender los significados, los símbolos y formas de interpretación que los alumnos ponen en juego en la relación que establecen con el conocimiento matemático en la escuela y c)Identificar, Analizar e interpretar las distintas

---

[193] Utilizo los términos "el planteamiento epistemológico" y "los procedimientos metodológicos" en el mismo sentido que proponen Gimeno Sacristán y Pérez Gómez (1989) . GIMENO SACRISTÁN, J. y PÉREZ GÓMEZ,A . (1989). LA ENSEÑANZA: SU TEORÍA Y SU PRÁCTICA. Pág.88-93. Editorial Akal-Universitaria. Madrid.

dimensiones de las RS construidas por los alumnos en torno al conocimiento matemático.

Explicitado los propósitos, de las cuestiones metodológicas me ocupo a continuación

4.1. El planteamiento epistemológico

4.1.1. Paradigma de investigación

Como ya lo manifesté en el capítulo precedente, en este trabajo se aborda las representaciones sociales del conocimiento matemático que están presentes – implícita o explícitamente – en el sentido que otorga el alumno a dicho conocimiento a través de su aprendizaje escolar.

El aprendizaje escolar se concreta en la escuela que, como todo sistema social, es **"(...) un espacio ecológico de intercambio de significados, de patrones culturales comunicados a través del pensamiento y la conducta"** (Bowers y Flinders, 1990)[194]. Por tanto, se puede decir que los procesos de aprendizaje escolar **"(...) son, en definitiva, procesos de creación y transformación de significados..."** (Pérez Gómez, 1992)[195]. De tal forma, las representaciones, como un sistema de pensamiento, integran estos contextos de significados e intervienen en la construcción del sentido del conocimiento matemático del alumno.

El planteamiento teórico del párrafo anterior, destaca el hecho que la representación social siempre implica procesos de significación. Por otra parte, fundamenta el supuesto epistemológico, sobre el que se asienta el objeto de estudio de esta investigación , de que las relaciones entre las representaciones sociales y el aprendizaje escolar deben interpretarse desde los significados que aparecen en las mismas representaciones sociales de los alumnos acerca del dominio en cuestión.

---

[194] Citados por PÉREZ GÓMEZ, A.I. (1992) ENSEÑANZA PARA LA COMPRENSIÓN. Pág. 108. En SACRISTÁN, J. G. Y PEREZ GÓMEZ, A. I. (1992) COMPRENDER Y TRANSFORMAR LA ENSEÑANZA. Cap. IV. Ediciones Morata. Madrid.

[195] PÉREZ GÓMEZ, A.I. (1992) Op. Cit. Pág. 99.

Tomando en consideración el planteamiento enunciado, el abordaje al objeto de estudio brevemente caracterizado requiere adoptar un paradigma de investigación, entendido como **"(...) los marcos teóricos-epistemológicos de interpretación de los fenómenos sociales creados y/o adoptados por los científicos sociales..."** (Vasilachis, I., 1993)[196], que permita llegar a los significados, acceder al mundo conceptual de los individuos y a las redes de significados compartidos por los grupos de alumnos en relación al conocimiento matemático.

Por ello, en esta investigación utilicé perspectivas que provienen del paradigma interpretativo , ya que éste **"(...) se orienta a describir e interpretar los fenómenos educativos y se interesa por el estudio de los significados e intenciones de las acciones humanas desde la perspectiva de los propios agentes sociales. (...) se aborda el mundo personal de los sujetos (cómo interpretan las situaciones, qué significados tienen para ellos) no observable directamente ni susceptible de experimentación"** (Arnal, J., del Rincón, D., Latorre, A., 1992)[197].

Esta perspectiva me otorgó la posibilidad de atender a la intencionalidad y el significado o interpretación subjetiva del alumno acerca del conocimiento matemático al que se aproxima a través del aprendizaje y , a la vez, **"(...) identificar lo que Lucien Goldmann llama *estructura significante*** (Goldmann, 1976, 1980), aludiendo a una estructura que tiene importancia funcional para un determinado grupo..." (Duveen, G. y Lloyd, B., 2003)[198]. Una estructura significante identifica tanto al grupo de alumnos que construye una representación como al contenido representado y, por consiguiente, da cuenta de la presencia de la representación social tal como es entendida por la línea teórica de Moscovici.

De tal manera, la representación social trata de procesos de significación del conocimiento matemático de los cuales podrían derivar, en caso que se quiera

---

[196] VASILACHIS, I. (1993). MÉTODOS CUALITATIVOS. Pág. 22 . Centro Editor de América Latina. Buenos Aires.

[197] ARNAL, J., DEL RINCÓN, D. Y LATORRE, A., (1992). INVESTIGACIÓN EDUCATIVA. FUNDAMENTOS Y METODOLOGÍAS. Pág. 193. Editorial Labor. Barcelona. España.

[198] DUVEEN, G. y LlOYD, B. (2003). LAS REPRESENTACIONES SOCIALES COMO UNA PERSPECTIVA DE LA PSICOLOGÍA SOCIAL. Pág. 33. . En CASTORINA,J. A. (2003). (comp). REPRESENTACIONES SOCIALES. PROBLEMAS TEÓRICOS Y CONOCIMIENTOS INFANTILES. Cap.2.

investigar, las posibles relaciones entre las representaciones y el aprendizaje escolar.

4.1.2. Hipótesis

Las hipótesis que propongo en este trabajo de investigación son descriptivas , en el sentido que **"(...) son suposiciones referidas a la existencia, la estructura, el funcionamiento, las relaciones y los cambios de cierto fenómeno"** (Briones, G., 1992)[199], y se apoyan en las configuraciones teóricas elaboradas a partir del análisis de las distintas fuentes que forman parte del marco teórico.

Así, en el marco teórico de esta investigación, se considera que las representaciones sociales del conocimiento matemático intervienen en la construcción del sentido que otorga el alumno a dicho conocimiento en su aprendizaje escolar. Pero también determinan la acción del estudiante porque los seres humanos crean interpretaciones significativas y actúan de acuerdo con esas significaciones (Erikson, F., 1989)[200] o porque **"(...) la acción del sujeto está determinada por sus representaciones"** (Pozo, J.I, 1989)[201].

Este planteo me lleva a la siguiente suposición, que es la hipótesis principal de este trabajo:

* Las representaciones sociales de los alumnos acerca del conocimiento matemático contienen significados del conocimiento matemático que podrían influir en el aprendizaje escolar.

Y de esta suposición se deriva la siguiente:

---

[199] BRIONES, G. (1992). MÉTODOS Y TÉCNICAS DE INVESTIGACIÓN PARA LAS CIENCIAS SOCIALES. Pág.34. Editorial Trillas. México.

[200] ERICKSON, F. (1989). MÉTODOS CUALITATIVOS DE INVESTIGACIÓN SOBRE LA ENSEÑANZA. En: WITTROCK, M. (1989). LA INVESTIGACIÓN DE LA ENSEÑANZA II. Ediciones Paidós. Barcelona.

[201] POZO, J.I. (1989). Op. Cit. Pág. 42.

- Las representaciones sociales de los alumnos acerca del conocimiento matemático implican procesos de significación que intervienen positiva o negativamente en el aprendizaje de la matemática.

4.2. Diseño Metodológico

4.2.1. Métodos

La metodología de trabajo que utilicé se estructura sobre la triangulación entre métodos cuantitativos y cualitativos pero por la naturaleza del problema - de múltiples significados – es predominantemente cualitativa.

En consecuencia, he usado un modo de trabajo vinculado fundamentalmente a la tarea de interpretación y análisis de datos. Fui elaborado las interpretaciones como si fuera hilvanando elementos que surgen de diferentes modos de recolección de datos hasta lograr lo que Jick postula cuando afirma que **" (...) En conjunto el investigador que triangula debe buscar un ordenamiento lógico entre los resultados de los varios métodos. Su pretensión de validez se basa en el juicio ... una capacidad de organizar materiales en un cuadro plausible..."** [202].

Para el análisis de los datos, teniendo en cuenta que los datos son preferentemente cualitativos, utilicé el *análisis de contenido* en el sentido que lo define Behar (1991)[203], quien indica que **"Actualmente el análisis de contenido se utiliza para la descripción de las características de mensajes verbales con el fin de formular inferencias a partir del contenido de los mensajes verbales (...)"**

Fox (1981)[204] señala tres etapas el análisis del contenido: **"1) Decisión de cuál será la unidad de contenido que se analizará; 2) elaboración de conjunto de**

---

[202] JICK citado por FORNI, F. y Otros. (1992). MÉTODOS CUALITATIVOS II. Pág.86. Centro Editor de América Latina. Buenos Aires.

[203] Citado por FLORES MARTÍNEZ, .P. (1998). Op. Cit. Pág. 123

[204] FLORES MARTÍNEZ, .P. (1998). Op. Cit. Pág. 123

categorías; y 3) elaboración de un fundamento lógico que sirva de guía para colocar las respuestas en cada categoría”.

El análisis de contenido que realicé no se limita a ninguna producción particular de los alumnos. Todas las producciones , provenientes de las distintas fuentes (excepto la encuesta), fueron divididas en unidades de información que luego se consideraron en alguna de las categorías de representaciones sociales.

Para la conformación e interpretación de las categorías de representaciones sociales del conocimiento matemático , y con el objeto de sistematizar su estudio, consideré , siguiendo a Ernest (1994)[205] , dos apartados dentro de la epistemología de las matemáticas: *la ontología de las matemáticas* (que nos aproxima al estudio de la naturaleza del objeto matemático) y *la gnoseología de las matemáticas* (que se ocupa de la actividad matemática, de la acción sobre los objetos).

Cada uno de estos apartados incluyen diferentes aspectos del conocimiento matemático. Como en este trabajo el conocimiento matemático se inscribe en el sistema escolar, para cada apartado he considerado fundamentalmente aquellos aspectos epistemológicos del conocimiento matemático que se proyectan en el proceso de enseñanza y aprendizaje y que fueron desarrollados en el marco teórico (Capítulo 1). Es decir, que el plano epistemológico constituye el nivel de reflexión sobre objeto de investigación.

El otro referente metodológico, que complemento con el descripto, y que adopté para desglosar de un modo operativo distintas facetas de la categoría representación social , así como para presentar de forma ordenada las cuestiones que se tratan en cada plano , es el instrumento analítico denominado la Rejilla que fue generado por Flores Martínez, P. (1998)[225]. El autor emplea la Rejilla para describir , de manera sincrónica , un amplio abanico de posiciones y formas de concebir las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje. Por lo cual consideré pertinente su utilización dado los fines que persigo.

---

[205] ERNEST (1994). Citado por FLORES MARTÍNEZ, .P. (1998). Op. Cit. Pág. 41 Este planteo de Ernest utilicé implícitamente para la caracterización de las matemáticas del Capítulo 1.

[225] FLORES MARTÍNEZ, .P. (1998). Op. Cit. Pág. 123-133.

Con las dos dimensiones que he planteado se construye la Rejilla[226] que aparece a continuación.

Tabla Nº1: La Rejilla

PLANO	**APARTADOS**	
	Ontología	**Gnoseología**
Epistemológico	La naturaleza de las matemáticas Es descubrimiento / es creación **Categoría 1**	Las formas de desarrollo del conocimiento matemático **Categoría 5**
	La relación de las matemáticas con la realidad **Categoría 2**	La adquisición del conocimiento matemático **Categoría 6**
	La utilidad de las matemáticas **Categoría 3**	
	Características de la organización del conocimiento matemático **Categoría 4**	

Como se podrá observar cada casilla de la rejilla se convierte en una categoría de una variable bidimensional (Plano, Apartado). En la introducción del desarrollo de cada categoría de representación social, realizada en la parte de Análisis e interpretación de datos, figuran las cuestiones del conocimiento matemático que incluyen cada categoría. Por eso considero que hacer aquí una caracterización sería redundante.

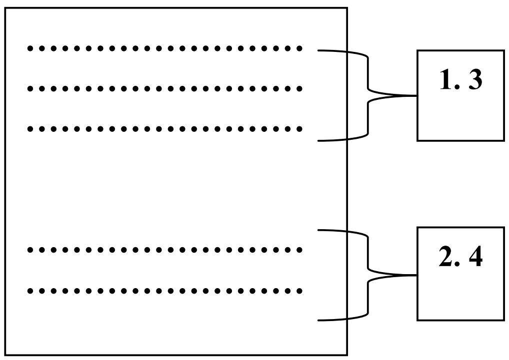
El esquema siguiente sintetiza la estrategia metodológica planteada hasta aquí.

---

[226] Cabe señalar que esta rejilla es una Rejilla reducida respecto a la generada por FLORES MARTÍNEZ, .P. (1998), quien considera más planos de reflexión. También se plantean diferencias en algunos aspectos considerados en cada casilla Op. Cit. Pág. 123-133.

EL ANÁLISIS DE LOS DATOS

- **División de la totalidad de las producciones escritas en unidades de información. Cada unidad fue codificada y conceptualizada**



- **Elaboración de categorías de representaciones sociales**

PLANO	APARTADOS	
	Ontología	**Gnoseología**
Epistemológico	**La Naturaleza del C.M.**	**Las formas del desarrollo del C.M**

Incluye las unidades que tratan, por ejemplo, qué son los objetos matemáticos, su existencia, su relación con la naturaleza

- **Análisis intenso de todo el abanico de contenidos o significados implicados en cada categoría para identificar el fenómeno central - núcleo figurativo- y los elementos que se relacionan alrededor de él.**

4.2.2. Tipo de investigación

Defino a esta investigación como aplicada, descriptiva, no experimental y de campo[208]:

a) Aplicada: porque el propósito de este trabajo es preponderante de carácter práctico ya que, según sean los resultados, se puede repensar la formación docente en la especialidad y desarrollar modelos didácticos alternativos para la enseñanza de la Matemática.

b) Descriptiva: porque trato de explicar cómo pueden incidir las representaciones sociales de los alumnos acerca del conocimiento matemático en sus procesos de aprendizaje y en su desempeño escolar.

c) No experimental: porque no se pueden controlar o manipular las representaciones sociales de los alumnos y las condiciones contextuales de aprendizaje.

d) De campo: porque el desarrollo del aspecto empírico de la investigación se realizó en un ambiente natural: la Institución escolar y, particularmente, el aula.

4.2.3. Escenario

La investigación se realizó en una escuela pública de la ciudad de Eldorado que está ubicada en la zona céntrica de la ciudad, lugar estratégico por ser de fácil acceso y encontrarse en el espacio donde se concentra el movimiento comercial, social e institucional (Organismos oficiales).

---

[208] Para definir el tipo de investigación tomo como marco teórico de referencia a BRIONES, G. (1992). MÉTODOS Y TÉCNICAS DE INVESTIGACIÓN PARA LAS CIENCIAS SOCIALES. Pág. 13 a 22 y Pág. 33 a 43. Editorial Trillas. México.

Es la primera institución educativa de niveles EGB3 y Polimodal, la de mayor matrícula estudiantil y goza de alto grado de poder institucional en la comunidad[209] con base en aspectos relacionados al modelo institucional[210] y al proyecto institucional.

El modelo y el proyecto organizan esta institución alrededor de un guión preponderantemente mítico y toma componentes utópicos[211] que condicionan y configuran la vida del aula generando construcciones con múltiples significados en relación a la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática en la escuela[212].

Las observaciones de clases se realizaron en los dos turnos: turno mañana y tarde. Mientras que todas las otras actividades se desarrollaron solamente con alumnos y docentes que asisten a la escuela en el turno mañana.

4.2.4. Técnicas

Considero conveniente para esta investigación recurrir a técnicas que utiliza la investigación etnográfica, porque ésta **"(...) esencialmente consiste en una descripción de los eventos que tienen lugar en la vida del grupo, con especial consideración de las estructuras sociales y la conducta de los sujetos como miembros del grupo, así como de sus interpretaciones y significados de la**

---

[209] Utilizo el término poder entendido como relación de influencia y teniendo en cuenta las bases del poder. En este caso la relación se establece entre la institución y el medio que es el "cliente" del establecimiento. Conceptualización de poder que realizan MARC, E. Y PICARD, D. (1992). LA INTERACCIÓN SOCIAL. Editorial Paidos. Buenos Aires.

[210] FERNÁNDEZ, L. (1993). INSTITUCIONES EDUCATIVAS. DINÁMICAS INSTITUCIONALES EN SITUACIONES CRÍTICAS. Pág 47..Editorial Paidos. Buenos Aires.

[211] FERNÁNDEZ, L. (1993). Op. Cit. Pág159-162.

[212] KORNEL, J. (1998)."SUFRIMIENTO INSTITUCIONAL: ESTÁ EN PELIGRO EL MODELO". Trabajo final del Seminario "Análisis Institucional de la Universidad", dictado por la Prof. LIDIA FERNÁNDEZ. Maestría en Docencia Universitaria. Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional de Misiones.

cultura a la que pertenecen (Taft, 1998)"[213]. Es decir, se corresponde con las características del objeto de investigación:

Por ello, las técnicas que utilicé en este trabajo son: sondeo por encuesta, la observación participante, la entrevista en profundidad y análisis de documentos.

a) Sondeo por encuesta: se utilizó como punto de partida. Esta encuesta tiene un carácter exploratorio de las representaciones de los alumnos acerca del conocimiento matemático. Con la incorporación de esta técnica cuantitativa y mediante la triangulación de métodos (cuantitativos - cualitativos) pude abordar, en una primera aproximación, los significados acerca del conocimiento matemático que están presentes en las representaciones sociales de los alumnos.

b) La observación participante: se realizaron observaciones de clase para captar y registrar principalmente las interacciones alumno – grupo clase - docente, las actitudes que asume el alumno y sus intervenciones en la clase.

c) La entrevista en profundidad: estuvo dirigida a los informantes clave. En estas entrevistas pude reconocer los significados para el alumno de los acontecimientos y procesos y los procesos cognitivos y metacognitivos que pone en acto en su proceso de aprendizaje matemático.

d) Análisis de documentos: se refiere a la carpeta del alumno, la libreta del profesor, la planificación del docente, borradores de estudio de los alumnos, exámenes del alumno, libros de textos y revistas. El análisis de estos documentos me permitió acceder a los significados desde otro lugar: la comunicación escrita. Esta técnica enriquece la indagación de las construcciones de significados que realiza el alumno.

---

[213] TAFT, T. (1998). ETHNOGRAPHY RESEARCH METHODS. En KEEVES, J. P. (1998). (de). METHODOLOGY AND MEASUREMENT. Educational Research. An International Handbook. Oxford. Pergamon. En ARNAL, J., DEL RINCÓN, D. Y LATORRE, A., (1992). INVESTIGACIÓN EDUCATIVA. FUNDAMENTOS Y METODOLOGÍAS. Pág. 193. Editorial Labor. Barcelona. España.

4.2.5. Instrumentos

En este trabajo de investigación se utilizaron diferentes instrumentos de recolección y estrategias para la obtención de información que se incluyen en Apéndices.

En el caso de la Encuesta para el sondeo fue diseñada como instrumento autoadministrado destinado a los alumnos del establecimiento seleccionado para su implementación. En su elaboración tuve en cuenta: A) El objetivo que se persigue con ella y B) El modo en que el alumno se acerca al conocimiento matemático. Describo sucintamente ambos puntos.

A) El objetivo que se persigue con esta encuesta.

El objetivo - explorar las representaciones sociales de los alumnos acerca del conocimiento matemático - fue determinante en las siguientes decisiones:

a) El nivel de formulación: el nivel de formulación de las preguntas es general no particular debido al carácter exploratorio de la encuesta. Esta decisión también me condicionó el número de preguntas y las distintas opciones para cada una de ellas.

b) La orientación de la encuesta: las preguntas están orientadas según la conceptualización de representaciones que utilizo en el trabajo.

En este sentido elaboré preguntas que permitan aproximarme a las representaciones del conocimiento matemático desde[214]:

b_1) las percepciones del alumno: ítems 1°) y 2°)

b_2) las actitudes: ítems 3°), 4°) y5°). Abordo los distintos modos de actuación del alumno frente al aprendizaje de la Matemática.

b_3) los conceptos y significados: ítems 6°) 7°) y 8°). Las situaciones matemáticas planteadas permiten dar cuenta de conceptos y significados del alumno sobre la Matemática. Como ser:

[214] Nota: si bien establezco una correspondencia entre ítem y dato posible de obtener esto no significa que dicha correspondencia sea única. Cada ítem me puede brindar más información que la expresada.

- los tipos de conocimiento matemático del alumno - relacional o instrumental - que se corresponden con la Matemática relacional o Matemática instrumental .
- la matemática como ciencia demostrativa o como conjunto de reglas sin relaciones entre sí.
- La matemática como ciencia absoluta e infalible o como ciencia que utiliza valores aproximados.

B) El modo en que el alumno se acerca al conocimiento matemático.

En este trabajo el alumno se acerca al conocimiento matemático a través del aprendizaje escolar. Por ello, en la encuesta abordo el conocimiento desde situaciones relacionadas a su aprendizaje.

En las observaciones de clases no utilicé instrumentos específicos, aquí me posicioné desde la perspectiva de la etnografía del aula. En las observaciones asumí el rol de observadora no participante; estuve atenta a lo que ocurría en el aula , intentando registrar todo lo posible y no sólo aquello que se vincula con el objeto de estudio.

En cuanto a las entrevistas, éstas se realizaron al terminar las encuestas y las observaciones de clases, de modo que los datos surgidos del análisis de éstos me brindaron información de ciertos ejes temáticos que fueron planteados en las entrevistas. Las entrevistas que realicé son individuales y grupales. La mayoría de las entrevistas se iniciaba presentando al alumno o alumnos una situación sobre un determinado aspecto del conocimiento matemático y su aprendizaje. La idea es que la situación sea un disparador del tema de la entrevista , como una apertura al diálogo, pero luego ésta seguía el rumbo orientado por el entrevistador - entrevistado/s.

En las entrevistas individuales, las situaciones presentadas al alumno consistía en una situación problemática, porque en este tipo de entrevistas mi intención era fundamentalmente, lo que no significa exclusivamente, registrar los modos de trabajo matemático y las actitudes de los alumnos frente a una actividad matemática. En el caso de las entrevistas grupales las situaciones presentadas fueron:

a) Episodios críticos representados por medio de viñetas tipo comics. El episodio crítico es una situación "novelada", un relato descriptivo de una situación de la vida cotidiana, en la cual determinados personajes exponen su punto de vista. La utilización de episodios críticos **"(...) es coherente con la idea de que las personas no tienen teorías almacenadas como redes de conceptos abstractos, sino como conjuntos de experiencias de dominio, a partir de los cuales sintetizan la teoría ante una demanda concreta"** (Rodrigo, Rodríguez y Marrero , 1993)[215]. Así se parte del supuesto de que una teoría se activa mejor a partir de una experiencia que de un concepto. Cabe señalar aquí que como los alumnos entrevistados no habían contestado la encuesta, la mayoría de los contenidos de los episodios críticos eran los mismos que los planteados en la encuesta, lo cual me permitió resignificar los datos obtenidos en la encuesta.

b) Las Metáforas. Tal como lo expresa David Pimm (1990)[14] **"(...) la metáfora se nos presentan como poderosas técnicas lingüísticas para la creación de nuevos significados. Proporcionan medios a través de los cuales lo menos habitual puede asimilarse a lo más familiar, considerando lo primero en términos de lo segundo"**. La utilización de metáforas permitió a los alumnos significar el conocimiento matemático utilizando un lenguaje social. Así, con el uso de metáforas se superaron las exigencias que impone la expresión de las ideas matemáticas permitiéndome acceder a los significados que otorgan los alumnos a aspectos del conocimiento matemático que se definen en un lenguaje muy técnico. Considerando la clasificación de Pimm, las metáforas que utilizaron los alumnos fueron sobre todo extra-matemáticas ya que tratan de explicar o interpretar ideas y procesos en términos de acontecimientos del mundo real e incluyen objetos y procesos de la vida diaria.

---

[215] RODRIGO, M.J., RODRÍGUEZ, A. y MARRERO, J. ((1993). LAS TEORÍAS IMPLÍCITAS. UNA APROXIMACIÓN AL CONOCIMIENTO COTIDIANO. Pág. 134-135 Editorial Visor. España.

[14] PIMM, D. (1990). EL LENGUAJE MATEMÁTICO EN EL AULA. Pág. 140. Ediciones Morata. Madrid.

Respecto al análisis de documentos no utilicé instrumentos específicos, los datos que surgen de ellos son contrastados con los discursos de los alumnos y los registros de las observaciones.

4.2.6. Justificación del contexto de investigación

Me parece importante señalar que estudié el aprendizaje de la Matemática desde las representaciones sociales del alumno que se encuentra en el tercer ciclo de la Enseñanza General Básica (EGB 3).

Si bien las representaciones sociales están presentes en todos los niveles del sistema educativo, observo que es en la EGB3 donde los estudiantes utilizan con más frecuencia a las representaciones sociales como marcos de referencia para interpretar y justificar su aprendizaje escolar.

Tiendo a pensar que uno de los motivos podría ser que la EGB3 es un "momento de cambios" en el aprendizaje del alumno porque éste debe enfrentarse al tipo de pensamiento formal que requiere el aprendizaje matemático. Para ello, el estudiante necesita un nivel de desarrollo de los procesos cognitivos que transforma al aprendizaje del conocimiento matemático en un proceso aún más complejo y esto, según mi entender, genera y potencia en el alumno el uso de las representaciones como marcos de interpretación de su aprendizaje escolar.

El criterio de selección de los alumnos fue la predisposición para colaborar en el trabajo conjunto y responsable con la investigadora.

Consideré pertinente para el trabajo que este grupo de alumnos participantes o informantes clave estuviera integrado por estudiantes que manifiestan:

a) que gustan de la Matemática y tienen buen rendimiento escolar
b) que gustan de la Matemática y tienen mal rendimiento escolar.
c) que no gustan de la Matemática y tienen buen rendimiento escolar
d) que no gustan de la Matemática y tienen mal rendimiento escolar.

Tercera parte

ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN

Capítulo 5

Las representaciones sociales de los estudiantes acerca del conocimiento matemático

5.1. “El conocimiento matemático es una creación del hombre”

Esta representación social hace referencia a uno de los aspectos que corresponden al plano epistemológico y a la dimensión ontológica del conocimiento matemático: la naturaleza de la matemática.

En la naturaleza de la matemáticas, y desde el punto de vista ontológico, las preguntas que se suscitan son, entre otras: ¿qué son los objetos matemáticos? ¿qué existencia tienen los objetos matemáticos? ¿qué relación tienen los objetos matemáticos con la naturaleza? [217]. En tal sentido se planteó la siguiente discusión en un grupo de alumnos:

---

[217] FLORES MARTÍNEZ (1998). Op. Cit. Pág 42.

"Julieta: *bueno, recordemos la situación planteada: la profesora le pidió a Ana que le trajera una recta y un dos. Ana le trajo una regla y le contestó que no podía traer el dos. Su amigo Pedro quedó sorprendido por la respuesta de Ana a la solicitud de la profesora, ¿por qué se sorprendió ?.*

Bárbara: *porque la profesora pidió una recta y un dos; y la compañera le trajo una regla ¿cierto?, la regla está bien porque con la regla podes hacer una recta y le dijo que no puede traer el dos y ahí el quedó sorprendido porque no existe el dos.*

Julieta: *¿por qué decís no existe el dos?*

Bárbara: *no, no...está pero...hay muchos dos*

Anahí: *depende que tenga un juguete en el que aparezca el número dos, pero no...o dos juguetes.*

Julieta: *¿qué decís?*

Anahí: *lo que se puede hacer es escribir el número dos, o sea dibujarlo. Pero no traerlo.*

Julieta: *¿por qué?*

Anahí: *no se.. excepto que vos tengas, así como dije yo, dos juguetes o un juguete con la forma del número dos*

Bárbara: *porque el dos no está materializado*

Anahí: *si, es cierto*

Julieta: *Entonces*, *¿dónde está el dos*?

Bárbara: *está escrito*

Martín: *porque el dos no es un objeto físico , los números son como nombres para ideas o símbolos, no son una cosa material."*

Klein (1985)[15] destaca dos posiciones extremas en lo que hace a la naturaleza del conocimiento matemático: las matemáticas *se descubren*/ las matemáticas *son una creación humana.* En el primer extremo se encuentra la postura platónica, que considera las matemáticas como un cuerpo fijo, objetivo e inmutable, de conocimientos, que es externo al hombre. En el extremo opuesto se encontraría la

[15] KLEIN (1985). Citado por FLORES MARTÍNEZ (1998). Op. Cit. Pág 42-43

postura que relativiza el conocimiento, al considerarlo generado por la mente humana falible. Klein sitúa aquí a los intuicionistas y formalistas.

Para Platón los entes matemáticos son objetos que no están en continuidad con las cosas sensibles, su existencia es independiente de ellas. Los entes matemáticos y las relaciones existentes entre ellos, no tienen ni entronques empíricos, ni tienen nada de construcción humana convencional.

En la transcripción presentada aparecen elementos que dan cuenta de una caracterización de los objetos matemáticos que no se corresponde con esta postura platónica. El análisis de ellos iluminará lo que estoy proponiendo.

Los objetos matemáticos - números y figuras - que mencionan los alumnos resultan de procesos de abstracción [219] - abstracción en cuanto a idealización y abstracción en cuanto extracción - y, a su vez, proceden de una operación realizada por los sentidos sobre las cosas sensibles: dos juguetes, la regla es una recta.... Situación que se repite en otros momentos del diálogo:

> "Anahí: *la recta está en casi todos lados. Por ejemplo, acá ...el borde de la mesa (...)"*
>
> *"*Martín: *hay dos cosas, uno puede traer, por ejemplo, dos biberones, o lo que sea".*

Estas acciones corresponden al tratamiento de objetos sensibles, y por lo tanto caducos. Para los platónicos, la geometría, al igual que la ciencia de los números, no

---

[219] La abstracción en matemáticas se utiliza con varios sentidos diferentes (aunque relacionados). Primer sentido: La abstracción en cuanto idealización. En la materialización de un objeto matemático (ej. Una recta mediante el trazo de una línea recta con lápiz y regla) existe una idea, una representación mental de línea recta ideal, que es una abstracción matemática. La idealización se produce como resultado final de un proceso de perfección. Segundo sentido: la abstracción en tanto extracción. Cuatro pájaros. Cuatro naranjas. El uso de la palabra "cuatro" implica la existencia de un proceso de abstracción, proceso en el cual ha sido aislada una característica común de los pájaros y de las naranjas. Aquí, en un contexto, son objetos. Allá, en otro contexto, números abstractos cuya existencia, según parece, es independiente de naranjas y pájaros.

se ocupa de las cosas que nacen y mueren sino de entes que no nacen ni mueren, que son eternamente idénticos e inmutables. Sin embargo, los objetos matemáticos que describe la nota de campo no solo están sometidos a cambios sino también son creaciones lingüísticas:

"Bárbara: *porque nunca vas a encontrar un solo dos porque hay muchos dos. Ella puede escribir un dos, yo puedo escribir otro dos y vos otro dos"*

"Anahí: *lo que hizo Ana, estaba bien porque le pidió que traiga una recta y una regla es una recta*

Julieta: *¿una regla es una recta?*

Anahí: *si, porque una recta traza una línea"*

La imagen, el dibujo sensible que se traza y se borra es un objeto perecedero. Hablar acerca del objeto desde las acciones que pueden plasmarse empíricamente es un lenguaje adecuado para la imagen, pero no a la cosa, remite a lo empírico y no al ser de la cosa (objeto) que es imperecedera. Aquí, el lenguaje de los alumnos no actúa de señal orientadora de la búsqueda de un objeto que está independientemente del sujeto sino remite al objeto:

"Julieta: *Entonces*, *¿dónde está el dos*?

Bárbara: *está escrito"*

"Julieta: *¿qué es el dos?*

Mercedes: *el dos es como un símbolo"*

Que los alumnos piensen en los objetos matemáticos como creaciones lingüísticas y la posible continuidad con lo empírico serían señales que descartarían la posibilidad de considerar que ellos tratan los objetos matemáticos desde una postura platónica; es decir, como entidades ideales existentes objetivamente, que se pueden percibir o intuir directamente merced a una cierta facultad intelectual, exactamente lo mismo que nuestros cinco sentidos nos permiten percibir objetos físicos. Expresiones de los alumnos fortalecen esta afirmación.

