



## Diseño e implementación de una situación-problema para la enseñanza y aprendizaje de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con estudiantes de ingeniería

**Gretel Alejandrina Fernández von Metzen<sup>1</sup>**

Universidad Nacional de Misiones, Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales

**Claudia Mariela Zang<sup>2</sup>**

Universidad Nacional de Misiones, Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales

**María Natalia León<sup>3</sup>**

Universidad Nacional de Misiones, Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales

### RESUMEN

Se aborda una descripción de las acciones llevadas adelante para el diseño de una situación problema que involucra el trabajo con un modelo de mezclas, que requiere el uso de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales. Paralelamente, se presentan los resultados que derivan de su implementación con estudiantes de las carreras de Ingeniería Química, Ingeniería en Alimentos y Licenciatura en Análisis Químicos y Bromatológicos de la Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales dependiente de la Universidad Nacional de Misiones. El análisis de la propuesta se realizó bajo los lineamientos de la teoría de representaciones semióticas de Duval. El encuadre metodológico que provee la Ingeniería Didáctica, a partir de la confrontación del análisis a priori y a posteriori de la propuesta, hizo posible obtener reflexiones e implicancias para la enseñanza del tema. A partir del estudio de las producciones de los estudiantes se analizan las transformaciones semióticas puestas en juego para los diferentes registros semióticos abordados. Los resultados obtenidos revelan que la conversión hacia el registro simbólico-algebraico del modelo matemático formal es el que prevalece, aun cuando no se lo solicita de forma explícita en la consigna. Además, a diferencia de lo ocurrido con la implementación de una propuesta similar con estudiantes de otra carrera (prueba piloto), en esta oportunidad no se observó prevalencia hacia el tratamiento escalar en detrimento del vectorial. Finalmente surge un interrogante acerca de si los estudiantes logran contrastar las conclusiones obtenidas en un registro con las emanadas en otro registro, aspecto que funcionaría como herramienta de validación de sus producciones. En este trabajo no se tiene suficiente evidencia para proporcionar una respuesta al respecto.

**Palabras clave:** Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales; Registros de representación semiótica; Ingeniería Didáctica.

---

Submitido em: 21/02/2022

Aceito em: 08/08/2022

Publicado em: 25/01/2023

<sup>1</sup>Profesora en Matemática. Correo electrónico: [gretelalefernandez@gmail.com](mailto:gretelalefernandez@gmail.com) ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2240-5968>

<sup>2</sup>Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales con mención en Física. Correo electrónico: [claudiamzang@gmail.com](mailto:claudiamzang@gmail.com) ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8567-2655>

<sup>3</sup>Magister en Matemática Aplicada. Correo electrónico: [natalia.leon@unam.edu.ar](mailto:natalia.leon@unam.edu.ar) ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8186-8834>

## **Projeto e implementação de uma situação-problema para o ensino e aprendizagem de sistemas de equações diferenciais lineares com estudantes de engenharia**

### **RESUMO**

É abordada uma descrição das ações realizadas para o projeto de uma situação problema que envolve trabalhar com um modelo de mistura, que requer o uso de um sistema de equações diferenciais lineares. Ao mesmo tempo, são apresentados os resultados derivados de sua implementação com alunos dos cursos de Engenharia Química, Engenharia de Alimentos e Análises Químicas e Bromatológicas da Faculdade de Ciências Exatas, Químicas e Naturais dependentes da Universidade Nacional de Misiones. A análise da proposta foi realizada sob as diretrizes da teoria das representações semióticas de Duval. O referencial metodológico proporcionado pela Engenharia Didática, a partir do confronto da análise a priori e a posteriori da proposta, possibilitou obter reflexões e implicações para o ensino da disciplina. A partir do estudo das produções dos alunos, são analisadas as transformações semióticas postas em jogo para os diferentes registros semióticos abordados. Os resultados obtidos revelam que a conversão para o registro simbólico-algébrico do modelo matemático formal é a que prevalece, mesmo quando não é explicitamente solicitada na instrução. Além disso, diferentemente do que ocorreu com a implementação de proposta semelhante com alunos de outra carreira (teste piloto), desta vez não se observou prevalência de tratamento escalar em detrimento do vetorial. Por fim, questiona-se se os alunos conseguem contrastar as conclusões obtidas em um prontuário com as emitidas em outro prontuário, aspecto que funcionaria como instrumento de validação de suas produções. Neste trabalho, não há evidências suficientes para fornecer uma resposta a esse respeito.

**Palavras-chave:** Sistemas de equações diferenciais lineares; Registros de representações semióticas; Engenharia Didática.

## **Design and implementation of a problem situation for teaching and learning systems of linear differential equations with engineering students**

### **ABSTRACT**

A description of the actions carried out for the design of a problem situation involving the work with a mixture model, which requires the use of a system of linear differential equations, is presented. At the same time, the results derived from its implementation with students of Chemical Engineering, Food Engineering and Chemical and Bromatological Analysis degrees of the Faculty of Exact, Chemical and Natural Sciences dependent on the National University of Misiones are presented. The analysis of the proposal was carried out under the guidelines of Duval's theory of semiotic representations. The methodological framework provided by Didactic Engineering, from the confrontation of the a priori and a posteriori analysis of the proposal, made it possible to obtain reflections and implications for the teaching of the subject. From the study of the students' productions, the semiotic transformations put into play for the different semiotic registers approached are analyzed. The results obtained reveal that the conversion to the symbolic-algebraic register of the formal mathematical model is the one that prevails, even when it is not explicitly requested in the instruction. Furthermore, unlike what happened with the implementation of a similar proposal with students from another career (pilot test), this time no prevalence was observed towards the scalar treatment to the detriment of the vectorial one. Finally, a question arises about whether the students are able to contrast the conclusions obtained in one record with those obtained in another record, an aspect that would work as a validation tool for their productions. In this work, there is not enough evidence to provide an answer in this regard.

**Keywords:** Systems of linear differential equations; Registers of semiotic representation; Didactic Engineering.

## INTRODUCCIÓN

El docente puede evaluar el impacto de las propuestas que diseña e implementa a diario en las asignaturas en las que se desempeña, a partir de la reflexión sobre su propia práctica. Esto puede realizarlo desde diversas miradas teóricas, que determinarán qué aspecto de la práctica se priorizará en el análisis. En particular, en este trabajo se considerarán las producciones de los estudiantes en situación de una propuesta diseñada e implementada en el marco de una investigación de tesis de postgrado, cuyo objetivo general consistió en diseñar e implementar prácticas significativas para la enseñanza de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

El trabajo realizado se fundamenta en las premisas del constructivismo, dado que se asume que este proceso de análisis provee de información al docente que le permite obtener conocimiento acerca de la comprensión que los estudiantes han logrado con la implementación de sus propuestas. Esta aproximación ocurre de manera indirecta, en este caso, la comprensión lograda se materializa en la producción escrita que presentan los alumnos.

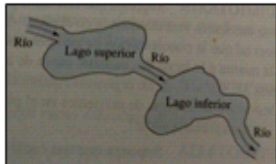
Este documento surgió como consecuencia de la confluencia de dos acciones llevadas adelante en el seno de la investigación. Por un lado, la revisión, ajuste y modificación de prácticas habituales en una Cátedra de Cálculo en carreras de Ingeniería y por el otro el análisis de los resultados obtenidos en una primera prueba piloto realizada con estudiantes del profesorado de Matemática.

La primera de estas acciones se concretó a partir del análisis de un instrumento de evaluación y de los resultados derivados de su implementación. En general, se observó que existe un corte entre lo realizado de manera analítica empleando el método de autovalores y autovectores en el registro algebraico y el trazado de una curva solución a partir del campo de direcciones en el registro gráfico. Ampliando un poco esta observación, se detectó que estudiantes que hallan correctamente la solución general del sistema y que aplican correctamente el método de valores propios, no logran trazar a mano (o si lo hacen, no lo concretan de manera correcta) una curva solución puntual. Lo que permitió inferir que la conexión entre el tratamiento algebraico de un sistema y su representación gráfica, no se produce de manera directa y lineal. No es suficiente contar con un buen dominio de las técnicas de resolución analítica para plasmar en un campo de direcciones el comportamiento de un sistema.

En lo que respecta a la segunda de las acciones realizadas, de las consignas abordadas, en este trabajo se citará la primera (Figura 1):

**Figura 1:** Primera consigna desarrollada en la prueba piloto

**Consigna N°1:** En una cierta provincia del país Z existen dos lagos que se encuentran comunicados por un río, tal como se muestra en la siguiente figura. Los mismos siempre fueron reconocidos por la belleza y pureza de sus aguas cristalinas, hasta que en un determinado momento una empresa extranjera decidió desechos 2000 kilogramos de productos tóxicos (contaminantes) en el lago superior. El lago superior contiene 700.000 litros de agua, el lago inferior contiene 400.000 litros, y el río circula a razón de 1.500 litros por hora. Se supone que el contaminante se dispersa con rapidez suficiente para que la mezcla del mismo y el agua sea homogénea en todo momento.



*Sugerencia:* Tener presente que la tasa de variación de contaminante con respecto al tiempo, en cada lago, deberá ser igual a la tasa de entrada menos la tasa de salida.

- Plantea un modelo matemático que describa el comportamiento de la cantidad de contaminante  $P_1(t)$  en el lago superior en el momento  $t$ .
- Si  $P_2(t)$  es la cantidad de contaminante en el lago inferior en el momento  $t$ , ¿Cómo será el modelo matemático que permite caracterizar la situación del lago inferior?
- ¿Podría determinar qué sucede con la cantidad de contaminante en cada uno de los lagos a largo plazo?

**Fuente:** datos de la investigación, 2022

El análisis de las producciones reveló que la propuesta implementada, por la forma en que fue diseñada (requería la formulación de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales parcialmente desacoplado con coeficientes constantes), no viabilizó el surgimiento de procedimientos en el marco vectorial ni la realización de conjeturas que involucraran al tiempo (variable independiente) por parte de los estudiantes. Mayores detalles al respecto pueden ser consultados en un trabajo preliminar (FERNÁNDEZ von METZEN; LEÓN; ZANG, 2021). De la ejecución de este trabajo previo, surgió la necesidad de modificar las consignas presentadas a fin de lograr la emergencia de cuestiones no contempladas por los estudiantes en dicha prueba piloto, y que se considera que son relevantes en el estudio formal de los sistemas de ecuaciones diferenciales.

El presente escrito pretende exponer la comparación entre los análisis a priori y a posteriori de un problema implementado en el marco de un trabajo grupal domiciliario con estudiantes de Ingeniería Química e Ingeniería en Alimentos y Licenciatura en Análisis Químicos y Bromatológicos de la Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales

(FCEQyN) dependiente de la Universidad Nacional de Misiones (UNaM) al finalizar el segundo cuatrimestre del año 2017.