"Julieta: *¿con qué objetos trabaja el matemático?*

Martín: *y...con números o con los símbolos*

Bárbara: *con objetos inanimados*

Julieta: *¿qué decís Bárbara?*

Bárbara: *que no tienen vida. Porque los números, o sea los símbolos, no tienen vida, después la regla y todo eso, tampoco.*

Julieta: *¿dónde están los números? ¿dónde viven?*

Martín: *no viven*

Julieta: *¿no viven?*

Anahí: *no, si no tienen vida"*

De este modo, y de acuerdo a la información que nos brindan estos primeros elementos señalados, el tratamiento que hacen los alumnos sobre el conocimiento matemático en este sentido se aleja de la visión platónica. Esto significaría que la postura de los alumnos se acerca a las posturas de las corrientes del pensamiento sobre las matemáticas - formalistas, racionalistas, empiristas, intuicionistas y falibilistas - que las presentan como creación de la razón. Las notas de campo nos manifiestan este acercamiento:

"Julieta: *Ahora bien, les pregunto ¿existen la recta y el dos?*

Todos: *sí*

Julieta: *¿los pueden tocar?*

Martín: *no porque son como conceptos abstractos... son como ideas no como una cosa física.*

Bárbara: *están en nuestra imaginación*

Martín: *o sea, está en tu mente el número dos*

Mercedes: *sí, porque el hombre creó los números*

Martín*: sí*

Julieta: *¿los números son creación del hombre?*

Todos: *si*

Davis, P. J. y Hersh R. (1988) nos brindan otros elementos teóricos para analizar éstos y otros datos que permiten no sólo establecer la representación de los alumnos sobre la naturaleza de las matemáticas sino también aproximarnos a la corriente del pensamiento sobre las matemáticas a las que ellos refieren.

Estos autores parten del continuo platonismo – formalismo y añaden una nueva dimensión sobre la naturaleza de las matemáticas que no produce el truncamiento en la ciencia originado por ambas corrientes.

Según su interpretación, se pueden tomar dos hechos surgidos de la experiencia matemática:

Hecho Nº 1: Las matemáticas son creación nuestra; tratan de ideas que tenemos en nuestras mentes

Hecho Nº2 : Las matemáticas son una realidad objetiva, en el sentido de que los objetos matemáticos tienen propiedades definidas, que podemos o no ser capaces de descubrir.

Luego, compatibilizan los hechos y desarrollan su visión en relación a la naturaleza de las matemáticas: **" (...) las matemáticas son una realidad objetiva que no es ni subjetiva ni física. Es una realidad ideal (es decir, no física) que es objetiva (externa a la consciencia de toda persona). De hecho, el ejemplo de las matemáticas es la prueba más fuerte, más convincente de la existencia de tal realidad"** (Davis, P. J. y Hersh R., 1988) [220]

Las últimas manifestaciones transcriptas de los alumnos están construidas a partir del hecho Nº1. Reconocen que las matemáticas son creación del hombre y que tratan de ideas que tenemos en nuestras mentes. Los objetos matemáticos son imaginarios no son una cosa física. Esta posición se corresponde con la corriente formalista. No obstante se encuentran datos empíricos que dan cuenta de una construcción de la naturaleza de la matemáticas desde la visión de Davis, P. J. y Hersh R. (1988).

[220] DAVIS, P. J. Y HERSH R. (1988). Op. Cit. Pág. 62.

"Julieta: *entonces, ¿dónde están los números?*

Martín: *son simplemente una forma de hacer que nosotros entendamos un concepto. Como de plasmar una idea o un concepto con símbolos. Símbolos que todos entenderían. Si, están hechos por los hombres para que todos entiendan.*

Anahí: *es un símbolo para expresar algo, para expresar por ejemplo : yo tengo dos manzanas y pongo el número dos. Entonces es un símbolo que expresa cuántas manzanas yo tengo.*

Martín: *o sea, está en tu mente el número dos*

Anahí: *si, porque si nosotros no nos imaginamos el dos ...*

Martín: *vos lo pones ahí para que los otros vean lo que vos estás pensando.*

Larissa: *es como una forma de expresarse*

Julieta: *¿es una forma de expresión?*

Todos: *sí"*

Para estos alumnos los objetos matemáticos pertenecen al dominio de las ideas, de los objetos mentales. Los objetos matemáticos son aquellas ideas cuyas propiedades son reproducibles –siempre se da la misma respuesta al repetir la pregunta - y la intuición es la facultad que merced a la cual podemos considerar o examinar estos objetos.

Es decir, **"(...) la intuición no es una percepción directa de algo existente externa y eternamente. Es el efecto que provoca en la mente la experiencia de ciertas actividades de manipulación de objetos concretos (en una fase posterior, de marcas de un papel, e incluso de imágenes mentales). Como fruto de esta experiencia, hay algo en la pupila de la mente (un residuo, un efecto) que constituye la representación de la idea matemática. Una representación que es equivalente a la mía, en el sentido de que ambos obtenemos la misma respuesta a cualquier pregunta que se nos haga"** (Davis, P. J. y Hersh R. ,1988)[221].

Es así que podríamos decir que el mundo en el que residen los objetos matemáticos que mencionan los alumnos es el mismo en que encuentra acomodo

[221] DAVIS, P. J. Y HERSH R. (1988). Op. Cit. Pág. 283.

sin distorsión la experiencia matemática de Davis, P. J. y Hersh R (1988).: el Mundo 3 de Karl Popper[222]. Allí donde habitan la consciencia social, las tradiciones, el lenguaje, las teorías, las instituciones sociales, toda la cultura no material de la humanidad. Su existencia es inseparable de la consciencia individual de los miembros de la sociedad. Pero son de naturaleza diferente a los fenómenos de la consciencia individual.

Este hecho plantea una matemática cuyos enunciados tienen significado. Tal significación ha de buscarse en la comprensión compartida de seres humanos, y no en una realidad externa y extrahumana. Con esta consideración, las matemáticas a las que refieren los alumnos toman elementos de la corriente falibilista.

5.2. "La matemática es un conocimiento funcional"

Esta representación social hace referencia a uno de los aspectos que caracterizan la matemática: La relación entre la matemática y la realidad

Desde su conexión con la realidad surgen las siguientes preguntas: ¿cómo esta ciencia formal, abstracta puede ser el instrumento que permite en tantas ciencias, desentrañar y expresar lo real?, ¿cuál es la causa de todo esto?, ¿qué le confiere su fuerza a las matemáticas? , ¿a qué se debe que funcione la matemática en la realidad? y otras.

La cuestión se hace sumamente problemática , siendo incluso tema de preocupación frecuente entre filósofos y científicos, cuando hay que dar cuenta o argumentar esta correspondencia. El dilema también se puso de manifiesto en este trabajo:

"Julieta: *muchas personas piensan que no se puede vivir sin la matemática*, *¿qué opinas vos?*

---

[222] Popper ha introducido los términos Mundo1, Mundo 2 y Mundo 3 para distinguir los tres principales niveles de la distinta realidad.

Martín: *para mi el tema de creer que no se puede vivir sin la matemática es un tema complicado.*

Julieta: *¿por qué?*

Martín: *porque hasta hoy es prácticamente como un paradigma universal si la matemática es parte también de la naturaleza o es un invento así... hay algunos, por ejemplo, que podrían sostener que se podría vivir sin la matemática porque la matemática no es algo natural y está la intuición o lo que sea..*

Julieta: *¿qué es la intuición?*

Martín: *como los impulsos naturales, y la matemática no es parte de eso... no es parte del universo, es sólo invento del ser humano pero otros dirían que la matemática es parte de la naturaleza y ahí ya bueno...*

Julieta: *¿y vos que pensas?*

Martín: *para mi es como un invento para entender la naturaleza y que el ser humano en algún momento comenzó a desarrollar ... y bueno ahora aparece prácticamente como indispensable porque es el lenguaje que se usa ...pero o sino hubiera sido todo distinto, por ahí los seres humanos se hubieran manejado por cuestión de casualidad."*

De este modo Martín plantea que existen dos posturas sobre cómo se concibe la relación entre la matemática y la realidad. Una considera que la matemática es parte de la naturaleza y otra que la matemática no es parte de la naturaleza sino que es un invento del hombre para entenderla.

Cañon (1993) [223] identifica dos posturas extremas. Una de las posturas es que el universo, en sus manifestaciones, se expresa espontáneamente en lenguaje matemático. De acuerdo con esta concepción, las matemáticas han evolucionado justamente como trasunto simbólico del universo. No es maravilla, así pues, que las matemáticas funcionen; tal es precisamente la razón misma de su existencia. Es el universo quien ha impuesto las matemáticas a la humanidad. La otra postura considera que las matemáticas resulta de idealizar los procesos de abstracción que se han realizado con objetos y problemas relacionados con la naturaleza y la

[223] CAÑON LOYES, C. (1993). Op. Cit. Pág. 405

experiencia. El platonismo concuerda con la primera postura y el empirismo con la segunda.

En el planteo de Martín, y excluyendo lo que él define como su posición personal, las posturas de “su paradigma universal” se corresponderían en el mismo orden, con las posturas señaladas por Cañon (1993).

Para analizar esta cuestión de manera más completa, agrego otro elemento teórico brindado por Flores Martínez, P (1998) [224]. Según el autor, **“(...) la forma en que se concibe la relación entre los objetos matemáticos y la naturaleza está íntimamente ligada a la consideración de los objetos matemáticos”**. Las notas de campo dan cuenta de esta situación.

“Julieta: *¿con qué objetos trabaja la matemática?*
Martín: *la matemática trabaja con conceptos para entender la naturaleza*
Julieta: *¿ qué entendés por naturaleza?*
Martín: *lo que está digamos fuera de nuestra mente...lo que está aparte de nuestra dimensión mental; podría decir el mundo físico.*
Julieta: *¿y qué relación hay entre la matemática y la naturaleza?*
Martín: *y...que la matemática por ejemplo usa fórmulas para medir o expresar formas de la naturaleza o por ejemplo situaciones de la naturaleza*
Julieta: *¿para vos quién está primero: la matemática o la naturaleza?.*
Martín: *la naturaleza*
Julieta: *¡y la matemática?*
Martín: *y justamente hace que nosotros entendamos la naturaleza*

Para Martín los objetos matemáticos son creación del hombre y, a su vez, éste los inventó para entender la naturaleza. Es decir que el hombre entiende a la naturaleza a través de los símbolos o fórmulas que crea o inventa.

[224] FLORES MARTÍNEZ, P. (1998). Op. Cit. Pág. 46.

> *"Julieta: vos en otra oportunidad me definiste a la matemática como una ciencia estructurada, fría, llena de fórmulas, ¿cómo se conecta entonces la matemática con el mundo real?*
> *Martín: porque para mi la matemática es como una invento digamos. No sé si es la palabra correcta pero es algo que el hombre creo para medir o expresar formas de la naturaleza; porque todos los ejemplos de la matemática se basan en la naturaleza".*

Esto supone que la naturaleza adquiere significado en cuanto la mente humana interactúa con ella, de manera que el conocimiento matemático se constituye en una sucesión cambiante de modelos intermediarios entre la naturaleza percibida y el individuo. Es decir, desde esta postura, nuestro pensamiento estructura los objetos, matematizando la realidad.

En la relación de la matemática y la realidad aparece en Martín una relación ordenada en la que el primer elemento es la naturaleza y el segundo la matemática. Es justamente el orden inverso que Platón. Para Platón diríamos hoy primero es la teoría matemática y después el modelo, que es el mundo físico.

De esta manera, se podría decir que esta forma de concebir la relación de la matemática y la realidad tomaría componentes de la corriente empirista y estaría emparentada con la segunda postura señalada por Cañon (1993).

También surgieron datos en las notas de campo que dan cuenta de la existencia de la postura platónica en relación al tema. La siguiente transcripción da cuenta de ello:

> "Julieta: *¿ qué relación hay entre la matemática y la naturaleza?*
> Bárbara: *la matemática nos ayuda a explicar la naturaleza...nos ayuda a entenderla porque a través de una fórmula, una cuenta o algo así sacamos o tenemos lo que es la naturaleza. La matemática sirve para descifrar algo de la naturaleza ...no sé o algo así, por ejemplo dióxido de carbono*
> Julieta: *¿para vos quién está primero: la matemática o la naturaleza?.*
> Bárbara: *primero está la matemática y después la naturaleza.*

Julieta: *¿por qué?*

Bárbara: *porque en base a esos números , esas fórmulas, esas cuentas se forma la naturaleza porque la fórmula no puede estar en la naturaleza"*

Dos son los componentes platónicos que encuentro en la entrevista con Bárbara. El primero es que los objetos matemáticos que menciona Bárbara son presentados como copias de la naturaleza : *(...)a través de una fórmula, una cuenta o algo así tenemos lo que es la naturaleza* . Esta expresión armoniza con la matemática platónica que trata de objetos ideales de los que podremos descubrir copias en la naturaleza. Es decir, desde esta postura, la realidad tiene una estructura matemática. El segundo componente se refiere al orden de la relación de la matemática y la realidad. Aquí aparece en orden inverso a Martín. Es decir, el orden se corresponde con el mismo orden que Platón.

En este contexto, se podría decir que esta forma de concebir la relación de la matemática y la realidad tomaría componentes de la escuela platónica y estaría emparentada con la primera postura señalada por Cañon (1993).

Davis, P. J. y Hersh R. (1988) [226] también refieren a la relación de la matemática con la realidad. Según estos autores hay otra posición que sostiene que las aplicaciones de la matemática a la realidad se producen por decreto. Se crean multitud de estructuras y sistemas matemáticos. Tanta es la complacencia que sienten los matemáticos por lo que hacen o crean, que deliberadamente se esfuerzan por lograr que las diversas facetas físicas y sociales del universo se amolden lo más posible a ello. Esta posición parecería ser a la que adhiere Martín:

"Julieta: *¿y vos que pensas?*

Martín: *para mi es como un invento para entender la naturaleza y que el ser humano en algún momento comenzó a desarrollar ... y bueno ahora aparece prácticamente como indispensable porque es el lenguaje que se usa ...pero o sino*

[226] DAVIS, P y HERSH, R. (1988).

hubiera sido todo distinto, por ahí los seres humanos se hubieran manejado por cuestión de casualidad."

Esta concepción está emparentada con la idea que las teorías de la matemática aplicada son meramente "modelos matemáticos". La utilidad de un modelo reside precisamente en el éxito que alcance en remedar o predecir la conducta del universo.

"Julieta: *¿y qué relación hay entre la matemática y la naturaleza?*
Martín: *y...que la matemática por ejemplo usa fórmulas para medir o expresar formas de la naturaleza o por ejemplo situaciones de la naturaleza".*

El uso de formulas para expresar las formas de la naturaleza sería la matematización de la realidad a través de un modelo que **"(...) es una esquematización abstracta de la realidad, entendiendo que esta realidad puede pertenecer al mundo de los fenómenos o al de los conceptos"** (Castro, E. y Castro, E. ,1997)[227].

Cualquiera sea la forma de concebir la relación entre la matemática y la realidad ambas posiciones tienen un punto en común: identifican a la matemática como un tipo de conocimiento que funciona en la realidad. Ya sea a través de matemáticas inconscientes o matemáticas conscientes (Davis, P. J. y Hersh R 1988)[228].

Las acciones que hacen a las matemáticas inconscientes son inherentes al universo, espontáneas, automáticas y no necesitan esfuerzo ni potencia intelectual. Las opiniones de Bárbara, Rodrigo y Macarena extraídas de una producción personal escrita[229] testimonian esta idea:

[227] CASTRO, E. y CASTRO, E (1997). Cap. IV.Pág.

[228] DAVIS, P. J. Y HERSH R (1988). Op. Cit. Pág.222-224.

[229] La producción escrita consistió en una composición literaria de género libre titulada ¿Qué es la matemática?.

“Matemática es como nuestra imaginación, siempre está con nosotros aunque uno diga yo no sé matemática siempre está en nuestra cabeza, sale sola. Sin que le preguntes a alguien cuánto es dos más dos con preguntarle si falta mucho para llegar a casa esa persona te va a responder falta un kilómetro y medio, ahí sin darse cuenta está usando matemática (Bárbara).

“La matemática no es sólo una materia sino algo que se empezó a utilizar desde los principios de la evolución humana. La matemática es indispensable para nuestras vidas. Sin darnos cuenta la utilizamos momento a momento. Sin ella creo que sería difícil vivir. No son sólo números sino que es todo un sistema muy complejo y a la vez es especial”(Rodrigo).

“La matemática es una materia pero a la vez un tema de la vida, es decir que la matemática está presente en todo momento, “vivimos con ella”” (Macarena)”

En oposición a las matemáticas inconscientes, se distinguen también testimonios escritos de alumnos que sitúan la funcionalidad de las matemáticas en la realidad desde las matemáticas conscientes, aquellas que habitualmente conocemos por matemáticas y que están ligadas a acciones que se desarrollan mediante la utilización de un lenguaje adquirido a través de una formación específica , por ejemplo en la escuela.

“Es útil para resolver los problemas que se presentan en la vida cotidiana (Federico)”.

“La matemática es una ciencia muy compleja que no podemos dejar de ocuparla en el rol de nuestras vidas. ¿quién no ha hecho unos cálculos alguna vez en su vida? (Sergio)

“Lo que yo entiendo sobre la matemática es que nos sirve para cualquier tipo de problemas en la vida(...)

Para cualquier cosa utilizamos la matemática. Por ejemplo, cuando miramos un árbol decimos que ahí no hay matemática pero no es así porque al mirar el árbol podemos medir su longitud, ancho, etc. Todo, todo pero todo es matemática en la vida" (Valeria).

"Para mi la matemática es problemas y números para resolver (...) siempre está presente en la vida cotidiana"(Camila).

No existe una divisoria netamente trazada que separe a la actividad matemática consciente de la inconsciente. Ambas se superponen en las situaciones que las implican en la realidad. Así, con la consideración de la existencia de ellas, los alumnos plantean un conocimiento matemático necesario y funcional a la realidad.

5.3. "La matemática es útil"

Esta representación se define a partir del tratamiento que hacen los alumnos de otro de los aspectos que caracterizan a la matemática: La utilidad.

Davis, P. J. y Hersh R (1988)[230] tratan la "utilidad matemática" partiendo de la consideración que una cosa es útil si tiene la capacidad de satisfacer una necesidad humana. Estos autores dan cuenta de los múltiples significados que el término útil encierra y ponen así de manifiesto que los significados de "utilidad matemática" abarcan elementos de tipo estético, filosófico, histórico, psicológico, pedagógico, comercial, científico, tecnológico y matemático.

Siguiendo este punto de vista, algunas de las preguntas que se plantean en la utilidad de la matemática son: ¿qué necesidades satisfacen las matemáticas?, ¿qué significados se otorgan a la palabra utilidad? ¿qué tipo de elementos encierran los significados?.

Las respuestas a estos interrogantes guardan conexión con la forma en que se concibe la relación de la matemática con la realidad; es decir, con la respuesta al para

[230] DAVIS, P. J. Y HERSH R (1988). Op. Cit. Pág.68.

qué sirve saber matemática en el mundo real. En tal sentido se planteó la siguiente discusión en un grupo de alumnos:

"Julieta: *¿Cómo sería un mundo sin matemática?*
Macarena: *sería sin forma, porque el hombre tiene que crear y para crear tiene que saber matemática. Por ejemplo, el hombre para crear una mesa utiliza la matemática*
Bárbara: *no sería sin forma sino todo sin medidas, desorganizado, desalineado".*

Se podría pensar que para estas alumnas la necesidad de la matemática en el mundo real estriba en una de las cualidades del conocimiento matemático: la creación del orden. En palabras de Davis, P. J. y Hersh R, 1988)[231]. **"(...) Hasta cierto punto, el objeto mismo de las matemáticas es la creación de orden allí donde previamente parecía imperar el caos, es la extracción de invariancia de entre el desconcierto y la confusión"**.

Es la creación del orden, y particularmente del orden intelectual, uno de los grandes talentos que poseen los humanos, y se ha sugerido que la matemática es la ciencia del orden intelectual completo.

La ausencia de este rasgo que caracteriza a las matemáticas se manifestaría en la realidad, como lo expresan sus protagonistas, en un mundo desorganizado.

Chevallard, Y, Bosch, M. y Gascón, J. (1997)[232] destacan la necesidad de la matemática en la sociedad y señalan que **"(...) podríamos pensar que cada uno de nosotros tomado individualmente puede vivir sin necesidad de matemáticas o, por lo menos, sin muchas de las matemáticas que se estudian en la educación obligatoria. Pero esta creencia sólo se da porque, de hecho, no vivimos solos sino en sociedad: en una sociedad que funciona a base de matemáticas y en la que hay gente capaz de hacer de matemático para cubrir las necesidades de los demás, incluso cuando éstos no reconocen sus propias necesidades matemáticas"**.

---

[231] Davis, P. J. y Hersh R. (1988) Op. Cit. Pág. 133

[232] CHEVALLARD, Y., BOSCH, M. y GASCÓN, J. (1997). Pág. 46.

El planteo de estos autores parecería cristalizarse a través del argumento escrito por la alumna Pamela:

"La matemática es una ciencia que te hace pensar mucho y es de gran utilidad porque sin la matemática nadie sabría contar. La matemática te hace re-bien porque si no sabes contar todos te pueden embromar; cuando vas a comprar al supermercado le das la plata y ellos te dan el vuelto y si no sabes matemática no te das cuenta si te "joden". Por ejemplo, mi abuela no sabe los números y si no va con mamá o algún pariente al banco a cobrar no le dan todo porque un día mi abuela se fue sola y le quitaron $100, cuando vino a casa nos dimos cuenta pero ya era tarde. Por eso la matemática es de gran utilidad".

Para Pamela la matemática satisface necesidades a la vez individuales y sociales; cada uno de nosotros debe saber un poco de matemática para poder resolver, o al menos reconocer, los problemas con los que se encuentra mientras convive con los demás. De esta manera la alumna asigna a la utilidad matemática un valor social y no la reduce a un simple valor escolar.

Cabe señalar que ninguna de las notas de campo dan cuenta de la existencia de este tipo de reduccionismo, convirtiendo a la matemática en un mero "artefacto escolar" (Chevallard, Y, Bosch, M. y Gascón, J. ,1997)[233].

En una sola nota de campo aparece la expresión de un alumno en donde asigna valor social a la utilidad matemática y, además, vincula a ella con una cláusula que rige el contrato escolar: el sistema de promoción de alumnos.

"La matemática no solo se usa en la escuela, sino que es usada en el trabajo y hasta cuando vamos al supermercado. Usamos la matemática desde el principio de la educación. En lo que nos servirá en el futuro porque si no sabemos sumar y restar no podremos pasar de nivel" (Pablo).

[233] CHEVALLARD, Y., BOSCH, M. y GASCÓN, J. (1997). Pág. 47.

También surgen significados distintos de “utilidad matemática” por la consideración que hacen los alumnos a los resultados útiles. Lo que supone posturas sobre el para qué es útil la matemática.

Una postura que está ligada a los utilitaristas. **“”(...) Las posturas utilitaristas (Ernest, 1989) abogan por una matemática basada en las otras ciencias, rechazando el juego de los resultados de las matemáticas especulativas”** (Flores Martínez, P., 1998)[234] . Esta posición se expresaría en las palabras de Martín logradas en una entrevista:

“El fin de la matemática es su utilización en la vida cotidiana. No creo que sea útil solamente para saber dar buenas razones dentro y fuera de la escuela sino que es útil para muchas situaciones de distintas clases y formas que se pueden presentar en la vida”

A esta frase subyace la idea de que la matemática se justifica por su utilidad. Aquí la utilidad se expresa por el servicio que brinda la matemática a muchas necesidades que surgen de la vida cotidiana. Este significado atribuido a la utilidad matemática supone que son resultados inútiles aquellos sin ninguna pretensión de servir al conocimiento del Cosmos o para su dominio.

Para Santaló, L., 1997)[235] **“(…) Los utilitaristas que ven de las cosas sólo su parte útil para un mejoramiento de la vida material, necesitan la matemática como herramienta, como instrumento indispensable para las transacciones comerciales, para dominar y aprovechar las fuerzas de la naturaleza y para mantener y desarrollar el progreso tecnológico”**. Esta posición utilitarista de la matemática se pone de manifiesto en las expresiones escritas por Valeria , Silvana y Gisela.

“La matemática es beneficiosa para otras materias y casos en la vida”(Valeria)

[234] FLORES MARTÍNEZ, P. (1998). Op. Cit. Pág. 48.

[235] LUIS SANTALÓ Y COLABORADORES (1997). Op. Cit. Pág.22.

"Para mi la matemática es muy importante para todo el mundo porque a través de ella se incrementaron los números, la plata y muchas cosas más.
Es muy importante porque se aprende a sumar, restar y se aprende a contar la plata. En todos los negocios y especialmente en los bancos se usa la matemática"(Silvana).

"La matemática es importante porque por medio de ella surgieron muchos cambios en la vida como por ejemplo, se inventaron las monedas. La matemática nos brinda mucha utilidad. Gracias a la matemática se creo una maquina llamada calculadora, que gracias a ella, se puede calcular más rápido y más fácil "(Gisela).

La declaración de Gisela agrega un nuevo significado a la utilidad matemática: el del sentido de la utilidad matemática como componente de impacto en el entorno cultural. Ella plantea implícitamente que los avances tecnológicos están invadidos por ideas matemáticas.

Desde este último planteamiento se podría considerar que la matemática es un amplificador de la capacidad de razonamiento del ser humano (Bruner)[236] y, como fenómeno cultural, tiene un importante componente "tecnológico" (White) [237]. Por ello, la matemática es, en esencia, una "tecnología simbólica" (Bishop, A.J, 1988)[238]. En consecuencia el significado de "utilidad matemática" estaría vinculado a la utilización de una tecnología simbólica.

Según Bruner[85], esta tecnología simbólica permite al individuo controlar recursos, prestigio y deferencia dentro de la cultura. **"(...)Si cultivamos estrategias y estilos pertinentes al empleo de tecnología simbólica (las matemáticas), tendremos a disposición la correspondiente gama de tecnologías. Si no cultivamos aptitudes matemáticas, el resultado es una "incompetencia funcional" y la incapacidad de**

---

[236] BRUNER. Citado por BISHOP, A.J. Op.Cit. Pág.36

[237] WHITE (1959) Citado por BISHOP, A.J. Op.Cit. Pág.34-35

[238] [2] BISHOP, A. J. (1999) . Op. Cit. Pág.123

[85] BRUNER. Citado por BISHOP, A.J. Op.Cit. Pág.36

emplear este tipo de técnica” (Cole y Bruner, 1971)[239]. Este planteo se evidenció en las palabras de Josefina y María:

“En este mundo en todo momento se utiliza la matemática, por eso hay que agradecer muchísimo poder aprender estas cosas tan necesarias en la vida. Siempre te va a costar un poquito, pero más te va a costar vivir en este mundo tecnológico sin saber matemática” (Josefina)

“La matemática es un recurso fundamental que nos sirve para manejarnos en la vida.(...)nos sirve mucho para manejar los problemas económicos” (María)

La posición utilitarista de la matemática es manifestada en la mayoría de los alumnos a través de aplicaciones matemáticas al nivel de *utilidad común* (Davis, P. J. y Hersh R, 1988)[240]. A continuación presentaré muestras de tales manifestaciones extraídas de dos fuentes distintas de información: producciones escritas y carpetas. La presentación es en ese orden.

“Lo que yo entiendo sobre la matemática es que nos sirve para cualquier tipo de problemas en la vida” (Valeria)”

“*Es útil para resolver los problemas que se presentan en la vida cotidiana (Federico).*

Las expresiones de Valeria y Federico dan cuenta de la utilidad de la matemática para dar respuestas a un conjunto de cuestiones problemáticas que se presentan en la vida cotidiana. Es decir, que la utilidad está centrada en una actividad en particular: la resolución de problemas.

La carpeta de Mercedes es una de las tantas muestras de la utilidad de las matemáticas en este mismo sentido. Allí, en una actividad planteada como “*Guía de*

[239] COLE Y BRUNER, 1971. Citado por BISHOP, A.J. Op. Cit. Pág.36
[240] DAVIS, P. J. Y HERSH R (1988). Op. Cit. Pág.68.

Estudio" y cuyo título es: *"Resolución de situaciones problemáticas cotidianas"*, se encuentra la resolución de éstos , entre otros, problemas:

1. *"A un vivero forestal, se le pidió 1000 unidades de Pino Paraná. ¿Cuántos cajones de pino tendrán que ser preparados, si en cada cajón entran 25 plantines?.*
2. *¿Cuánto dinero tengo que pagar a la editorial si los libros de historia me costaron $16 cada uno, los de geografía $15 cada y los de matemática $18 cada uno.*
   a) *¿cuánto dinero me faltan aún pagar si antes de la entrega de los libros deposité $300 a la editorial?*
   b) *¿Cuántos libros de matemática tengo que volver a pedir si los alumnos e pidieron 20 libros en total?".*

Como se observa, cualquiera sean los significados de utilidad matemática que dan cuenta los datos empíricos, el papel de las matemáticas en todos los casos es el mismo: ellas son un *medio* para responder a determinadas cuestiones. Esta presentación, muestra al conocimiento matemático como *herramienta útil* para resolver situaciones.

En la perspectiva de los alumnos estas situaciones son extramatemáticas ya que vinculan el conocimiento matemático con situaciones prácticas que surgen de las necesidades individuales y sociales de la vida en sociedad. Es decir, que ellos destacan la "utilidad matemática" en actividades externas a la matemática. Esto significaría que para los alumnos la "utilidad matemática" se circunscribe solamente a la matemática aplicada.

5.4. "La matemática es un cuerpo integrado de conocimientos en continuo desarrollo"

Esta representación social hace referencia a uno de los aspectos que corresponden al plano epistemológico y a la dimensión ontológica del conocimiento matemático:

La organización de la matemática. Es la categoría de representación más amplia e incluye otras representaciones sociales que intervienen en su definición.

Las representaciones incluidas se definen por la naturaleza de la matemática, o bien la esencia y la relación de la matemática con la realidad física, los elementos que la constituyen y las relaciones que ligan entre si a dichos elementos, así como las metáforas relacionadas con estos aspectos.

5.5.1. "¡La matemática es todo un problema!"

Chevallard, Y, Bosch, M. y Gascón, J. (1997)[241] consideran que es necesario reconocer el tipo de cuestiones o tareas a las que responde la matemática para identificar su razón de ser. Tomando este punto de vista se planteó la siguiente discusión en grupo de alumnos:

"Julieta: *¿para qué se crearon las matemáticas?*

Martín: *para mí la matemática con sus números, fórmulas para expresar en un papel ... o para medir las diferentes situaciones de la naturaleza*

Anahí: *para mi la matemática fue creada porque nosotros a través de las matemáticas resolvemos varios problemas, ponéle, así ,situaciones no sólo de problemas matemáticos, sino de situaciones que surgen en la vida y que con la matemática las resolvemos*

Rodrigo: *para mi el hombre planteó la vida de una forma y esa forma de vida requiere de solución de problemas y esos problemas se resuelven a través de las matemáticas*

Bárbara: *el hombre adaptó la vida con las matemáticas y la sigue utilizando continuamente para seguir creando ...y para eso se creó la matemática para crear algo más.*

Julieta: *¿y qué crea el hombre?*

Bárbara: *crea, por ejemplo, la estructura de los edificios, todo eso está creado con la matemática*

---

[241] CHEVALLARD, Y., BOSCH, M. y GASCÓN, J. (1997).Op. Cit. Pág. 46-56.

Julieta: *¿sí?*

Bárbara: *para seguir avanzando tecnológicamente...la tecnología va a seguir avanzando y la matemática va a seguir creciendo...se van a crear nuevas fórmulas a las que ya están y se va a crear algo más y la matemática va a seguir.*

Anahí: *porque a medida que pasa el tiempo se van descubriendo más cosas ...sí, yo estoy de acuerdo con Bárbara*

Rodrigo: *lo que pasa es los humanos empiezan a plantear cada vez más problemas y solicitan a la matemática que le dé los resultados, por eso también se ve que fue creciendo porque cuando comenzaron ponían palitos y ahora ya se hacen cosas más avanzadas digamos con la calculadora.*

Martín: *y después ya sabían como poner palitos sin que se caigan...en vez de poner dos palitos solos que se iban a caer entonces ponían tres y así.. Capaz que para explicar voy a dar dos palitos en vez de hablar el hombre escribió así dos palitos, entendés , y después comenzó con un dibujo y después con un símbolo*

Julieta: *entonces,¿ la matemática evolucionó?*

Bárbara: *obviamente"*

Para los alumnos la matemática se crea para dar respuestas a cuestiones que no se limitan a sus necesidades internas *(..situaciones no sólo de problemas matemáticos...*) sino que también se abre a cuestiones externas a ella. Las respuestas que da la matemática se basan en la resolución de problemas. Esta última idea se hace explícita a través de las expresiones de Anahí y Rodrigo.