En las próximas secciones se presentará una breve síntesis del marco teórico utilizado en la investigación y de los aspectos metodológicos considerados tanto en este trabajo como en el preliminar antes mencionado. También se mostrarán cuestiones ligadas al análisis a priori y a posteriori de la propuesta didáctica implementada y las reflexiones que emergen de este trabajo.

## MARCO TEÓRICO

Los sustentos teóricos que guiaron la investigación pueden ser contemplados desde dos aristas: una disciplinar o matemática y otra de carácter didáctico.

### Aspectos matemáticos generales

En primer lugar, se considera que un sistema diferencial lineal puede ser escrito en la forma:

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ x'_2 &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ &\vdots \\ x'_n &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{aligned} \quad (1)$$

Los coeficientes  $a_{ij}$  y las funciones  $f_i$  son constantes o funciones de  $t$ , pero no de  $x_1, \dots, x_n$ . Cuando  $f_i(t) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , el sistema lineal es **homogéneo**, de otro modo es no homogéneo.

El sistema lineal dado en (1) se expresa en forma matricial  $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{F}(t)$ .

$$\text{Con } A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

Si se le añade una condición inicial  $\mathbf{x}(t_0) = \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{pmatrix}$  y  $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$ , entonces el

problema de valores iniciales (PVI) escrito en forma matricial vendrá dado por

$$\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{F}(t) \text{ sujeto } \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 .$$

En este trabajo se analizará el sistema homogéneo asociado  $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$ . Para hallar las soluciones de este sistema se supone que las mismas tienen la forma  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}e^{\lambda t}$ . Los valores de  $\lambda$ , denominados autovalores o valores propios, se determinan a partir de resolver:

$$|A - \lambda I| = \det(A - \lambda I) = 0$$

Luego, para cada uno de los autovalores, se determinan los autovectores o vectores propios ( $\mathbf{v}$ ) a partir de resolver la ecuación vectorial:

$$(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

La solución general se obtiene al aplicar el principio de superposición. Una explicación más detallada se ofrece en Edwards y Penney (2001).

### **Aspectos didácticos generales**

En la enseñanza y aprendizaje de los sistemas de ecuaciones diferenciales es importante tener presente, desde el registro algebraico, la representación escalar y vectorial que los mismos admiten y los métodos de resolución vinculados a cada una de ellas y los métodos numéricos como por ejemplo el de Euler. Asimismo, los métodos cualitativos como el del campo de direcciones y el análisis del plano de fase permiten su abordaje desde el registro gráfico.

Orientaron este trabajo los aportes de la teoría de Duval (2016), acerca de las transformaciones semióticas (conversión y tratamiento) involucradas en el abordaje de los sistemas. De acuerdo a Duval las representaciones semióticas constituyen el único medio de acceso a los objetos matemáticos ya que a diferencia de lo que sucede con las ciencias fácticas, en Matemática no es posible un acceso perceptivo o instrumental al objeto de estudio. Un mismo objeto matemático admite más de una representación semiótica; y estas se diferencian según el tipo de procesos cognitivos que activan. Desde esta teoría, hay dos tipos de transformaciones de representaciones semióticas: tratamiento y conversión. Se está ante un tratamiento cuando la transformación genera otra representación en el mismo registro. Por otro lado, se está frente a una conversión “cuando la transformación produce una representación en un registro distinto al de la representación inicial” (DUVAL, 1999, p.40). Las particularidades de cómo las transformaciones semióticas se plasman en los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales fueron detalladas en el trabajo preliminar antes mencionado.

En consonancia con la teoría de registros de representación semiótica, en este trabajo se interroga si los cambios introducidos en la propuesta de enseñanza habilitan a una mayor profundidad en el manejo de las transformaciones semióticas (tratamiento y conversión)

utilizadas por los estudiantes en lo relativo al aprendizaje de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

## **METODOLOGÍA**

Los alumnos que participaron de la investigación son estudiantes que cursaron, durante el ciclo lectivo 2017, la asignatura Análisis Matemático II, correspondiente al segundo cuatrimestre del segundo año de las carreras Ingeniería Química e Ingeniería en Alimentos de la FCEQyN-UNaM. Cabe destacar que el régimen de acreditación de esta materia es de carácter promocional y que uno de los requisitos para alcanzar la regularidad es la realización y defensa de un Trabajo Práctico Grupal Domiciliario (TPGD). En general, el TPGD es proporcionado a los estudiantes dos o tres semanas antes de finalizar el cuatrimestre, y su defensa se concreta luego de que se efectúan los dos exámenes parciales.

Particularmente, en este trabajo se analizaron las respuestas dadas por los alumnos a un problema incluido en dicho TPGD, que permitió indagar cuáles son las representaciones semióticas utilizadas por los estudiantes frente a una situación de modelado, y de qué manera su resolución favorece a que se establezcan vínculos entre la mirada escalar y vectorial de los sistemas de ecuaciones diferenciales.

Los resultados que se muestran en la siguiente sección corresponden al análisis de las respuestas dadas por los estudiantes distribuidos en ocho grupos de trabajo, de cuatro integrantes como máximo cada uno. El criterio de agrupamiento fue a libre elección de los estudiantes.

Se tomaron en consideración los lineamientos provenientes de la Ingeniería Didáctica. En particular, se describen los resultados alcanzados en el marco de las fases de análisis a priori y a posteriori y su contrastación. Por razones de espacio, los resultados obtenidos en el ámbito de las otras fases de la Ingeniería no son incluidos en este documento. En lo que respecta al análisis a priori, segunda de las fases de la Ingeniería, se analizaron cuáles son los posibles procedimientos que eventualmente emplearían los estudiantes para resolver las consignas propuestas y los argumentos que podrían llegar a utilizar para validar sus producciones. Finalmente, se analizaron las producciones de los estudiantes (que se entregaron por escrito tal como se había pautado con anterioridad), como parte de la última fase, la de los análisis a posteriori y evaluación (ARTIGUE, 1995).



Por otro lado, se consideraron pertinentes para el desarrollo del presente trabajo las descripciones realizadas por Bardín (1996) y Ander-Egg (2010) sobre las diferentes metodologías de investigación en Ciencias Sociales. En este estudio, se adopta un enfoque descriptivo, en el que se usaron técnicas de análisis de contenido para recopilar datos con los objetivos prefijados por los investigadores.

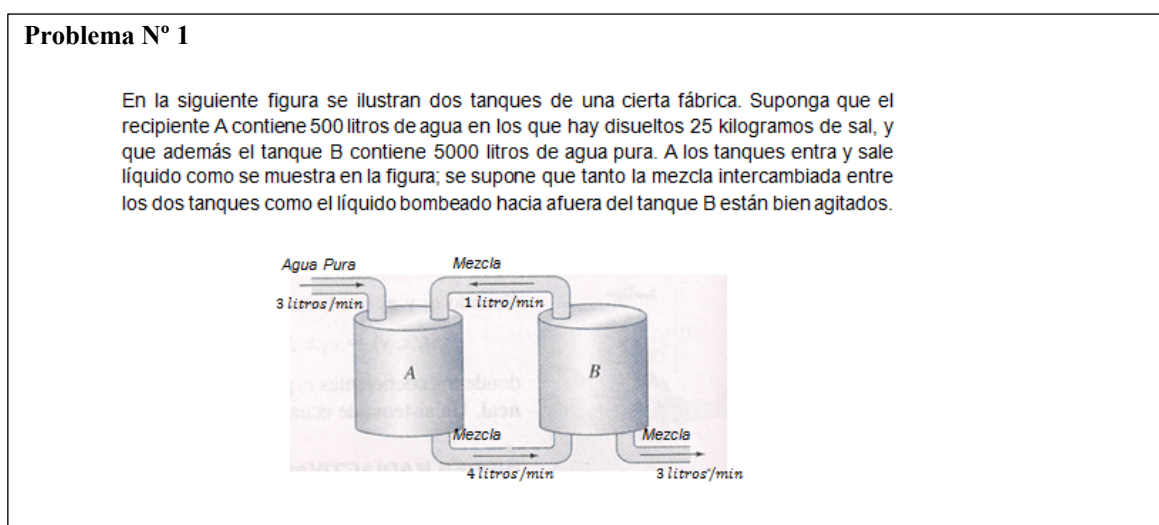
## **ANÁLISIS A PRIORI Y A POSTERIORI: DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS**

### **Análisis a priori de la propuesta didáctica**

Para el TPGD se eligieron dos situaciones que estuvieran ligadas a la mezcla de sustancias, a diferencia de la situación trabajada en la prueba piloto (FERNÁNDEZ von METZEN; LEÓN; ZANG, 2021), se decidió armar una propuesta en la que no solicita de manera explícita el planteo de un modelo matemático que describa el comportamiento del fenómeno. Se esperaba que los estudiantes puedan utilizar el modelo como una herramienta para dar respuestas a los interrogantes planteados, y que por ende logren percibir las ventajas que ofrece sin que éste se convierta como un fin en sí mismo a ser estudiado matemáticamente. En el desarrollo de este trabajo se recuperarán cuestiones vinculadas a la primera de las situaciones.

El problema presentado a los alumnos se muestra en la Figura 2. Su enunciado es una adaptación de un ejemplo presentado en la sección 3.3 del libro de texto de Zill D. (2007). Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado. Thomson. México.

**Figura 2:** Situación problemática sobre la que se sustentan las actividades solicitadas a los alumnos.



**Fuente:** datos de la investigación, 2022



En la situación intervienen dos compartimientos interconectados, para la que el tanque A recibe la influencia tanto del flujo que proviene del exterior como del que llega desde el tanque B. Esto hace que no se tenga un modelo en cascada (a diferencia de la situación planteada en la prueba piloto que sí involucraba un modelo de cascada). El sistema que subyace a esta situación problema se encuentra acoplado. Se cree que esta modificación induce a que su tratamiento algebraico este orientado hacia la perspectiva vectorial (como el sistema es acoplado, el tratamiento escalar por sustitución resulta poco económico).

Atendiendo a la información alcanzada de la experimentación con la propuesta de los lagos (prueba piloto), y conforme a la teoría de Duval, se decidió que el primer ítem estuviese orientado hacia la transformación de los registros gráfico y verbal (lenguaje natural) dentro de una perspectiva escalar. La primera de las consignas se muestra en el gráfico 1 de la Figura 3.

**Figura 3:** Gráficos que forman parte de la primera consigna

- a) Dados los siguientes pares de gráficos, analizar cuál de ellos representa a las cantidades de sal presentes en cada tanque. Justifique la elección.