Según los alumnos las relaciones que establece la matemática con el exterior son a través de acciones vinculadas a la interpretación (de la naturaleza) y creación (ya sea de objetos internos o externos a la matemática*)* produciendo un continuo desarrollo en la propia ciencia y fuera de ella (*...la tecnología va a seguir avanzando y la matemática va a seguir creciendo)*. Esto significa que ellos conciben un conocimiento matemático que adquiere parte de su productividad fuera de la matemática.

Este modo de entender a qué necesidades responde la matemática – cuestiones intra y extramatemáticas - y cómo lo hace – resolviendo problemas - fue también expresado por otros estudiantes en instancias de producciones escritas. Transcribo una de ellas:

"La matemática trata de diferentes maneras su aplicación para su desarrollo. En sí distintas maneras de resolver distintos problemas y todos basados en suma, suma, multiplicación, división. Estos ejercicios darán fruto el día de mañana beneficiando a la comunidad y así misma" (Valeria).

Félix Klein[242] afirma que **"(...) la matemática se desarrolla resolviendo problemas ya establecidos con métodos nuevos; ello provoca un doble efecto: se comprenden mejor las viejas cuestiones y se originan nuevos. Se produce una ampliación del horizonte matemático – progreso en amplitud- por la adopción de nuevos puntos de vista y también una profundización del mismo – progreso en profundidad – por la adopción de nuevos puntos de vista que han debido adoptarse para resolver problemas"**.

Algunas expresiones de los estudiantes se corresponden con esta afirmación. Esta correspondencia se establece no sólo en referencia a la continua evolución de la matemática (ratificación final: *¿la matemática evoluciona? Obviamente)* y la utilización de nuevos métodos (*...los humanos empiezan a plantear cada vez más problemas...de los palitos a la calculadora)* sino también en la continua evolución en el lenguaje de la matemática, un avance en el grado de abstracción y una progresiva formalización, para resolver nuevos problemas (*...voy a dar dos palitos en vez de hablar el hombre escribió así dos palitos, entendés , y después comenzó con un dibujo y después con un símbolo..)*.

El tratamiento realizado sobre las cuestiones a la que responde la matemática pondría en evidencia que los alumnos conciben un conocimiento matemático que evoluciona continuamente y que las respuestas a las preguntas se traducen en problemas.

---

[242] KLEIN, F. Citado en CHEMELLO, G. Op. Cit. Pág.54

En consonancia con este planteamiento, Chemello, G. (1992)[243] expresa que **"(...) la historia de la disciplina muestra claramente cómo estos conocimientos están en evolución continua, y que en dicha evolución, que no es lineal, el rol de motor lo desempeñan los problemas de distinto tipo"**. De esta manera la autora señala a los problemas como uno de los componentes esenciales de la naturaleza del conocimiento matemático, identificándolos así como el tipo de cuestiones que le otorgan a la matemática su razón de ser.

Al identificar los problemas como la razón de ser de la matemática, surge las siguiente cuestión: para los alumnos, ¿qué lugar ocupan los problemas en el cuerpo de conocimientos matemáticos? , o bien, ¿cómo sitúan a los problemas dentro de la estructura interna de la matemática?. Esta entrevista nos brinda algunas respuestas:

> "Martín*: para mi la matemática es como un árbol porque tiene una raíz y de ahí se va dando origen a otras ramas ...hay ramas que están conectadas y otras que no...no todas están relacionadas directamente*
> Julieta: *¿y qué estaría en la raíz?*
> Martín: *no sé, pensé primero en los números... no sé, sigo pensando*
> Anahí: *para mi los números también, porque lo primero que aprendés en matemática son los números.*
> Julieta: *y en ese árbol, ¿dónde ubicarían las los problemas?*
> Anahí: *en las hojas*
> Martín: *en las hojas*
> Julieta: *¿Todos ubicarían los problemas en las hojas?*
> Alejandra: *no*
> Julieta: *¿por qué no Alejandra?*
> Alejandra: *en todo caso es el principio porque al tener uno un problema se van buscado soluciones*
> Martín: *si, o sea, es el que origina que uno se ponga a pensar digamos...como solucionar el problema*

[243] CHEMELLO, G. (1992). Pág.54.

Mercedes: *si , lo que pasa es que hay que ver...uno puede ver problemas como cuando a nosotros nos plantean así problemas de la vida real, así como en un curso hay tantos chicos, y tantos aprueban tal cosa y así, o problemas pueden ser también los mismos ejercicios, hay que ver ...o sea, cada uno tiene distintos puntos de vista.*
Julieta: *¿sobre qué es un problema?*
Mercedes: *claro*
Julieta: *para ustedes, ¿un ejercicio es un problema?*
Bárbara: *si, porque un ejercicio que no tiene resultado es un problema, porque tenés que ir al resultado, ahí ya es un problema*
Martín: *tiene una incógnita. Lo que pasa es que ahí por ejemplo uno podría adoptar esa operación también a distintos problemas"*

En la representación metafórica del cuerpo de conocimiento matemático se ubican a los problemas en diferentes lugares: la raíz o las hojas. Desde el enfoque teórico esta diferencia plantea dos posiciones epistemológicas. La ubicación de los problemas en la raíz significaría que los problemas son pensados como génesis o generadores del conocimiento matemático. Esta postura se aproximaría a la de Alejandra (*en todo caso es el principio porque al tener uno un problema se van buscado soluciones).* En este sentido el problema se piensa como objeto de estudio de la matemática y en conexión con otros:

"Para mi la matemática es problemas y más problemas y números para resolver" (Camila)

En la otra situación – los problemas en las hojas – éstos son concebidos como las aplicaciones de otros contenidos. **"(...) Una característica importante de este punto de vista radica en el supuesto implícito de que los problemas son algo ajeno a las teorías matemáticas o, en todo caso, no juegan ningún papel importante en su constitución. Los problemas pueden utilizarse entonces para**

aplicar, ejemplificar o consolidar los conceptos teóricos" (Gascón, 1994)[244]. Esta presentación es un ejemplo de ello:

> *"La matemática es una ciencia que estudia los números y las operaciones para utilizar en los problemas"(Víctor)*

Si bien Anahí ubica a los problemas en las hojas, el criterio de ubicación que utilizó está marcado por consideraciones de índole pedagógico y no puramente epistemológico (*...para mi los números también, porque lo primero que aprendés en matemática son los números.)*. Luego, no hace ninguna manifestación en ésta ni en otras notas de campo que permita inferir cuál sería su respuesta al planteo que nos ocupa. Martín en principio también sitúa a los problemas en las hojas pero desde una posición dubitativa (*no sé, pensé primero en los números... no sé, sigo pensando*). Pero, su expresión posterior (*si, o sea, es el que origina que uno se ponga a pensar digamos...como solucionar el problema)* lo acerca a la primera postura.

Ahora bien, estas diferencias epistemológicas que aparecen en el diálogo tan marcadas se atenúan a partir de la expresión de Mercedes donde ella plantea la necesidad de fijar qué se entiende por problemas.

> "Mercedes: *si , lo que pasa es que hay que ver...uno puede ver problemas como cuando a nosotros nos plantean así problemas de la vida real, así como en un curso hay tantos chicos, y tantos aprueban tal cosa y así, o problemas pueden ser también los mismos ejercicios, hay que ver ...o sea, cada uno tiene distintos puntos de vista*
> Julieta: *¿sobre qué es un problema?*
> Mercedes: *claro*

Esta consideración que hace Mercedes es importante porque, según sea el significado que otorguen los alumnos al término problemas el planteo sería, hablando metafóricamente, que los problemas "invaden" todo el árbol o, caso

---

[244] GASCÓN, J. (1994). Pág. 39.

contrario, partes de él. En caso de invasión , y desde una perspectiva epistemológica, se concibe a los problemas como un elemento que engloba los demás elementos constitutivos del conocimiento matemático.

Polya, G.(1965)[245] propone dos tipos de problemas: "problemas por resolver" y "problemas por demostrar (o probar)". El propósito de un problema por resolver es descubrir cierto tipo de objeto, la incógnita del problema. Mientras que el propósito de un problema por demostrar consiste en mostrar de modo concluyente la exactitud o falsedad de una afirmación claramente enunciada.

Los principales elementos de un problema matemático por resolver son, la incógnita, los datos y la condición. En el caso de un problema matemático por demostrar, sus principales elementos son la hipótesis y la conclusión del teorema que hay que demostrar o refutar.

En las carpetas de los alumnos se encuentran solamente "problemas por resolver":

"Carpeta de Bárbara:

Resolver las siguientes actividades[246]:

1. *Completar en ....para que se cumplan las igualdades:*
   $[(-36)-........]\cdot 5=0$
2. *Calcular la amplitud del ángulo que le falta a la tercera parte de un ángulo llano para completar un giro*
3. $-36+(-18+30\div 2)\div 3-[40\cdot(-8)+(-60+85)]\cdot(-6)=$ *"*

....

En las situaciones planteadas en los ítem 1. y 2. aparecen datos e incógnitas y la condición expresada en lenguaje simbólico (en el 1) o coloquial (en el 2). La situación 3 consiste en seguir un precepto determinado, y esto implica seguir paso a paso, sin ninguna originalidad, la traza de una rutina (en este caso el algoritmo de las

[245] POLYA, G. (1965). Op. Cit. Pág. 161-162..

[246] Transcribo solamente tres situaciones para ejemplificar la situación.

operaciones). A la situación 3, Polya, G.(1965) la califica como "problema de rutina" y es un problema por resolver.

Las observaciones de clases dan cuenta de la misma situación:

"Clase de matemática. Curso: 7ª año C. Turno mañana.
Los alumnos pasan al pizarrón a resolver las siguientes situaciones

1) *Pasar al sistema binario el Nº 105*
2) *Resolver: (-25)+(-36):12-4.(-8)-(-15)+85.0=*
3) *Completar para que se cumplan las igualdades:*
a) *(-40):5 - .... = 0*
b) *(-60):10. ....=1*
4) *Con los datos siguientes* (se presentan puntos no alineados*)* *dibujar:*
a) *recta B que contiene a d y e*
b) *semirrectas cb y bc ¿qué me da la intersección?*
c) *Spl (B,f)*
d) *Segmentos ad y dc ¿qué me da su intersección?"*

Y, en el diálogo, las expresiones de los alumnos ponen en evidencia que, para ellos, estas situaciones planteadas en las carpetas o en las clases son problemas por resolver (Polya,G., 1965)[247]:

*"*Julieta: *para ustedes, ¿un ejercicio es un problema?*
Bárbara: *si, porque un ejercicio que no tiene resultado es un problema, porque tenés que ir al resultado, ahí ya es un problema*
Martín: *tiene una incógnita. Lo que pasa es que ahí por ejemplo uno podría adoptar esa operación también a distintos problemas"*

[247] Citado por PUIG, L. (1997). Op. Cit.Pág. 73-74.

La consideración que hacen ellos del término problemas, particularizando en los problemas por resolver, implicarían un problema de probar o demostrar; el problema de probar que el resultado encontrado verifica las condiciones del enunciado (Puig, L ,1997)[248]. Se presentan dos actividades extraídas de una de las carpetas que dan cuenta de este planteo.

"Carpeta de Alejandra.

1. *Hallar el valor de x . Verificar la solución*

$$(-8)\cdot 10 + 4x - 16 \div (-4) = (-13) - 13$$

2. *Si un ángulo mide 75º, ¿cuánto mide se suplemento y cuánto su opuesto por el vértice?. Justificar la respuesta."*

La ubicación que asignan los alumnos a los problemas dentro del edificio matemático y, a su vez, la concepción que tienen de ellos me lleva a interpretar que conciben a los problemas como un elemento que engloba los demás elementos constitutivos del conocimiento matemático.

Sin embargo, creo conveniente señalar que la concepción de los alumnos acerca de los problemas ; circunscribiéndolos a "problemas por resolver", no sólo plantea una visión epistemológica restringida de qué se entiende por problemas sino también conduce a lo que se denomina "enfermedad utilitarista" (Chevallard, Y, Bosch, M. y Gascón, J. , 1997)[249].

Este tipo de reduccionismo encierra los peligros inherentes a la doble faz – matemática aplicada y matemática pura - de la matemática: la polarización en un solo aspecto y la extrapolación más allá de sus límites (Santaló, L, 1986)[250].

En este caso la polarización se produce hacia la matemática aplicada ya que los problemas que "no aparecen" en ninguna nota de campo son los "problemas por demostrar" y éstos implican, preponderantemente, la demostración de teoremas,

---

[248] PUIG, L. (1997). Op. Cit.Pág. 73-74. Puig, L identifica a los "problemas de demostrar" como "problemas de probar"

[249] CHEVALLARD, Y., BOSCH, M. y GASCÓN, J. (1997).Op. Cit. Pág. 47.

[250] LUIS SANTALÓ Y COLABORADORES (1997). Op. Cit. Pág.27

propiedades, etc; y esta actividad se vincula a la matemática pura. En consecuencia, los alumnos construyen una visión de la matemática asociada a matemática aplicada y, por tanto, entienden como problemas a aquellos ligados de algún modo a ella. Considero que la representación social definida anteriormente como “La matemática es útil” es reveladora de la presencia de la polarización en este aspecto y de la presencia de la “enfermedad”.

En cuanto a la extrapolación, es un peligro inherente a toda ciencia y a toda filosofía, que en la matemática es especialmente peligrosa por su falta de “verificación experimental” . Cuando la extrapolarización más allá de los límites se proyecta a través del proceso de enseñanza se presentan espejismos peligrosos que pueden conducir a los alumnos a engaños profundos. Como ser: pensar ingenuamente que todo puede ser matematizado. He aquí dos de los muchos ejemplos que podría reproducir:

“En la vida todo es matemática porque donde miramos hay matemática”(Macarena).

“La matemática nos sirve para cualquier tipo de problemas en la vida”(Valeria)

Estos desvíos de la matemática provocados por los dos peligros señalados son percibidos por algunos alumnos. Uno de ellos es Martín y lo manifiesta de esta manera:

“Mercedes: *Yo no me imagino la vida sin la matemática, sería como difícil, que se yo .. todo se maneja con matemática , la naturaleza siempre fue el origen de la vida humana pero sin la matemática no se podrían ni manejar los países ...no sé es algo esencial, si los hombres no saben matemáticas no se pueden manejar en el mundo.*

Martín: *para mi eso de que no se podría llegar a vivir sin la matemática no es tan así. Los animales por ejemplo no necesitan matemáticas y ellos viven felices y tranquilos.*

Julieta: *qué querés decir Martín, que para vos las matemáticas son un tormento.*

Martín: *no, lo que quiero decir que ellos viven en este mundo y son felices, o sea que estén las matemáticas es por el camino que tomó la historia pero, por ahí, si nadie inventaba el sistema numérico con que se maneja la matemática hoy en día también íbamos a vivir.*

Julieta: *Martín , ¿en qué no estás de acuerdo del planteo de Mercedes?*

Martín: *no me parece que la matemática sea vital para la vida del ser humano*

Julieta: *¿por qué?*

Martín: *quizás el mundo sería distinto...quizás hasta el cerebro del ser humano hubiese evolucionado de otra forma, pero para mi, cierto, yo no juzgo al mundo tal cual es hoy como perfecto o como ideal, y que es la forma ideal de vivir.*

Julieta: *¿cómo sería ese mundo distinto que vos decís?*

Martín: *y...no sé, donde vivimos quizás las casas no serían iguales ..., quizás en vez de ser recta la pared sería circular. ..y para mí eso no es una forma mala de vivir porque si estabamos así seguro que no íbamos a decir que eso es malo, que eso es primitivo porque no tendríamos este otro concepto, ¿me entendés?*

Julieta: *si*

Martín*: no podemos decir que esto es mejor porque quizás es peor porque no sabemos a dónde vamos.*

Julieta: *a ver si te entiendo...lo que vos estás planteando es que se sobrevalora o se exagera respecto a la importancia de la matemática y que esto es peligroso.*

Martín: *si, de que digan que el mundo gira por las matemáticas*

Julieta: *y, ¿por qué crees que dicen el mundo gira por las matemáticas?*

Martín: *quizás para algunos la matemática es también la naturaleza...puede ser, no sé, depende ...hay millones de personas en el planeta y no sé, cada uno tiene su posición.*

Julieta: *¿y vos qué pensas?*

Martín: *¿sobre eso?...por ahí quien dice que gracias a la matemática gira el mundo también expresa, aunque sea inconscientemente, que la matemática también es la naturaleza...pero con otro nombre ...tampoco está mal, ¿no es cierto? es la opinión de cada uno pero para mí no es así.*

Julieta: *¿no?*

Martín: *yo diferencio la matemática de la naturaleza...la matemática como los números y las fórmulas.. y a la naturaleza todo lo que uno ve, no cierto..."*

Martín lo que observa es qué hay detrás de esta postura extrema de pensar que todo puede ser matematizado . En principio él plantea que se acepte la idea de la existencia de lo inmatematizable ya que la matematización la impuso el hombre. De este modo para él no caeríamos fácilmente en la ceguera hacia los valores del espíritu humano (si bien él señala a los animales pero en realidad la señal clave es la referencia a la felicidad y tranquilidad). También previene acerca de ese optimismo excesivo sobre lo que la matemática da y puede dar *(no podemos decir que esto es mejor porque quizás es peor porque no sabemos a dónde vamos*). Para , finalmente, identificar con los platonistas a aquéllos que consideran que el mundo gira por las matemáticas porque, implícitamente, plantea la creencia platónica que la naturaleza está hecha según los patrones de la matemática (*...por ahí quien dice que gracias a la matemática gira el mundo también expresa, aunque sea inconscientemente, que la matemática también es la naturaleza...pero con otro nombre .).*

Lo que está señalando en realidad Martín , por eso consideré importante transcribir este diálogo, son disfunciones que la "enfermedad utilitarista" provoca en los alumnos. Estas disfunciones proyectadas al aprendizaje de la matemática en la escuela pueden conducir a que los alumnos "no entren" a la verdadera anatomía de la matemática . Y, muchas veces, si no se consigue "entrar", los alumnos limitan entonces el estudio a adquirir un dominio formal de las técnicas y elementos tecnológicos (o teorías) que resuelven los problemas. Situación en la que se encuentran a menudo los alumnos de los niveles EGB y Polimodal e incluso no pocos estudiantes de la universidad. Todo un tema para pensar.

5.5.2. "La matemática es un problema de relaciones"

La idea de la matemática como un cuerpo de conocimiento de infinitos elementos relacionados entre sí para resolver un problema podría ser una buena ilustración de la conjunción de metáforas propuestas por los alumnos[251]:

[251] Durante las entrevistas grupales, se solicitó a los alumnos utilizaran un metáfora para representar a las matemáticas. Estas reflexiones surgieron a partir de esa propuesta.

“Julieta: *¿cómo expresarían metafóricamente la matemática?*

Bárbara: *me imagino una nube blanca y todos los números ayudándose entre sí para resolver*

Julieta: *¿para resolver qué?*

Bárbara: *para resolver algo*

Julieta: *¿ qué es ese algo?*

Bárbara: *un problema*

Rodrigo: *yo me imagino como un hoyo negro que no tiene fin, es como que están todos ahí y no tiene fin.*

Julieta: *¿por qué decís no tiene fin?*

Rodrigo: *porque los números son infinitos entonces las cuentas y eso pueden ser infinitos “*

Sea una nube blanca o un hoyo negro, los alumnos esbozan a la matemática mostrando así su imagen de cuerpo, un cuerpo infinito que se expresa aquí a través del sistema numérico (*porque los números son infinitos...)*, el más sencillo de los objetos infinitos y cuyos elementos interactúan entre sí (*...los números ayudándose entre sí)* para dar respuesta a un problema.

Para los alumnos, ¿qué otras características tiene el cuerpo de conocimiento matemático? ¿qué elementos lo constituyen? ¿cómo se ligan entre sí estos elementos?. Analizaré estas cuestiones tomando como punto de partida el siguiente diálogo:

*“*Julieta: *¿qué elementos encuentran en las matemáticas?*

Rodrigo: *números, operaciones*

Julieta: *además de números y operaciones, ¿ qué otros elementos encuentran?*

Bárbara: *reglas*

Federico: *teorías*

Anahí: *fórmulas*

Julieta: *¿están todos de acuerdo que en matemática hay teorías?*

Todos: *si*

Julieta: *¿y cómo se relacionan las teorías con las fórmulas?*

Anahí: *cada teoría tiene una fórmula*

Julieta: *¿qué piensan de lo que dice Anahí?*

Anahí: *una fórmula para saber ...para saber cómo hacer...cómo plantear esa teoría*

Julieta: *¿a alguien se le ocurre dar un ejemplo de esto que estamos hablando?*

Mercedes: *el teorema de Pitágoras*

Julieta: *¿y cuál sería la teoría ahí?*

Mercedes: *lo que dice el enunciado*

Julieta: *están todos de acuerdo*

Martín: *para mi es lo mismo, o sea, una teoría es algo que alguien descubrió...o sea, el teorema de Pitágoras es una teoría, aunque sea escrita en un enunciado es la misma fórmula pero escrito en lenguaje coloquial.*

Julieta: *¿te parece?*

Martín: *y después escrita en números pero sigue siendo una fórmula, sólo que para mi es una teoría para expresar que descubrió alguien...que descubrió tal persona...para resaltar eso nada más...pero en realidad son fórmulas, o sea la teorías explican fórmulas ...ayudan a defender esa fórmula*

Julieta: *¿cómo sería entonces la relación entre la teoría y la fórmula?*

Rodrigo: *como que en el ejercicio, la práctica sería como el reflejo de la teoría, porque la teoría se sustituye...uno es cómo y el otro es la confirmación.*

Julieta: *¿están de acuerdo con Rodrigo?*

Todos: *sí"*

Chevallard, Y, Bosch, M. y Gascón, J. (1997)[252] sostienen que toda obra matemática se construye como respuesta a un tipo de cuestiones o tareas problemáticas. Esta respuesta se constituye a partir de cuatro elementos esenciales: los *tipos de problemas* que surgen de las cuestiones, las *técnicas* que permiten resolver estos problemas; las *tecnologías* que justifican y hacen comprensibles las técnicas y las *teorías* que son discursos suficiente amplios y sirven de fundamento a las tecnologías.

---

[252] CHEVALLARD, Y., BOSCH, M. y GASCÓN, J. (1997). Op. Cit. Pág. 125-126. Los autores refieren al conocimiento matemático en término de obra. Esta cuestión se detalla en el marco teórico.

En el diálogo con los alumnos, la matemática es presentada como un tipo de conocimiento que se compone de objetos considerados aisladamente (los números) o encadenados por ciertas relaciones o leyes de composición (las operaciones y las reglas o fórmulas). Las operaciones, las fórmulas y las reglas que hacen referencia suponen una "manera de hacer" determinada que permite realizar las tareas en cuestión de una forma relativamente sistemática y segura. Esta manera de hacer es lo que Chevallard, Y, Bosch, M. y Gascón, J. (1997)[253] califican de técnica matemática. Tiene sentido expresar entonces que los alumnos identifican a las técnicas como uno de los elementos constitutivos del conocimiento matemático.

Otro de los elementos considerados como componente del conocimiento matemático son las teorías. El reconocimiento de este elemento también aparece en las producciones escritas. El escrito de Anabel es un ejemplo de ello.

"La matemática no son sólo números, también están llenas de significados , por ejemplo el teorema de Pitágoras, los significados son respuestas de lo que necesitamos saber acerca de la matemática"

Anabel se refiere a las teorías en término de significados y piensa que ellas justifican la cuestiones que se plantean en la matemática. No muy alejados de este pensamiento están los alumnos participantes del diálogo antes presentado. Ellos entienden que la teoría contiene a la técnica *(porque cada teoría tiene un fórmula)* que , a la vez, sería la utilización práctica de esa teoría (*una fórmula para saber ...para saber cómo hacer...cómo plantear esa teoría*). Esto significaría que los alumnos conciben la teoría y la técnica como dos aspectos no disociados dentro del cuerpo de conocimiento matemático.

Las palabras de Martín (*...las teorías explican fórmulas ...ayudan a defender esa fórmula)* , Rodrigo (*la práctica sería como el reflejo de la teoría, porque la teoría se sustituye...uno es cómo y el otro es la confirmación*) y Anahí (ya citadas) no suenan como un discurso matemático suficientemente amplio sino más bien como un discurso muy vinculado directamente a la técnica; es decir, que se mantiene más

[253] CHEVALLARD, Y., BOSCH, M. y GASCÓN, J. (1997). Op. Cit. Pág. 125-126

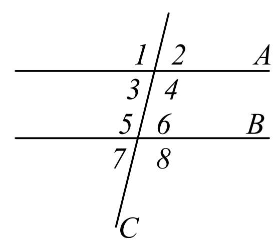
cerca de la técnica que de la tecnología. Esto me lleva a suponer que ellos interpretan la teoría como la tecnología asociada a la técnica y no como las teorías que sirven de fundamento a las tecnologías.

En las carpetas de los alumnos se observan actividades donde aparecen solamente elementos técnicos y tecnológicos y corroboran la suposición expresada en el párrafo anterior. El análisis de una tarea matemática copiada de la carpeta de Federico va a iluminar esta observación[254].

"Calcular la amplitud de todos los ángulos internos formados por dos rectas paralelas cortadas por una secante. Sabiendo que uno de ellos es igual al triple producto de un ángulo aumentado en 10º y su conjugado interior es igual al doble producto de dicho ángulo, disminuido en 5º.

Desarrollo

$$\text{datos}\begin{cases} \hat{5} = 3x + 10^o \\ \hat{3} = 2x + 5^o \end{cases}$$



1) $\hat{5} + \hat{3} = 180^o$ *porque los conjugados internos son suplementarios.*

2)
$$\begin{aligned} 3x + 10^o + 2x + 5^o &= 180^o \\ 5x + 5^o &= 180^o \\ 5x &= 180^o - 5^o \\ x &= 175^o \div 5 \\ x &= 35^o \end{aligned}$$

3)
$$\hat{5} = 3 \cdot 35^o + 10^o = 115^o$$
$$\hat{3} = 2 \cdot 35 + 5^o = 65^o$$

4)
$$\hat{3} = \hat{6} \text{ por alternos internos entre paralelas}$$
$$\hat{5} = \hat{4} \quad \text{por alternos internos entre paralelas}$$

Esta actividad, en terminología de Polya, G.(1965)[255], es un problema por resolver. La incógnita es la amplitud de todos los ángulos internos, los datos son las amplitudes de dos ángulos conjugados internos y están expresados por ecuaciones

---

[254] Cabe señalar que dado el interés al que responde este trabajo no se profundiza mediante precisiones conceptuales, el análisis de la tarea matemática.

[255] POLYA, G. (1965). Op. Cit. Pág. 161-162.

($\hat{5} = 3x + 10^o$; $\hat{3} = 2x + 5^o$) que resultan de la traducción del lenguaje coloquial al lenguaje simbólico; particularmente al lenguaje algebraico, y la condición es que los ángulos internos están formados por dos rectas paralelas cortadas por una secante.

Como se puede observar, para encontrar la solución del problema el alumno plantea una ecuación 1). En este caso se podría decir que la ecuación opera como la *técnica* matemática que permite resolver la tarea. Una ecuación es una igualdad en la que aparecen ciertos números desconocidos y aquí expresa la relación de igualdad que cumplen ciertos ángulos que responden a la condición del problema , y que son desconocidos, (ángulos conjugados internos son suplementarios). Esto último formaría parte de la *tecnología* de la técnica porque la interpreta y la justifica.

La resolución de la ecuación 2) es el trabajo técnico: **"(...) En la fase de trabajo técnico hay que someterse a las leyes que rigen el desarrollo interno de las técnicas matemáticas. Es como si las matemáticas nos dictaran sus propias leyes"**(Chevallard, Y, Bosch, M. y Gascón, J. ,1997)[256]. En la fase 3) del trabajo técnico se pasó de la consideración de un conjunto de objetos a la consideración de un solo objeto en particular. Es decir, se hizo uso de la particularización. Para , finalmente, en la fase 4) se integra el trabajo técnico con el discurso tecnológico de modo que el trabajo técnico resulte eficaz para la situación.

Ahora bien, el discurso tecnológico que utilizó el alumno en la resolución de la tarea no es una teoría . La teoría interpreta y justifica la tecnología, por ello la teoría está más alejada de la técnica de lo que está la tecnología. En este caso tendría que existir un argumento que justifique la relación de igualdad entre determinados pares de ángulos formados por dos rectas cortadas por una tercera[257] . Y, la teoría en este sentido no sólo no aparece en la resolución de esta tarea en particular sino en ninguna otra actividad vinculada a este contenido. Similar situación se plantea con todos los otros contenidos desarrollados en la carpeta. Esto confirma la suposición planteada - los alumnos conciben la teoría como la tecnología de la técnica – y pone en evidencia lo que se podría denominar un reduccionismo epistemológico del conocimiento matemático.

---

[256] CHEVALLARD, Y., BOSCH, M. y GASCÓN, J. (1997). Op. Cit. Pág. 132

[257] Este argumento está constituido por teoremas.

La ausencia del discurso teórico no sólo se puso en evidencia en las carpetas de los alumnos sino también en las clases observadas. Esto me lleva a pensar que el origen del reduccionismo epistemológico es la elección didáctica del docente, quien indudablemente construyó una propuesta didáctica que, en el plano epistemológico, no considera a la teoría como uno de sus componentes constitutivos del conocimiento matemático

Este tipo de reduccionismo puede conducir a una "construcción sin sentido del conocimiento matemático" ya que el alumno en muchas oportunidades no podrá justificar lo que está afirmando con su discurso tecnológico. Los datos que surgen de la entrevista personal con Anahí dan cuenta de este planteo.

"Julieta: *vamos a trabajar con una situación problemática que nos involucra a las dos, ¿te parece?. Yo te cuento que compré jeans y camisas. Entonces vos me preguntas cuánto gasté y yo escribo esta expresión $2J + 2C = 140$; siendo J el precio de un Jean y C el precio de una camisa.¿ podes traducir al lenguaje coloquial la respuesta?*

(silencio prolongado)

Anahí: *y que ...dos jeans y dos camisas, o sea, el precio total de esas dos cosas, supongo que es el precio ¿no?*

Julieta: *¿y a vos que te parece?*

Anahí: *que sí, el precio total es 140 pesos.*

Julieta: *si yo te hubiera dicho que me compré un jean y una camisa y gasté 70 pesos, ¿cómo expresarías esto en el lenguaje simbólico?*

Anahí: *y así sería $J+C =70$*

(mientras expresa en voz alta $J+C =70$ escribe la ecuación en una hoja)

Julieta: *¿encontrás alguna relación entre $2J+2C =140$ y $J+C =70$?*

Anahí: *si porque también es una ecuación y tiene dos incógnitas diferentes. La C que son las camisas y la J que son los jeans. Eh ...Bueno y que el precio en total en una es 70 y en la otra 140.*

Julieta: *ahora te pregunto lo siguiente, ¿la persona que pagó por dos camisas y dos jeans 140 pagó un precio distinto por cada prenda que aquélla que pago por una camisa y un jean 70?*

Anahí: *distinto*

Julieta: *¿por qué distinto?*

Anahí: *porque son distintas las cantidades de los datos*

Julieta: *vamos a asignar un valor a la camisa, ¿qué te parece 20 pesos?. ¿cuánto pagó por el jeans en el caso que hubiera gastado 140 pesos?.*

(Hace los cálculos en una hoja)

Anahí: *y pagó 50 pesos por un jean*

Julieta: *¿y si hubiera gastado 70 pesos?*

(Hace los cálculos en una hoja)

Anahí: *a ver... hubiera gastado también 50 pesos por un jean*

Julieta: *¿y entonces?*

Anahí: *es lo mismo ..sí. Es como que la esencia del problema es la misma*

Julieta: *¿qué querés decir?*

Anahí: *sí, porque los datos, digamos iniciales de cada uno es que un jeans sale 50 pesos y que una camisa sale 20 pesos. Entonces esos son el origen de cada uno*

Julieta: *¿te parece?*

Anahí: *y sí, bueno cambian un poco en sí las cantidades ... porque en un caso usaron 2 jeans y 2 camisas y en el otro 1 jean y una camisa...es decir la mitad de jean y de camisa ... por eso se pagó 140 pesos y después 70 pesos"*

En la entrevista, Anahí da muestras de su habilidad para traducir las situaciones planteadas a distintos sistemas de representación. Esto se manifiesta , en la primera situación, a través de la interpretación en el lenguaje coloquial de la ecuación (2J + 2C = 140) que modeliza el problema. En la segunda, mediante la traducción de la ecuación (J + C= 70) que representa simbólicamente al enunciado del problema dado en el lenguaje coloquial. Esta última acción de Anahí implica , a pesar de la simplicidad de la situación, organizar la información, estructurarla en función a las relaciones entre datos e incógnitas, y dar la expresión de la técnica matemática que interpreta matemáticamente el problema. A partir del análisis de este juego de traducciones de sistemas de representación, y desde una mirada global a la entrevista, se podría decir entonces que ella reconoce la situación para la cuál es útil la técnica y la justifica con un argumento lógico (*..en un caso usaron 2 jeans y 2 camisas y en* *el otro 1 jean y una camisa...es decir la mitad de jean y de camisa ... por eso se pagó 140 pesos y después 70 pesos*).