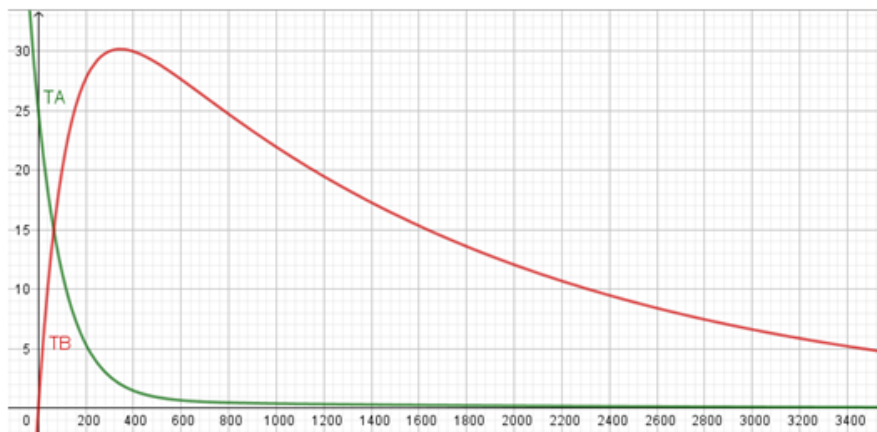


Gráfico 1

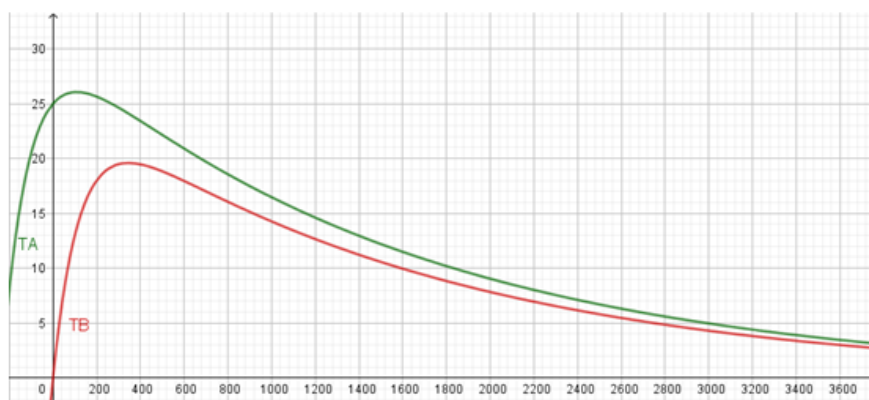


Gráfico 2

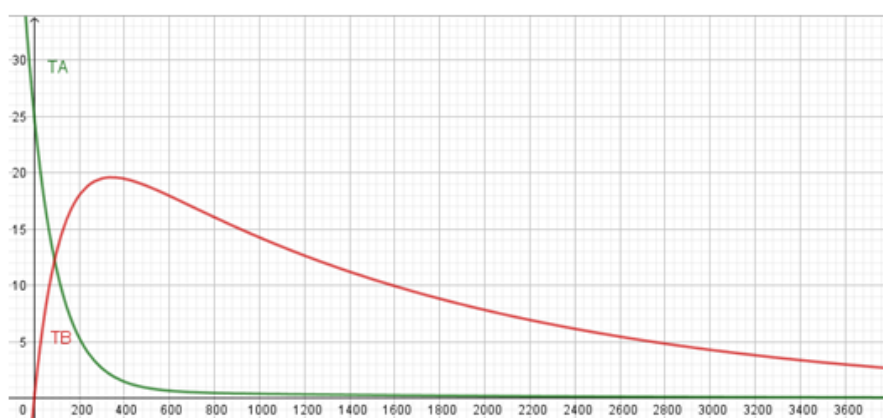
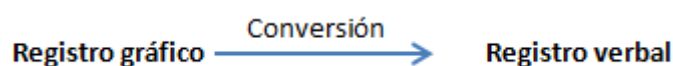


Gráfico 3

La finalidad de esta primera consigna era promover la conversión de registros, más precisamente la dada desde el registro gráfico hacia el registro verbal, de modo que los estudiantes puedan empezar a pensar en el comportamiento de la sal en ambos tanques a medida que transcurre el tiempo, sin la necesidad de construir aún el modelo matemático formal. El hecho de solicitar que justifiquen la elección realizada estaba orientado a que los estudiantes presenten argumentos suficientes que permitan validar dicha elección. La transformación implicada se esquematiza de la siguiente manera:



El hecho de trabajar inicialmente con el registro gráfico de las funciones componentes de la solución del PVI, y que luego, en una segunda instancia, se propicie el análisis del registro gráfico de la solución a través del campo de direcciones, podría contribuir a que los estudiantes logren alcanzar una mirada diferente de la situación, pasando de lo escalar a lo vectorial. Esto

está en consonancia con la propuesta sugerida en el libro de texto de Blanchard, Devaney & Hall (1998), en el que se prioriza el análisis cualitativo de los sistemas aun cuando no se disponga de una fórmula explícita para la solución del PVI.

El primer par de curvas no corresponde a la solución del PVI, ya que el gráfico correspondiente al tanque B (TB) no responde a la situación en estudio. Al inicio se encuentra limpio, lo que concuerda con la condición  $M_B(0) = 0$  que puede leerse del gráfico. Sin embargo, el máximo alcanzado, supera la cantidad inicial de sal disuelta en el tanque A (TA). Además, como el flujo que proviene del exterior hacia éste no contiene sal, ya que se trata de agua pura, bajo ninguna circunstancia, de acuerdo a las condiciones del problema, el tanque B podrá superar los 25 kilogramos de sal, descartándose esta opción.

El segundo par de curvas tampoco corresponde al problema planteado. Si bien la condición inicial es correcta para el TA puesto que inicia con 25 kilogramos de sal (obviando los valores de  $t$  negativos que se visualizan en el gráfico<sup>4</sup>), no lo es el hecho de que desde el instante inicial hasta un cierto tiempo  $t = t_1$  la cantidad de sal estaría aumentando. Esto significaría que se estaría agregando más sal en el sistema, por tanto habría una contradicción con el flujo de entrada que importa agua pura hacia el tanque A, o bien con la condición inicial  $M_B(0) = 0$  (dado que A recibe agua tanto del exterior como de B).

El tercer par de curvas es el correcto, pues en el gráfico de TA se observa que la cantidad inicial de sal coincide con las condiciones iniciales del problema  $M_A(0) = 25$ , que su derivada es siempre negativa y que a largo plazo la curva tiende a cero de manera asintótica, lo cual significa que la sal se está eliminando de su interior, y a partir de un determinado momento quedará limpio. En relación al gráfico del segundo tanque (TB), se visualiza que al inicio se encuentra limpio dado que  $M_B(0) = 0$ , pero inmediatamente la cantidad de sal empieza a aumentar hasta un cierto valor de tiempo, en ese lapso la derivada es positiva, hasta que alcanza su máximo. Luego empieza a disminuir la cantidad de sal ya que, no sólo parte de ella sale hacia el exterior, sino que además el agua que recibe de A tiene cada vez menos sal porque en el tanque A está entrando agua pura, por tanto, la cantidad de sal en el tanque B será cada vez menor hasta que finalmente se limpie.

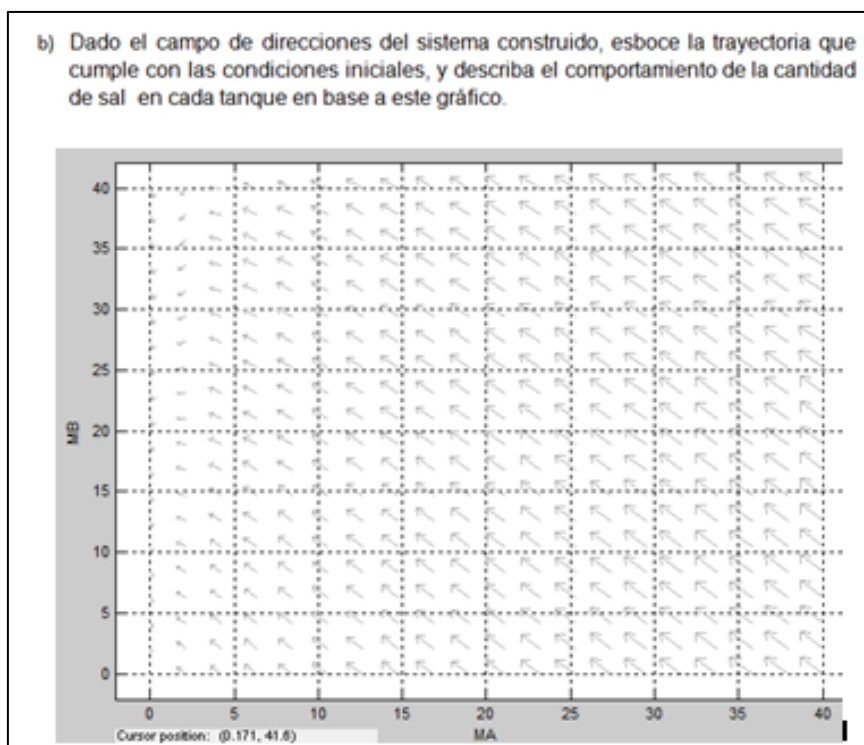
Luego de que se haya trabajado con el ítem a) antes descripto, se pensó conveniente presentar el ítem b) que se muestra en la figura 4. El ítem b) envuelve una doble transformación

---

<sup>4</sup> Las cantidades de sal correspondientes a los valores negativos de la variable independiente, carecen de sentido, de acuerdo al contexto del problema, ya que  $t$  representa tiempo.

de registros de representación semiótica. El trazado de la trayectoria en el plano fase, respetando las condiciones iniciales del problema, implica un tratamiento dentro del registro gráfico. En lo que atañe a la descripción del comportamiento de la cantidad de sal en cada tanque, conlleva una conversión de registros, del gráfico hacia el registro del lenguaje natural.

**Figura 4:** Ítem b) del Problema 1



**Fuente:** datos de la investigación, 2022

Se cree que promover la descripción de la trayectoria en el plano fase, puede contribuir a que los estudiantes contrasten los argumentos esbozados en la elección realizada en el ítem anterior y, por ende, generen herramientas que les permita validar sus razonamientos.