Pero se presentan dificultades cuando Anahí tiene que establecer relaciones entre ambas ecuaciones. Las relaciones entre las ecuaciones están vinculadas a los conceptos y propiedades de ecuaciones equivalentes y expresiones escritas en forma canónica[258] (la ecuación J + C= 70 es la expresión 2J + 2C = 140 en su forma canónica). Y este argumento se encuentra desarrollado en el discurso teórico no en el tecnológico. Por ello, al no poseer las herramientas teóricas suficientes , se produce el error:

"Julieta: *ahora te pregunto lo siguiente, ¿la persona que pagó por dos camisas y dos jeans 140 pagó un precio distinto por cada prenda que aquélla que pago por una camisa y un jean 70?*
Anahí: *distinto*
Julieta: *¿por qué distinto?*
Anahí: *porque son distintas las cantidades de los datos"*

Luego, con la ayuda brindada, la particularización de una incógnita, Anahí remedia o subsana el error mediante el reconocimiento en un discurso no formal de la existencia de la equivalencia de ecuaciones y ecuación canónica:

"Anahí: *es lo mismo ..sí. Es como que la esencia del problema es la misma*
Julieta: *¿qué querés decir?*
Anahí: *sí, porque los datos, digamos iniciales de cada uno es que un jeans sale 50 pesos y que una camisa sale 20 pesos. Entonces esos son el origen de cada uno"*

En relación a las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas Socas, M.(1997)[259] señala que **"(...) las dificultades se conectan y refuerzan en redes**

---

[258] Para ayudar a la comprensión: Ecuaciones equivalentes son las que admiten el mismo conjunto solución. En matemática se procura que los objetos del mismo tipo se puedan escribir de la misma forma (forma canónica) que cumple la propiedad de ser única.
[259] SOCAS, M. (1997). Op. Cit. Cap. V

complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en los alumnos en forma de errores" . Annie Berté (2000)[260] aborda el problema de las dificultades del punto de vista del alumno en términos de obstáculos. A los obstáculos los denomina: obstáculos epistemológicos, obstáculos didácticos, obstáculos ontogenéticos y obstáculos culturales. Brousseau (1983)[261] considera que los obstáculos que se presentan en el sistema didáctico son los tres primeros señalados por Berté (2000).

Aceptando el señalamiento de Socas y la clasificación de obstáculos propuesta por Brousseau (1983) y Berté (2000), se podría decir que las dificultades de Anahí tienen por origen un modelo implícito , una concepción propia sobre cómo funciona a nivel interno el conocimiento matemático[262], que la conduce a una conclusión errónea. Este modelo implícito sostiene un concepto que se podría enunciar así: *"si los coeficientes de las ecuaciones son distintos entonces el conjunto solución de ellas también es distinto"*. Y el argumento que explica y justifica la falsedad de este enunciado forma parte del discurso teórico que, como se ha destacado no está presente en la elección didáctica del docente. En consecuencia, las dificultades señaladas están **"(...) ligadas al saber"** (Berté , A. , 2000)[263] , por ello se tratan de obstáculos epistemológicos. que, a la vez, son de origen didáctico Brousseau (1983)[264] porque resultan de una elección didáctica que conduce a un reduccionismo epistemológico.

Considero importante destacar que la existencia del reduccionismo epistemológico no cambia la afirmación realizada sobre la concepción de los alumnos acerca de la no disociación entre elementos técnicos y teóricos. Lo que sí cambia es que, al no concebir el elemento teoría en el sentido planteado, la asociación ocurre entre técnica y tecnología.

---

[260] BERTÉ, A. (2000). Op. Cit. Pág.195-197.

[261] Citado por SOCAS, M. (1997). Op. Cit. Pág. 136.

[262] El funcionamiento del nivel interno es uno de los niveles (el otro es el nivel externo) considerados en la definición del sentido del conocimiento matemático.

[263] BERTÉ, A. (2000). Op. Cit. Pág.196.

[264] Citado por SOCAS, M. (1997). Op. Cit. Pág. 136.

El otro elemento constitutivo del conocimiento matemático que los alumnos no refieren en el diálogo pero sí aparece en las carpetas y en las observaciones de clases es *tipos de problemas*. Reseño una observación de clase donde está presente este elemento.

"Clase de matemática. Curso: 9ª año F. Turno mañana.

La profesora entra al curso y entrega a los alumnos una hoja que contiene un espacio de problemas[265] *con trece problemas para que los alumnos los resuelvan.*

1. *Tengo 12 litros de nafta en el depósito y caben 60. ¿Qué fracción está llena? ¿Qué fracción está vacía?.*
2. *Las* $\frac{2}{3}$ *partes de una finca están cultivadas. Si la finca posee 60 ha. ¿cuántas ha están cultivadas?*
3. *Luis ha leído las tres cuartas partes de un libro que tiene 124 páginas ¿Cuántas páginas ha leído?*
4. *El hígado de tiburón es* $\frac{1}{4}$ *de su peso. Si un tiburón tiene 14000 kg. ¿Cuánto pesa el hígado?"*

....

....

Basta con hacer una lectura interpretativa de los problemas para comprobar que constituyen un tipo de problemas. En todos ellos se ponen en juego el concepto de fracción con sus distintos significados. Para abordarlos es posible encontrar una técnica matemática – un algoritmo- que además permita generar más problemas del mismo tipo.

[265] Espacio de Problemas: conjunto de problemas que ponen en juego un concepto matemático, se resuelven mediante este concepto, y que dan sentido no sólo al conocimiento matemático sino también a la actividad matemática escolar.

Hasta aquí se ha visto que los alumnos consideran, en terminología de Chevallard, Y, Bosch, M. y Gascón, J. (1997)[266] , a los tipos de problemas, las técnicas y las tecnologías como componentes de la matemática. Aparece ahora la siguiente pregunta: ¿qué piensan los alumnos de los objetos matemáticos que integran los distintos componentes?. En el registro de una entrevista grupal encontré algunas señales respecto a esta cuestión.

"Mercedes: *para aprender es mejor resolver ecuaciones distintas*
Julieta: *¿qué querés decir con ecuaciones distintas?*
Mercedes: *que las ecuaciones pueden ser mezcladas*
Julieta : *¿mezcladas?*
Mercedes: *por ejemplo ecuaciones en aritmética, en geometría y cosas así*
Julieta: *¿en matemática se puede mezclar?*
Mercedes: *sí, por ejemplo uno quiere sacar la superficie de un cuadrado y se puede hacer con una ecuación ... o con un ejercicio combinado*
Julieta: *¿y por qué se puede hacer eso?*
Rodrigo: *porque es relativo*
Julieta: *¿qué querés decir con es relativo?*
Rodrigo: *y todo, todo es como una cadena.*
Julieta: *¿una cadena?*
Rodrigo: *claro, como que todo tiene que ver...todo está entrelazado...todos los números tienen que ver...es como que se pertenecen, se asocian.*
Julieta: *¿cómo se asocian?*
Rodrigo: *las mismas cuentas...algunas son mas complejos. Por ejemplo, la multiplicación con la potenciación, y así la división con la raíz"*

En el diálogo se presenta a la matemática como un tipo de conocimiento en el que "se mezclan" las distintas ramas que la conforman. La materialización de "la mezcla" se expresa aquí en la interconexión de la aritmética, el álgebra y la

[266] CHEVALLARD, Y., BOSCH, M. y GASCÓN, J. (1997). Op. Cit. Pág. 125-126. Los autores refieren al conocimiento matemático en término de obra. Esta cuestión se detalla en el marco teórico.

geometría. Y esta interconexión se logra por algún tipo de relación (los alumnos refieren a asociaciones) que se establece entre dos objetos aparentemente diversos.

En el problema enunciado por los alumnos la relación que se establece entre objetos numéricos, algebraicos y geométricos se funda en que la ecuación muestra un rápido y seguro desarrollo de un cálculo numérico a través de reglas y, además, con un nivel de generalidad que permite representar simbólicamente la relación que vincula los elementos del cuadrado y calcula la medida - el área - de su superficie.

En las carpetas aparecen muchas actividades que también ejemplifican esta idea.

“Carpeta de Mercedes. Transcripción de un situación problemática que forma parte de una actividad de resolución de problemas.

Título de la actividad: <u>*Encontramos varias opciones*</u>

Calcular la amplitud del suplemento del triple producto de un ángulo que mide 37º

1º Opción

$$180^o - 3 \cdot 37^o = 69^o$$

2º Opción

$$\begin{aligned} x + 3 \cdot 37^o &= 180^o \\ x + 111^o &= 180^o \\ x &= 180^o - 111^o \qquad 3) \\ x &= 69^o \end{aligned}$$

Respuesta: el ángulo es de 69º ”

En la opción 1 la alumna propone como procedimiento de resolución el uso de operaciones aritméticas. En la opción 2 plantea una ecuación. Lo que diferencia la formulación de ambas técnicas planteadas es fundamentalmente el nivel de abstracción y generalidad y el uso de un lenguaje formal . Pero la opción 2 *“dice”* lo mismo que la opción 1; es por ello que en el paso 3) de la ecuación se puede visualizar las operaciones aritméticas de la opción 1.

El nivel de generalidad expresado en un lenguaje formal hace posible la consideración de la ecuación como una extensión de las operaciones aritméticas al campo algebraico; y esto (en este caso particular) lleva a la unificación de las dos ramas de las matemática (aritmética y álgebra). El análisis de este ejemplo esboza la idea de la matemática como una ciencia de relaciones; idea señalada por los alumnos con las expresiones "*todo es como una cadena*" *y "todo está entrelazado...todos los números tienen que ver...es como que se pertenecen, se asocian"*

Podríamos decir entonces que los alumnos piensan que los objetos matemáticos están vinculados por algún tipo de relación y forman parte de un todo unificado (sistema matemático mayor) compuesto por distintas ramas que están ensambladas de forma intrincada . Esta idea se contrapone con la concepción tradicional de la matemática , en la cual las ramas aparecen como temas independientes; y guarda consonancia con la concepción actual de la matemática basada en la noción de estructura[267]. Todo esto me lleva a suponer que la concepción de los alumnos acerca de la organización interna de la matemática se aproxima más a la concepción actual que a la tradicional.

Skemp (1976)[267] distingue entre matemática instrumental y matemática relacional, , en base al tipo de concepción de la matemática que cada una refleja. El conocimiento instrumental de la matemática, es conocimiento de un conjunto de "planes preestablecidos" para desarrollar tareas matemáticas. La característica de estos planes es que preescriben procedimientos paso a paso a ser seguidos en el desarrollo de una tarea dada, en los cuales cada paso determina el siguiente. El conocimiento relacional de la matemática, en contraste, está caracterizado por la posesión de estructurales conceptuales que permiten a quien las posee construir diferentes planes para desarrollar una tarea asignada.

---

[267] La matemática basada en la noción de estructura **(...) sostiene que los conceptos y propiedades matemáticas se construyen a partir de relaciones entre objetos, fenómenos o conceptos previos"**. En CASTRO, E . Y CASTRO, E. (1997) Op. Cit. Pág.102

[267] SKEMP (1976). Op.Cit.

El título de la actividad analizada "*Encontramos varias opciones*" ya sugiere una concepción relacional de la matemática. Este título se repite en otras actividades que aparecen en las carpetas y se expresa a través de las distintas opciones que presentan los alumnos como caminos posibles de resolución de un problema.

"Carpeta de Federico.

Título de la actividad: Resolución de situaciones problemáticas cotidianas

1. *A un vivero forestal se le pidió 1000 unidades de pino paraná. ¿Cuántos cajones tendrán que ser preparados, si en cada cajón caben 85 plantines?*

1º Opción: $\begin{array}{r} 25 \\ \times 4 \\ \hline 100 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4 \\ \times 10 \\ \hline 40 \end{array}$

2º Opción $\begin{array}{r|l} 1000 & 25 \\ \cline{2-2} 000 & 40 \end{array}$

3º Opción $\begin{array}{r} 25 \\ +25 \\ \hline 50 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 50 \\ +25 \\ \hline 75 \end{array}$ *........ y así sucesivamente"*

Respuesta: tendrán que ser enviadas 40 cajas".

....

En esta actividad lo que permite al alumno proponer diferentes planes es el establecimiento de relaciones entre operaciones definidas en el conjunto de los números naturales y esto supone un conocimiento , aunque no sea desde un discurso matemático formal, de la estructura del conjunto de los números naturales.

También en las clases se observa está visión de los alumnos de la matemática como un conocimiento relacional. Como ejemplo propongo nuevamente la clase de matemática de 9º año, turno mañana. En esta clase la profesora entrega a sus alumnos un espacio de problemas. Una vez expresada la consigna (“*resuelvan el problema 1*[268] *para después pasar al pizarrón a escribir las propuestas de solución”)* , y transcurrido un tiempo, 4 alumnos pasan al pizarrón para desarrollar los procedimientos propuestos por ellos.

“Opciones presentadas por cada uno de los cuatro alumnos:

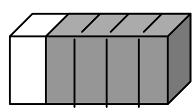
1º Opción : $\frac{60}{60}-\frac{12}{60}=\frac{48}{60}\quad ;\quad \frac{8}{10}=\frac{4}{5}$

2º Opción: $\frac{60}{60}-\frac{12}{60}=\frac{48}{60}$

3º Opción: $\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$ *está lleno* $\qquad \frac{48}{60}=\frac{4}{5}$ *está vacío*

4º Opción:

$$\begin{array}{r} 60 \\ -12 \\ \hline 48 \end{array}$$



$\frac{1}{5}$ *está lleno* $\frac{4}{5}$ *está vacío*

Todas las propuestas de los alumnos se basan en el uso de una técnica: un algoritmo. Pero existe una diferencia sutil entre las opciones 1,3 y 4 y la opción 2 que distingue al conocimiento relacional del instrumental. En la opción 2 el alumno emplea el algoritmo sin establecer ningún tipo de conexiones; la técnica así como está planteada, manifiesta la utilización de un procedimiento paso a paso. En las

---

[268] El enunciado de este problema se encuentra en la referencia hecha anteriormente sobre esta observación.

opciones 1,3 y 4 el algoritmo ha sido ligado a la idea de fracciones equivalentes y expresión canónica de una fracción. En la opción 4 se suma una conexión más que es la traducción de sistemas de representación (simbólicos y gráficos).

Considero que las notas de campo presentadas son muestras suficientes para afirmar que estos alumnos conciben a las matemáticas como un conocimiento estructurado relacionalmente; ya sea entre sus objetos o sus distintas ramas.

Esta concepción del conocimiento matemático favorece el aprendizaje de la matemática pero la realidad indica que , en muchas oportunidades , el reduccionismo epistemológico planteado opera como un obstáculo , impidiendo al alumno establecer relaciones y , en consecuencia, llegar a buen término en su tarea.

5.5. "La matemática es todo un problema de reglas y propiedades"

Esta representación social hace referencia a uno de los aspectos que corresponden al plano epistemológico y a la dimensión gnoseológica del conocimiento matemático: Las formas de desarrollo de la matemática.

A fin de exponer la representación propuesta en forma compresiva , diferencio para la interpretación dos fases de trabajo. En la primera intento mostrar que para los alumnos las matemáticas se desarrollan resolviendo problemas. En la segunda, que éstos problemas se resuelven con una lista de reglas y propiedades.

5.5.1. Las matemáticas se desarrollan resolviendo problemas

En sentido estricto, las formas de desarrollo de las matemáticas está vinculado a una actividad reservada a los investigadores que desarrollan las matemáticas para crear matemáticas nuevas. Pero aquí adopto el planteo de Chevallard, Y, Bosch, M. y Gascón, J. , 1997)[269], quienes sostienen que en sentido amplio se puede decir que *el que aprende matemáticas* también "crea" matemáticas nuevas. Si bien los alumnos

---

[269] CHEVALLARD, Y., BOSCH, M. y GASCÓN, J. (1997).Op. Cit. Pág. 56.

no crean conocimientos nuevos para la humanidad, sí crean matemáticas nuevas para ellos en tanto alumnos.

Es así como en esta categoría de representación se incluyen aquellas cuestiones vinculadas a la actividad matemática y a la forma de encontrar el conocimiento matemático. Las preguntas que se suscitan son: ¿qué es hacer matemáticas? ¿cómo se generan los conocimientos matemáticos? ¿qué son las actividades matemáticas? ¿cómo se emplean las matemáticas?.

En una de las entrevistas grupales aparecen elementos que dan cuenta de las respuestas de los alumnos a algunas de estas cuestiones.

> "Bárbara: *para mi la matemática nos ayudó mucho y nos abrió muchas puertas a través de la naturaleza digamos...porque nos ayudó a alcanzar mucho digamos...y cada vez se va abriendo otra puerta y otra puerta...así va avanzando la matemática...la gran ayuda de quién sea el que nos la haya puesto en el camino*
> Julieta: *¿y quién nos la puso en el camino?*
> Bárbara: *y ... a lo mejor no fue una sola persona, capaz fueron muchas.*
> Mercedes: *y sí, porque uno descubrió el numerito, después el otro la suma, después otro descubrió otro numerito...*
> Bárbara: *sí, eso*
> Martín: c*apaz que para decir...voy a explicarle que le voy a dar dos palitos pero ... no sé...entonces en vez de hablarle le tengo que escribir, entonces le escribió así : dos palitos , ¿entendés?. Después comenzó capaz con la creación de un dibujo y después con un símbolo... vaya a saber cómo.*
> Julieta: *¿y así la matemática evolucionó?*
> Rodrigo: *y sí; porque el hombre también evolucionó*
> Julieta: *¿qué decís Rodrigo?*
> Rodrigo: *que el hombre evolucionó, o sea, empezó haciendo eso y ahora es mucho más compleja que hace miles de años ...y antes de eso, hace mil años era más compleja que antes de eso.*
> Martín: *o quizás era igual de compleja pero ...*
> Bárbara: *pero capaz que desde antes ya, alguien había descubierto lo que nosotros ahora estamos descubriendo*

Anahí: *claro, y esa persona no pudo...por ahí lo descubrió antes y no pudo seguir avanzando más que ahí ...y ahí se quedó ...y entonces ahí pasó...no sé lo que pasó...entonces vino alguien que descubrió lo que la otra persona ya estaba investigando suponele ...porque tampoco se creó así nomás, alguien lo tendría que haber desarrollado... o sea descubrieron el desarrollo"*

Los alumnos presentan un conocimiento matemático entroncado con la naturaleza. Podría decirse que se lo muestra como un conocimiento cuyos objetos están separados de la naturaleza a la cual sirve de instrumento (*...la matemática nos ayudó mucho y nos abrió muchas puertas a través de la naturaleza digamos...porque nos ayudó a alcanzar mucho digamos*) y son una creación de la mente humana (*...la gran ayuda de quién sea el que nos la haya puesto en el camino*).

Plantean un universo matemático en el que los nuevos objetos no aparecen en el horizonte de las creaciones humanas como objetos que luego haya que relacionar. Aparecen más bien trabados por relaciones ya existentes y que se han expresado en lenguaje. Y estas relaciones iniciales serían las escaleras para establecer la validez de otras nuevas, iniciándose así un proceso de concatenaciones (las palabras de Mercedes , Martín y Anahí cristalizan este planteamiento).

Este modo de concebir el universo matemático armoniza con la ontología del conocimiento matemático descripto por Cañon, C (1993)[270]; un mundo matemático que **"(...) no consiste en objetos, sino en "estados de cosas", es decir, en la red compleja de relaciones entre objetos, las que se han expresado en lenguaje y las que potencialmente permanecen a la espera de serlo. Las primeras han originado estructuras cada vez más potentes y abstractas, las segundas aún "no son", pertenecen a la potencialidad del universo matemático existente, a la espera de que alguien les dé el ser, las cree haciéndolas aparecer en el lenguaje, realizando en ese mismo acto de creación, un acto de descubrimiento"**.

En este sentido, la creación matemática no es arbitraria, es también descubrimiento, en cuanto que su desarrollo histórico está sujeto a mantener

---

[270] CAÑON LOYES, C. (1993). Op. Cit. Pág. 362

consistencia con lo anteriormente logrado. Quien refleja muy bien este planteo es Anahí:

"Anahí: *claro, y esa persona no pudo...por ahí lo descubrió antes y no pudo seguir avanzando más que ahí ...y ahí se quedó ...y entonces ahí pasó...no sé lo que pasó...entonces vino alguien que descubrió lo que la otra persona ya estaba investigando suponele ...porque tampoco se creó así nomás, alguien lo tendría que haber desarrollado... o sea descubrieron el desarrollo".*

Considerado el análisis realizado, se podría decir que los alumnos proponen un modelo de avance de la matemática en el cual uno sus rasgos es que la matemática se desarrolla de manera tal que construye sus nuevos objetos consistentemente sobre las potencialidades iniciales.

Este proceso de construcción va ligado, según los alumnos, a la evolución del hombre.

"Julieta: *¿y así la matemática evolucionó?*
Rodrigo: *y sí; porque el hombre también evolucionó.*
Julieta: *¿qué decís Rodrigo?*
Rodrigo: *que el hombre evolucionó, o sea, empezó haciendo eso y ahora es mucho más compleja que hace miles de años ...y antes de eso, hace mil años era más compleja que antes de eso".*

La evolución del hombre supone un desarrollo en complejidad de sus esquemas mentales lo que le posibilitaría hacer matemáticas cada vez más complejas. Esto me lleva a pensar que para los alumnos el desarrollo de la matemática significaría una complejidad creciente del conocimiento matemático (la expresión de Rodrigo es un indicador de esta idea) . Pero este pensamiento queda en un nivel de hipótesis porque las notas de campo no brindan datos suficientes para profundizar esta cuestión.

El segundo rasgo del modelo planteado por los alumnos es que el avance de la matemática consiste en una evolución gestada "en una amplia inmanencia de los problemas" [271]. Las expresiones escritas por Andrea son una buena ilustración de esta noción.

"La matemática nos lleva a pensar más allá de las cosas que tenemos en nuestro alrededor. Es como una meta que para poder alcanzar hay que saber cómo y entender qué hicimos para lograrlo; y la meta nunca se va siempre está ahí tratando de que la busquemos. Porque cuando alcanzamos una hay otra esperando. Es algo insólito que nunca termina de darnos problemas y nunca podemos decir que alcanzamos todas las metas porque seguramente quedó una meta perdida (Andrea)".

Andrea señala el carácter abstracto de los objetos matemáticos (*La matemática nos lleva a pensar más allá de las cosas que tenemos en nuestro alrededor*) , considera que para llegar a ellos se necesita una familiaridad con el universo matemático (*...para poder alcanzar hay que saber cómo y entender qué hicimos para lograrlo..*) y una actitud de búsqueda (*... la meta nunca se va siempre está ahí tratando de que la busquemos...*). Pero además con sus palabras destaca a la matemática como un tipo de conocimiento en que los problemas surgen de la misma dinámica interna (*Es algo insólito que nunca termina de darnos problemas y nunca podemos decir que alcanzamos todas las metas porque seguramente quedó una meta perdida.)".*

En esta manera de plantear el avance, un problema sigue a otro por una necesidad intrínseca del conocimiento matemático.

Siguiendo a Cañon, C (1993), los dos rasgos descriptos que aparecen en el modelo de avance de la matemática propuesto por los alumnos caracterizan a un modelo acumulativo.

En consecuencia, tiene sentido expresar que el modelo de avance que presentan los alumnos es un modelo de desarrollo acumulativo[272] regido por una necesidad intrínseca que se traduce en problemas.

---

[271] CAÑON LOYES, C. (1993). Op. Cit. Pág. 362

Al situar desde esta perspectiva la cuestión del avance de la matemática, ¿cómo plantean los alumnos el quehacer matemático?.

Hasta aquí , según el punto de vista de los alumnos, el quehacer que hace avanzar la matemática es un proceso de descubrimiento de "estados de cosas matemáticas", en interacción con la naturaleza y con los productos creados por la acción humana que son expresados en lenguaje.

Pero dado el carácter acumulativo del desarrollo de la matemática, este descubrimiento queda inscripto en un horizonte matemático no arbitrario. Quien materializa bien esta idea en una producción escrita es Marcos:

> *"La matemática es una materia en la que se utiliza lápiz, regla, goma, compás, transportador, está complementada de números que a través de esos números contienen reglas que debemos cumplir. Para mi la matemática es un recordatorio de los números y las reglas. La matemática es un descubrimiento de números y letras"(Marcos).*

Marcos primero destaca lo que se podría denominar "las herramientas del oficio" y entiende que hacer matemáticas es descubrir objetos matemáticos enlazados por

---

[272] Esta expresión merece una aclaración. El hecho que haga referencia a que la matemática , según los alumnos, se desarrolla de manera acumulativa no significa que éste es un rasgo que caracteriza a cualquier modelo de avance de la matemática. Pensar lo contrario sería negar la existencia del llamado "Modelo de las etapas de génesis" que fuera planteado por Lakatos y que supone un rompimiento a este carácter acumulativo. El **"kuhniano con gafas popperianas**", como se describió a sí mismo Lakatos (Cañón , 1993) , entiende que si el crecimiento de la matemática va unido al rigor lógico y es acumulativo y continuo lleva a una trivialización de la misma.

De manera sintética, se puede decir que el modelo de crecimiento crítico que propone Lakatos para dar cuenta del crecimiento de la Matemática se centra no solo en solventar los posibles contraejemplos lógicos, considerados como irrelevantes por el modelo de crecimiento continuo, sino los llamados por el heurísticos. Proceden de someter a crítica tanto los conceptos usados en el enunciado de la conjetura/teorema como en cada uno de los pasos de la demostración.

relaciones no arbitrarias. En esto último está presente la idea de que las matemáticas nos dictan sus propias leyes.

Hecho este planteo, y considerando que en las notas de campo los alumnos hablan de descubrimiento o creación, me surgen dos preguntas: ¿qué sentido otorgan a la palabra descubrimiento? y ¿ cuál es la diferencia con la palabra creación? . En una producción escrita por Bárbara encontré una posible respuesta.

> *"Cuando uno dice matemática se imagina números, propiedades, cuentas, problemas que nos sirven para crear algo nuevo. Tenés que resolver cuentas para encontrar la incógnita de algo, con ello podes obtener algo nuevo, algo que no está ahí, que tenés que descubrirlo"(Bárbara).*

Haciendo una lectura detenida es posible advertir que Bárbara utiliza la palabra crear asociada al nuevo objeto matemático que emerge a partir del uso de objetos existentes. La palabra descubrimiento esta asociada a la búsqueda del objeto nuevo inscripto en un universo de relaciones y que sólo será tal – un nuevo objeto - si encaja en un mundo de los objetos y relaciones ya existentes. Las palabras de Bárbara extraídas de una entrevista sobre el significado de "hacer matemáticas" fortalecen esta idea.

> "Julieta: *¿qué significa hacer matemáticas?*
> Bárbara: *para mi es pensar, encontrar algo, descubrir algo*
> Julieta: *¿qué queres decir Bárbara?*
> Bárbara: *descubrir algo nuevo, pero descubrir algo, detrás de tanta cosa enredada hay algo, sería pensar..."*

Es decir que la creación se manifiesta en el "alumbramiento" de relaciones y objetos no existentes. El descubrimiento consiste en hacer patentes las relaciones entre lo nuevo y lo heredado.

En consecuencia, se podría manifestar que el quehacer matemático planteado por los alumnos es, como lo identifica Cañón (1993)[273], **"(...) simultáneamente descubrimiento y creación. Es creación, en cuanto que los objetos matemáticos sólo cobran existencia una vez que han sido pensados y su modo de existencia se reduce a ser formulados en lenguaje. Es descubrimiento en cuanto que cada creación se presenta como algo no arbitrario, enraizado en los nexos de necesidad configurados por los primeros "estados de cosas matemáticas" que emergieron en el horizonte cultural humano"**. Esto significaría que la posición de los alumnos acerca del quehacer matemático no se corresponde con la postura platónica.

En la concepción platónica el quehacer matemático es descubrimiento de un mundo que está configurado desde toda la eternidad según leyes fijas, independientes de los sujetos que han hecho matemáticas en la historia. Para los platonistas, los hombres nada pueden inventar, porque todo está ya presente. Todo cuanto pueden hacer es descubrir. El hombre al descubrirlas no desarrolla las matemáticas sino el conocimiento que tiene de ellas.

Y aquí los alumnos con sus palabras plantean lo contrario. Ellos conciben un quehacer que hace avanzar la matemática de modo tal que ésta se desarrolla de manera acumulativa . Aparece entonces la pregunta: ¿cómo caracterizan la actividad matemática inherente a este desarrollo?

La entrevista grupal sobre los significados que otorgan los alumnos a la expresión "hacer matemáticas" es un buen punto de partida para abordar las cuestión planteada.

"Julieta: *¿qué significa para Uds hacer matemáticas?*

Valeria: *es como desarrollar un problema, tratar de resolver ese problema, para mí eso es hacer matemática...o sea resolver problemas*

Bárbara: *para mi es pensar, encontrar algo, descubrir algo*

Julieta: *¿qué queres decir Bárbara?*

Bárbara: *descubrir algo nuevo, pero descubrir algo, detrás de tanta cosa enredada hay algo, sería pensar...*

---

[273] CAÑÓN LOYES, C. (1993) . OP. Cit. Pág 401.

Julieta: *y vos José, ¿qué pensas?*

José: *que también es, o sea, para organizar la vida, o sea, los hombres descubren cosas y a la vez las matemáticas hacen mucho porque ayudan a organizar la vida con los números...*

Rodrigo: *para mi es agilizar la mente, para mejorarla, perfeccionarla y todo eso.*

Macarena: *tienen que aprender para poder hacerlo, para hacer las cuentas, porque las cuentas sirven para resolver los problemas, y por lo tanto sirve para resolver problemas y para poder resolver también lo que hay que pensar.*

Martín: *para mi hacer matemática significa tres cosas: razonar para ver cómo interactúan los números en los problemas, después recordar porque hay cosas que uno sabe de memoria y aprender porque por ahí uno aprende cosas..."*

"*Resolver problemas", "descubrir algo nuevo"* y *"poner en juego procesos mentales"*. Estos son los atributos que caracterizan las actividades matemáticas miradas desde los alumnos. Pero también son los atributos sustantivos de una actividad particular: la resolución de problemas.

Lo manifestado en el párrafo anterior es destacado por el matemático y especialista en resolución de problemas G. Polya (1965)[274], quien señala**: "Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero en la solución de todo un problema, hay un cierto descubrimiento. El problema que se plantea puede ser modesto; pero, si pone a prueba la curiosidad que induce a poner en juego las facultades inventivas, si se resuelve por propios medios, se puede experimentar el encanto del descubrimiento y el goce del triunfo (...)"**.

Considerando este señalamiento de Polya, G.(1965), el atributo "resolver problemas" engloba a los otros dos. Dicho de manera breve y casi epigramática, resolver problemas implica poner en juego procesos mentales para descubrir algo nuevo.

En consecuencia, se puede plantear que los alumnos entienden que la actividad inherente al desarrollo de las matemáticas es fundamentalmente resolver problemas.

[274] POLYA, G. (1965). Op. Cit. Pág.5.

Este modo de entender de los alumnos se corresponde con la actual concepción del quehacer matemático de la comunidad matemática en general; quién está influenciada por las ideas de Lakatos.

Lakatos aplicó su análisis epistemológico no a las matemáticas formales, sino a las matemáticas informales, las matemáticas en proceso de crecimiento y descubrimiento, que es, lo que estos estudiantes conocen por matemáticas.

Hasta aquí he pretendido dar cuenta de que los alumnos tienen la idea que las matemáticas se desarrollan resolviendo problemas. Lo que supone que consideran la actividad del matemático fundada en la resolución de problemas.

5.5.2. Los problemas se resuelven con una lista de reglas y propiedades

Retomando la idea del último párrafo del apartado anterior, la pregunta que surge ahora es: ¿cómo conciben el modo de trabajo matemático para llegar a la solución de los problemas?.

En el marco de este trabajo, consideré que una forma de encontrar las respuestas a esta pregunta es indagar las formas de actuación[275] de los alumnos en la resolución de problemas.