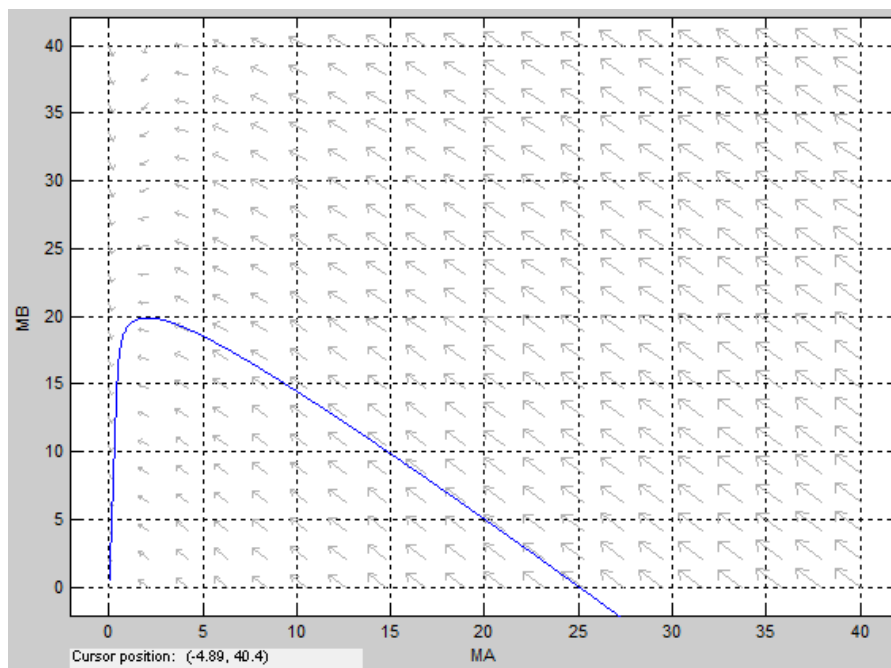
En cuanto al tratamiento en el registro gráfico, que consiste en el trazado de la curva solución asociado al PVI, se puede realizar algunos señalamientos. El registro gráfico de la solución del problema plasmado en el campo de direcciones, es un recurso que posibilita la percepción visual del comportamiento de la sal en forma simultánea en ambos tanques. Esto es posible siempre y cuando el alumno pueda localizar correctamente en el plano fase las condiciones iniciales, y además distinga el sentido de orientación en que hay que recorrer la curva para poder interpretar correctamente la información. En general, en el plano fase se tiene

una representación del conjunto imagen de las curvas trayectorias, y la variable independiente se manifiesta en forma implícita.

Para esta situación, la lectura será de derecha a izquierda, cuando  $t = 0$  la cantidad de sal en el tanque A es  $M_A = 25$  y para el tanque B es  $M_B = 0$ . A medida que  $t$  aumenta, la cantidad de  $M_A$  empieza a decrecer, y en simultáneo el comportamiento de  $M_B$  es creciente, dado que comienza a recibir la sal proveniente del primer tanque. Este crecimiento se produce hasta un determinado instante, luego la cantidad de sal en el tanque B empieza a decrecer, con  $M_B \rightarrow 0$ , convergiendo ambas variables en el punto de equilibrio  $(0,0)$ .

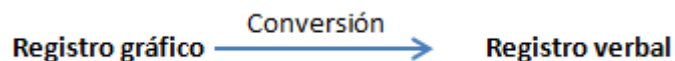
El trazado de la trayectoria puede realizarse a mano, sabiendo que la curva solución debe ser tangente a los vectores proporcionados en el campo de direcciones, tal como se muestra en la Figura 5.

**Figura 5:** Trayectoria trazada de acuerdo a las condiciones iniciales dadas en el problema



**Fuente:** datos de la investigación, 2022

Otra transformación semiótica que emerge en la resolución de esta actividad es la conversión hacia el registro del lenguaje natural, puesto que se pide que a partir del gráfico se realice una descripción del comportamiento de la sal en cada tanque a medida que pasa el tiempo. La situación se esquematiza de la siguiente forma:



En esta parte se espera que los estudiantes puedan poner en palabras lo que se observa en el gráfico acerca del fenómeno en estudio, y que a su vez puedan vislumbrar cuáles son los alcances y las limitaciones que encierra la representación de la curva en el plano fase. Si bien brinda información valiosa con respecto a la cantidad de sal en cada tanque, a cómo se relaciona el comportamiento de uno en relación al otro, a la tendencia que siguen ambos a largo plazo, no se tiene acceso directo a la información referida a la variable independiente.

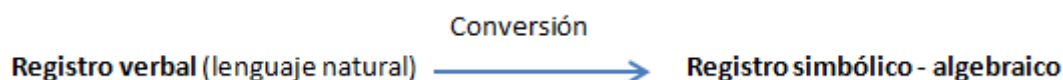
A fin de poner en evidencia que los aspectos vinculados con el tiempo no siempre se pueden responder a partir de la información presente en el plano fase, se dispuso incluir dos ítems que hicieran referencia a interrogantes específicos referidos al tiempo, a fin de continuar analizando la presencia implícita de dicha variable en el plano fase. Esto se expone en las Figuras 6 y 7.

**Figura 6:** Ítem c) del problema 1.

c) ¿Cuánta sal habrá como máximo en el tanque B? ¿Cuánta sal hay en ese mismo instante en el tanque A? Determine en qué instante se produce esta situación.

**Fuente:** datos de la investigación, 2022

Las dos primeras preguntas se pueden responder de manera aproximada a través de la información que proporciona el plano fase, o bien del par de gráficas analizadas en el ítem a), incluso lo referido al tiempo podría leerse del ítem a). Sin embargo, si se quiere determinar con mayor precisión esas cantidades, y el instante en qué se produce el evento, es posible que se recurra a la construcción del modelo matemático en forma simbólica, envolviendo una conversión hacia el registro algebraico. Esta conversión se plasma en el siguiente esquema



A partir de la información provista en el enunciado, el modelo matemático que se ajusta al primer tanque (TA) adquiere la forma:

$$\frac{dM_A}{dt} = \text{tasa de entrada} - \text{tasa de salida}$$

Para este caso, la tasa entrada viene dada por la suma de lo que ingresa del exterior (agua pura), y lo que proviene del tanque B:

$$TE = 0 + 1 \frac{\text{litros}}{\text{min}} \cdot \frac{M_B(t) \text{ kilogramos}}{5000 \text{ litros}} = \frac{M_B(t) \text{ kilogramos}}{5000 \text{ min}}$$

La tasa de salida viene dada por lo que se dirige hacia el tanque B:

$$TS = 4 \frac{\text{litros}}{\text{min}} \cdot \frac{M_A(t) \text{ kilogramos}}{500 \text{ litros}} = \frac{M_A(t) \text{ kilogramos}}{125 \text{ min}}$$

Por tanto:

$$\frac{dM_A}{dt} = \text{tasa de entrada} - \text{tasa de salida}$$

$$\frac{dM_A}{dt} = \frac{M_B(t) \text{ kilogramos}}{5000 \text{ min}} - \frac{M_A(t) \text{ kilogramos}}{125 \text{ min}}$$

Reordenando términos y expresando sin las unidades de medida:

$$\frac{dM_A}{dt} = -\frac{1}{125}M_A + \frac{1}{5000}M_B \quad M_A(0) = 25 \quad \text{Modelo matemático para el tanque A}$$

Siguiendo un razonamiento similar para el tanque B:

$$\frac{dM_B}{dt} = \text{tasa de entrada} - \text{tasa de salida}$$

Para este tanque, la tasa entrada viene dada solamente por lo que proviene del primer tanque, que coincide precisamente con su tasa de salida.

$$TE = \frac{M_A(t) \text{ kilogramos}}{125 \text{ min}}$$

En cambio, la tasa de salida viene dada por la suma entre lo que egresa hacia el exterior y lo que se dirige hacia el tanque A:

$$\begin{aligned} TS &= \frac{M_B(t) \text{ kilogramos}}{5000 \text{ min}} + \frac{3M_B(t) \text{ kilogramos}}{5000 \text{ min}} \\ &= \frac{M_B(t) \text{ kilogramos}}{5000 \text{ min}} + \frac{M_B(t) \text{ kilogramos}}{1250 \text{ min}} \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\frac{dM_B}{dt} = \text{tasa de entrada} - \text{tasa de salida}$$

$$\frac{dM_B}{dt} = \frac{M_A(t) \text{ kilogramos}}{125 \text{ min}} - \left( \frac{M_B(t) \text{ kilogramos}}{5000 \text{ min}} + \frac{M_B(t) \text{ kilogramos}}{1250 \text{ min}} \right)$$

Reordenando términos y expresando sin las unidades de medida:



$$\frac{dM_B}{dt} = \frac{1}{125}M_A - \frac{1}{1250}M_B \quad M_B(0) = 0 \quad \text{Modelo matemático para el tanque B}$$

En síntesis, el modelo matemático para el problema de los tanques viene dado por:

$$\begin{cases} \frac{dM_A}{dt} = -\frac{1}{125}M_A + \frac{1}{5000}M_B & M_A(0) = 25 \\ \frac{dM_B}{dt} = \frac{1}{125}M_A - \frac{1}{1250}M_B & M_B(0) = 0 \end{cases}$$

Emergen dos cuestiones a analizar a posteriori en función de los procedimientos que pongan en juego los estudiantes para responder este ítem. Una de ellas es la conversión y el tratamiento de registros que envuelve el trabajar de manera algebraica, lo cual implica utilizar el método de autovalores y autovectores, ya que el sistema involucrado es acoplado. La otra cuestión es la de analizar hasta qué punto es conveniente invertir tiempo adicional en la manipulación algebraica para ganar precisión, cuando los valores obtenidos no resultan exactos (comprende valores irracionales) como lo es para este caso en particular. Quizá resulte más conveniente obtener tales valores a través de un software, y trabajar con una aproximación de ellos.

La conversión de registros vendrá dada mediante la construcción del modelo a partir del enunciado del problema, en caso de que para los ítems anteriores no lo hayan efectuado aún. De lo contrario, la resolución del PVI implicará un tratamiento en el registro algebraico.

Apelando al método de autovalores para la resolución del sistema, se lo expresa en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \frac{dM_A}{dt} \\ \frac{dM_B}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{125} & \frac{1}{5000} \\ \frac{1}{125} & -\frac{1}{1250} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_A \\ M_B \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} M_A \\ M_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por definición de autovalores y autovectores  $(A - \lambda I)\mathbf{v} = 0$ , se halla:

$$\lambda_1 = \frac{-11+\sqrt{91}}{2500} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 18 + 2\sqrt{91} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \lambda_2 = \frac{-11-\sqrt{91}}{2500} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 18 - 2\sqrt{91} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{m}(t) = C_1 e^{\left(\frac{-11+\sqrt{91}}{2500}\right)t} \begin{pmatrix} 1 \\ 18 + 2\sqrt{91} \end{pmatrix} + C_2 e^{\left(\frac{-11-\sqrt{91}}{2500}\right)t} \begin{pmatrix} 1 \\ 18 - 2\sqrt{91} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{m}(0) = C_1 e^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 18 + 2\sqrt{91} \end{pmatrix} + C_2 e^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 18 - 2\sqrt{91} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad C_1 = \frac{25}{2} - \frac{225}{182}\sqrt{91} \quad \text{y} \quad C_2 = \frac{25}{2} + \frac{225}{182}\sqrt{91}$$

Solución del PVI:

$$\mathbf{m}(t) = \left(\frac{25}{2} - \frac{225}{182}\sqrt{91}\right) e^{\left(\frac{-11+\sqrt{91}}{2500}\right)t} \begin{pmatrix} 1 \\ 18 + 2\sqrt{91} \end{pmatrix} + \left(\frac{25}{2} + \frac{225}{182}\sqrt{91}\right) e^{\left(\frac{-11-\sqrt{91}}{2500}\right)t} \begin{pmatrix} 1 \\ 18 - 2\sqrt{91} \end{pmatrix}$$

Tal como se observa en el desarrollo, los valores asociados a  $\lambda$  y  $\mathbf{v}$  corresponden a números irracionales, por tanto si se utiliza un software para su cálculo, se puede economizar tiempo en el armado de la solución del PVI.

Con ayuda de un software se obtiene los siguientes valores:

$$\lambda_1 = -0,0006 \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 37,02 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \lambda_2 = -0,0082 \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1,07 \end{pmatrix}$$

En consecuencia:

$$\mathbf{m}(t) = 0,70e^{-0,0006t} \begin{pmatrix} 1 \\ 37,02 \end{pmatrix} + 24,29e^{-0,0082t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1,07 \end{pmatrix}$$

$$M_A(t) = 0,70e^{-0,0006t} + 24,29e^{-0,0082t} \quad \text{Expresión que describe la cantidad de sal en el tanque A, en función del tiempo}$$

$$M_B(t) = 25,91e^{-0,0006t} - 25,99e^{-0,0082t} \quad \text{Expresión que describe la cantidad de sal en el tanque B, en función del tiempo}$$

Una vez halladas las expresiones anteriores, se podrá apelar al uso de la primera derivada para funciones reales de variable real, y determinar la cantidad de sal máxima en el tanque B. Dado que la derivada de  $M_B(t)$  igualada a cero, da lugar a una ecuación que no resulta sencilla de resolver a mano, es factible la manipulación de un software que permita obtener el valor del tiempo en el que la cantidad de sal es máxima.

Cantidad de sal máxima en el tanque B:

$$M'_B(t) = 0 \Rightarrow t \cong 344,48 \text{ minutos} \Rightarrow M_B(344,48) = 19,53 \text{ kilogramos}$$

Cantidad de sal en el tanque A en ese mismo instante:

$$M_A(344,48) = 2,01 \text{ Kilogramos}$$

Una forma de validar tales resultados es observando el gráfico de la curva solución en el plano fase, pero también, desde las ecuaciones del sistema es posible detectar la proporción que guardan ambas cantidades cuando se produce el máximo en el tanque B.

$$\frac{dM_B}{dt} = \frac{1}{125}M_A - \frac{1}{1250}M_B \Rightarrow \frac{dM_B}{dt} = 0 \Rightarrow M_B = 10M_A$$

Esta igualdad, indica que la cantidad de sal en el tanque B debería ser 10 veces de lo que hay en el tanque A en ese instante, de lo cual se deriva que los cálculos anteriores se ajustan a dicha proporción entre ambas cantidades.

El último ítem, se pensó con el fin de continuar con el sentido forjado a lo largo de todo el desarrollo, dentro del contexto del problema, con las derivadas que aparecen en cada una de las ecuaciones.


**Figura 7:** Ítem d) del problema 1.

d) ¿Podría determinar a qué velocidad se está eliminando la sal en cada tanque para el instante  $t = 500$  minutos? ¿A partir de qué instante comienza a eliminarse la sal en el tanque B?

**Fuente:** datos de la investigación, 2022

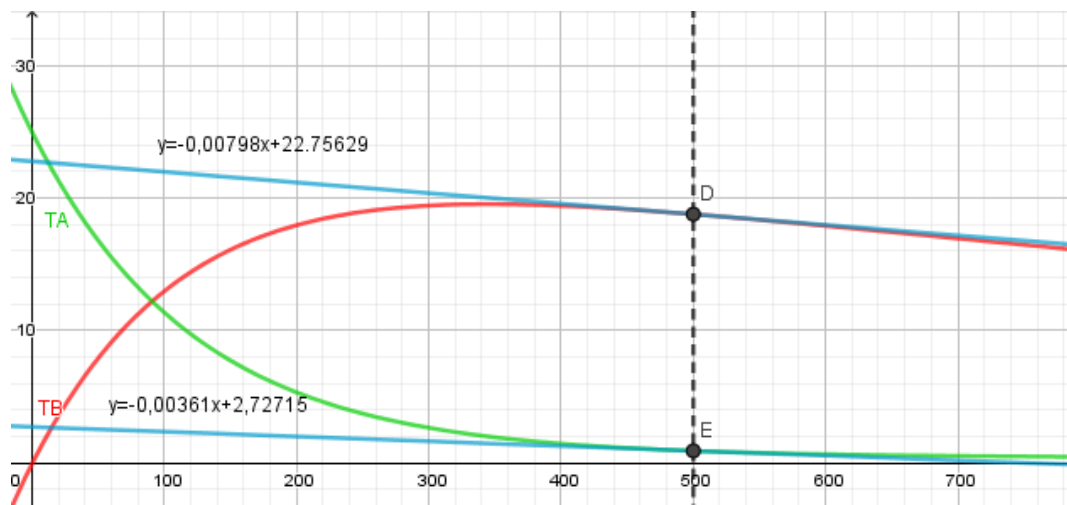
Si bien se tomó un valor de tiempo en el que de ambos tanques se está eliminando la sal, ya que se trata de un valor posterior a  $t \cong 344,48$ , la idea que subyace es que lo estudiantes puedan reconocer en el tiempo suministrado ( $t = 500$ ), el campo de direcciones tendrá asociado un vector tangente a la curva solución cuyas componentes son negativas. Estas componentes proporcionan la velocidad a la que se está eliminando la sal en cada tanque, y corresponden a los valores de las derivadas obtenidas.

Lo descrito anteriormente, puede bosquejarse a través del siguiente tratamiento algebraico:

$M_A(500) = 0,92112$ $M_B(500) = 18,7638$ $M'_A(500) = -0,00361$ $M'_B(500) = -0,00798$		<p>En el punto <math>(0,9211; 18,7648)</math> de la curva solución trazada en el plano fase, el vector tangente asociado tiene componentes <math>\mathbf{v} = (-0,0036; -0,0079)</math>, y proporciona información sobre la velocidad a la que se está eliminando la sal en cada tanque para <math>t = 500</math>.</p>
--	---	--

Si esto mismo se analiza gráficamente para el par de curvas seleccionadas en el ítem a) se observa que para ese valor de tiempo ambas curvas poseen derivada negativa, tal como se muestra en la Figura 8.

**Figura 8** – Rectas tangentes trazadas en cada curva componente para  $t = 500$  min



Fuente: datos de la investigación, 2022

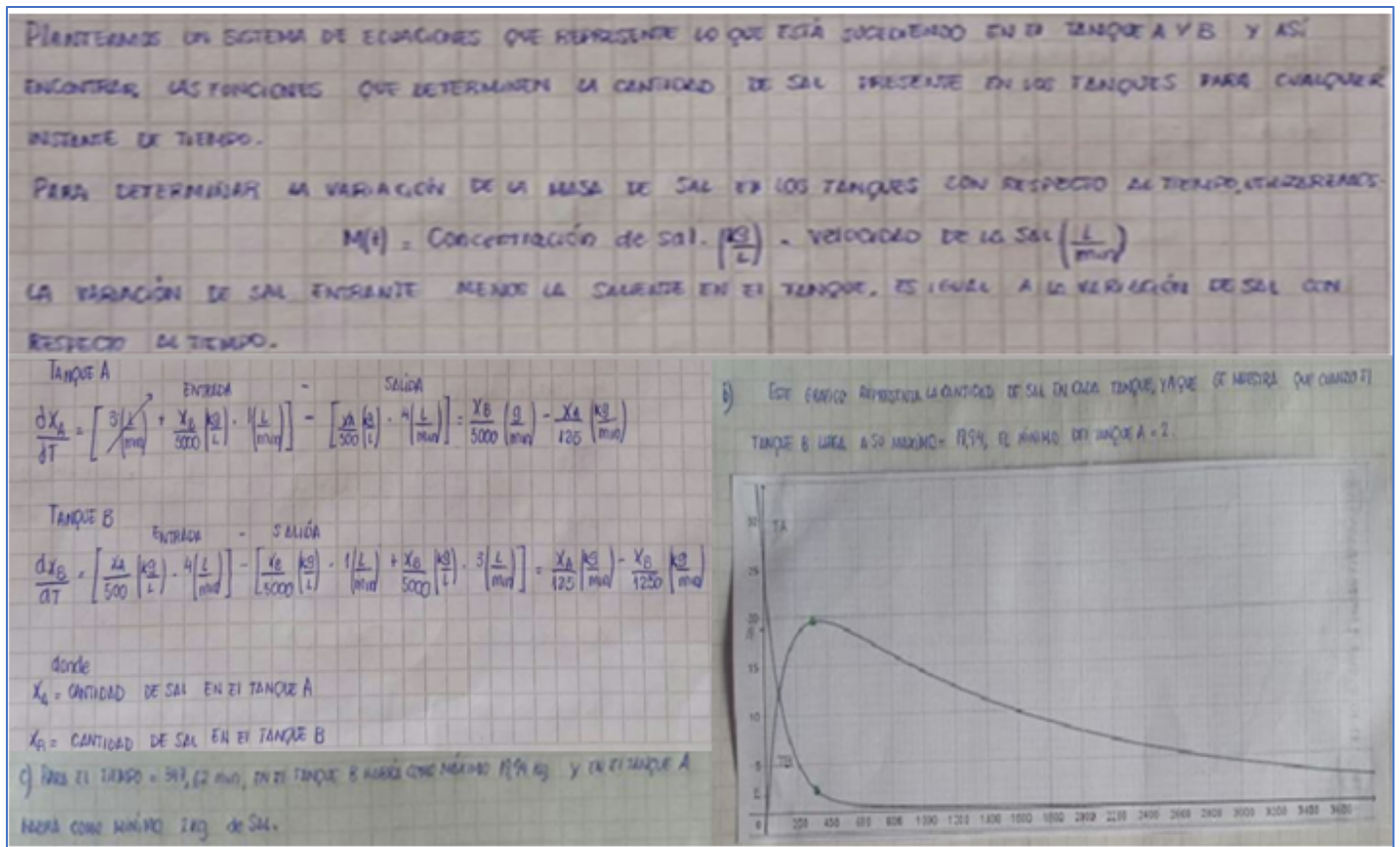
La respuesta a la segunda pregunta emana de lo realizado en el ítem c), y contribuye a concluir que para un valor de tiempo menor a  $t \cong 344,48$ , en el tanque B su derivada será positiva, y por tanto, en los vectores tangentes se podrá apreciar que su segunda componente es positiva.

### **Análisis a posteriori. Discusión de las respuestas dadas por los estudiantes en cada uno de los ítems**

Tal como se había anticipado en el análisis a priori, 6 de los 8 grupos conformados, respondieron el ítem a) haciendo una conversión directa del registro gráfico hacia el registro verbal, sin necesidad de plantear el modelo matemático para poder seleccionar el par de gráficas que se ajusta a la situación planteada en el enunciado.