Para ello, utilizando distintas frases sobre el tema, realicé por un lado una exploración cuantitativa mediante una encuesta realizada a cien alumnos. Por otro lado, planteé entrevistas grupales e individuales a ocho alumnos usando las mismas frases que en la encuesta. Los entrevistados siempre fueron los mismos y no habían contestado la encuesta; es decir no tenían una postura previa y compartida entre ellos sobre el tema.

La encuesta me brindó datos numéricos que revelan la tendencia sobre las acciones de los alumnos en la resolución de problemas y la entrevista me permitió cargar de significados a esos datos.

---

[275] Entiendo por formas de actuación a aquellos aspectos de la actividad matemática que están incluidos en el campo procedimental. El campo procedimental es uno de los campos (el otro es el conceptual) considerados en la organización cognitiva del conocimiento matemático en el curriculum escolar. Los contenidos procedimentales aportan una serie de precisiones sobre el tipo de tareas que deberían realizar los alumnos en las actividades matemáticas.

En la interpretación de los aspectos vinculados a la ejecución puramente matemática de los problemas, la encuesta y la entrevista son complementadas con la revisión de carpetas.

Situada en este modo de dar cuenta las formas de actuación de los alumnos, y tomando como marco de referencia la propuesta de G. Polya (1965) para la resolución de problemas[16], comienzo la descripción de los diálogos que revelan los procedimientos a los que recurren los alumnos para resolver un problema.

"Julieta: *cuándo tienen que resolver un problema, ¿qué hacen? , tratan de relacionarlo con otros problemas que resolvieron, con situaciones de su vida cotidiana o no buscan ninguna relación con otras situaciones porque consideran que cada problema es un problema nuevo.*

Bárbara: *yo no busco ninguna relación con otras situaciones porque no siempre te va tocar el mismo problema, siempre te va a tocar cosas distintas, no se puede estar relacionando porque a lo mejor uno dice "igual a lo que me pasó el otro día" y resulta que no es igual*

Larissa: *para mi es un método fácil para resolver problemas el relacionar los problemas porque nos imaginamos y de esa manera podemos resolver mejor el problema*

Federico: *yo pienso parecido a Clariza; porque siempre cuando nos dan un problema va a estar relacionado con los anteriores, no se puede pensar que cuando nos dan un problema va a ser distinto a los demás, siempre van a tener algo en común.*

Martín: *yo creo que relacionar es una buena forma de resolver los problemas por lo que dijo Federico. Por ejemplo, si uno está dando fracciones, quizás en el problema aparezca una operación con fracciones. Si uno quiere imaginarse los problemas con la vida cotidiana de cada uno sería otra forma de resolver; pero*

---

[16]Considero este marco de referencia solamente con el fin de organizar los datos y facilitar su análisis. Según G. POLYA las cuatro fases de trabajo para resolver un problema son: I. Comprender el problema, II. Concebir un plan, III. Ejecución del plan, IV. Examinar la solución obtenida. En la interpretación hago referencia a las tres primeras fases. POLYA, G. (1965). Op. Cit. Pág.1.

también depende de cada uno, si uno quiere aislar el problema de los demás y resolverlo así.

Alejandra: *yo también pienso que si uno encuentra una similitud con otra situación vivida esto te ayuda a pensar mejor y resolver el problema*

Camila: *yo pienso como Bárbara porque no todos los problemas deben ser iguales, siempre van a ser distintos*

Martín: *hay que buscar los procedimientos como se aplicaron en otros precedentes.*

Bárbara: *a cada problema hay que tomarlo como único y no resolver el problema preguntándose en que tema se está en clase, sino interpretar a cada problema como uno nuevo. El tema de la clase no tiene que ser indicador de cómo se resuelve el problema.*

Las relaciones o conexiones de la situación problemática ya sea con otros problemas (Federico, Larissa) , con situaciones vividas (Alejandra) o con conocimientos precedentes (Martín y Mercedes) parecerían ser los procedimientos heurísticos que utilizan estos alumnos, por considerar que pueden ser efectivas , para comprender un problema y concebir un plan para resolverlo[17].

En la utilización de estos procedimientos heurísticos está presente la necesidad de los alumnos de establecer una *relación de interioridad* (Edwars, 1985)[278] con el conocimiento matemático a través de la atribución de distintos significados a lo que debe resolver a partir de lo que conoce. Aclaro que aquí estoy planteando que se manifiesta una necesidad no que se produce una relación interioridad. Dilucidar esto último implicaría otro tipo de análisis.

Lo que sí se podría expresar es que mediante el uso de estos procedimientos heurísticos , los alumnos resuelven los problemas atribuyéndoles significados.

---

[17] En realidad, en la propuesta de G. Polya los procedimientos descriptos por los alumnos están incluidos en la fase II (concebir un plan). Pero según mi modo de ver , y los alumnos dan cuenta de ello, el uso de estos procedimientos también se incluyen en la fase I (comprender el problema). Además, concebir un plan de resolución supone algún tipo de comprensión del problema. Lo que significa que en la práctica no es posible hacer una separación tajante entre las distintas fases.

[278] EDWARS, V. (1985). Op. Cit. Pág28.

Así, la presentación que hacen los alumnos del conocimiento matemático , no es de un conocimiento basado exclusivamente sobre pruebas formales sino también sobre las distintos tipo de experiencias (con situaciones cotidianas, con otros problemas) ; es decir , está estructurado sobre una base de significados.

En consecuencia, tiene sentido plantear que los procedimientos que utilizan los alumnos para comprender un problema y concebir un plan para resolverlo, encierran implícitamente la intención – que no significa intención lograda - que el conocimiento matemático tome la forma de un conocimiento situacional; por cuanto ellos desean crear alguna relación significativa en torno al problema (Edwards, 1985).

Sin embargo, esta elección de los alumnos sobre el tipo de procedimientos heurísticas que utilizan para resolver problemas , y que fuera manifestada en la entrevista, es incompatible con la tendencia que marca la encuesta.

En la encuesta, ante el planteo "*¿Cómo haces para resolver un problema?*" estas fueron las respuestas:

Trato de relacionar con otros problemas que resolví, con situaciones de la vida cotidiana, etc.

34%

No busco ninguna relación con otros problemas porque para mi cada problema es un problema nuevo

66%

Explicar una de las posibles causas de esta incompatibilidad me remite, por una parte, nuevamente a la entrevista donde aparecen datos significativos para analizar la situación. Por otra parte, al enfoque de Chevallard, Y, Bosch, M. y Gascón, J. (1997)[279] , quienes me brindan elementos teóricos sobre cómo se explican los fenómenos didácticos que ocurren dentro del sistema escolar.

En la entrevista, Bárbara expresa que para resolver un problema no establece relaciones con otras situaciones; posición a la que adhiere Camila. Pero, siguiendo la

[279] CHEVALLARD, Y., BOSCH, M. y GASCÓN, J. (1997).Op. Cit. Pág. 76.

lógica del diálogo y observando cómo fundamenta su postura (la última expresión transcripta), se advierte que para esta alumna "establecer relaciones" significaría establecer relaciones con situaciones didácticas que se presentan en ese momento en la clase. Orientación que ella no acuerda.

El enfoque de Chevallard, Y, Bosch, M. y Gascón, J. (1997) , inscripto en el marco general de la llamada didáctica fundamental , considera que todo fenómeno matemático tiene un componente didáctico esencial. Al mostrarse lo matemático y lo didáctico empíricamente inseparables, la noción de fenómeno didáctico – como, por ejemplo en este caso, "la consideración que hacen los alumnos de su trabajo matemático" - se generaliza para hacer referencia a una dimensión esencial de toda actividad matemática. Por ello, las explicaciones de los fenómenos didácticos deben partir de la descripción de la actividad matemática que realizan conjuntamente profesor y alumnos en el aula y fuera de ella, así como las cláusulas del contrato didáctico[280].

Siguiendo este punto de vista se podría pensar que la actitud asumida por Bárbara, y que explica su respuesta a la pregunta de la entrevista, indica la no aceptación personal a algunas cláusulas del contrato didáctico que rigen en las clases de matemáticas, condicionando el modo de trabajo matemático de los estudiantes.

Las cláusulas quedan en evidencia en la entrevista a través de las expresiones de Federico (*...siempre cuando nos dan un problema va a estar relacionado con los anteriores...*) y Martín (*...si uno está dando fracciones, quizás en el problema aparezca una operación con fracciones..).*

Situación que se reitera en una manifestación realizada nuevamente por Federico en otro diálogo sostenido con los alumnos.

> *"yo también me voy a las reglas porque generalmente los profesores te dan un problema y no le veo la gracia de buscar otros procedimientos si lo que te piden es eso, aplicar esas propiedades. O sea, yo busco seguir las propiedades que me*

[280] El contrato didáctico considerado como el conjunto de cláusulas que, de una manera mas o menos implícita, rigen, en cada momento, las obligaciones recíprocas de los alumnos y el profesor en lo que concierne al conocimiento matemático enseñado.

da en la clase el profesor porque siempre cuando nos dan un tema nos imponen esas reglas y propiedades"(Federico)

El análisis realizado desde Chevallard, Bosch y Gascón me lleva plantear la siguiente cuestión: ¿qué otros significados otorgaron los alumnos a las opciones planteadas en la encuesta determinado su elección por una de ellas?. Esto debería ser indagado en próximos estudios para explicar los distintos factores que originan esta incompatibilidad presentada entre la entrevista y la encuesta.

Pero también este análisis pone en evidencia otro fenómeno didáctico que lo podríamos denominar el "oficio del alumno" dentro del sistema de trabajo escolar.

En este caso particular, el "oficio del alumno" se configura alrededor de la apropiación de un determinado sistema de trabajo escolar [281] en el cual se asume que el docente posee el saber; el "oficio del docente" se constituye adjudicándose el rol de administrador del conocimiento, y por tanto de concesionario autorizado de la verdad[282] , y el "oficio del alumno" sería aprenderse lo que necesita para acreditar.

Cuando Martín dice *"...si uno está dando fracciones..."* y Federico dice *"...no le veo la gracia de buscar otros procedimientos si lo que te piden .... yo busco seguir las propiedades que me da en la clase el profesor"* están dando cuenta de la manifestación de este fenómeno.

La configuración del rol docente, como concesionario autorizado de la verdad, se enlaza con los mecanismos de producción de verdad y la legitimación de quienes son los habilitados para discernir entre lo falso y lo verdadero. Esto se explica con otro fenómeno didáctico que está asociado al anterior: la "irresponsabilidad matemática de los alumnos" (Chevallard, Y, Bosch, M. y Gascón, J. , 1997)[283] .

---

[281] BAQUERO, R. (1997). VIGOTSKY Y EL APRENDIZAJE ESCOLAR. Pág. 235. Editorial Aique. Buenos Aires.

[282] Concepto presentado en VAIN, P. (2005) ¿ Y SI EL ALUMNO NO ESTUVIERA ALLÍ ? UNA MIRADA ACERCA DEL ROL DOCENTE UNIVERSITARIO, DESDE LAS PRÁCTICAS DE LA ENSE-ÑANZA EN ENTORNOS NO PRESENCIALES. Tesis de Doctorado. Universidad de Málaga. (Inédito). Posadas,

[283] CHEVALLARD, Y., BOSCH, M. y GASCÓN, J. (1997). Op. Cit. Pág.60-61.

En el sentido que otorgan Chevallard, Bosch, y Gascón (1997) la irresponsabilidad matemática deviene de la dificultad del docente de hallar o construir una situación en la que el alumno actúe, además de como alumno, como un verdadero matemático, responsabilizándose de las respuestas que da a las cuestiones que se le plantean.

Así , los alumnos tienden a delegar al profesor la responsabilidad de sus respuestas, como si no les importara el que éstas sean verdaderas o falsas; como si el único objetivo de su actuación fuera contestar a las preguntas del profesor y en nada les comprometiera la coherencia y validez de las respuestas.

Como consecuencia de lo anterior, quien legitima el saber matemático es el profesor y la forma de validación de dicho conocimiento no se plantea desde la estructura interna del conocimiento matemático sino que descansa sobre la figura del docente.

Los datos cuantitativos que surgen de una de las preguntas de la encuesta corroboran esta línea de análisis.

La pregunta planteada en la encuesta fue:

"¿ Qué haces cuando terminas de resolver un problema matemático?
(es posible dar más de una respuesta)

a) *verificas personalmente la respuesta utilizando algún procedimiento matemático* ....
b) *comparas tu respuesta con la del libro* ....
c) *le preguntas al profesor si tu respuesta es correcta* ....
d) *pasas inmediatamente a otro problema* ....
e) *Otras (Especificar)* ....*"*

Considerando lo que quiero destacar en este momento, presento los datos porcentuales pero no discriminando por opción sino considerando la cantidad de alumnos que marcaron cada opción como opción única o con otra.

Las respuestas elegidas por 100 fueron:

verificas personalmente la respuesta utilizando algún procedimiento matemático

48 %

comparas tu respuesta con la del libro

27%

le preguntas al profesor si tu respuesta es correcta

62%

pasas inmediatamente a otro problema

53%

Entre otras cuestiones que en este momento no corresponde analizar, los datos numéricos confirman la asignación de la responsabilidad matemática en la figura del profesor que acarrea las consecuencias planteadas.

Siguiendo con G. Polya (1969), la tercera fase de trabajo en la resolución del problema es la ejecución del plan. Poner en pie un plan de trabajo o concebir la idea de la solución implica poner en acto toda una serie de circunstancias. Entre ellas: buenos hábitos de pensamiento.

En matemáticas, se considera "buenos hábitos de pensamiento" al razonamiento[284]. Partiendo de lo dicho, la pregunta que surge para nuestro caso, es la siguiente : ¿cómo se desarrolla el razonamiento que utilizan los alumnos en la ejecución del plan ?.

"Julieta: *¿ hay algún tipo de razonamiento particular para resolver un problema?*
Martín: *para mi depende de cada uno.*
Rodrigo: *para mi lo más rápido es lo lógico, porque por más que uno ponga 2+ 2 no va a dar 6, siempre va dar 4, por ejemplo.*
Julieta: *¿qué significa es lógico?*

---

[284] Aquí tengo presente el señalamiento de COPI, I.M. (1995). Op. Cit. Pág. 4**. "(...) todo razonamiento es pensamiento, pero no todo pensamiento es razonamiento. (...). hay muchos procesos mentales o tipos de pensamiento que son diferentes del razonamiento (...)"**

Rodrigo: *y que, eso, que generalmente...o sea, no puede haber ...por ejemplo, en la naturaleza hay un árbol verde y otro amarillo... y no, acá es... acá 2+2=4 y no hay otro resultado.*

Julieta: *¿y eso significa lógico?*

Rodrigo: *y sí, para mí es lógico eso... es como que uno no puede alterar el sistema de la matemática".*

Dou, A.(1970)[285] sitúa al razonamiento como el primer elemento fundamental y primera determinación de la esencia del método matemático, aseverando **"(...) que lo esencial del método matemático estriba en el razonamiento matemático que se aplica a los objetos matemáticos y ello no de una manera trivial o esporádica, sino constituyendo un sistema de verdades coherente, profundo e interesante. Este sistema de verdades, en cuanto formuladas y estereotipadas, puede considerarse como la cristalización del razonamiento matemático"**.

La descripción del razonamiento lógico que hace Rodrigo en la entrevista se podría considerar una interpretación en forma natural de la tesis enunciada por A. Dou.

En su explicación presenta al razonamiento lógico como aquel que es llevado de manera tal que engendra convicción en el que lo ejercita, que obliga al asentimiento y engendra una certeza necesaria en el sujeto. Adjudica esta prestancia de convicción al sistema de verdades sobre el que se construye el edificio matemático[18]. También ejemplifica esta manera típica de llevar el razonamiento matemático con la característica más peculiar que diferencia la matemática de las ciencias naturales: la certeza de sus resultados.

---

[285] DOU, A.(1970). Op. Cit. Pág.15

[18] Considero que dadas las características del trabajo no tiene sentido hacer más aclaraciones sobre este aspecto. Simplemente, a modo de una mayor comprensión, debo señalar que este sistema de verdades que se construye está basado en la admisión – más o menos necesaria, más o menos convenida – de esas proposiciones que no se imponen necesariamente por sí mismas. Estas proposiciones pueden ser , por un lado, los axiomas generales que afectan a todo razonar y , por otro lado, los postulados específicos de la disciplina.

Ahora bien, hay un dato más que no es menor en las expresiones de Rodrigo: identifica el razonamiento lógico como el procedimiento más rápido.

"para mi lo más rápido es lo lógico, porque por más que uno ponga 2+ 2 no va a dar 6, siempre va dar 4, por ejemplo" (Rodrigo).

Y Fundamenta la rapidez en su carácter formal; cualidad del método matemático que confiere cierta seguridad a quien lo utiliza.

De este modo, Rodrigo conjuga lo formal y seguro del procedimiento. En consecuencia , tiene sentido pensar que , en realidad , lo que él manifiesta es que esta forma de razonamiento le permite asegurarse de la exactitud del método que utiliza en la ejecución del plan.

Este pensamiento me lleva a plantear que los alumnos entienden que una " manera de hacer" el problema de forma relativamente sistemática y segura es ateniéndose preferentemente a procedimientos formales[19].

El siguiente diálogo con los alumnos pone en evidencia el planteamiento mencionado en el párrafo anterior.

*"*Julieta: *¿qué hacen para lograr la solución del problema?*

Mercedes: *yo trato de ver la forma más fácil de resolver el problema por medio de reglas y propiedades ¡O sea resolver más rápido!*

Martín: *yo también lo que hago es ver qué reglas y propiedades hay que aplicar para ese problema específico, pero también eso depende de quién esté haciendo. Cada uno elige la forma hacer el ejercicio; si él prefiere hacerlo más fácil o quizás al que le cuesta más va a buscar una forma más larga pero más simple, y otro que yo entiendo usa una técnica quizás más rápida.*

Alejandra: *uno puede buscar opciones, porque uno tiene ciertas reglas y no se pueden mezclar , puede usar distintas reglas y después compararlas.*

[19] Digo preferentemente no exclusivamente. Con esto quiero señalar que no estoy descartando el uso de otro forma de razonamiento, como la intuición.

Bárbara: *yo trato de pensar en un plan de trabajo. El plan de trabajo sería el problema y ahí me voy imaginando todo cómo sería y cómo puedo resolverlo y no me voy a las reglas y me fijo, sino también pienso en cómo resolverlo.*
Camila: *porque aprendiendo las reglas vamos a poder llegar a las respuestas del problema.*
Larissa: *yo por lo general me tiro más para la parte teórica, porque creo que es la forma más fácil de resolver el problema.*
Julieta: *¿qué querés decir con "me tiro a la parte teórica"*
Larissa: *o sea me voy a las reglas, lo que más hago es aplicar las reglas.*
Federico: *yo también me voy a las reglas porque generalmente los profesores te dan un problema y no le veo la gracia de buscar otros procedimientos si lo que te piden es eso, aplicar esas propiedades. O sea, yo busco seguir las propiedades que me da en la clase el profesor porque siempre cuando nos dan un tema nos imponen esas reglas y propiedades.*
Bárbara: *las reglas están para guiarte cómo hacer el problema no para decirte así se hace. Las reglas serían la forma de cómo podes hacer el problema, pero debes entender la regla".*

Concebir la idea de la solución de un problema desde la vinculación de éste con reglas y propiedades matemáticas supone planear un procedimiento de resolución ateniéndose a reglas formales. La suposición se fundamenta en el hecho que las reglas matemáticas implican instrucciones paso a paso que prescriben cómo concluir una tarea. Además, un rasgo clave de ellas es que se ejecutan en una secuencia lineal predeterminada.

Quien hace una buena representación metafórica de la organización procedimental de matemática en el sentido que nos ocupa en este momento es Anahí[20].

"Julieta: *¿cómo expresarías la matemática en forma de metáfora?*
Anahí: *yo me imagino un tipo escalera así ¿viste?, en la que el primer escalón es una ecuación, ponéle multiplicar...en el segundo escalón la multiplicación en la*

[20] Esta representación surge en la entrevista grupal sobre la organización interna de la matemática.

raíz...después en el otro la suma ponéle y así... que vaya de algo así general a lo particular

Julieta: *¿que vaya de lo general a lo particular?*

Anahí: *sí, de que ponéle ...una ecuación que es general, que tiene varias operaciones, una suma¸ una multiplicación, una resta, una raíz cuadrada ...que se yo ¿viste? y en los demás así ... vas resolviendo cada escalón así".*

Como se podrá observar, esta manera de proyectar el plan de ejecución del problema es la representación dominante del grupo de alumnos entrevistados. Ellos expresan ya sea en forma directa (Mercedes, Martín, Alejandra y Federico) o indirecta (Bárbara y Larissa) su afinidad con ella. Quienes lo hacen en forma indirecta incorporan otros ingredientes a sus expresiones pero la idea fuerza es similar a la de los otros.

En este caso, la línea de análisis de la entrevista es compatible con los datos que surgen de la encuesta, donde frente a la pregunta *¿cómo haces para resolver un problema?* las respuestas fueron:

Lo primero que trato de hacer es pensar qué regla y propiedad matemática me permite encontrar la respuesta

92 %

Lo primero que trato de hacer es pensar en un plan de trabajo que me permite encontrar la respuesta

8%

Estos datos que surgen de la entrevista y de la encuesta se cargan de nuevos sentidos, y a la vez reafirman esta idea de que los alumnos para la ejecución del plan se atienen a procedimientos formales, cuando profundizo sobre qué procedimientos concretos utilizan para resolver un problema.

"Julieta: *¿con qué procedimientos se sienten seguros?*

Bárbara: *suma, resta, multiplicación , división, fracciones, porque estos ejercicios uno ya los dio, siempre los utiliza.*

Julieta: *para uds, ¿una cuenta es un procedimiento seguro ?*

Bárbara: *sí, porque están bien definidos los temas".*

Bárbara considera que los algoritmos constituyen la " manera de hacer" un problema de una forma relativamente segura. Justifica su postura (...*están bien definidos los temas*) justamente en la sistematización que caracteriza a esta técnica hasta tal punto que su aplicación está totalmente determinada[21].

Tal determinación se logra porque los algoritmos son de naturaleza claramente secuencial ; regulada por las reglas formales. Por tanto, este tipo de técnica es un procedimiento formal.

Otro dato que nos brinda Bárbara es que este tipo de técnica es segura porque siempre se utiliza. Esta afirmación me llevó a analizar las carpetas de los alumnos.

Las carpetas "dicen" lo que declara Bárbara: los algoritmos son los procedimientos formales que continuamente utilizan los alumnos en la resolución de los problemas.

La encuesta también marca esta tendencia. Transcribo a continuación una situación problemática que aparece en la encuesta y da cuenta de ello[22].

"En una clase de Matemática tu profesor/a formula el siguiente problema:

Una familia hereda un terreno de 20 hectáreas. Si decide vender el terreno en lotes de 5 hectáreas cada uno, ¿cuántos lotes en total podrían poner a la venta?

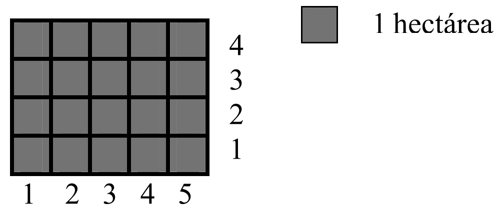
Tres compañeros - A, B y C - proponen los siguientes procedimientos de resolución:

- *Procedimiento de A: realiza la cuenta* $20 \,\underline{|\;5\;}$

[21]Recordar que en este trabajo las técnicas son consideradas como uno de los elementos que componen el conocimiento matemático. Y los algoritmos son un tipo muy particular de ellas por su alto grado de sistematización.

[22] El análisis de las propuestas de resolución del problema considera solamente aquellos aspecto epistemológicos que se propone mostrar con esta actividad.

- *<u>Procedimiento de B</u>: toma un cuadrado unidad y dibuja la siguiente figura*



- *<u>Procedimiento de C</u>: plantea la ecuación $5 \cdot x = 20$*

Marcar con una cruz <u>el o los procedimientos</u> que consideras correcto

- *El procedimiento de A* ....
- *El procedimiento de B* ....
- *El procedimiento de C* ....
- *Otros (Especificar)* ....

....

La consigan refiere a "*el o los procedimientos*" porque en la práctica los tres - A, B y C - son correctos. A[23] plantea una división, B visualiza el producto 4x5 en una figura de forma rectangular y C presenta una ecuación.

Una de las diferencias entre los tres procedimientos estriba en la forma de razonamiento que subyace a cada uno de ellos. Los razonamientos fundados en modelos o figuras (opción B) serían calificados de razonamientos intuitivos, contrariamente al razonamiento formal (opciones A y C).

En relación a los datos cuantitativos éstos informan que el 43% de los alumnos marcan sólo A, el 4% sólo B y el 10% sólo C. Marcan A y B el 5%, A y C el 22% y A, B y C 16 %. Otro procedimiento: 0%.

Si consideramos el total porcentual de los alumnos que marcaron A (ya sea sólo A o con otro procedimiento) éste es de 86%. Haciendo lo mismo con B y C es de

[23] Para no ser reiterativa con la palabra procedimiento los identifico como A, B, C y otros.

25% y 48% respectivamente. Es decir, ordenados en forma decreciente, los procedimientos considerados por los alumnos son: A, C, B y otros.

Por consiguiente, los resultados de la encuesta otorgarían fuerza no sólo al planteo de Bárbara – los algoritmos siempre se utilizan – sino también a la idea de que los alumnos utilizan preferentemente procedimientos formales en la resolución de problemas.

Para resignificar los datos cuantitativos surgidos de la encuesta, propuse la misma situación problemática pero en entrevistas individuales a los ocho alumnos que participan de las entrevistas grupales[292].

La entrevista individual estaba estructurada en dos momentos. En un primer momento, con el objetivo de determinar cuál era el procedimiento más utilizado por ellos, se planteaba el problema pero sin las opciones de resolución como en la encuesta. Se le solicitaba al alumno que leyera la situación y que todo procedimiento pensado sea expresado en voz alta y escrito en una hoja en blanco. Además, que hiciera todos los procedimientos posibles para solucionar el problema.

En un segundo momento, con el propósito de identificar si el alumno reconocía todos las opciones de la encuesta como procedimientos válidos , se presentaba la situación problemática formulada en los mismos términos que en la encuesta.

El primer momento me permitió corroborar el orden de los procedimientos surgidos de la encuesta. Todos los alumnos utilizaron primero la cuenta , ya sea la división $20 \div 5$ o la multiplicación 5x4 , siendo esta última representada simbólicamente no gráficamente. Luego, como segundo procedimiento plantearon la ecuación $5 . x = 20$. El procedimiento basado en la vizualización no fue considerado por ninguno de los entrevistados. Tampoco otro procedimiento en particular.

El segundo momento marcó una diferencia con la encuesta. Los alumnos reconocieron como válidos todos los procedimientos de las opciones. Presumo que la posibilidad que tuvieron de preguntar en la entrevista si era posible que todos los procedimientos fueran válidos fue determinante de esta diferencia.

[292] Recordar que son los alumnos que no habían tenido acceso a la encuesta.

Así , las entrevistas individuales ponen nuevamente en evidencia esta recurrencia que se plantea sobre la utilización de procedimientos formales en la resolución de problemas; particularizando en los algoritmos.

Después del análisis realizado, retomo la pregunta que hacía al iniciar esta representación: los alumnos, ¿cómo conciben el modo de trabajo matemático para llegar a la solución de los problemas?.

Davis, P. J. y Hersh R, (1988)[293] distinguen como modo de trabajo para la resolución de problemas dos paradigmas - el dialéctico y el algorítmico – dando lugar a una clasificación de la matemática en *Matemática algorítmica* y *matemática dialéctica.*

Según Henrici[294] , la matemática dialéctica aporta intuición e inteligencia de los problemas, y da libertad de acción. La matemática algorítmica utiliza un algoritmo para resolver el problema. La matemática dialéctica invita a la contemplación. La algorítmica invita a la acción para generar resultados.

Según el análisis realizado, los alumnos utilizan preferentemente un algoritmo como procedimiento rápido en la ejecución del plan para resolver un problema. Esta postura asumida por los alumnos está emparentada con la concepción de la matemática algorítimica. Lo cual significa, y responde a la pregunta inicialmente planteada, que el modo de trabajo de los alumnos para llegar a la solución de los problemas se inscribiría dentro del paradigma algorítmico.

De este modo finalizo la interpretación, considerando que esta última idea analizada conjugada con la del epígrafe anterior configuran la representación que intentaba mostrar.

5.6. “La matemática es todo un sacrificio”

Esta representación social corresponde al plano epistemológico y a la dimensión gnoseológica del conocimiento matemático.

[293] DAVIS, P. J. Y HERSH R. (1988) Op. Cit. Pág.139-141

[294] Citado por DAVIS, P. J. Y HERSH R. (1988) Op. Cit. Pág141

Se define a partir de las respuestas que dieron los alumnos a la pregunta: ¿cómo se llega a adquirir el conocimiento matemático?.

Teniendo en cuenta el marco en que se desarrolla este trabajo, la adquisición del conocimiento matemático está vinculado al aprendizaje de las matemáticas. Por ello, en esta categoría se incluirán unidades de análisis que se refieren al proceso sistemático, deliberado, por el que el alumno llega a apropiarse del conocimiento matemático escolar.

En esta representación, del mismo modo que en la anterior, diferencio para la interpretación dos fases de trabajo. En la primera intento mostrar que para los alumnos la matemática se adquiere resolviendo problemas. En la segunda, que se adquiere con práctica y esfuerzo.

5.6.1. La matemática se adquiere resolviendo problemas

El punto de partida para describir esta representación es el diálogo entre un grupo de alumnos durante una entrevista. El tema: El aprendizaje de las matemáticas en relación al de otras materias.

"Julieta: *para uds, ¿hay alguna diferencia entre estudiar matemáticas y estudiar otras materias?*

Mercedes: *para mi en otras materias uno puede memorizarse algunas cosas y en matemática no, es más bien práctica. En lengua uno se memoriza las reglas y aprende pero en matemáticas hay que practicar las reglas y saber las cosas, resolver los problemas.*

Alejandra: *pienso que no es estudiar sino que es saber, porque por ejemplo en geografía uno puede estudiar más o menos o hacer resúmenes pero en matemática vos sabes o sabes.*

Larissa: *matemática es más exigente que otras materias*

Julieta : *¿por qué decís es más exigente?*

Larissa: *porque matemática te exige más la inteligencia*

Bárbara: *no es lo mismo estudiar matemática que otras materias, porque en matemática tener que estar pensando mucho en cómo resolver una cosa y en* *otras materias tenés que estudiar y ahí está todo, y para la prueba tenés que ir y escribir todo lo que estudiaste y listo. Pero en matemática no, porque no te dan lo mismo que en la carpeta, es como que tenés que crear*

Julieta: *para uds, ¿ se podría decir que resolver una situación en matemáticas es un acto de creación?.*

Todos: *si"*

Se podría decir que los alumnos diferencian entre *materias que se memorizan* (como lengua y geografía) y *materias que se practican* (como matemática) . Dentro de la primera categoría incluyen cuestiones como conocer las reglas ortográficas. En la segunda categoría, ubican resolver un problema. De forma explícita, Mercedes y Alejandra establecen que la diferencia entre una y otra categoría está entre "estudiar" y "saber las cosas" .

Bárbara también pone de manifiesto la existencia de la diferencia planteada pero desde la idea de que el aprendizaje de los conocimientos de las *materias que se memorizan* exige que *"te enseñaran y mostraran las cosas y tu la aprendes sin más*" . Mientras que el aprendizaje de los conocimientos de las *materias que se practican* exige *"más trabajo intelectual"*[295].

Expresado lo anterior de otra manera, los alumnos afirman que las *materias que se memorizan* están formadas por "hechos" y "datos" y conocimientos más o menos arbitrarios, cuyo aprendizaje exige únicamente la presencia de ciertas condiciones de exposición al objeto y cierto grado de repetición. Por otro lado, los conocimientos de las *materias que se practican* requerirían otro tipo de exposición al objeto y algún otro tipo de actividad mental.

A partir del análisis realizado, tiene sentido plantear que los alumnos distinguen la naturaleza de distintos conocimientos y que esta distinción se refleja directamente en sus conceptos sobre cómo se aprenden o deben aprender los mismos. Este planteamiento me lleva a interpretar el aprendizaje de las matemáticas desde el punto de vista de los alumnos.

---

[295] Las expresiones de Bárbara también pueden ser analizadas desde la consideración de las cláusulas del contrato didáctico sobre el sistema de evaluación en matemáticas y en las otras materias. He decidido no abordar esa línea de análisis porque significaría moverme del objetivo que me propongo.