Los dos grupos que armaron previamente el modelo, lo resuelven utilizando el método de autovalores y autovectores, y de este modo logran expresar la solución del PVI a través de cada una de las funciones componentes. A partir de esto, se observa dos procedimientos diferentes: uno de ellos opta por plasmar sobre un sistema de ejes cartesianos las funciones componentes y realizar comparaciones con los tres gráficos dados en la consigna para determinar cuál es el correcto. El otro grupo, en cambio, las utiliza para responder primero el ítem c) y en función de la información que obtiene para ese ítem, responde el ítem a), utilizándola como argumento de la elección realizada (Figura 9).

**Figura 9** – Planteo del modelo y resolución del ítem c), como paso previo para responder ítem a)



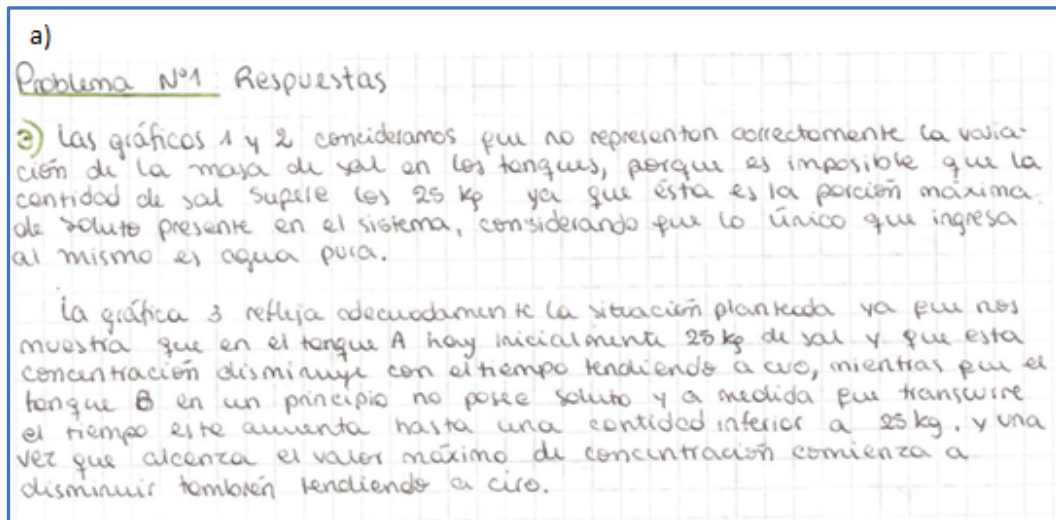
Fuente: datos de la investigación, 2022

Entre las respuestas se observa que uno de los argumentos más utilizados, es el de señalar como información clave de la elección, la cantidad máxima de sal que puede haber en el sistema, es decir, que no puede superar los 25 kilogramos iniciales de sal, ya que en el tanque A ingresa agua pura, como se muestra en las Figuras 10 a) y b).

En algunas de las respuestas se detecta confusión entre el uso asignado a las magnitudes cantidad de sal y concentración, aun cuando en el enunciado se aclara que en los pares de gráficos se encuentra representada la variable cantidad de sal, tal como se visualiza en las Figuras 10 a) y c).

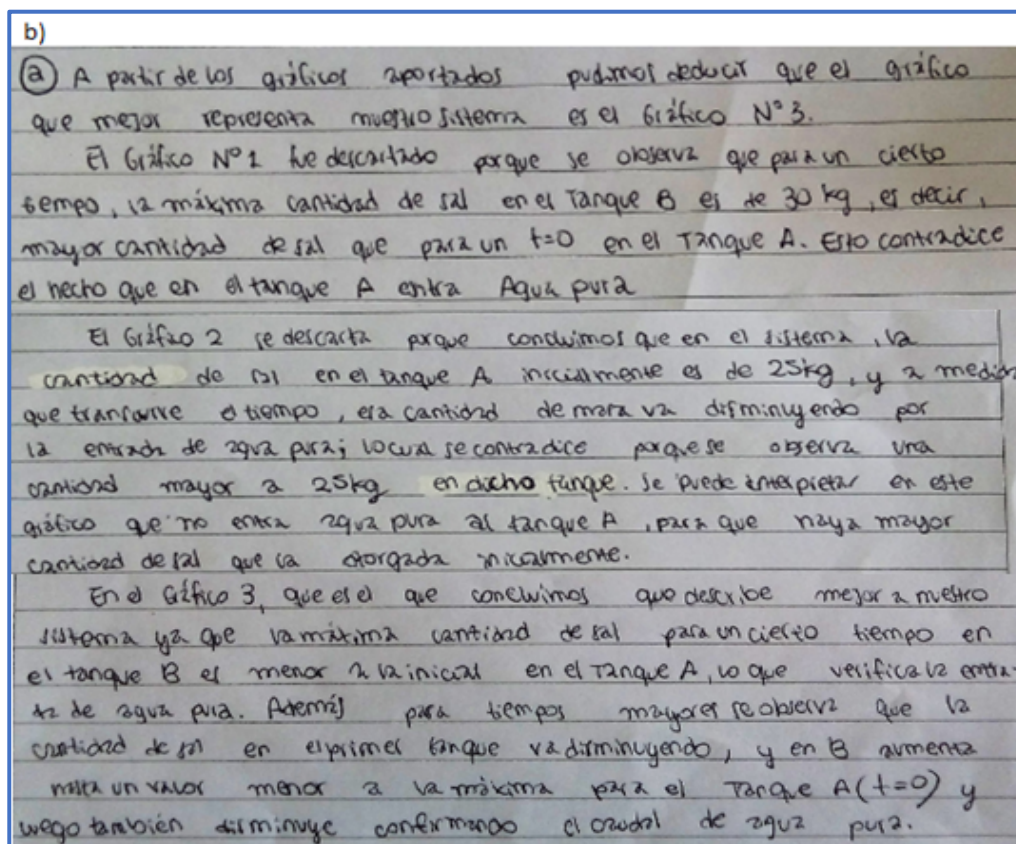


**Figura 10 a)** – Se menciona cantidad y concentración en el mismo párrafo con la misma identidad



Fuente: datos de la investigación, 2022

**Figura 10 b)** – Los 25 kg de sal iniciales, como elemento clave para el esbozo de argumentos.



Fuente: datos de la investigación, 2022

**Figura 10 c)** – A las cantidades de sal las considera como concentraciones

c)

① a) El gráfico N<sup>o</sup> 3 es el que representa a las cantidades de sal presentes en cada tanque, porque cuando el tanque A está en su máxima concentración el tanque B se encuentra en su mínima concentración.

Podemos observar que al cabo de un tiempo de 100. Se igualan las concentraciones, a partir de allí el tanque A disminuye su concentración teniendo la misma a 0, en un tiempo aproximadamente de 375, mientras que en ese mismo instante el tanque B llega su máxima concentración, para luego disminuir la concentración gradualmente hasta llegar aproximadamente a cero.

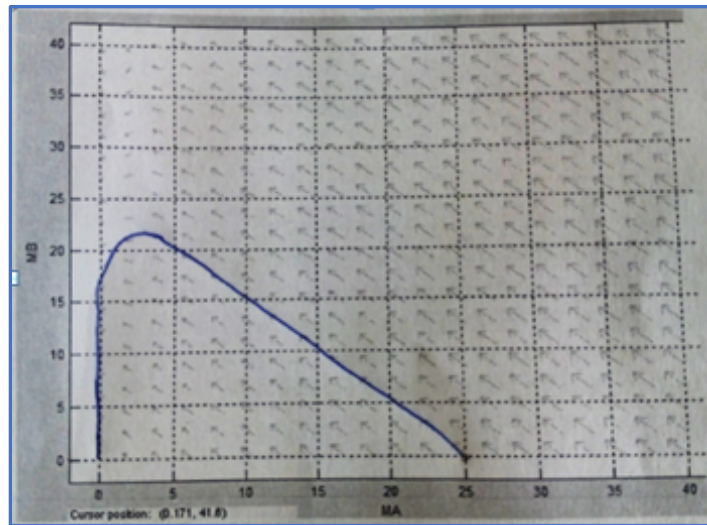
**Fuente:** datos de la investigación, 2022

En relación al ítem b), se detectó que 4 de los 8 grupos trazaron la curva trayectoria superando la cantidad máxima de sal alcanzada en el tanque B. En estos grupos se observa que no presentan dificultades para reconocer correctamente las condiciones iniciales y se respeta, en general, la tangencia de la curva solución a los vectores esbozados en el campo de direcciones. Tres de ellos, no describen el comportamiento de la sal en cada tanque, como se había solicitado en la consigna. Por tanto, se percibe que al considerar una cantidad superior a la que efectivamente se alcanza en el tanque B, tal como se analizó en el registro gráfico del ítem a), una falta de validación entre la información manejada en ambos ítems (Figura 11).

El resto de los grupos que trazó correctamente la curva solución, también lo hizo a mano sin ahondar en la descripción solicitada (Figura 12). Uno de ellos apeló al uso de un software, por lo que se entiende que previamente debe haber elaborado el modelo matemático, a pesar de que, en la presentación escrita, no lo muestran hasta el desarrollo del ítem c) (Figura 13).

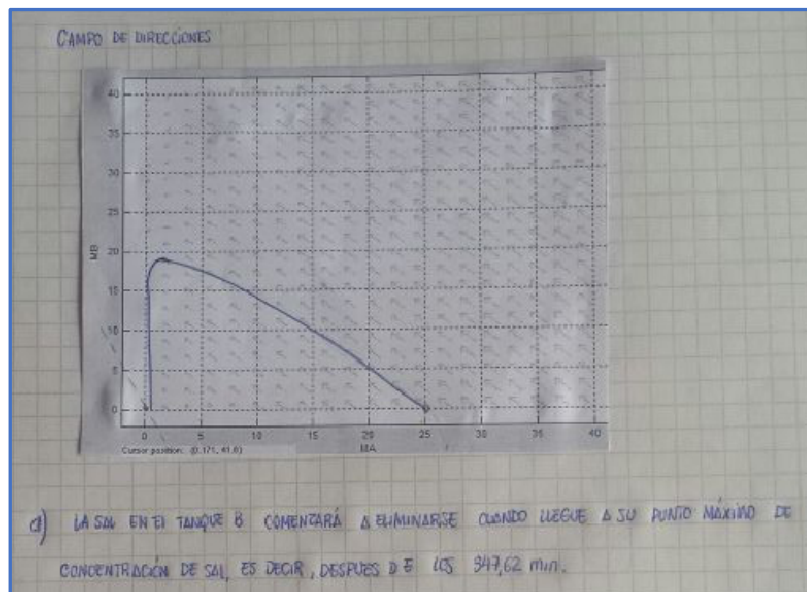


**Figura 11** – Curva trazada a mano tomando una cantidad superior a la que alcanza el tanque B.



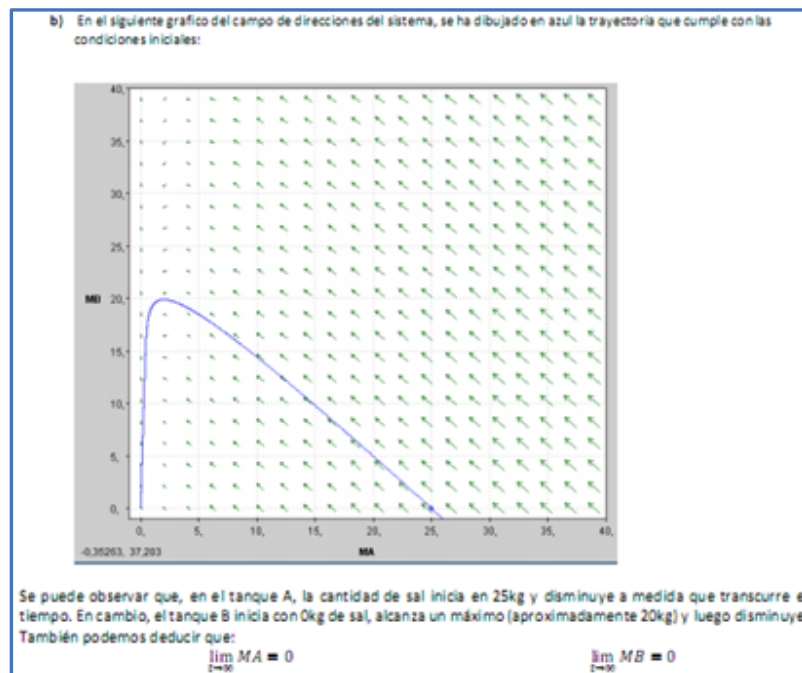
**Fuente:** datos de la investigación, 2022

**Figura 12** – Curva trazada correctamente y efectuada a mano



**Fuente:** datos de la investigación, 2022

Figura 13 – Curva trazada haciendo uso de un software



Fuente: datos de la investigación, 2022

En la última figura se visualiza cómo el grupo expresa que a largo plazo la cantidad sal en cada tanque tenderá a anularse, haciendo uso del límite de cada una de las funciones componentes.

Con respecto al ítem c), solo 1 de los ocho grupos no lo resolvió correctamente, ya que se interpretó que la cantidad máxima de sal en el tanque B ocurriría cuando las masas sean iguales para ambos tanques, tal como se visualiza en las Figuras 14 a) y b). Tanto el valor que hallan para  $t$  como para las masas  $M_A$  y  $M_B$  corresponden efectivamente al punto donde ambas cantidades son iguales, pero no es lo solicitado en el enunciado.

**Figura 14 a)** – Se igualan las masas de sal de cada tanque para determinar la cantidad máxima en el tanque B. b): Los valores hallados para las variables  $t$ ,  $M_A$  y  $M_B$

a) La cantidad máxima de sal en el tanque B se alcanza  $M_A(t) = M_B(t)$ , lo que quiere decir que en ambos tanques tendrán la misma masa

$$\frac{25}{38} e^{-5,8421 \cdot 10^{-4} t} + \frac{925}{38} e^{-8,21 \cdot 10^{-3} t} = \frac{925}{38} e^{-5,8421 \cdot 10^{-4} t}$$

$$- \frac{925}{38} e^{-8,21 \cdot 10^{-3} t}$$

b)

$t_{\text{máx}} = 94,5 \text{ min}$

Con este valor de  $t$  se reemplazamos en la ecuación general junto con los valores de  $M_A$  y  $M_B$

$$M_B(t_{\text{máx}}) = \frac{925}{38} e^{-5,8421 \cdot 10^{-4} t_{\text{máx}}} - \frac{925}{38} e^{-8,21 \cdot 10^{-3} t_{\text{máx}}}$$

$$M_B(94,5) = \frac{925}{38} e^{(-5,8421 \cdot 10^{-4} \cdot 94,5)} - \frac{925}{38} e^{(-8,21 \cdot 10^{-3} \cdot 94,5)}$$

$$M_B(94,5) = 23,026 - 11,205$$

$M_B(94,5) = 11,83 \text{ kg}$

$$M_A(94,5) = 9,62 + 11,20$$

$M_A(94,5) = 20,82 \text{ kg}$

Fuente: datos de la investigación, 2022

De los grupos que lo resolvieron correctamente, sólo uno de ellos dio la respuesta sin mostrar los procedimientos realizados para obtenerla. Los restantes, lo hicieron mediante la manipulación de la derivada, igualándola a cero. Por otra parte, se percibe que en algunos de ellos persiste la confusión entre el uso asignado a las magnitudes cantidad de sal y concentración cuando la descripción se realiza a través del registro verbal (Figura 15). Sin embargo, durante el armado del modelo matemático, distinguen claramente ambas magnitudes (Figura 16).

**Figura 15)** – El uso asignado a las magnitudes concentración y cantidad de sal en el registro verbal

Para responder las consignas c) y d) se hallan las funciones que describen la variación de sal en cada tanque a través del tiempo.

El problema en cuestión es uno de mezclas: en este caso hay una cantidad inicial de sal disuelta en agua en el tanque A que al transcurrir el tiempo fluirá hacia el tanque B desde el cual una parte fluirá hacia afuera del sistema y otra menor volverá al primer tanque. Se puede resolver mediante un sistema de ecuaciones diferenciales en el cual cada ecuación describa la concentración de sal en función del tiempo en uno de los tanques, y en conjunto representen al sistema en estudio. Se utilizan ecuaciones diferenciales ya que se trata de cambios en las concentraciones que se dan en el tiempo y para ello es necesario el uso de la derivada.

Fuente: datos de la investigación, 2022

**Figura 16** – El uso asignado a las magnitudes concentración y cantidad de sal en el registro simbólico

Se plantea un balance de masa en cada tanque teniendo en cuenta la entrada y salida de masa:

$$\Delta x = [\text{kilogramos de entrada}] - [\text{kilogramos de salida}]$$

donde  $x$  representa la masa de sal. La cantidad de masa se puede escribir como el producto de la concentración por el caudal por un  $\Delta t$  en el cual se evalúa el cambio. Entonces la ecuación anterior queda:

$$\Delta x \approx C_f Q_f \Delta t - C_i Q_i \Delta t$$


---

donde  $C_f, C_i$  son las concentraciones de sal y  $Q_f, Q_i$  los caudales de los flujos (final e inicial respectivamente). Dividiendo por  $\Delta t$ :

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \approx C_f Q_f - C_i Q_i$$

Y si se toma el límite cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$\frac{dx}{dt} = C_f Q_f - C_i Q_i$$

Donde la concentración es variable y se escribe como masa sobre volumen (cada una en función del tiempo). Entonces la ecuación anterior queda:

$$\frac{dx}{dt} = C_f Q_f - \frac{x}{V} Q_i$$

donde  $V$  es el volumen en función del tiempo, y si no es constante se debe escribir como:  $V(t) = V_0 - (Q_f - Q_i)t$ , donde  $V_0 = V(0)$ .

Fuente: datos de la investigación, 2022

Asimismo, en otro caso, se refleja confusión con la notación simbólica utilizada para escribir las derivadas ordinarias, mezclándola con la referida para derivadas parciales. Este grupo también incorpora la segunda derivada para asegurar que el valor hallado es un máximo, a diferencia de los demás grupos que sólo lo contrastan con el gráfico del ítem a). Esto último, se refleja en las Figuras 17 a) y b).

En cuanto al último ítem de este problema, en general, no se detectaron dificultades para asociar la velocidad de eliminación de la sal en cada tanque con la obtención de la derivada de cada función componente, evaluada en  $t = 500$  minutos. La mayoría de los grupos, excepto uno, derivó cada una de las funciones componentes y luego, evaluó la derivada en el valor de tiempo solicitado. Además, uno de ellos mencionó a cerca de cómo determinar en el gráfico de estas funciones, los valores obtenidos algebraicamente.

**Figura 17 a)** – Mezcla de notación simbólica para expresar la misma derivada ordinaria. **b)** Uso de la segunda derivada para hallar máximo.

**a)** Primero debemos hallar la ecuación que nos modela el sistema

$$\frac{\partial M}{\partial t} = M' = V_e - V_s \quad \left| \quad \begin{array}{l} V_e = Q_e \cdot C_e \\ V_s = Q_s \cdot C_s \end{array} \right.$$

donde  $V_e$  y  $V_s$  es la velocidad de entrada y de salida de sal.

Como tenemos 2 tanques, este análisis debe ser aplicado a ambos. Para ello definimos como  $x(t)$  a la cantidad de sal en función del tiempo en el tanque A, e  $y(t)$  como la cantidad de sal en función del tiempo en el tanque B, por lo tanto:

- Tanque A:
 
$$\frac{\partial x}{\partial t} = x' = V_{ea} - V_{sa}$$

$$x' = 1 \frac{l}{min} \cdot \frac{y(t)}{5000 l} - 4 \frac{l}{min} \cdot \frac{x(t)}{500 l}$$
- Tanque B:
 
$$\frac{\partial y}{\partial t} = y' = V_{eb} - V_{sb}$$

$$y' = 4 \frac{l}{min} \cdot \frac{x(t)}{500 l} - \left( 1 \frac{l}{min} \cdot \frac{y(t)}{5000 l} + 3 \frac{l}{min} \cdot \frac{y(t)}{5000 l} \right)$$

$$y' = \frac{1}{125} \frac{x(t)}{min} - \frac{1}{1250} \frac{y(t)}{min}$$

**b)** Para hallar cuanto sal habrá como máximo en el tanque B obtenemos los puntos críticos con la primera derivada y los analizamos con la segunda derivada

$$\frac{dy}{dt} = \frac{16686}{625} \cdot e^{(-5,84 \cdot 10^{-4}) \cdot t} \cdot (-5,84 \cdot 10^{-4}) - \frac{6688}{250} \cdot e^{(-8,22 \cdot 10^{-3}) \cdot t} \cdot (-8,22 \cdot 10^{-3}) = 0$$

$$0 = -0,01559 \cdot e^{(-5,84 \cdot 10^{-4}) \cdot t} + 0,2195 \cdot e^{(-8,22 \cdot 10^{-3}) \cdot t}$$

Resolviendo la ecuación, obtenemos que existe un punto crítico en  $t = 346,385$  min

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -0,01559 \cdot e^{(-5,84 \cdot 10^{-4}) \cdot t} \cdot (-5,84 \cdot 10^{-4}) + 0,2195 \cdot e^{(-8,22 \cdot 10^{-3}) \cdot t} \cdot (-8,22 \cdot 10^{-3})$$

Analizamos el signo de la segunda derivada en  $t = 346,385$  min y obtuvimos un valor negativo, lo cual no dice que para  $t = 346,385$  min tenemos un máximo. A continuación calculamos la cantidad de sal en el tanque B en ese instante:

$$y(346,385) = \frac{16686}{625} \cdot e^{(-5,84 \cdot 10^{-4}) \cdot 346,385} - \frac{6677}{250} \cdot e^{(-8,22 \cdot 10^{-3}) \cdot 346,385}$$

$$y(346,385) = 20,259 \text{ kg}$$

En ese mismo momento, en el tanque A habrá:

$$x(346,385) = \frac{18}{25} \cdot e^{(-5,84 \cdot 10^{-4}) \cdot 346,385} + 24,28 \cdot e^{(-8,22 \cdot 10^{-3}) \cdot 346,385}$$

$$x(346,385) = 1,996 \text{ kg}$$

Fuente: datos de la investigación, 2022



En otro grupo, en cambio se sustituyó  $M_A(500)$  y  $M_B(500)$  en el miembro derecho de cada una de las ecuaciones diferenciales del sistema, sin tener que realizar el cálculo de la primera derivada (Figura 18). Asimismo, como este grupo para el ítem anterior había considerado el máximo para el tanque B, a partir de la igualdad de las masas, la respuesta proporcionada al segundo interrogante no es correcta.