Así es como en la entrevista grupal sobre qué es aprender matemáticas encuentro algunos elementos que permiten iniciar una interpretación en este sentido.

"Julieta: *les expreso tres puntos de vista sobre qué es aprender matemáticas: aprender matemática es... "...memorizar una lista de reglas y propiedades" , "...saber dar buenas razones dentro de la escuela y fuera de la escuela" y "...saber dar buenas razones dentro de la escuela". ¿con cuál se identifican? ¿qué otra frase incluirían al punto de vista elegido?*

Martín: *para mi es memorizar una lista de reglas y propiedades con el fin de luego ser utilizada en la vida cotidiana. Pero aquí donde dice memorizar a mi me parece que no es tanto memorizar sino aprender.*

Julieta: *¿por qué aprender y no memorizar?*

Martín: *porque no es solamente memorizar, sino que aprender a razonar digamos, para aprender la lista de reglas y propiedades.*

Julieta: *Martín, ¿por qué aprender no es saber dar buenas razones?*

Martín: *porque para mi eso es más limitado. Se puede saber dar buenas razones pero no sé, memorizando...digamos sabiendo de memoria*

Federico: *yo elegí la misma frase que Martín y puse para resolver problemas que se presentan en la vida cotidiana . Pienso como Martín porque sería más que eso. Sería que no es solo cuando alguien te pregunta cómo se hace esto y entonces sólo sabes eso. O sea, si sabes eso, podes utilizarlo de muchas formas.*

Bárbara: *para mi aprender matemáticas es saber dar buenas razones dentro y fuera de la escuela porque hay que saber razonar para responder los problemas que se nos presentan(...) porque la lista de reglas que te dan no es solamente saber demostrarlas sino que , aprenderlas, saber explicar bien las reglas (...)porque no se puede saber de memoria las reglas y todo eso, si no se sabe cómo se hace no se sabe explicar bien las reglas.*

Julieta: *¿qué opinan Martín y Federico de lo que piensa Bárbara?*

Martín: *y yo también creo que no es solamente memorizar sino también razonar.*

Federico: *la matemática tampoco no es tanto memorizarte cada cosa, como dice Bárbara hay que saber cómo se hace lo que se presenta...saber razonar, pensar lo* *que haces (...) podes saber la regla pero no sabes cómo , qué (...) no entendés lo que te dice la regla.*

Bárbara: *es cierto también lo que dicen Federico y Martín. Saber matemática no es sólo dar una buena razón porque creo que saber matemáticas va más allá de saber dar buenos resultados, porque a lo mejor vos hallaste un resultado pero no sabes cómo lo hallaste. Es decir, va más allá de saber dar una buena razón porque vos hallaste algo que no sabes cómo pero te sirvió"* [296]

Si bien al principio del diálogo pareciera que Martín y Federico tienen puntos de vista diferentes al de Bárbara sobre qué es aprender matemática, en el transcurso de la entrevista se pone en evidencia que sus expresiones contienen ideas comunes. La identificación explícita de Martín y Federico con la concepción de matemática algorítmica[297] es el dato generador de esta desorientación y la vinculación con el razonamiento es el dato conductor de la comunión de ideas.

Tras haber definido la lógica de la entrevista , entiendo que en este caso la consideración de los elementos comunes es una buena línea de análisis. Así, surge que los alumnos entienden que para aprender matemática es necesario memorizar las reglas. En otras palabras, y utilizando las categorías cognitivas propuestas por Orton, A. (1988)[298], apropiarse del conocimiento matemático exige retención y memorización. Pero ésta , tal como ellos la presentan, no es una memorización mecánica sino una memorización comprensiva. Esta afirmación se funda en la conciliación que hacen los alumnos entre la memorización y el razonamiento.

Mirada desde esta perspectiva de conciliar memorización y razonamiento, el acto de memorizar implica razonar y razonar tiene dos acepciones. Por un lado, saber cómo y por qué funciona el objeto matemático en determinada situación (quien

---

[296] Alejandra , Anahí, Larissa y Mercedes también participaron en esta entrevista. Ellas reiteran esta idea de que aprender matemática es saber dar buenas razones incluyendo la frase "para resolver problemas" y justificándola desde el mismo planteo de Bárbara. La reiteración de ideas hace que sus opiniones no aparezcan en el diálogo.

[297] Esta concepción fue puesta en evidencia en la representación anterior.

[298] Según este autor, las cuatro exigencias cognitivas para el aprendizaje de las matemáticas son: retención y memorización, empleo de algoritmos, aprendizaje de conceptos, y resolución de problemas. ORTON, A . (1988). Op. Cit. Pág.38-53.

sintetiza bien esta idea es Bárbara cuando en sus expresiones señala "... *no se puede saber de memoria las reglas y todo eso, si no se sabe cómo se hace no se sabe explicar bien las reglas... no entendés lo que te dice la regla"*). Por otro lado, reconocer cuál es el campo de utilización de ese objeto matemático (Federico ilustra este concepto ... *O sea, si sabes eso, podes utilizarlo de muchas formas*).

Estas dos acepciones se corresponden con los dos niveles - interno y externo- que deben ser considerados según Charnay (1994)[299] para la construcción de la significación de un conocimiento matemático. Al mismo tiempo están muy directamente vinculadas con su funcionalidad. Que los conocimientos adquiridos sean funcionales, es decir, que puedan ser efectivamente utilizados cuando las circunstancias en que se encuentre el alumno lo exijan, es el sentido que encierra la expresión de Federico.

> *"yo elegí la misma frase que Martín y puse para resolver problemas que se presentan en la vida cotidiana . Pienso como Martín porque sería más que eso. Sería que no es solo cuando alguien te pregunta cómo se hace esto y entonces sólo sabes eso. O sea, si sabes eso, podes utilizarlo de muchas formas"*(Federico)

Por consiguiente, en este marco la composición de la memorización y el razonamiento es una memorización con significación , la cual hace que sea una memorización comprensiva.

Lo antedicho permite confirmar la afirmación planteada y, además, puede aclarar el por qué de la distinción que los alumnos hacen entre *materias que se memorizan* y *materias que se practican.* El esclarecimiento se canaliza a través del sentido que otorgan Bárbara y Martín a la expresión "saber dar buenas razones".

> *"...Se puede saber dar buenas razones pero no sé, memorizando...digamos sabiendo de memoria"*(Martín).

[299] Extraído de CHARNAY, R. (1994). Op.Cit. 53.

"...Saber matemática no es sólo dar una buena razón porque creo que saber matemáticas va más allá de saber dar buenos resultados, porque a lo mejor vos hallaste un resultado pero no sabes cómo lo hallaste. Es decir, va más allá de saber dar una buena razón porque vos hallaste algo que no sabes cómo pero te sirvió" (Bárbara).

En la explicación de Bárbara y Martín "dar buenas razones" no implica necesariamente la existencia de una construcción de un conocimiento con significación tal como se ha definido. Ellos consideran (y Bárbara lo ejemplifica) que es posible "dar buenas razones" a partir de la memorización mecánica donde la retención del conocimiento es por simple repetición. De tal forma , se infiere que los alumnos piensan que las *materias que se memorizan* exige sólo la memoria mecánica mientras que las *materias que se practican* exige la memoria compresiva.

Siguiendo con la línea de análisis propuesta , señalo a los problemas como el otro elemento que aparece en el diálogo en forma explícita y recurrente. En relación a este elemento, tiene sentido afirmar que para estos alumnos el propósito auténtico del aprendizaje de las matemáticas es aprender a resolver problemas[300], incluso hasta el punto de estimar que el cuerpo de conocimientos matemáticos es simplemente la serie de instrumentos existentes para el proceso activo de la resolución de problemas. Martín es un ejemplo de la estimación del conocimiento matemático en esta orientación.

"La matemática es solamente un medio para resolver otras cosas, y las otras materias, o algunas otras materias no son como un medio para solucionar problemas o lo que sea, sino que son más como datos, hechos que a veces son interesantes"(Martín).

Estas expresiones también ponen en evidencia otra vez que ellos distinguen la naturaleza de distintos conocimientos y una de las diferencias sería la funcionalidad del conocimiento matemático.

[300] Todos los alumnos entrevistados incluyeron una frase ligada a la resolución de problemas. La más repetida: "*para resolver problemas".*

Así, puede considerarse que los alumnos piensan que la resolución de problemas es la verdadera esencia de la matemática y da sentido a los conocimientos que aprenden.

Este pensamiento supone que la resolución de problemas es generadora de un proceso activo a través del cual quien aprende combina elementos del conocimiento matemático – técnicas, tecnologías y teorías - para dar solución a una situación nueva.

Se admite así que las matemáticas son tanto un producto como un proceso; tanto un cuerpo organizado de conocimientos como una actividad de creación en la que participa el que aprende. Esta noción se explica de forma natural con la conjunción de ideas contenidas en dos expresiones dadas por Bárbara en las entrevistas presentadas hasta el momento.

"...Saber matemática no es sólo dar una buena razón porque creo que saber matemáticas va más allá de saber dar buenos resultados, porque a lo mejor vos hallaste un resultado pero no sabes cómo lo hallaste..."

"*...en matemática tener que estar pensando mucho en cómo resolver una cosa y en otras materias tenés que estudiar y ahí está todo, y para la prueba tenés que ir y escribir todo lo que estudiaste y listo. Pero en matemática no, porque no te dan lo mismo que en la carpeta, es como que tenés que crear"*[301].

Puede decirse, expresado de otra manera, que para los alumnos el proceso de resolución de problemas es un acto de creación por un objetivo específico (llegar a una resultado), basado en el descubrimiento de nuevos modos de combinar las reglas.

Según Orton, A. (1988)[302] tanto la resolución de problemas como el descubrimiento requieren un "pensamiento" que conduzca a la creación de algo que el que aprende no poseía antes. Dadas las claras relaciones que existen entre estos procesos implicados (resolución de problemas y descubrimiento), a tipo este

[301] Basta con observar cómo culmina la primera entrevista para dar cuenta que la idea que resolver un problema es una actividad creativa es compartida por todos

[302] ORTON, A . (1988). Op. Cit. Pág. 51

pensamiento lo identifica como una categoría cognitiva denominada resolución de problemas.

En consecuencia, utilizando nuevamente las categorías cognitivas propuestas por Orton, A. (1988)[303], para los alumnos apropiarse del conocimiento matemático exige el empleo algoritmos y la resolución de problemas[304].

5.6.2. La matemática se adquiere con práctica y esfuerzo

Finalizada esta primera parte de la interpretación , me pregunto: ¿qué otros significados otorgan los alumnos a la palabra "aprender"?. El siguiente diálogo sobre la actuación deliberada y práctica de los alumnos para apropiarse del conocimiento matemático me muestra otros sentidos que ellos dan a la expresión.

"Julieta: *¿qué hacen uds para aprender matemáticas?*

Anahí: *escuchar...porque si no escuchas a la profesora no aprendes nada, no entendes nada.*

Bárbara: *entender y prestar atención*

Julieta: *¿qué entendes por entender?*

Bárbara: *entender es saber cómo se hace*

Julieta: *¿saber cómo se hace?*

Bárbara: *sí, y ahí aprendes ...o sea porque entendes*

Julieta: *¿ cuándo uno no sabe cómo se hace?*

Bárbara: *cuando no entiende*

Julieta: *¿y cuándo te das cuenta que entendiste?*

Bárbara: *cuando sé hacer y me sale bien*

Mercedes: *para* mí *hay que entender... para poder entender hay que practicar.*

Julieta: *¿hay que practicar?*

---

303 ORTON, A . (1988). Op. Cit. Pág.38-45.

304 ORTON, A . (1988). Op. Cit. Pág.38-45.

Mercedes: *si, claro...practicar muchas veces hasta que uno se dé cuenta de que entiende , o sea, si le salió bien el ejercicio...de la misma clase de ejercicios muchos distintos; por ejemplo muchas ecuaciones distintas así.*
Julieta: *¿qué querés decir con ecuaciones distintas?*
Mercedes: *que las ecuaciones pueden ser mezcladas*
Julieta : *¿mezcladas?*
Mercedes: *por ejemplo ecuaciones en aritmética, en geometría y cosas así"*

Según las expresiones de los alumnos para aprender matemáticas hay que escuchar, prestar atención y practicar. Así planteado el aprendizaje de la matemática emana "aroma de conductismo", para el cual el aprendizaje es concebido en forma receptivista, aprender matemáticas se reduce a memorizar, ejercitar y repetir.

Según Steiner (1987) [305] , **"(...) La forma de concebir la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (...) llevan con ellos o descansan sobre una visión particular epistemológica y filosófica de las matemáticas, aunque sea de manera implícita"**. En consonancia con la tesis de Steiner (1987) , Gómez Chacón, I.M. (2000)[306] define la relación de correspondencia entre la visión de la enseñanza/aprendizaje del conductismo y la visión de las matemáticas del platonismo.

Aceptando el planteo de Gómez Chacón, I.M. (2000) , la interpretación del último diálogo transcripto sería que para los alumnos el conocimiento matemático se adquiere por los sentidos –por eso hay que escuchar y prestar atención – porque las matemáticas se descubren por la existencia real de sus objetos. Y , esta interpretación me lleva a plantear una contradicción ya que expresa un postura epistemológica de las matemáticas contraria a la manifestada por los alumnos durante todo el trabajo[307].

La pregunta que surge en este caso de manera espontánea , es la siguiente: ¿por qué se origina tal contradicción?. Datos que aparecen en registros de observaciones de clases y encuesta me permitieron construir una posible respuesta.

[305] Citado por FLORES MARTÍNEZ, P. (1998). Op. Cit. Pág. 16.

[306] GOMEZ CHACÓN, I.M (2000). Op. Cit Pág.182.

[307] Los alumnos han manifestado durante todo el trabajo que las matemáticas se crean. Incluso hay una representación titulada "Las matemáticas son una creación del hombre"

Los registros de las observaciones de clases de matemáticas dan cuenta de un predominio en las aulas de situaciones de enseñanza de corte tradicional. Si bien se observaron clases con actividades pseudoconstructivistas, la tendencia es el modelo de interacción denominado modelo normativo [308] (centrado en la relación docente – objeto de conocimiento).

"El papel desmesurado del profesor durante el desarrollo de las actividades matemáticas en las clases y, en consecuencia, la dependencia alumno – profesor" resume bien el fenómeno didáctico que resulta de las características que se presentaron en todas las clases observadas.

Este fenómeno didáctico se puso de manifiesto en las aulas en hechos concretos. Como ser: el profesor es quien introduce el tema de la clase, dicta las teorías matemáticas para que los alumnos las escriban en sus carpetas[309] , aclara generalmente las dudas de los alumnos y certifica las soluciones de las tareas matemáticas.

Así, la actividad matemática en el aula aparece para el alumno como dependiente en cada instante de la voluntad del profesor , y su desarrollo adquiere condicionantes centrados en el docente (como, por ejemplo, el acceso a información[310]) , con dependencia de los alumnos. Este modo de interacción acarrea como consecuencia, entre otras, una valorización importante del papel del profesor por parte de los alumnos en cuanto a su aprendizaje de la matemática en la escuela.[311] La cual se traduce en la vida escolar de modo tal que las acciones prácticas "escuchar al

[308] Extraído de CHARNAY, R. Op.Cit. 54-55

[309] Esto se debe a que los alumnos no utilizan un libro de texto en particular. Por decisión del departamento de matemática de la escuela los profesores no solicitan a sus alumnos que compren un libro. Esta decisión se justifica por cuestiones económicas. Por ello , se utilizan guías de actividades prácticas elaboradas por los profesores o fotocopias con las actividades prácticas. De esta manera se concentra en el profesor el poder del conocimiento.

[310] Aquí hablo de acceso a la información para indicar que esto significa para el alumno una apropiación del conocimiento matemático.

[311] Esta valoración en la realidad no es sólo de parte de los alumnos sino yo diría de la sociedad en general. Es habitual escuchar la expresión: "le gusta matemática o se exime en matemática porque tiene un buen profesor"

profesor" y "prestar atención al profesor" se transforman en condiciones básicas para aprender. Quien exterioriza esta idea en el diálogo es Anahí:

" escuchar...porque si no escuchas a la profesora no aprendes nada, no entendes nada"(Anahí)

Los datos de la encuesta también corroboran esta línea de análisis. A continuación transcribo el planteo que aparece en la encuesta que daría cuenta del asunto en cuestión.

"¿Qué es lo más importante para aprender Matemática?

(es posible dar más de una respuesta)

a) *tener un buen profesor..........*
b) *horas de esfuerzo y dedicación ....*
c) *tener capacidad intelectual ("ser inteligente") ....*
d) *sentir agrado por la materia ....*
e) *Otras (Especificar) ...."*

Con el propósito de comunicar los datos cuantitativos en forma más ordenada presento la información en una tabla. Total de alumnos encuestados: 100 alumnos.

Cuadro Nº 1: Qué es lo más importante para aprender Matemáticas según los alumnos

OPCIONES PLANTEADAS	RESPUESTAS	PORCENTAJE
a- tener una buena profesora	5	5%
b- horas de esfuerzo y dedicación	12	12%
c- tener capacidad intelecual	1	1%
d- sentir agrado por la materia	4	4%
e-tener una buena profesora y horas de esfuerzo y dedicación	8	8%

f-tener una buena profesora y capacidad intelectual	10	10%
g- tener una buena profesora y sentir agrado por la materia	4	4%
h- horas de esfuerzo y dedicación y tener capacidad intelectual	3	3%
i- horas de esfuerzo y dedicación y sentir agrado por la materia	3	3%
j- Tener una buena profesora, horas de esfuerzo y dedicación y tener capacidad intelectual	4	4%
k- tener una buena profesora, horas de esfuerzo y dedicación y sentir agrado por la materia	5	5%
l- tener una buena profesora, capacidad intelectual y sentir agrado por la materia	5	5%
m- horas de esfuerzo y dedicación, tener capacidad intelectual y sentir agrado por la materia	1	1%
n- tener una buena profesora, horas de esfuerzo y dedicación, tener capacidad intelectual y sentir agrado por la materia	33	33%
o- otras	2	2%

Considerando la cantidad de alumnos que han elegido cada opción (ya sea sola o con otra), los datos porcentuales ordenados en forma decreciente indican que según los alumnos *"para aprender matemática es importante*": "tener un buen profesor" (74%), "horas de esfuerzo y dedicación" (69%), "sentir agrado por la materia" (58%) y "tener capacidad intelectual" (54%).

Aunque podría realizar distintos tipos de análisis a partir de estos datos , en este momento quiero señalar el lugar destacado que le asignan los alumnos a la opción "tener una buena profesora". Esto hace visible nuevamente la idea de la valoración importante que asignan los alumnos al papel del profesor para el logro del aprendizaje.

Recapitulando. Con el análisis de los datos que surgen de las observaciones de clases y de la encuesta mi intención es dar una posible respuesta sobre cuál es el origen de una contradicción. Escrita ésta de forma general y breve sería: *"El conocimiento matemático es una creación del hombre y se adquiere por los sentidos"*.

Para ello, construí una argumentación sobre la base de un fenómeno didáctico - *"El papel desmesurado del profesor durante el desarrollo de las actividades matemáticas en las clases y, en consecuencia, la dependencia alumno – profesor"* - que acarrea como consecuencia la valoración importante del papel del profesor traducida por el alumno en acciones concretas como "escuchar" y "prestar atención". Y esto tiene que ver con el contrato didáctico que gobierna las clases de matemática.

Así es como esta explicación contextualizada dentro del marco del análisis de las dos primeras entrevistas me lleva a suponer que en realidad no existe tal contradicción. El significado que otorgan los alumnos a las expresiones "escuchar" y "prestar atención" no tiene el sentido conductista en relación a la concepción epistemológica del conocimiento matemático que esta teoría supone sino que está ligado a la ponderación que ellos hacen del papel del profesor durante las clases. Es decir, no se debería interpretar las acciones en cuestión desde la teoría de aprendizaje que éstas suponen sino desde las cláusulas del contrato didáctico que gobierna las clases de matemáticas. Esta formulación queda a nivel de hipótesis ya que necesitaría indagar otras cuestiones para su confirmación.

En esta última entrevista también los alumnos plantean que se aprende cuando se entiende y se entiende cuando se sabe hacer . Por transitividad, podríamos decir que ellos consideran que se aprende cuando se sabe hacer.

El "saber hacer" que hacen referencia sería el dominio práctico del conocimiento matemático. Efectivamente, el "saber hacer" conduce a una producción, entonces es evaluable de modo objetivo[312]. Mirado esto desde la perspectiva de aprender es saber hacer, el aprendizaje es valorado en función al producto, es decir, por la solución correcta de las tareas.

"Julieta: *¿y cuándo te das cuenta que entendiste?*
Bárbara: *cuando sé hacer y me sale bien*
Mercedes: *(...) uno se dé cuenta de que entiende , o sea, si le salió bien el ejercicio(...)"*

De este modo los alumnos están considerando la matemática principalmente como herramienta. Una herramienta útil para resolver problemas. Esto significa que para ellos los conocimientos matemáticos tienen sentido cuando éstos aparecen como herramientas para resolver problemas.

¿Cómo caracterizan la actividad matemática que da sentido a los conocimientos matemáticos que aprenden?. Mercedes lo hace en el diálogo.

"Mercedes: *... para poder entender hay que practicar.*
Julieta: *¿hay que practicar?*
Mercedes: *si, claro...practicar muchas veces hasta que uno se dé cuenta de que entiende , o sea, si le salió bien el ejercicio...de la misma clase de ejercicios muchos distintos; por ejemplo muchas ecuaciones distintas así.*
Julieta: *¿qué querés decir con ecuaciones distintas?*
Mercedes: *que las ecuaciones pueden ser mezcladas*
Julieta : *¿mezcladas?*
Mercedes: *por ejemplo ecuaciones en aritmética, en geometría y cosas así"*

Mercedes interpreta que la actividad matemática que les permite aprender debe estar basada en práctica intensa y en la resolución de tipos de problemas[313] . El

---

[312] No me ubico aquí en la perspectiva de evaluación, aún cuando una cierta evaluación forma parte del proceso de enseñanza y una evaluación final tiene impacto sobre los contenidos.

elemento que agrupa los problemas determinando el tipo de problemas es la técnica (en el ejemplo de Mercedes es la ecuación) que los resuelve.

La interpretación de Mercedes guarda consonancia con el enfoque Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997) [314] , quienes identifican el "saber hacer" como la práctica matemática o "praxis" que consta de tareas y técnicas. Las tareas son tipos de problemas. Así , los tipos de problemas y técnicas asociadas constituyen un "saber hacer" que hacen referencia a la praxis de la actividad.

En este enfoque, el conocimiento matemático se muestra, entre otras cualidades, unificado y sistémico. Los conceptos matemáticos no están aislados.

Aprender matemáticas desde esta visión del conocimiento exige al alumno establecer vínculos entre "lo nuevo" y sus conocimientos previos. Es decir, se plantea la necesidad al sujeto de cierta familiaridad previa con el universo matemático para poder establecer relaciones con el nuevo objeto matemático. Mercedes en otro momento de la entrevista puso de manifiesto esta idea.

> "*para mi la práctica es esencial porque, por ejemplo, nos dan un ejercicio así y ...si yo no sé mas o menos cómo se hace, cómo se resolvería, qué hay que conocer, cómo se resuelven determinados problemas...por ejemplo, si nos dan ejercicios combinados y si yo no sé... o ahí te ponen sumas, restas, divisiones...y, tengo que saber primero cómo se hace una división"*(Mercedes).

Se podría plantear entonces que, desde el punto de vista de los alumnos , la apropiación del conocimiento matemático exige el aprendizaje de conceptos[315] para establecer relaciones entre los nuevos objetos matemáticos y el universo matemático existente con el que trabaja .

---

[313] Si bien Mercedes no habla de "problemas" considero válido interpretar la situación en estos términos porque en otra instancia del trabajo fue justamente ella quién explicitó la idea que las ecuaciones son problemas o, en terminología de Polya, problemas de resolver.

[314] CHEVALLARD, Y., BOSCH, M. y GASCÓN, J. (1997). Op. Cit. Pág.274.

[315] Estoy utilizando nuevamente las categorías cognitivas propuestas por Orton, A. (1988). Op. Cit. Pág.38-45.

Por este motivo, el proceso de apropiación requiere por parte del alumno una intensa actividad. El requerimiento señalado (ellos hablan de práctica) aparece como se puede observar en forma recurrente en las entrevistas. Similar idea se manifiesta en las producciones escritas. Transcribo las expresiones de Débora y Yamila como muestra.

"Para poder saber matemática hay que practicar constantemente para solucionar los problemas y ecuaciones que a muchos chicos les cuesta solucionar"(Débora).

"La matemática requiere de tiempo y práctica en todo lo que concierne a las cuentas pero creo que con esfuerzo puedo conseguir por lo menos un poco de lo que aspiro a ser.
Para muchos la matemática es una materia que posee muchos problemas, cálculos y soluciones muy difíciles de entender, también hay chicos que sienten que gracias a la matemática están condenados y sin salidas. A todos ellos trato de animarlos y conscientizarlos bajo el concepto: "la práctica hace la perfección" y si no tratan de interesarse y poner ganas sea cual sea el tema será imposible lograr y salir de la supuesta condena" (Yamila).

Además de la necesidad de practicar, Yamila incluye otros elementos de la dimensión afectiva[316] que están presentes en el aprendizaje de las matemáticas . En concreto ella habla de determinadas actitudes - "esfuerzo" y "ganas"- y sentimientos (*...hay chicos que sienten que gracias a la matemática están condenados y sin salidas.*).

La presencia de estos elementos se puso de manifiesto también en la entrevista grupal.

"Julieta: *¿qué es importante para aprender matemáticas*

---

[316] Utilizó el término dimensión afectiva en el sentido que lo define GOMEZ CHACÓN, I.M (2000). En su definición considera no sólo los sentimientos y las emociones, sino también las creencias, las actitudes, los valores y las apreciaciones. GOMEZ CHACÓN, I.M (2000). Op. Cit Pág.22.

Anahí: *tener ganas*

Federico: *y si, porque si uno no tiene ganas no escucha, no...no aprende y no hace nada".*

Y la encuesta ratifica cuantitativamente el lugar destacado que asignan los alumnos a estos elementos. A la pregunta: *"para aprender matemática es importante",* contestaron *"horas de esfuerzo y dedicación"* el 69% de los alumnos encuestados.

Según Guzmán, M. (1994)[317] **"(...)La adquisición de la actitud adecuada para pensar bien ha de estar basada en la consideración de los elementos efectivos siempre presentes hondamente influyentes sobre nuestra mente. La inmotivación, las fobias, los miedos, los bloqueos afectivos, perceptivos , culturales, ambientales..., son aspectos fundamentales que hay que neutralizar para lograr un talante mental sano que nos ayude en la resolución de problemas "** . Por ello, y con el objetivo de ayudar a pensar mejor, el autor plantea las tesituras más apropiadas para afrontar el desafío mental y los rasgos de la actitud que pueden perjudicar seriamente el modo de proceder en el quehacer matemático.

Desde el planteamiento de Guzmán, M. , el esfuerzo puede ser interpretado en dos sentidos . Por un lado, como esfuerzo intelectual , con el objetivo de mejorar los procesos cognitivos que exige apropiarse del conocimiento matemático (Yamila lo expresa en este sentido). Por otro lado, como esfuerzo de voluntad (ellos denominan ganas), con el objetivo de superar los tipos de bloqueos afectivos , como ser la apatía, abulia o pereza por el comienzo entre otros (Federico le otorga este sentido).

Tal como lo presentan los alumnos, el esfuerzo de voluntad (las ganas) es el "motor" para acceder al conocimiento matemático (*...si uno no tiene ganas no escucha, no...no aprende y no hace nada*).

Si además, el esfuerzo de voluntad está instigado por el gusto en la actividad mental[318] estaríamos frente a la composición esencial para aprender matemáticas. Los alumnos dan cuenta de esto tanto en la entrevista,

---

[317] GUZMÁN, M. (1994).Op. Cit. Pág. 31-81

[318] Así llama Guzmán,M. a una de las actitudes adecuadas para afrontar una actividad matemática

"para aprender matemática es importante sentir agrado por la materia porque para aprender una materia te tiene que gustar la materia. Hay que tener una actitud positiva, ponerse las pilas para que te vaya bien en la materia"(Larissa)

como en la encuesta, cuando a la pregunta "*para aprender matemática es importante*" respondieron "*sentir agrado por la materia"* el 58% de los alumnos encuestados.

En caso que el esfuerzo de voluntad esté animado por algún tipo de bloqueos de origen afectivo, cognoscitivo o culturales y ambientales[319] estaríamos , como lo señala (Socas, M.1997)[320], frente a dificultades en el aprendizaje de la matemática que se concretan en la práctica en forma de obstáculos. Quien es un ejemplo muy claro de este caso es Larissa.

Para iluminar mejor la interpretación del hecho considero conveniente describir algunos detalles que no son menores.

Larissa es una de las alumnas que no siente agrado por las matemáticas. Su desagrado lo manifestó en forma explícita en una entrevista - sus palabras fueron: *"a mi la matemática no me gusta"*- y en forma implícita en una producción escrita.

La producción escrita que hago referencia es producto de una actividad individual realizada en el curso donde Larissa es alumna. Esta actividad consistía en una composición literaria de género libre titulada "¿Qué es la matemática?".

Su producción trata , en forma de historieta , de una encuesta que determina la cantidad de alumnos que gusta o no de la matemática. Lo significativo es como concluye su trabajo:

"*Esta fueron 2 encuestas, que participaron 2 alumnos, a uno le gusta la matemática y a otro no.*

PORCENTAJE

No le gusta matemática 70 % | 30% Le gusta matemática"

[319] Utilizo las categorías de bloqueos propuestas por Guzmán, M . GUZMÁN, M. (1994).Op. Cit. Pág. 45-81

[320] SOCAS, M. (1997).OP.Cit. Pág. 125.

Larissa destaca con color rojo el porcentaje de los alumnos que gusta de la matemática (que son los menos) y a pesar de que la cantidad de alumnos encuestados que gusta de la matemática es igual a la que no gusta de ella sus datos porcentuales marcan una tendencia muy alta hacia los que no les gusta.

Coherente con su postura , esta alumna expresa en la entrevista la importancia de sentir agrado por la materia para aprenderla (es la expresión que aparece en la última entrevista transcripta).

Siguiendo Guzmán, M. (1994) , el desagrado por las matemáticas que manifiesta Larissa se interpreta como un bloqueo de tipo afectivo denominado "repugnancias". Señala el autor : **"Sentimos repugnancias hacia tareas que encontramos aburridas, rutinarias, opacas, tal vez porque nos sentimos menos capacitados para ellas, porque nunca hemos hecho el esfuerzo inicial serio para hacérnoslas fáciles o porque no hemos sido capaces de leer en ellas con la profundidad que otros alcanzan"**[321].

El señalamiento del Guzmán, M. explica la siguiente opinión de Larissa emitida en una entrevista grupal.

"Para mi matemática es difícil porque casi nunca entiendo nada , y por ahí, no le doy mucha importancia a la materia y sé que es algo negativo. Pero tendría que darle más importancia (Larissa).

Ahora bien, tal como lo planteé, y era mi intención mostrar, este bloqueo de tipo afectivo se concreta en la práctica en forma de obstáculo. La entrevista personal con Larissa confirma esta tesis.

La entrevista trata sobre la resolución de un problema. Se inicia con el planteo del problema. No transcribo la primera parte porque no modifica el análisis.

"Julieta: *¿cómo lo resolverías?*
(silencio prolongado)

[321] GUZMÁN, M. (1994).Op. Cit. Pág. 59

Larissa: *hay , me mataste*

Julieta: *¿te maté?¿por qué te maté?*

Larissa: *me cuesta, por eso*

Julieta: *¿por qué decís me cuesta?*

Larissa: *y... no sé*

Julieta: *¿cuál es la dificultad?*

Larissa: *no sé ...me confunde*

Julieta: *¡qué te confunde?*

Larissa: *o sea... es re-bobo el ejercicio pero me hago un problemón*

Julieta: *¿por qué te hacés un problemón?*

Larissa: *o sea yo soy el problema*

Julieta: *¿por qué decís eso?*

Larissa: *porque tipo onda negativa y...entonces no... me cuesta mucho más y no me esfuerzo en hacerlo*

Julieta: *¿dónde tiras onda negativa?, ¿por qué decís tiro onda negativa?*

Larissa: *y ...en realizar el ejercicio, digo esto no lo entiendo, no lo entiendo y quedo ahí.*

Julieta: *¿ y no haces nada para entenderlo?*

Larissa: *no*

Julieta: *¿no?*

Larissa: *o sea está mal... sé que está mal pero...*

Julieta: *ahora te pregunto: ¿qué no entendés?, así te puedo ayudar*

....

(A partir de la ayuda brindada, Larissa llega a la solución del problema.)

Julieta: *¿ves que pudiste resolver el problema?*

Larissa: *ajá...pero resolví gracias al dato que me diste porque o sino no hubiera podido*

Julieta: *¿no hubieras podido?*

Larissa: *no*

Julieta: *¿no?*

Larissa: *no"*

Indudablemente es el bloqueo de tipo afectivo ya señalado que no permite a Larissa avanzar en su tarea (... *porque tipo onda negativa y...entonces no... me cuesta mucho más y no me esfuerzo en hacerlo...*). Y esto influye, como lo plantea Gómez Chacón, I.M. (2000) [322], en la estructura del autoconcepto de Larissa como aprendiz de matemática. En la entrevista aparece una frase muy fuerte en este sentido:

> "Julieta: *¿por qué te hacés un problemón?*
> Larissa: *o sea , yo soy el problema"*

A partir de todo el análisis realizado en relación a los elementos de la dimensión afectiva que intervienen en el aprendizaje de las matemáticas se podría decir que, desde es el punto de vista de los alumnos, apropiarse del conocimiento matemático requiere esfuerzo - ya sea intelectual o de voluntad – y liberación de los bloqueos del espíritu[323]

Para finalizar esta representación se podría decir que, mirado desde la perspectiva de los alumnos , la apropiación del conocimiento matemático es preponderantemente: a) creación de conocimientos, b) intensa actividad mental para establecer relaciones entre el contenido nuevo y sus conocimientos previos , c) donación de sentido a los conocimientos a partir de la resolución de problemas y d) esfuerzo de voluntad .

---

[322] GOMEZ CHACÓN, I.M (2000). Op. Cit. Pág.25

[323] Liberarnos de los bloqueos de nuestro espíritu . Así denomina Guzmán , M. a la acción que nos permite mejorar nuestro modo de pensar.

Cuarta parte

CONCLUSIONES

Capítulo 6

Conclusiones e Implicaciones

En este capítulo me abocaré a hacer un balance de los logros que se dieron como parte del proceso de investigación presentado y también en relación a los objetivos – específicos y general – perseguidos.

6.1. El marco teórico

En este trabajo de investigación me ocupé de estudiar las representaciones sociales de los alumnos acerca del conocimiento matemático.

La configuración conceptual de contornos pocos delimitados de la noción de representaciones sociales[24] , que debía utilizar para develar las representaciones sociales de los alumnos acerca de un conocimiento científico contextualizado en el

[24] Quiero señalar aquí, que aunque dicha noción integra algunos marcos teóricos muy precisos (ej: Teoría de las Representaciones Sociales de S. Moscovici), sigue siendo un concepto polémico y polisémico, en la teoría social contemporánea.

sistema escolar , me planteó un desafío a la hora de elaborar un marco teórico que permitiera "mirar" e "interpretar" el objeto de estudio.

Ante esta situación surgió la intención personal de re-construir críticamente teoría. En tal sentido, autores de diferentes marcos disciplinarios y desarrollos teóricos propios del campo de las matemáticas y su didáctica aportan categorías que me permitieron avanzar desde una visión acrítica a una teoría interpretativa de la matemática y su enseñanza y aprendizaje.

Para ello fue necesario profundizar el análisis, lo que desde la perspectiva adoptada implicó básicamente la construcción de relaciones conceptuales.

Así, propongo un marco teórico que consiste en una caracterización de la matemática (capítulo 1), en la que considero aquellos aspectos del plano epistemológico del conocimiento matemático que se proyectan en la enseñanza y aprendizaje de la matemática y, además, analizo la visión de la matemática que está presente en cada aspecto; para pasar después a una descripción de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática (capítulo 2) donde planteo tres modelos didácticos , que surgen de la existencia de relaciones entre epistemología de la matemática y enseñanza/aprendizaje y, también, analizo los principios psicodidácticos que suponen cada uno de ellos.

Esta concatenación lograda entre los argumentos de los dos primeros capítulos reviste especial importancia para la interpretación del objeto de estudio porque, previa definición del alcance de la noción de representaciones sociales a utilizar (capítulo 3), permitió analizar críticamente los aspectos psicosociales del conocimiento matemático y , a la vez, establecer relaciones con el aprendizaje.

Como corolario de lo anterior se puede decir que el marco teórico de este trabajo, principalmente los dos primeros capítulos , es más que un inventario de posturas de diversos autores en relación al tema; es una construcción basada en un análisis crítico que valoriza la reflexión a partir del diálogo silencioso entre el investigador y el objeto a estudiar .

Considero, por tanto, siendo éste un trabajo de investigación que había comenzado con unos constructos de difícil manejo, que el modo de formulación del marco teórico constituye de alguna manera, un aporte significativo sobre el tema que ocupa a esta investigación.

6.2. Las representaciones sociales

Respecto a la revelación de las representaciones sociales acerca del conocimiento matemático, puedo decir que de este estudio surgen seis categorías de representaciones sociales.

De las seis categorías que presentaré a continuación, las cuatro primeras consideran, siguiendo a Ernest (1994)[25], cuestiones epistemológicas vinculadas con la ontología del conocimiento matemático (que nos aproxima al estudio de la naturaleza del objeto matemático) y las dos restantes también tratan de cuestiones epistemológicas, pero relacionadas con la gnoseología del conocimiento matemático (que se ocupa de la actividad matemática, de la acción sobre los objetos).

Respetando la agrupación planteada en el párrafo anterior, las representaciones sociales de los alumnos acerca del conocimiento matemático que resultaron de este trabajo de investigación son:

* "**La matemática es una creación del hombre**". Una representación social del conocimiento matemático como una creación humana a partir de la consideración, por parte de los alumnos , de que los objetos matemáticos resultan de procesos de abstracción, proceden de una operación realizada por los sentidos sobre las cosas sensibles; lo cual significa que tienen entronques empíricos, y son creaciones lingüísticas con significados que hacen el entendimiento entre los seres humanos. Los objetos matemáticos, por tanto, pertenecen al dominio de las ideas, de los objetos mentales y, en consecuencia, éstos habitan en el mismo mundo que el de la conciencia social, las tradiciones, el lenguaje , las teorías , las instituciones sociales; es decir, a toda cultura no material de la humanidad. De esta manera , la representación de los alumnos en lo que hace a la naturaleza de la matemática no se corresponde con la corriente platónica , según la cual los entes matemáticos y las relaciones existentes entre ellos, no tienen ni entronques empíricos, ni tienen nada de construcción convencional , sino que toma elementos de la corriente falibilista que

[25] ERNEST (1994). Citado en FLORES MARTÍNEZ (1998). Op. Cit. Pág 41.

plantea una matemática cuyos objetos tienen significados que deben buscarse en la comprensión compartida de seres humanos, y no en una realidad externa y extrahumana.

* **"La matemática es un conocimiento funcional"**. Una representación social del conocimiento matemático como un tipo de conocimiento que funciona en la realidad o naturaleza sensible. La relación entre la matemática y el mundo natural, que otorga a la primera el carácter de conocimiento funcional , se establece sobre raíces platónicas o raíces con reminiscencias empiristas. Situados los alumnos en estas perspectivas, las matemáticas funcionan ya sea porque los objetos matemáticos son copias de la naturaleza (planteamiento con raíces platónicas) o porque los objetos matemáticos son una creación de la mente humana, que aparecen en forma de lenguaje, y resultan de procesos abstracción de los objetos y problemas del mundo natural (planteamiento con raíces empiristas), matematizando así la realidad. Pero también ellos consideran la posibilidad de que las matemáticas funcionan porque el hombre "las impone" por decreto, debido a su esfuerzo deliberado por crear matemáticas que se amolden a las facetas físicas y sociales del universo. La funcionalidad de la matemática en el mundo real es representada por los alumnos desde el significado de matemáticas inconscientes (a través de acciones de carácter matemático que son inherentes al universo, espontáneas, automáticas y no necesitan esfuerzo ni potencia intelectual) o matemáticas conscientes (a través de acciones que se desarrollan mediante la utilización de un lenguaje adquirido mediante una formación específica). Además, los alumnos asignan a esta funcionalidad el significado de la matemática como un conocimiento necesario para desenvolverse en la sociedad.

* **"La matemática es útil"**. Una representación social del conocimiento matemático como un tipo de conocimiento que satisface distintas necesidades humanas por lo que se le confiere a la matemática el sentido de conocimiento útil. Así, para los alumnos , la matemática satisface no sólo necesidades individuales, por ser considerada por ejemplo un amplificador de la capacidad de razonamiento del ser

humano (Bruner)[327], sino también necesidades sociales , por ser una tecnología simbólica (Bishop, A.J, 1988)[328] que permite al individuo controlar recursos, prestigio y deferencia dentro de la cultura (Bruner)[329]. De esta manera, los alumnos asignan a la utilidad de la matemática un valor social y no la reducen únicamente a un valor escolar. Pero también en sus expresiones otorgan un sentido fuerte a la utilidad matemática desde la consideración a los resultados útiles. Esto los lleva a asumir una posición utilitarista de la matemática , basada exclusivamente en las aplicaciones matemáticas a situaciones prácticas externas a la matemáticas (extramatemáticas), particularmente a nivel de *utilidad común* (Davis, P. J. y Hersh R, 1988)[330], como ser resolución de problemas conocidos como problemas cotidianos. En este último sentido, la representación de la matemática como conocimiento útil está limitada , por un lado, al significado de matemática herramienta , y por otro, al de matemática aplicada . Por lo tanto, para los alumnos la matemática es útil fundamentalmente porque es una herramienta útil para resolver situaciones prácticas externas a la matemática , no concibiendo así la utilidad matemática dentro del mismo campo de conocimiento.

*** "La matemática es un cuerpo integrado de conocimientos en continuo desarrollo"**. Una representación social del conocimiento matemático como un tipo de conocimiento en continua evolución y basado en la noción de estructura. Según los alumnos la matemática se crea para dar respuestas a situaciones problemáticas internas pero fundamentamente externas a ella; asumiendo así una posición epistemológica de la naturaleza del conocimiento matemático según la cual los problemas son la razón de ser de la matemática y motor de su desarrollo. Como parte de este posicionamiento, la relación funcional entre el conocimiento matemático y el mundo natural en evolución permanente, al cual la matemática sirve de instrumento, se expresa en una continua resolución de problemas que, consecuentemente, se traduce en un continuo desarrollo de la matemática. Por otra parte, y en consonancia

[327] BRUNER. Citado por BISHOP, A.J. Op.Cit. Pág.36

[328] [2] BISHOP, A. J. (1999) . Op. Cit. Pág.123

[329] BRUNER. Citado por BISHOP, A.J. Op.Cit. Pág.36.

[330] DAVIS, P. J. Y HERSH R (1988). Op. Cit. Pág.68.

con la posición epistemológica adoptada, los problemas intervienen en la constitución y desarrollo del edificio matemático; consiguientemente , éstos engloban a los demás elementos constitutivos – técnicas, tecnologías y teorías - del conocimiento matemático. Así, las técnicas , las tecnologías que justifican las técnicas son definidas por los alumnos en términos de problemas ; porque en ellas está presente la incógnita asociada a la pregunta del problema. En relación a este punto cabe señalar que en el esquema de representación de los alumnos no aparecen las teorías que justifican las tecnologías, lo que pone en evidencia un reduccionismo epistemológico en el marco epistémico desde el cual conciben la organización interna de la matemática . Lo que sí aparecen son objetos matemáticos relacionados entre sí , de manera tal que constituyen un todo unificado compuesto por distintas ramas de la matemática ensambladas (para los alumnos) de forma intrincada. Esto hace que ellos piensen en la posibilidad de utilizar un mismo objeto matemático en un campo de problemas constituido por problemas pertenecientes a distintas ramas de la matemática y, además, otorguen a la matemática el significado de matemática relacional en el sentido de concebir distintos procedimientos o caminos para resolver una misma tarea matemática.

*** "La matemática es todo un problema de reglas y propiedades"**. Una representación social del conocimiento matemático como un tipo de conocimiento que se desarrolla de manera acumulativa resolviendo problemas desde el paradigma algoritmico. El universo matemático es concebido por los alumnos como objetos enlazados entre sí por relaciones no arbitrarias , por eso, el mundo matemático para ellos no consiste en objetos aislados sino en una compleja red de relaciones que , además, se expresa en lenguaje. También consideran que los problemas surgen de la propia dinámica interna que opera en el universo matemático. Así, los alumnos otorgan los significados de creación, descubrimiento y resolución de problemas al proceso de creación de matemáticas nuevas . Es creación porque el matemático debe sacar a luz objetos y relaciones no existentes, que no están expresados en lenguaje, y es descubrimiento porque debe hacer patente , en forma de lenguaje , las relaciones entre lo nuevo y lo heredado. En este sentido, la matemática se desarrolla construyendo consistentemente sobre las potencialidades iniciales, lo que caracteriza a un modelo de avance acumulativo . Por otra parte, para los alumnos ese avance consiste en una evolución gestada en una amplia inmanencia de los problemas. En este sentido, el quehacer matemático significa resolver problemas; lo cual implica tomar decisiones sobre el modo de trabajo para llegar a la solución de situaciones problemáticas. Respecto al modo de actuación para la resolución problemas, los alumnos atribuyen sentido al problema a través del uso de procedimientos heurísticos, lo que supone que la aproximación al objeto se estructura sobre una base de significados. Como parte del proceso de resolución, él método que conciben para la ejecución del plan se basa en el razonamiento lógico , ya que consideran que éste es una manera de hacer el problema de forma relativamente sistemática y segura. En consonancia con la postura adoptada, los alumnos concretan el plan utilizando preferentemente procedimientos formales, en particular los algoritmos. Lo cual significa que ellos adoptan un modo de trabajo posicionados en el paradigma algoritmico.

*** "La matemática es todo un sacrificio"**. Una representación social del conocimiento matemático como un tipo de conocimiento al que se llega con esfuerzo intelectual y de voluntad. Los objetos matemáticos relacionados entre sí de forma no arbitraria , que da lugar a la percepción de los alumnos de estar frente a un cuerpo de conocimientos unificado y sistémico, y la funcionalidad del conocimiento matemático , que ellos expresan específicamente en la resolución de problemas prácticos externos a la matemática , son dos rasgos de la naturaleza de la matemática que a su modo de ver la distinguen de otros tipos de conocimientos. Esto hace que ellos piensen que para apropiarse del conocimiento matemático hay saber cómo y por qué funciona el objeto matemático (construcción de sentido a nivel interno) y cuál es su campo de utilización (construcción de sentido a nivel externo) . Esta apropiación con sentido , tal como es concebida por los alumnos, se realiza a través de la resolución de problemas que es , en el sentido otorgado por ellos, un acto de creación por un objetivo específico (para ellos es llegar al resultado) basado en el descubrimiento de nuevos modos de combinar las reglas. Así, desde la perspectiva de los alumnos, llegar al conocimiento matemático es un proceso que impone exigencias cognitivas como la memorización comprensiva, resolución de algoritmos, aprendizaje de conceptos y resolución de problemas. Este proceso se concreta para los alumnos en el marco de una intensa actividad , a la que ellos otorgan el sentido de práctica, en la que intervienen también elementos de la dimensión afectiva, a los que ellos denominan "ganas" o "esfuerzo". Estos últimos cumplen el rol de "motor" para llegar al conocimiento matemático y además operan como desbloqueadores de distintos tipos de obstáculos que bloquean la actitud positiva necesaria , según los alumnos, para apropiarse de este conocimiento.

6.3. Representaciones sociales y aprendizaje escolar: proyecciones

Desde la posición que se aborda aquí las representaciones sociales del conocimiento matemático, éstas implican procesos de significación de dicho conocimiento. De este modo, las representaciones sociales presentadas anteriormente contienen los significados del conocimiento matemático construidos por los alumnos dentro y fuera del sistema escolar. Dichos significados me permiten plantear, y a futuro se debería investigar, la posibilidad de que algunas representaciones sociales del conocimiento matemático incidan directamente en el proceso de aprendizaje en la escuela.

La línea de análisis planteada en el párrafo anterior me lleva a la descripción de las relaciones entre los significados del conocimiento matemático, presentes en las representaciones sociales de los alumnos, y el aprendizaje escolar que se ponen en evidencia en este estudio. Sobre esta cuestión me ocupo a continuación.

I

La primera relación se revela en el hecho de representar a la matemática como una creación del hombre, que trata de ideas que están en la mente y cuyos objetos resultan de procesos de abstracción y proceden de una operación realizada sobre las cosas sensibles. En efecto, los alumnos conciben objetos matemáticos que no son directamente accesibles a la percepción, o en una experiencia intuitiva inmediata. Pero frente a la necesidad de dar explicaciones sobre la naturaleza abstracta de los objetos matemáticos , y la imposibilidad de tener acceso directo a ellos, objetivizan sus ideas sobre una base de entronques empíricos. Así, los objetos matemáticos cobran el significado de objetos "reales" o "físicos", como por ejemplo (refiero a los que se pusieron en evidencia en las entrevistas) : "*la recta es el borde de la mesa"* , *la recta es una la línea dibujada"* o *"el dos es el símbolo"* . De tal manera , los alumnos asignan a un objeto (la mesa) o a un signo (el trazo lineal , la escritura decimal) el sentido del "ser de la cosa" (objeto matemático), cuando en realidad éstos no son objetos matemáticos en si mismos sino que los reemplazan; es decir son sus representantes. Con esto quiero decir que los alumnos confunden los objetos matemáticos con su representación. Esta confusión **"(...) desencadena , a mediano o largo plazo, una pérdida de comprensión y los conocimientos adquiridos llegan a ser pronto inutilizables fuera de su contexto de aprendizaje; ya sea por no recordar o porque ellas quedan como representaciones "inertes" que no sugieren ningún tratamiento"** (Duval, R., 1993)[331].

En conformidad con lo anterior, la distinción entre un objeto y su representación es un punto estratégico para la comprensión de las matemáticas. Y ese punto es tan importante porque en él está presente lo que denomina Raymond Duval (1993)[332] "la paradoja cognitiva del pensamiento matemático"[26] : por un lado, la aprehensión de los objetos matemáticos no puede ser otra cosa que una aprehensión conceptual y, por otro lado , solamente por medio de representaciones semióticas[27] es posible una actividad sobre los objetos matemáticos. Por lo tanto, las representaciones semióticas son fundamentales para llenar ciertas funciones cognitivas esenciales

[331] DUVAL, R. (1993). REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA Y FUNCIONAMIENTO COGNITIVO DEL PENSAMIENTO. Título original: Registres de représentation sémiotique et functionnement cognitif de la penseé. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5 (1993). Pág 37-65. IREM de Strasbourg. Traducción para fines educativos: Departamento Educativa del Cinvestav – IPN, (1996). México.

[332] DUVAL, R. (1993). Op. Cit. Pág. 2

[26] No es mi intención aquí hacer un análisis profundo de los registros de representación semiótica en matemática. La referencia a ellos responde a la necesidad de poner en evidencia una relación que intenta dar cuenta este trabajo.

[27] Las representaciones semióticas son producciones escritas constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación , el cual tiene sus propias limitaciones de significado y funcionamiento.

como las del tratamiento de los objetos matemáticos . Entonces, la coordinación de varios registros de representación semiótica aparece como una condición necesaria para que los objetos matemáticos no sean confundidos con sus representaciones y para que sean reconocidos en cada una de ellas.

A partir del análisis realizado, se puede decir que la representación social de la matemática como una creación del hombre, pero con objetos matemáticos que se confunden con su representación , puede constituirse en un verdadero obstáculo en el proceso de aprendizaje de las matemáticas, en el sentido que los objetos así pensados podrían inciden negativamente en la comprensión de los conceptos matemáticos.

II

El hecho de representar a la matemática como un tipo de conocimiento funcional a la realidad está muy directamente vinculado con la representación de la matemática como un conocimiento útil. Por ello, la segunda relación que describo a continuación es una conjugación de las representaciones sociales que tratan sobre estos dos aspectos ontológicos de la matemática.

Los alumnos asignan a la matemática los significados de conocimiento "funcional" a la realidad y, por tanto, "necesario" ya que satisface necesidades individuales y sociales que lo transforman también en un conocimiento "útil". De esta manera, el conocimiento matemático se presenta contextualizado en el mundo real del que ellos forman parte, situándolo así en un sistema de significación social del cual derivan marcas sociales que dan sentido a los conocimientos de los alumnos (Boggino, N., 2000)[28]. En este caso particular , donde el conocimiento se inscribe en el sistema escolar, la marca social sería: *"aprender matemática es necesario porque es útil en la vida real"*. Esta marca otorga valor funcional y valor social a la matemática (el interés de que todos tengan una cultura matemática básica) , y no la

[28] BOGGINO, N. (2000). APRENDIZAJE, OBSTÁCULOS Y DIVERSIDAD. LA PROBLEMÁTICA DEL APRENDIZAJE ESCOLAR. Cap. 2. Pág. 44. En Boggino, N. y Avendaño, F. (Compiladores). La escuela por dentro y el aprendizaje escolar. Ediciones Homo Sapiens. Rosario.

reduce a un valor escolar. Pero además es convertida por los alumnos en argumentos explicativos para justificar su aprendizaje en el sistema escolar.

Las marcas sociales **"asocian relaciones cognitivas con relaciones sociales"** (Mugny, De Paolis y Carugari , 1984:137)[29]. **"(...) Esta conexión aparece a partir del uso de la misma representación social para marcar objetos y para estructurar los procesos cognitivos que se requieren para comprender esas marcas"** (Lloyd. y Duveen, 2003)[30]. Así, y particularizando nuevamente , se puede decir que estas representaciones sociales estructuran cognoscitivamente al alumno atribuyéndole los significados de la matemática como un conocimiento que surge de un contexto funcional al cual es útil. Y tales significados son fundamentales para la apropiación del conocimiento matemático.

Esto último me lleva a plantear que las representaciones sociales en cuestión incidirían positivamente en la percepción del alumno acerca de su proceso de aprendizaje matemático en la escuela, en el sentido que la apropiación es de un conocimiento que no se presenta ajeno al sujeto; es decir, es un conocimiento con valor intrínseco para él.

Pero al mismo tiempo, se infiere del análisis de los datos de distintas notas de campo que los alumnos asocian la "utilidad matemáticas" específicamente a los significados de "matemática herramienta" y "matemática aplicada". Es decir, pareciera que los alumnos construyen a través de su aprendizaje una concepción utilitarista de la matemática pero en sentido fuerte, ya que los significados atribuidos a la utilidad matemática se circunscribe a la matemática como instrumento para resolver problemas a nivel de utilidad común. Así, se puede postular que los alumnos se apropian en su vida escolar de la metáfora social de que "sólo lo que es útil, vale". Por eso para ellos tiene sentido aprender sólo aquello que tiene una utilidad inmediata y visible. Esto se pone de manifiesto en sus recurrentes cuestionamientos en el aula, un ejemplo es: ¿para qué sirve estudiar esto sino no se aplica en la vida real?. De tal manera, los alumnos en su proceso de aprendizaje no ponen en juego las cualidades del conocimiento matemático que se expresan a través de actividades intramatemáticas (matemática pura) y son de un alto valor formativo.

---

[29] Citados LlOYD, B. y DUVEEN, G. (2003). Pág. 42. Op. Cit. Cap3.

[30] LlOYD, B. y DUVEEN, G. (2003). Pág. 42. Op. Cit. Cap3

En consecuencia, las representaciones sociales así planteadas son un obstáculo para la construcción de la significación del conocimiento matemático , porque inciden negativamente en la disposición del alumno para aprender el funcionamiento de la matemática a nivel interno.

Sintetizando, las representaciones de la matemática como un conocimiento funcional y útil , por un lado , podrían favorecer el aprendizaje escolar de los alumnos porque influyen positivamente en sus percepciones del aprendizaje de matemática. Por otro lado, también podrían obstaculizar porque influyen negativamente en sus construcciones de la significación del conocimiento matemático.

III

La tercera relación se expresa en el análisis de la representación del conocimiento matemático como un tipo de conocimiento integrado en continuo desarrollo. Los alumnos presentan la organización interna de la matemática de manera integrada, en el sentido que el discurso tecnológico que justifica la técnica aparece– en las distintas notas de campo – ligado a la resolución de problemas. Lo que no aparece son las teorías que justifican las tecnologías . Así se pone en evidencia un reduccionismo epistemológico en el marco epistémico de la organización interna de la matemática que orienta la construcción del conocimiento por parte del alumno. En términos operativos, el reduccionismo epistemológico se manifiesta en los alumnos en forma de errores que tienen su origen en una ausencia de significado del conocimiento matemático. Los errores que se pusieron en evidencia, cuando resolvían situaciones problemáticas presentadas en las entrevistas, procedían de dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático por la carencia fundamentalmente del discurso teórico. Así, frente a esta carencia, el alumno en lugar de usar reglas lógicas formales, utiliza reglas aproximativas, denominadas heurísticos (Tversky, Kahneman, 1974)[31] , para razonar el problema matemático que debe resolver. En este estudio se presentó el uso de la regla de

[31] Citados por POZO, J.A., SANZ, A., GÓMEZ CRESPO , M.A. y LIMÓN, M. (1991). Op. Cit. Pág.85

semejanza (Pozo, J.A., Sanz, A., Gómez Crespo , M.A. y Limón, M. ,1991)[32] - la creencia que existe una semejanza básica entre las causas y los efectos – llevando al alumno a explicar, por ejemplo, que los cambios en los coeficientes de las ecuaciones producen un conjunto solución diferente. De tal manera, la utilización de estas reglas heurísticas conllevan ciertos sesgos que alejan al alumno de conclusiones formalmente correcta. Asimismo desvirtúan buena parte del significado de los conceptos matemáticos.

Pero también hay que decir que la representación del conocimiento matemático integrado, a pesar del marco epistémico reducido, lleva a los alumnos en su proceso de anclaje a la asignación del sentido de la matemática como un conocimiento relacional, orientando su conducta de modo que ellos advierten la posibilidad de utilizar distintos procedimientos para la resolución de una misma tarea matemática.

A partir de lo dicho , se infiere que la representación social de los alumnos acerca del conocimiento matemático como un tipo de conocimiento integrado , podría incidir por una parte en forma negativa en el proceso de aprendizaje escolar, en el sentido que el marco epistémico reducido se constituye en un obstáculo epistemológico para la construcción de los conceptos matemáticos. Pero paradójicamente también podría incidir en forma positiva porque orienta en sentido favorable las formas de actuación de los alumnos en la resolución de tareas matemáticas.

IV

La representación de la matemática como un tipo de conocimiento que se desarrolla de manera acumulativa resolviendo problemas desde el paradigma algoritmico pone en juego significados que revelan la cuarta relación entre representaciones sociales y aprendizaje escolar. En el análisis de esta representación se puso en evidencia que para los alumnos "hacer matemáticas" significa resolver problemas. Las formas de actuación asociadas al modo de trabajo para resolver problemas son preferentemente los procedimientos formales. Los sentidos que los alumnos otorgan a los procedimientos formales se reúnen en lo que Davis, P. J. y

[32] POZO, J.A., SANZ, A., GÓMEZ CRESPO , M.A. y LIMÓN, M. (1991). Op. Cit. Pág.87

Hersh R, (1988)[340] llaman matemática algoritmica. La matemática algoritmica utiliza un algoritmo para resolver un problema e invita a la acción para generar resultados (Henrici)[341]. De tal manera, las formas de actuación de los alumnos para resolver problemas revelan un cierto abandono de los métodos intuitivos en cualquiera de sus significados – por ejemplo, procedimientos visuales - como modo de trabajo matemático. Lo cual no favorece al alumno en su proceso de aprendizaje porque, por un lado, éstos métodos lo ayudan en el desarrollo del pensamiento matemático y en su proceso de comprensión de los conceptos matemáticos. Pero por otro lado, un modo de trabajo que incluye este abandono encierra el peligro que los alumnos limiten su aprendizaje matemático a la adquisición de un dominio formal de técnicas y elementos tecnológicos que resuelven los problemas.

Así, esta representación social de los alumnos acerca del conocimiento matemático puede llegar a incidir negativamente en su proceso de aprendizaje, en el sentido que ésta influye en el desarrollo del pensamiento matemático y la comprensión de conceptos y restringe el modo de trabajo matemático de los alumnos

V

La última relación entre las representaciones sociales y el aprendizaje escolar está vinculada a la representación social del conocimiento matemático como un tipo de conocimiento al que se llega con esfuerzo intelectual y de voluntad. Los sentidos que otorgan los alumnos a los términos esfuerzo intelectual y de voluntad están asociados a las exigencias cognitivas y de la dimensión afectiva que implicaría la apropiación del conocimiento matemático durante su aprendizaje escolar. Esas exigencias cognitivas incluyen la "resolución de problemas" para crear nuevos conceptos y dar sentido a sus conocimientos, la "memorización comprensiva" para la construcción de la significación del conocimiento, la "utilización de algoritmos" para resolver fundamentalmente problemas, el "aprendizaje de conceptos" para establecer relaciones entre los nuevos conceptos y sus conocimientos previos , la "práctica intensa" para mejorar las exigencias cognitivas y, de la dimensión afectiva, "la

[340] DAVIS, P. J. Y HERSH R. (1988) Op. Cit. Pág.139-141

[341] Citado por DAVIS, P. J. Y HERSH R. (1988) Op. Cit. Pág141.

actitud adecuada hacia la matemática"[342] para superar los distintos tipos de bloqueos que obstaculizan su aprendizaje en la escuela. Tales sentidos que los alumnos atribuyen al proceso de apropiación del conocimiento matemático se correlacionan con lo que llamamos "aprendizaje significativo"[343].

Como consecuencia, esta representación social del conocimiento matemático podría incidir positivamente en el aprendizaje escolar , en el sentido que orientará la praxis del alumno hacia la construcción del conocimiento matemático atribuyéndole significados. Además, la repercusión de la representación en el aprendizaje escolar del alumno, y particularmente sobre su crecimiento personal , será mayor en tanto mayor sean los significados no desvirtuados del conocimiento matemático contenidos en dicha representación.

Concluyo expresando, sumariamente , que las representaciones sociales de los alumnos acerca del conocimiento matemático podrían influir en el aprendizaje escolar ya que son elementos constitutivos del propio proceso de aprendizaje matemático. Destaco que en el análisis realizado de las relaciones que surgen de representaciones utilizo el verbo "podría" en términos de posibilidad. Esto responde a que la afirmación implicaría y surgiría de otro trabajo de investigación.

6.4. Implicaciones para la formación profesional de los docentes

Tal como ya he manifestado en la justificación del tema elaborada en el momento de presentar el plan de tesis , este trabajo de investigación me trasladaría

[342] Entiendo *la actitud* como una predisposición evaluativa (es decir, positiva o negativa) que determina las intenciones personales e influye en el comportamiento. Esta definición de actitud plantea Hart (1989) y considera Gómez Chacón, I. M. para distinguir las actitudes hacia las matemáticas. GOMEZ CHACÓN, I.M (2000). Op. Cit Pág.23.

[343] Cabe aclarar que no me estoy refiriendo al nivel de logros en el aprendizaje escolar de los alumnos sino en al marco de interpretación de los alumnos sobre el proceso de aprendizaje de la matemática en la escuela.

necesariamente al campo de la preparación profesional de los docentes en los Institutos de Formación docente y en la Universidad.

La mayoría de las propuestas de formación docente en nuestro país se caracteriza por ser un proceso formativo que no suele contemplar la problematización de los modelos de enseñanza, ni los de aprendizaje como tampoco las representaciones sociales que esos modelos conllevan y por las cuales están, en cierto modo, determinados.

Este estudio pone en evidencia algunas de las posibles representaciones sociales los alumnos acerca del conocimiento matemáticos. También la posibilidad de existencia de relaciones entre éstas y el aprendizaje escolar. Es decir, plantea la necesidad urgente de que las propuestas de formación docente consideren el enfoque señalado en el párrafo anterior.

En este sentido, **"(...) es necesario volver a considerar, los modos de aprender del sujeto educativo"** (Elichiry, N. , 2000)[345]. El aprendizaje es un proceso que se desarrolla en un contexto social que impone sus condiciones y, en este marco, el sujeto se estructura en el mismo proceso en el que construye el objeto de conocimiento. Pero a la vez, el objeto de conocimiento que construye el sujeto está situado en sistemas de significación social anteriores a su acción cognoscitiva con dicho objeto. De esta manera, **"(...) aprender supone otorgar sentido a un sector de lo real a partir de los conocimientos previos, de las características de las estructuras cognoscitivas que sirven de anclaje a la nueva información y de las marcas sociales"** (Boggino, N., 2000)[346].