**Figura 18** – Se sustituye los valores  $M_A(500)$  y  $M_B(500)$  en las ecuaciones diferenciales del sistema

Posible determinarse a que velocidad se está eliminando  $V_B = \frac{dM_B}{dt}$   
 lo que en cada tanque para  $t = 500$  minutos  
 Una manera sencilla que tenemos para hallar la  
 velocidad es con la ecuación  $\frac{dM}{dt} = V$   
 Para hallar la velocidad de eliminación de sal  
 de cada tanque según  
 $V_A = \frac{dM_A}{dt}$   
 $V_A = \frac{-M_A(t)}{125} + \frac{M_B(t)}{500}$   
 $V_A = \frac{-1}{125} \left( \frac{925}{38} e^{-5,8421 \cdot 10^{-4} \cdot 500} - \frac{925}{38} e^{-8,2 \cdot 10^{-3} \cdot 500} \right) +$   
 $\frac{1}{500} \left( \frac{925}{38} e^{-5,8421 \cdot 10^{-4} \cdot 500} - \frac{925}{38} e^{-8,2 \cdot 10^{-3} \cdot 500} \right)$   
 $V_A = -\frac{1}{125} (18,178 + 0,40) + \frac{1}{500} (18,17 - 0,4014)$   
 $V_A = -0,4 \text{ kg/min}$   
 $V_B = \frac{M_A(t)}{125} - \frac{M_B(t)}{500}$   
 $V_B = \frac{1}{125} \left( \frac{25}{38} e^{-5,8421 \cdot 10^{-4} \cdot 500} + \frac{925}{38} e^{-8,2 \cdot 10^{-3} \cdot 500} \right) -$   
 $\frac{1}{500} \left( \frac{925}{38} e^{-5,8421 \cdot 10^{-4} \cdot 500} - \frac{925}{38} e^{-8,2 \cdot 10^{-3} \cdot 500} \right)$   
 $V_B = -7,082 \cdot 10^{-3} \text{ kg/min}$   
 En  $t = 500$  minutos los velos críticos de  
 de sal de cada tan que son:  
 $V_A = 0,4 \text{ kg/min}$   
 $V_B = 7,082 \cdot 10^{-3} \text{ kg/min}$   
 En el tanque B comienza a eliminarse sal apenas de  
 los 95 minutos aproximadamente. Es el instante después que  
 en dicho tanque dejó de ser igual la masa que en  
 el tanque A.  
 Al inicio hay solo masa de sal en el tanque A,  
 empieza a circular agua limpio, y es cuando la masa  
 inicia comienza a desplazarse hacia el tanque B. Por  
 un periodo de tiempo hasta que las masas son iguales  
 en ambos tanques (no sale agua con sal del  
 tanque B). En el momento que empieza a salir agua  
 con sal del tanque B es el momento que sistema dejó  
 de ser constante y como va sacando más la masa en A

Fuente: datos de la investigación, 2022

### Reflexiones que derivan de la confrontación entre el análisis a priori y el análisis a posteriori

Si bien se inició con dos consignas que partían del registro gráfico, y se incentivaba a que se genere la descripción verbal del comportamiento de la sal en ambos tanques, tanto del par de gráficos de las funciones componentes, como de la curva solución en el campo de direcciones, la conversión hacia el registro algebraico como paso previo, emergió de todos modos. Esto surgió ya sea para seleccionar la respuesta o para verificar la elección realizada en el ítem a). Por otra parte, se notó que los estudiantes no se percataron de las consistencias que debían guardar las respuestas dadas para el primer registro gráfico, y para la curva solución

trazada en el plano fase, ya que en algunos casos se reveló que la curva trazada en el plano fase no coincidía con la descripción dada anteriormente.

Se percibió que, en esta oportunidad, a diferencia de lo surgido en la prueba piloto (descrita en un trabajo previo), no hubo errores ligados con la tangencia de la curva solución y los vectores del campo de direcciones. Este aspecto también ha sido señalado en una propuesta sobre ecuaciones diferenciales autónomas desarrollada con alumnos de las mismas carreras en años anteriores (ZANG; FERNÁNDEZ von METZEN; LEÓN, 2013).

En cuanto al ítem c), en general se apeló al uso de la primera derivada de las funciones componentes de la solución del PVI, pero desde el registro escrito de lo realizado por los estudiantes (entregado a la cátedra), no se evidencia si lo hallado para este ítem se constató con lo previamente efectuado en los ítems anteriores.

Finalmente, el ítem d) si bien se resolvió haciendo uso del registro algebraico tal como se había anticipado en el análisis a priori, sólo uno de los grupos mencionó la relación existente entre lo obtenido en ese registro y a su visualización en el registro gráfico dado en el ítem a). No se señaló nada acerca de la relación entre las componentes del vector tangente a la curva solución y las derivadas evaluadas en  $t = 500$ , por lo que no se tiene certeza para aclarar si en los alumnos ese vínculo entre ambos registros, pudo ser percibido como tal o no.

## REFLEXIONES FINALES

La implementación de esta propuesta, promovió en los estudiantes una forma de trabajo diferente a la emprendida habitualmente en las clases de matemática. Asimismo, distinta de la descrita en un trabajo previo (prueba piloto) realizada bajo la modalidad de taller con estudiantes del Profesorado en Matemáticas. El hecho de ser un trabajo domiciliario, posibilitó que los alumnos logren hacer continuas reelaboraciones sobre el objeto matemático involucrado y por tanto, a explorar diferentes alternativas de solución, a elaborar argumentos que den cuenta de las acciones realizadas sin perder de vista el contexto en el que se halla inmerso el problema, a incorporar notación simbólica más precisa y elegante para el armado de modelos matemáticos, en relación a la que podría ponerse en juego bajo la modalidad de taller. Se cree que estas diferencias podrían deberse principalmente a las limitaciones que envuelve el factor tiempo.

En virtud de las modificaciones realizadas a la prueba piloto, en esta oportunidad no se observó prevalencia hacia el tratamiento escalar en detrimento del vectorial, centrales en el estudio formal de los sistemas de ecuaciones diferenciales. Se considera que las modificaciones



introducidas fueron atinadas en función de los objetivos propuestos. No obstante, no se cuenta con evidencia suficiente para proporcionar una respuesta al interrogante surgido acerca de si los estudiantes logran contrastar las conclusiones obtenidas en un registro con las emanadas de otro registro. Este aspecto se cree que sería conveniente propiciar en los estudiantes porque funcionaría además como un mecanismo de validación de sus producciones.

La preferencia de los estudiantes por los métodos analítico-algebraicos, que se manifiesta en la conversión realizada hacia el registro simbólico-algebraico del modelo matemático formal, está en consonancia con los resultados obtenidos por otros investigadores (ARTIGUE, 1995; HABRÉ, 2003). Esta misma tendencia se observó en un trabajo previo sobre ecuaciones diferenciales de primer orden realizado por los autores del presente documento (ZANG; FERNÁNDEZ von METZEN; LEÓN, 2013).

La desventaja de esta metodología de trabajo (TPGD) es que se perdió acceso a las resoluciones que fueron descartadas por ser consideradas erróneas y, en consecuencia, al paso a paso de las continuas elaboraciones y reelaboraciones realizadas por los estudiantes en relación al conocimiento en cuestión. Es decir, las producciones escritas presentadas por los estudiantes dan cuenta sólo del producto final y no del proceso seguido para obtenerlo.

Se deriva de este trabajo, la importancia que tendría para la enseñanza el llevar un registro sistemático de las consultas que realizan los estudiantes durante el trabajo domiciliario, que de cuenta de las continuas elaboraciones y reelaboraciones realizadas. Dicho registro podría ofrecer herramientas para caracterizar la evolución de los conocimientos en los estudiantes y serviría para lograr una evaluación integral y no como mero proceso de acreditación.

## REFERENCIAS

ANDER-EGG, Ezequiel. **Métodos y Técnicas de investigación social**, Vol. III: Cómo organizar el trabajo de investigación. Editorial Lumen, España, 2010.

ARTIGUE, Michele. Ingeniería Didáctica. En ARTIGUE, Michel; DOUADY, Régine; MORENO, Luis y GÓMEZ, P. (Ed.), **Ingeniería Didáctica para la Educación Matemática**. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, Grupo Editorial Iberoamérica, México, p. 33-59, 1995.

BARDIN, Laurence. **El análisis de contenido**. Editorial Akal, Madrid, 1996.

BLANCHARD, Paul; DEVANEY, Robert y HALL, Glen. **Ecuaciones diferenciales**. Editorial Thomson, México, 1998.

DUVAL, Raymond. Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas. En DUVAL, Raymond; SÁENZ, Adalira (Eds.), **Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas**. Editorial Énfasis. Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas, p. 61-94, 2016.

DUVAL, Raymond. **Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales** (VEGA, M., Trad.), Universidad del Valle, Cali, 1999.

HABRE, Samer. Investigating students' approval of a geometrical approach to differential equations and their solutions. **International Journal of Mathematical, Educations in Science and Technology**, v. 35, n. 5, p. 651-662, 2003.

FERNÁNDEZ von METZEN, G. A.; LEÓN, M. N.; ZANG, C. M. Análisis de una experiencia didáctica para la enseñanza y aprendizaje de sistema de ecuaciones diferenciales lineales. Unión - **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, v. 17, n. 61, p. e003, 2021.

ZANG, C. M.; FERNÁNDEZ von METZEN, G. A.; LEÓN M. N. Aportes para la evaluación de las prácticas de enseñanza y aprendizaje de ecuaciones diferenciales de primer orden. **Revista Premisa**, v.56, p. 29-40, 2013.

ZILL, Dennis. **Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado**. Editorial Thomson, México, 2007.