Así entendido el aprendizaje, las representaciones sociales no son elementos externos a la práctica aúlica sino son constitutivos del propio proceso de aprendizaje. Considero entonces básico el conocer en qué universo los docentes formadores y en formación van a contextualizar los nuevos conocimientos.

---

[345] La autora utiliza la categoría "sujeto educativo" porque ésta incorpora al alumno y al maestro – a ambos- como sujetos del aprendizaje. Trasponiendo al contexto de las carreras de formación docente podemos incorporar a esta categoría al formador y a los docentes en formación. ELICHIRY, N. (2000). EVALUAR: SABERES Y PRÁCTICAS DOCENTES. Pág 89. En Boggino, N. y Avendaño, F. Op. Cit. Cap. 4.

[346] BOGGINO, N. (2000). Op. Cit. Pág.44

El planteo que estoy haciendo supone romper con la relación diádica sujeto-objeto y reubicar la problemática de la enseñanza y el aprendizaje escolar en un modelo psicosocial, a partir de la tríada sujeto-contexto-objeto. Este trabajo de investigación intenta realizar un aporte significativo en este sentido.

En concreto, este estudio muestra de alguna manera el lugar que ocupan las representaciones sociales del conocimiento matemático en el aprendizaje de los alumnos en la escuela. Los resultados pusieron en evidencia que este lugar no es menor por cuanto las mismas podrían favorecer u obstaculizar los procesos de aprendizajes. Y un formador o docente en formación no puede estar ajeno a esta realidad que fue revelada a partir de una mirada del aprendizaje de la matemática desde un modelo psicosocial.

6.5. Nuevas preguntas …

Este estudio intentó dar respuestas a determinadas preguntas, pero en el proceso de análisis e interpretación de datos de la investigación aparecen fenómenos didácticos que dan lugar a nuevas preguntas que precisarían nuevas investigaciones.

Al respecto, aquí se puso en evidencia que los alumnos sitúan a la matemática como un conocimiento funcional y útil en sentido fuerte, conduciéndolos a asumir una posición utilitarista extrema de la matemática , en el sentido de pensar que todo es matematizable y que el propósito auténtico de su aprendizaje es específicamente aprender a resolver problemas externos a la matemática ; incluso hasta el punto de estimar que el cuerpo de conocimientos matemáticos es simplemente una serie de instrumentos existentes para el proceso de resolución de problemas de origen extramatemáticos Estas disfunciones revelaron la presencia en el aprendizaje de la matemática por parte de los alumnos del fenómeno didáctico llamado “enfermedad utilitarista” (Chevallard, Y, Bosch, M. y Gascón, J. , 1997)[347]. También los alumnos muestran un conocimiento matemático con ausencia de uno de sus elementos constitutivos – las teorías – derivando en un “reduccionismo epistemológico” en su marco de interpretación sobre la organización interna de la matemática apareciendo

[347] CHEVALLARD, Y., BOSCH, M. y GASCÓN, J. (1997).Op. Cit. Pág. 47.

así otro fenómeno didáctico. Y, por último, sale a luz el fenómeno denominado "el oficio del alumno" dentro del sistema escolar. Es decir, los alumnos exteriorizan formas de actuación en su quehacer con el conocimiento matemático configuradas por la apropiación de un determinado sistema de trabajo escolar[348].

Como ya lo he mencionado, para Chevallard, Y, Bosch, M. y Gascón, J. (1997)[349] las explicaciones de los fenómenos didácticos deben partir de la descripción de la actividad matemática que realizan conjuntamente profesor y alumnos en el aula y fuera de ella, así como las cláusulas del contrato didáctico.

Los fenómenos didácticos citados surgen del estudio de las representaciones sociales de los alumnos que, en el marco de la escuela y en el aula como escenario , realizan actividades matemáticas conjuntas con el profesor. Tomando en consideración el señalamiento de Chevallard, Bosch. y Gascón, entiendo que sería de interés investigar las representaciones sociales pero de los profesores. Las preguntas ahora serían:

"¿Qué representaciones sociales del conocimiento matemático aparecen en las propuestas didácticas de los docentes en las aulas? ¿Cómo influyen esas representaciones en el aprendizaje escolar".

Por otra parte, y frente a la necesidad de plantear o re-plantear la formación docente en el sentido presentado en el epígrafe anterior , considero también de interés investigar el mismo tema de este trabajo de investigación – las relaciones entre las representaciones sociales de los alumnos acerca del conocimiento matemático y el aprendizaje – pero proyectándolo a un campo particular de la formación profesional docente: El Profesorado de Matemática de la EGB3 y nivel Polimodal. Próximo rumbo a tomar.

---

[348] Concepto trabajado en BAQUERO, R. (1997). Op. Cit. Pág. 235

[349] CHEVALLARD, Y., BOSCH, M. y GASCÓN, J. (1997).Op. Cit. Pág. 63

BIBLIOGRAFÍA

- ARNAL, J., DEL RINCÓN, D. Y LATORRE, A., (1992). INVESTIGACIÓN EDUCATIVA. FUNDAMENTOS Y METODOLOGÍAS. Editorial Labor. Barcelona. España.
- ASTOLFI, J.P. (1978). LES REPRESENTATIONS DES ENFANTS EN SITUATION DE CLASSES. (Rev. Fran. de Péd. 45, pp 126-128). En: GIL PÉREZ, D. (1983). TRES PARADIGMAS BÁSICOS EN LA ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS. Revista Enseñanzas de las Ciencias. (1983).Vol. 1. Pág. 26. Edita: ICE de la Universitat Autónoma de Barcelona con la colaboración del Vicerectorat d´Investigació de la Universitat de Valencia. España.
- BABINI, J. (1947). ORIGEN Y SENTIDO DE LA CIENCIA. Espasacalpe. Buenos Aires.
- BAQUERO, R. (1997). VIGOTSKY Y EL APRENDIZAJE ESCOLAR. Editorial Aique. Buenos Aires.
- BERTÉ, A. (2000). MATEMÁTICA DE EGB3 AL POLIMODAL. Editorial A.Z. Buenos Aires.
- BISHOP, A. (1988). ASPECTOS SOCIALES Y CULTURALES DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA. Revista Enseñanza de las Ciencias. Vol.6 Nº. Edita: ICE de la Universitat Autónoma de Barcelona. Servei de Formació Permanent de la Universitat de Valéncia. España.
- BISHOP, A. J. (1999). ENCULTURACIÓN MATEMÁTICA. Editorial Paidós. Barcelona.
- BOGGINO, N. (2000). APRENDIZAJE, OBSTÁCULO y DIVERSIDAD. En LA ESCUELA POR DENTRO Y EL APRENDIZAJE ESCOLAR. Ediciones Homo Sapiens. Rosario- Santa Fe – Argentina.
- BRIONES, G. (1992). MÉTODOS Y TÉCNICAS DE INVESTIGACIÓN PARA LAS CIENCIAS SOCIALES. Editorial Trillas. México.
- CAÑÓN LOYES, C. (1993) . LA MATEMÁTICA: CREACIÓN O DESCUBRIMIENTO. Universidad Pontificia de Comillas. Madrid.

- CASTORINA,J. A. (COMP) (2003). REPRESENTACIONES SOCIALES. PROBLEMAS TEÓRICOS Y CONOCIMIENTOS INFANTILES. Editorial Gedisa. España.
- CASTRO, E. y CASTRO, E (1997). REPRESENTACIONES Y MODELIZACIÓN. En La Educación Matemática en la Escuela Secundaria. Cap. IV..Editorial Horsori.
- CELMAN, S. (1998). ¿ES POSIBLE MEJORAR LA EVALUACIÓN Y TRANSFORMARLA EN UN HERRAMIENTA DE CONOCIMIENTO? En la evaluación de los aprendizajes en el debate didáctico contemporáneo. Editorial Paidós. Buenos Aires
- COLL, C. (2001). PSICOLOGÍA Y CURRICULUM. Editorial Paidós. Buenos Aires.
- CHARNAY, R. APRENDER (POR MEDIO) DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS (1994) En Parra, C. e Sainz, I. (Comps.). Didácticas de Matemáticas. Cap.III. Ediciones Paidós. Buenos. Aires.
- COPI, I.M. (1995). INTRODUCCIÓN A LA LÓGICA. Ediciones Eudeba. Bs. As.
- CHEMELLO, G. (1992). LA MATEMÁTICA Y SU DIDÁCTICA. NUEVOS Y ANTIGUOS DEBATES En didácticas especiales. Estado de debate. Editorial Aique.
- CHEVALLARD, Y., BOSCH, M. y GASCÓN, J. (1997). ESTUDIAR MATEMÁTICAS. El eslabón perdido entre la enseñanza y aprendizaje. Editorial Horsori.. Barcelona.
- DAVIS, P y HERSH, R. (1988). EXPERIENCIA MATEMÁTICA. Editorial Labor SA. Barcelona.
- DE ZAN, M.E. (2000). INTEDISCIPLINARIEDAD Y EPISTEMOLOGÍA EN ORDEN A UN PROYECTO PEDAGÓGICO. La Matemática en su historia. Nexos. Programa Articulación Educación Media Universidad. Universidad Nacional de Entre Ríos. Impreso en Artes Gráficas Yusty. Entre Ríos
- DOU, A. (1970). FUNDAMENTOS DE LA MATEMÁTICA. Editorial Labor SA. Barcelona.

- DUVAL, R. (1993). REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA Y FUNCIONAMIENTO COGNITIVO DEL PENSAMIENTO. Título original: Registres de représentation sémiotique et functionnement cognitif de la penseé. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5 (1993). IREM de Strasbourg. Traducción para fines educativos: Departamento Educativa del Cinvestav – IPN, (1996). México.
- EDWARDS, V. (1985). LA RELACIÓN DE LOS SUJETOS CON EL CONOCIMIENTO. Parte de la Tesis de Maestría vinculada al Programa Interdisciplinario de Investigación en Educación.PIIE.
- FERNÁNDEZ, L. (1993). INSTITUCIONES EDUCATIVAS. DINÁMICAS INSTITUCIONALES EN SITUACIONES CRÍTICAS. Editorial Paidos. Buenos Aires.
- FORNI, F. y Otros. (1992). MÉTODOS CUALITATIVOS II. Centro Editor de América Latina. Buenos Aires.
- GASCÓN, J. (1994). EL PAPEL DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS. En Revista de Educación Matemática. Vol.6. Nº3.
- GIMENO SACRISTÁN, J. y PÉREZ GÓMEZ, A . (1989). LA ENSEÑANZA: SU TEORÍA Y SU PRÁCTICA. Editorial Akal-Universitaria. Madrid.
- GIMENO SACRISTAN, J. y PÉREZ GÓMEZ, A. I. (1989). COMPRENDER Y TRANSFORMAR LA ENSEÑANZA. Ediciones Morata. Madrid.
- GOMEZ CHACÓN, I.M (2000). MATEMÁTICA EMOCIONAL. Editorial Narcea. Madrid.
- GUZMÁN, M. (1994). PARA PENSAR MEJOR. Ediciones Pirámide. Madrid.
- GUZMAN, M. (1996). EL RINCÓN DE LA PIZARRA. Ediciones Pirámide. Madrid.
- INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN (Facultad de Filosofía y Letras) - U.B.A. Tesis de Especialización de Posgrado en Ciencias de la Educación cuya autora es la Prof. Anahí Mastache y la Directora Dra. Marta Souto de Asch.
- KORNEL, J. (1998).“SUFRIMIENTO INSTITUCIONAL: ESTÁ EN PELIGRO EL MODELO”. Trabajo final del Seminario “Análisis Institucional de la

Universidad", dictado por la Prof. LIDIA FERNÁNDEZ. Maestría en Docencia Universitaria. Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional de Misiones.

- LÓPEZ RUPÉREZ, F. (1990). EPISTEMOLOGÍA Y DIDÁCTICA DE LAS CIENCIAS. UN ANÁLISIS DE SEGUNDO ORDEN. Revista Enseñanza de las Ciencias. Vol.8. Nº1. Edita: ICE de la Universitat Autónoma de Barcelona. Servei de Formació Permanent de la Universitat de Valéncia. España.
- MINISTERIO DE CULTURA Y EDUCACIÓN. BUENOS AIRES (1994). Documento Curricular "MATEMÁTICA Y SU ENSEÑANZA". Pág.4 .Materiales de Enseñanza destinados a la capacitación docente. Programa de Transformación de la Formación Docente (PTFD).
- S. MOSCOVICI (Comp.) (1988). Psicología Social II. Editorial Paidós. Barcelona.
- ORTON, A. (1998). DIDÁCTICAS DE LAS MATEMÁTICAS. Ediciones Morata. Madrid.
- PIMM, D. (1990). EL LENGUAJE MATEMÁTICO EN EL AULA. Pág. 140. Ediciones Morata. Madrid.
- POLYA, G. (1965). CÓMO PLANTEAR Y RESOLVER PROBLEMAS. Editorial Trillas. México.
- POZO, J.A., SANZ, A., GÓMEZ CRESPO , M.A. y LIMÓN, M. (1991). LAS IDEAS DE LOS ALUMNOS SOBRE LA CIENCIA: UNA INTERPRETACIÓN DESDE LA PSICOLOGÍA COGNITIVA. Pág 83-91 . Revista Enseñanza de las Ciencias. Vol.9. Nº1. Edita: ICE de la Universitat Autónoma de Barcelona. Servei de Formació Permanent de la Universitat de Valéncia. España
- POZO, J.I. (1994). TEORÍAS COGNITIVAS DEL APRENDIZAJE. Ediciones Morata.Madrid.
- PUIG, L. (1997). ANÁLISIS FENOMENOLÓGICO. En La Educación Matemática en la Escuela Secundaria. Vol.12. Editorial Horsori. Barcelona..
- RESNICK, L.B y FORD, W.W (1998). LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS Y SUS FUNDAMENTOS PSICOLÓGICOS. Editorial Paidós. Barcelona.

- REVISTA DE LA FEDERACIÓN ODONTOLÓGICA COLOMBIANA. Nº194. URL: http:/www.encolombia.com/foc. índice.htm.
- REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN. EXPERIENCIAS E INNOVACIONES. http:/www.campus-oei.org/revista/delectores.htm.
- RODRIGO, M.J., RODRÍGUEZ, A. y MARRERO, J. ((1993). LAS TEORÍAS IMPLÍCITAS. UNA APROXIMACIÓN AL CONOCIMIENTO COTIDIANO. Editorial Visor. España.
- SANTALO, L (1986). LA MATEMÁTICA EN LA EDUCACIÓN. Editorial Docencia. Buenos Aires.
- SANTALÓ, L. (1986). LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA EN LA ESCUELA MEDIA. Editorial Docencia. Argentina.
- SANTALÓ, L. Y COLABORADORES (1997). ENFOQUES. HACIA UNA DIDÁCTICA HUMANÍSTICA DE LA MATEMÁTICA. Editorial Troquel. Argentina.
- SKEMP, R. (1993). PSICOLOGÍA DEL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS. Cap. V. Ediciones Morata. Madrid.
- SOCAS, M. (1997). DIFICULTADES, OBSTÁCULOS Y ERRORES EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA. . En La Educación Matemática en la Escuela Secundaria. Cap. V
- STEINER (1987). Citado en FLORES MARTÍNEZ, P. (1998). CONCEPCIONES Y CREENCIAS DE LOS FUTUROS PROFESORES SOBRE LA MATEMÁTICA, SU ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE. Editorial Comares. Granada.
- VAIN, P. (1997). LOS RITUALES ESCOLARES Y LAS PRÁCTICAS EDUCATIVAS. Pág. 27. Editorial Universitaria. Posadas. Referencia extraída de libro cuyo autor es VAIN, P. (1997). LOS RITUALES ESCOLARES Y LAS PRÁCTICAS EDUCATIVAS. Editorial Universitaria. Posadas.
- VAIN, P. (2005) ¿ Y SI EL ALUMNO NO ESTUVIERA ALLÍ ? UNA MIRADA ACERCA DEL ROL DOCENTE UNIVERSITARIO, DESDE LAS PRÁCTICAS DE LA ENSE-ÑANZA EN ENTORNOS NO PRESENCIALES. Tesis de Doctorado. Universidad de Málaga. (Inédito). Posadas,

- VASILACHIS, I. (1993). MÉTODOS CUALITATIVOS. Centro Editor de América Latina. Buenos Aires.
- WITTROCK, M. (1989). LA INVESTIGACIÓN DE LA ENSEÑANZA II. Ediciones Paidós. Barcelona.

APÉNDICES

1. La encuesta

***Estimado alumno**:*

Aprender Matemática es una de tus actividades como estudiante.

Te invito a que contestes esta encuesta para ayudarme a conocer qué pensas, sentís y cómo actúas cuando aprendes Matemática.

Para colaborar en esta tarea tenés que completar esta encuesta siguiendo las instrucciones que aparecen luego de cada pregunta.

Si querés podés identificarte escribiendo tus nombres y apellido

Muchas gracias.

Prof. Julieta Kornel

¿Cómo te llamás? ....

¿Quién es o fue tu profesor/a en...

7º año? ....

8º año? ....

9º año? ....

ENCUESTA

1º ¿Cómo completarías la siguiente frase?
(Marcar con una cruz (**X**) la respuesta que elijas)

Aprender Matemática es…

a) memorizar una lista de reglas y propiedades ....
b) saber dar "buenas razones" en la resolución de situaciones que se presentan dentro y fuera de la escuela ....

Aprender Matemática es…

a) una tarea difícil ....
b) una tarea fácil ....

Aprender Matemática es…

a) una actividad agradable ……….
b) una actividad desagradable ……….

Aprender Matemática es…

Otras (Especificar): ....
....

2º ¿Qué es lo más importante para aprender Matemática?
(En caso de querer dar más de una respuesta, enumerar según el orden de importancia)

- tener un buen profesor ....
- horas de esfuerzo y dedicación ....
- tener capacidad intelectual ("ser inteligente") ....
- sentir agrado por la materia ....
- Otras (Especificar) ....
....

3º ¿Cómo haces para resolver un problema?

a) trato de relacionar el problema con otros problemas que resolví, con situaciones de mi vida cotidiana, etc. ....
b) no busco ninguna relación con otras situaciones porque para mi cada problema es un problema nuevo ....

----

a) lo primero que trato de hacer es pensar qué regla o propiedad matemática me permitirá encontrar la respuesta ....
b) lo primero que trato de hacer es hacer un plan de trabajo que me permita resolver el problema

----

a) busco un único procedimiento que me permite encontrar la respuesta ....
b) busco distintos procedimientos para resolver (más sencillos, mejores, etc). ....

Otras (Especificar) ....
....

4º ¿Cómo superas las dificultades que aparecen cuando intentas resolver un problema matemático?
(En caso de querer dar más de una respuesta, enumerar según el orden de importancia)

- espero que la profesora o mis compañeros me digan la respuesta ....
- recurro a la profesora o a mis compañeros para que me digan qué reglas debo aplicar para resolver el problema ....
- recurro al profesor o a mis compañeros para que me den pistas ....
- me tomo un tiempo para pensar y probar procedimientos que me lleven a la respuesta del problema ....
- Otras (Especificar) ....
....

5º ¿ Qué haces cuando terminas de resolver un problema matemático?
(En caso de querer dar más de una respuesta, enumerar según el orden de importancia)

- verificas personalmente la respuesta utilizando algún procedimiento matemático ....
- comparas tu respuesta con la del libro ....
- le preguntas al profesor si tu respuesta es correcta ....
- pasas inmediatamente a otro problema ....
- Otras (Especificar) ....
....

6º Después de resolver la ecuación x + 2 = x ¿qué podes decir en relación a ella?

- que el 0 (cero) es solución ....
- que no tiene solución ....
- que tiene solución pero no la sé calcular ....
- Otras (Especificar) ....
....

7º ¿Qué le responderías a alguien que te pregunte: *qué número multiplicado por 3 es igual a 28*?

- que no existe ese número ....
- que existe ese número pero no lo se calcular ....
- otra: ....
....

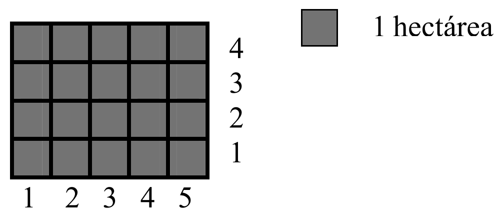
8º En una clase de Matemática tu profesor/a formula el siguiente problema:

"Una familia hereda un terreno de 20 hectáreas. Si decide vender el terreno en lotes de 5 hectáreas cada uno, ¿cuántos lotes en total podrían poner a la venta?

Tres compañeros - A, B y C - proponen los siguientes procedimientos de resolución:

- **<u>Procedimiento de A</u>**: *realiza la cuenta* $20 \quad 5\,\underline{|\quad\;}$

- **<u>Procedimiento de B</u>:** *toma un cuadrado unidad y dibuja la siguiente figura*



- **<u>Procedimiento de C</u>:** *plantea la ecuación* $5 . x = 20$

Marcar con una cruz el o los procedimientos que consideras correcto

- El procedimiento de A ....
- El procedimiento de B ....
- El procedimiento de C ....
- Otros (Especificar) ....
....

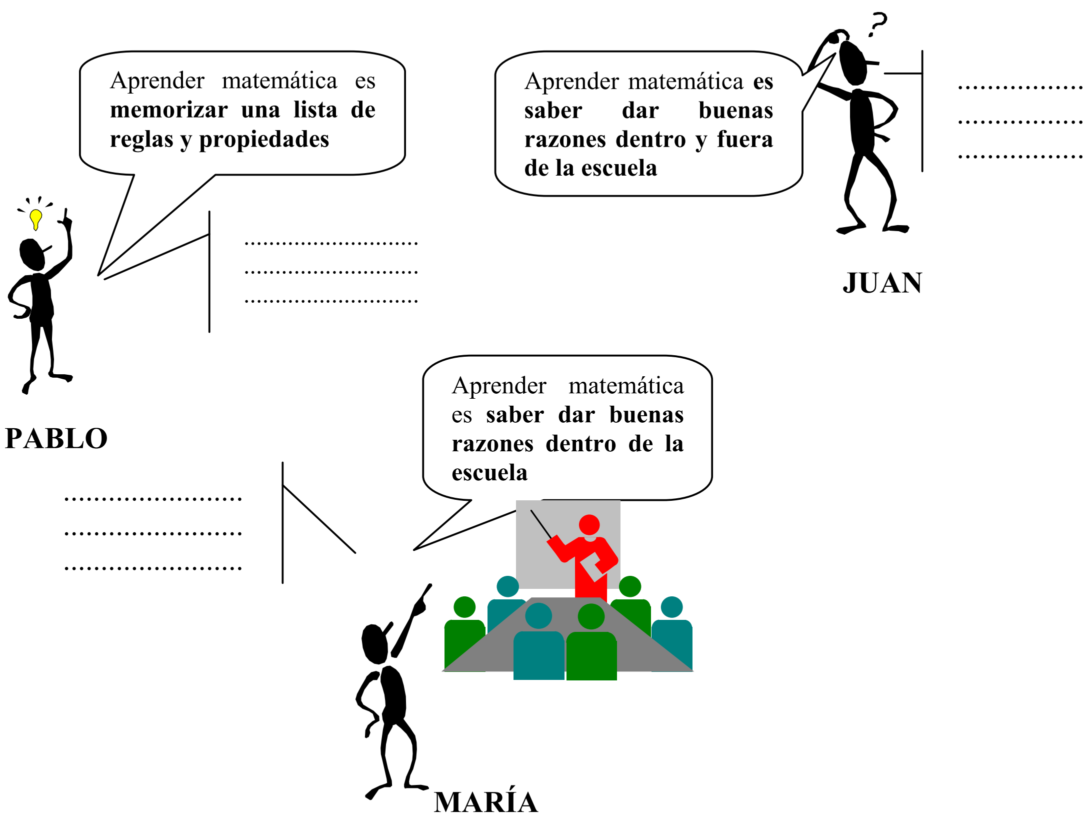
¿ Podrías explicar por qué consideras correcta la solución elegida?

....
....
....
....

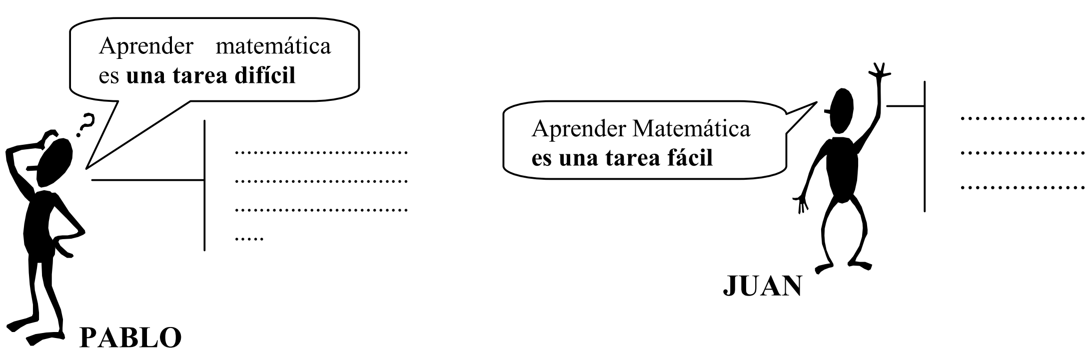
2. Los episodios críticos

En el aula de la escuela, Pablo, María y Juan se reúnen para jugar el Juego “Completando frases”. Una de las frases dice **“Aprender Matemática es...”**

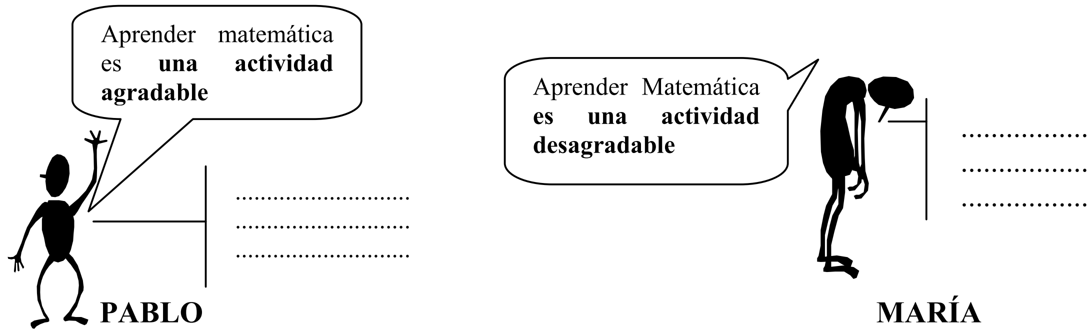
Episodio 1



Episodio 2



Episodio 3



1. Leer atentamente cada episodio (A,B,C)
2. Adoptar la posición del personaje con el que te identificas. En caso que esto no ocurra, dibuja un personaje que exprese tu punto de vista.
3. Pensar en qué otra frase podría ocurrírsele al personaje elegido dado el punto de vista que mantienen.

Episodio 4

Un grupo de compañeros de escuela mantienen el siguiente diálogo sobre qué es importante para aprender Matemática:

Juan: *Para mi lo más importante para aprender Matemática es sentir agrado por ella*

....

Pablo: *No, no pienso como vos. Creo que son más importantes para aprender la materia las horas de esfuerzo y dedicación*

....

María: *Yo considero que lo fundamental es tener un buen profesor*

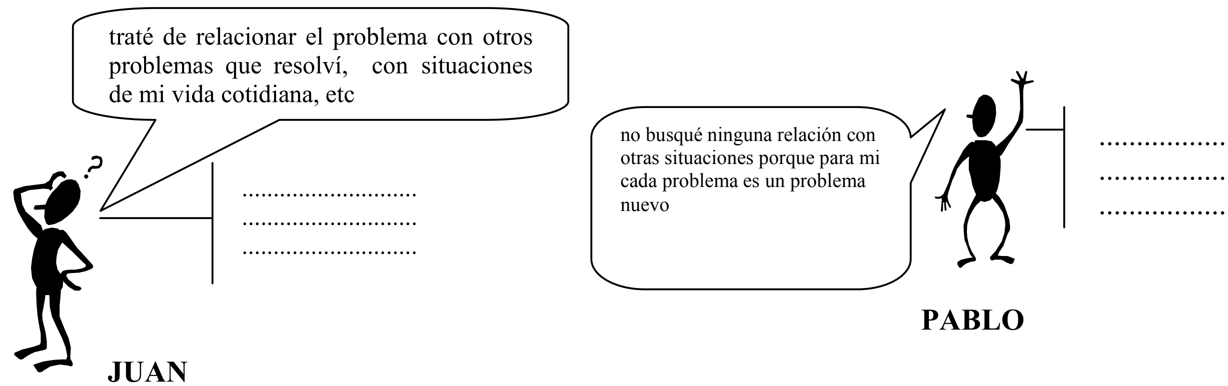
....

Javier: *Para mi hay que tener capacidad intelectual*

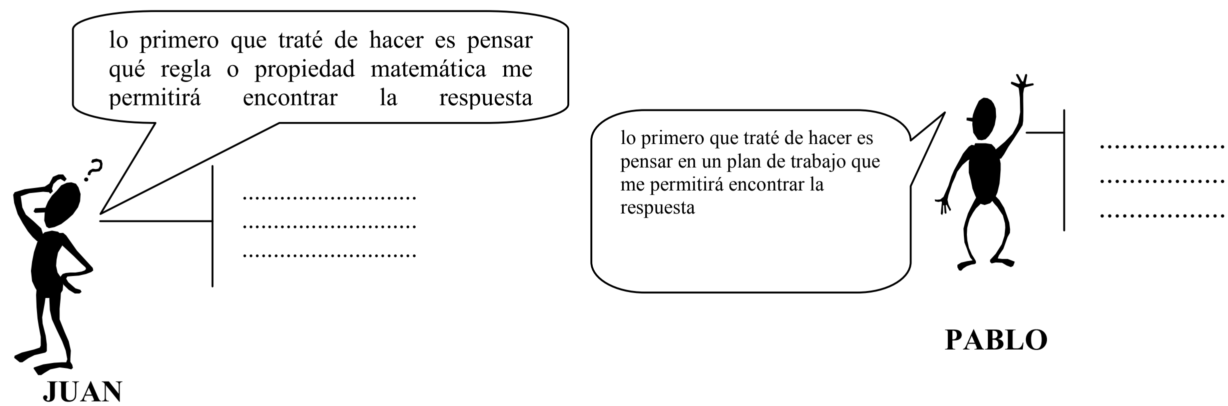
....

En la clase de hoy la Profe de Matemática nos dio un problema para resolver. Te cuento lo que hice yo para resolverlo:

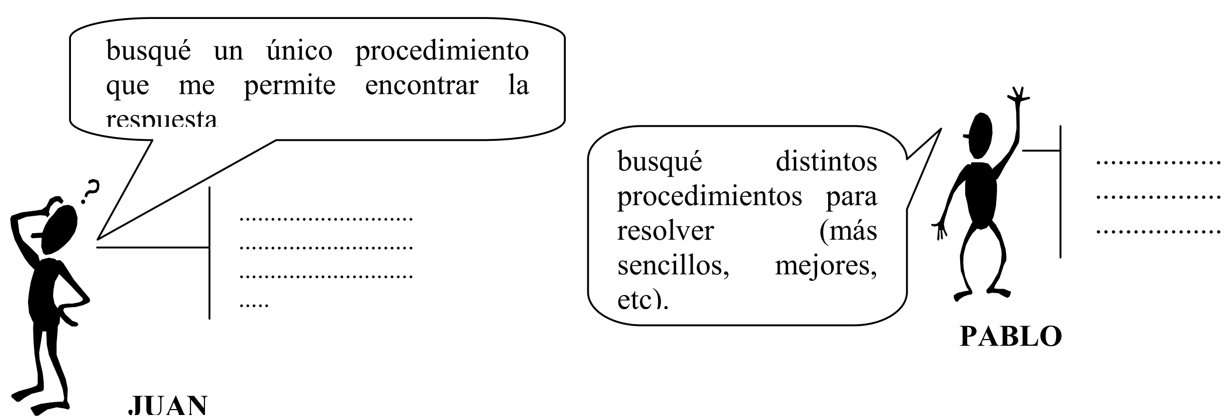
Episodio 5



Episodio 6



Episodio 7



Episodio 8

1. Leer el episodio presentado.
2. ¿Qué opinas sobre las actitudes de los distintos personajes: Pedro, María, La Profesora y Ana?
3. En el lugar de Ana, ¿Cómo hubieras actuado frente al pedido de la Profesora?